Einführung in die Grundlagen der Numerik

Winter semester 2019/2020
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Denis Düsseldorf

universitätbonn

Übungsblatt 1.

Abgabe: 22.10.2019 vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (Skalarprodukte, Gramsche und positiv-definite Matrizen)

Es sei X ein reeller n-dimensionaler Raum. Gegeben seien zwei Skalarprodukte (auch 'innere Produkte' genannt) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $[\cdot,\cdot]$ auf X und eine Basis $\{g_1,\dots,g_n\}$ von X. Ferner seien $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_n)^T$ und $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)^T$ zwei Vektoren. Zeigen Sie:

a) Die *Gramsche Matrix* $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zum Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, mit

$$\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i, \sum_{i=1}^{n}\beta_i g_i\rangle = \alpha^T G\beta$$

ist eindeutig definiert, symmetrisch und positiv-definit.

b) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i, \sum_{i=1}^{n}\beta_i g_i\rangle = (A\alpha)^T(A\beta).$$

c) Es gibt eine lineare Abbildung $S \in \mathcal{L}(X,X)$ mit

$$[x,y] = \langle Sx, y\rangle.$$

Die Abbildung S ist invertierbar.

d) Es gibt eine lineare Abbildung $T \in \mathcal{L}(X,X)$ mit

$$[x,y] = \langle Tx, Ty\rangle.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2. (Gerade und ungerade polynome)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst

$$\begin{aligned} \text{gerade, falls} \quad & f(x) = f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{ungerade, falls} \quad & f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}^n[-a,a]$ den Raum der Polynome bis zum Grad n auf $[-a,a]$. Es sei $\omega(x)$ eine gerade, nicht-negative Funktion (Gewichtsfunktion). Dann ist ein inneres Produkt auf $\mathcal{P}^n$ gegeben durch

$$\langle f,g\rangle := \int_{-a}^{a} f(x)g(x)w(x)\,dx, \quad \forall f,g \in \mathcal{P}_n[-a,a].$$

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\mathcal{G}^n = \{f \in \mathcal{P}^n[-a,a] : f \text{ gerade}\}$$

und

$$\mathcal{U}^n = \{f \in \mathcal{P}^n : g \text{ ungerade}\}$$

Untervektorräume von $\mathcal{P}^n[-a,a]$ definiert sind. Zeigen Sie ausserdem, dass

$$f \perp_{\langle\cdot,\cdot\rangle} g = 0, \quad \forall f \in \mathcal{U}^n \,\forall g \in \mathcal{G}^n.$$

b) Zeigen Sie, dass die Gramsche Matrix G^n zum Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Blockdiagonalgestalt hat, wenn wir die Monome aus $\mathcal{P}^n$ so anordnen, dass zuerst die geraden und dann die ungeraden kommen, also

$$\begin{bmatrix} b_0 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^2 & x^4 & \dots & x & x^3 & \dots \end{bmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die Gramsche Matrix mit der Umordnung der Monombasis wie in b) für $a = 1, n = 4, \omega \equiv 1$.

(3 Punkte)

Aufgabe 3. (Gram-Schmidt und QR Zerlegung)

> **Hinweis:** Die QR Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Zerlegung der Form
> $$A = Q\,R,$$
> wobei Q eine orthogonale Matrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist. Die QR Zerlegung existiert auch für komplexe Matrizen. In diesem Fall ist Q eine unitäre Matrix.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix mit den Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Mit $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die durch das Gram-Schmidt-Verfahren gewonnene Orthonormalbasis, d.h.

$$\tilde{q}_j = a_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle a_j, q_k\rangle q_k, \quad \text{und } q_j = \frac{1}{\|\tilde{q}_j\|_2}\tilde{q}_j, \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

a) Es sei $R = [r_{i,j}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die obere Dreiecksmatrix mit

$$r_{i,j} = \begin{cases} \langle a_j, q_i\rangle, & \text{für } i < j \\ \|\tilde{q}_j\|_2, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass R bereits die obere Dreiecksmatrix aus der QR Zerlegung von A ist, d.h. dass $A = QR$ gilt.

b) Die vorherige Beschreibung liefert Ihnen einen konstruktiven Algorithmus zur Berechnung der QR Zerlegung. Benutzen Sie ihn, um die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

zu berechnen.

(2 Punkte)

Aufgabe 4. (Gram-Schmidt-Verfahren)

Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren ausgehend von der Monombasis $1, x, x^2$ von $\mathcal{P}^2$ auf $[0,1]$ eine Orthonormalbasis zum Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f g \, dx, \quad \forall f, g \in \mathcal{P}^3.$$

(2 Punkte)