Einführung in die Grundlagen der Numerik

Winter semester 2019/2020
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Denis Düsseldorf

universitätbonn

Übungsblatt 11.

Abgabe: 07.01.2019 vor der Vorlesung

Auf diesem Blatt finden Sie ein Überangebot an Aufgaben! Bitte geben Sie maximal 4 davon zur Korrektur durch die Übungsleiter*innen ab.

Aufgabe 26. (Givens Rotationen)

a) Zeigen Sie, dass jede reelle, orthogonale 2×2 Matrix Q die Form

$$Q_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad \text{oder } Q_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ so dass $a^2 + b^2 = 1$ gilt, hat.

b) Aus der Identität $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ für $\alpha \in [0, 2\pi)$ folgt, dass es genau ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ gibt, mit

$$a = \cos \alpha, \quad b = \sin \alpha,$$

d.h. die orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ aus a) haben die Form

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \text{or } Q_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Skizzieren Sie Abbildungen $T_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Q_i x$ für $i = 1, 2$.

c) Es sei

$$Q(a, b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1.$$

Zeigen Sie, dass es zu einem beliebigen Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ eine Matrix $Q(a, b)$ gibt, so dass

$$Q(a, b)u = ce_1,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Geben Sie a, b in Abhängigkeit von u und c an. Nutzen Sie anschließend die Freiheit in der Wahl von c, um die Bedingungen

$$a = \cos \alpha, \quad b = \sin \alpha$$

für ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ zu erfüllen.

d) **Generalisieren Sie die Idee aus c)**: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix und $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, $k \leq \ell$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Definiere die Matrix

$$[Q^{k,\ell}]_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ wenn } i \neq k, j \neq \ell \\ a, & i = j = k \text{ oder } i = j = \ell \\ -b, & i = k, j = \ell \\ b, & i = \ell, j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Matrix $Q^{k,\ell}$ orthogonal ist. Interpretieren Sie die durch diese Matrix beschriebene lineare Abbildung $x \mapsto Q^{k,\ell}x$ geometrisch.

e) Welche Zerlegung von A kann mittels dieser Transformationen konstruiert werden? Wie müssen hierzu die Einträge a und b der einzelnen Matrizen $Q^{k,\ell}$ gewählt werden?

(3 Punkte)

Aufgabe 27. (Krylovräume)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Der k-te Krylovraum zu A und b sei definiert als

$$\mathcal{K}^k(A,b) = \mathrm{span}\{b, Ab, \dots, A^{k-1}b\}.$$

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des Gleichungsssystems $Ax = b$.
Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

(1) Die Vektoren $b, Ab, \dots, A^k b$ sind linear abhängig.

(2) Es gilt $\mathcal{K}^k(A,b) = \mathcal{K}^{k+1}(A,b)$

(3) Es gilt $A\mathcal{K}^k(A,b) \subset \mathcal{K}^k(A,b)$

(4) Es existiert ein linearer Unterraum $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ für den gilt $\dim\mathcal{M} \le k$, $b \in \mathcal{M}$ und der invariant bezüglich A ist.

(5) Es gilt $x \in \mathcal{K}^k(A,b)$.

Tipp: Zeigen Sie die Äquivalenzen in der Reihenfolge (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) und (1) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1).

(3 Punkte)

Aufgabe 28. (Gerschgorin und Eigenwerte)

Es seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & -0.1 \\ 0.2 & 2 & 0 \\ 0 & -0.4 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}, \quad \text{für ein } 0 \neq s \in \mathbb{R}.$$

Wenden Sie den Satz von Gerschgorin auf A an, d.h. geben Sie die Gerschgorin-Kreise an. Die Transformation $A \mapsto D^{-1}AD$ lässt die Eigenwerte der Matrix unverändert. Verbessern Sie Ihre Abschätzung für den Eigenwert der im Gerschgorin-Kreis um 1 liegt mit dieser Transformation. Geben Sie außerdem den Wert für s an, der dazu führt, dass der Kreis um 1 und der Kreis um 2 sich berühren.

(3 Punkte)

Aufgabe 29. (QR Zerlegung)

Berechnen Sie mit Hilfe von Householder Spiegelungen die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sie müssen die Matrix Q nicht explizit ausrechnen aber eine Darstellung angeben.

(3 Punkte)

Aufgabe 30. (Jacobi und Gauss-Seidel Verfahren)

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Betrachten Sie das Jacobi und das Gauss-Seidel Verfahren zum Lösen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie die Iterationsmatrizen der beiden Verfahren, sowie deren Spektralradius an. Für welche Werte von a konvergieren die Verfahren jeweils?

(3 Punkte)

Aufgabe 31. (Energiefunktional)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv-definite und symmetrische Matrix, und $b \in \mathbb{R}^n$. Das Energiefunktional $\mathcal{E}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(x) := \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle x, b\rangle,$$

wobei $\langle x, y\rangle = x^T y$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass jedes Minimum von $\mathcal{E}$ des Energiefunktionals die Gleichung $Ax = b$ erfüllt.

(3 Punkte)

Aufgabe 32. (Eigenwerte von Rotationsmatrizen)

Es sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

eine orthogonale Matrix ist. Bestimmen Sie ggf. vorhandene (reelle / komplexe) Eigenwerte in Abhängigkeit von α und deuten Sie geometrisch, was reelle Eigenwerte bedeuten.

(3 Punkte)

Aufgabe 33. (Eigenwerte komplexer Tridiagonalmatrizen)

Gegeben seien die komplexen Tridiagonalmatrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & c_2 & & 0 \\ b_2 & d_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_n \\ 0 & & b_n & d_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -d_1 & c_2 & & 0 \\ b_2 & -d_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_n \\ 0 & & b_n & -d_n \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass λ genau dann ein Eigenwert der Matrix A ist, wenn $-\lambda$ ein Eigenwert der Matrix B ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 34. (Strikt normierte Räume)

Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathcal{C}[a, b]$ der stetigen Funktionen zusammen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ nicht strikt konvex ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 35. (Kondition und lineare Gleichungssysteme)

Es seien die beiden folgenden Matrizen gegeben.

$$A = \begin{bmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 101 & 99 \\ -99 & 101 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Konditionszahlen $\mathrm{cond}_\infty(A)$ und $\mathrm{cond}_\infty(B)$.

b) Berechnen Sie für die Vektoren

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta b = \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \end{bmatrix}, \quad \delta\tilde{b} = \begin{bmatrix} \delta \\ -\delta \end{bmatrix}$$

mit einer kleinen reellen Zahl $\delta > 0$ die Lösungen der Gleichungsssysteme

$$Ax = b, \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b, \quad A(x + \Delta\tilde{x}) = b + \Delta\tilde{b}.$$

c) Die folgende allgemeine Fehlerabschätzung gilt:

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \operatorname{cond}_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}. \tag{*}$$

Berechnen Sie die relativen Fehler

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \quad \text{und} \quad \frac{\|\Delta \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

und bewerten Sie die Güte der allgemeinen Abschätzung (*) in beiden Störungsfällen $b \mapsto b + \Delta b$ und $b \mapsto b + \Delta \tilde{b}$.

(3 Punkte)

Aufgabe 36. (Arnoldi Verfahren)

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, der Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $k \in \mathbb{N}, k \leq n$ seien gegeben. Es sei angenommen, dass das Arnoldi-Verfahren nicht vorzeitig abbricht. Zeigen Sie, dass die Spalten $q_1, \ldots, q_k$ von Q_k aus dem Arnoldi-Verfahren eine Orthonormalbasis des Krylovraums

$$\mathcal{K}_k := \operatorname{span}\{v, Av, \ldots, A^{k-1}v\}$$

bilden.

(3 Punkte)

Aufgabe 37. (Rayleigh-Quotient und Eigenwerte)

Es sei $A \in \mathbb{K}$ eine symmetrische (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesche Matrix (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Die Eigenwerte von A seien aufsteigend sortiert, also $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Mit X_j bezeichnen wir die j dimensionalen Unterräume von $\mathbb{K}^n$, für $j = 1, \ldots, n$.
Zeigen Sie, dass die folgende obere Schranke zur Abschätzung der Eigenwerte gilt:

$$\min_{X \in X_k} \max_{x \in X, x \neq 0} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_k.$$

(3 Punkte)