

# Eine ortsadaptive Dünngitterkombinationstechnik und ihre Anwendungen in der Finanzmathematik

Diplomarbeit

vorgelegt von **Daniil Gefen**  
am 30. Juni 2014

am Mathematischen Institut der  
Universität zu Köln

Erstgutachter: Prof. Dr. Ulrich Trottenberg





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Optionen und ihre Bewertung</b>	<b>4</b>
2.1	Optionstypen . . . . .	4
2.1.1	Standard-Optionen . . . . .	4
2.1.2	Exotische Optionen . . . . .	6
2.2	Grundlagen der Optionsbewertung . . . . .	7
2.2.1	Motive für den Handel mit Optionen . . . . .	7
2.2.2	Strukturaussagen . . . . .	8
2.3	Black-Scholes-Modell . . . . .	12
2.3.1	Stochastische Hilfsmittel . . . . .	12
2.3.2	Modellannahmen . . . . .	14
2.3.3	Black-Scholes-Gleichung . . . . .	15
2.3.4	Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	17
2.4	Mehrdimensionales Black-Scholes-Modell . . . . .	18
2.4.1	Mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung . . . . .	18
2.4.2	Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Numerische Grundlagen</b>	<b>21</b>
3.1	Sobolevräume und Variationsformulierung von Randwertaufgaben . . . . .	21
3.2	Diskretisierung in Ort und Zeit . . . . .	23
3.2.1	Finite Elemente . . . . .	23
3.2.2	Finite Differenzen . . . . .	25
3.2.3	Zeitliche Diskretisierung . . . . .	27
3.3	Dünne Gitter und die Kombinationstechnik . . . . .	28
3.3.1	Nodale und Hierarchische Basis in einer Dimension . . . . .	28
3.3.2	Nodale und Hierarchische Basis im d-dimensionalen Raum . . . . .	30
3.3.3	Interpolation und Interpolationsfehler im Vollgitterraum $V_n$ . . . . .	34

3.3.4	Dünne Gitter . . . . .	36
3.3.5	Zusammenfassung und Fazit . . . . .	37
3.3.6	Kombinationstechnik . . . . .	38
3.3.7	Verallgemeinerte Kombinationstechnik . . . . .	39
3.3.8	Kombinationstechnik für zeitabhängige Probleme . . . . .	42
3.3.9	Adaptive Kombinationstechnik . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Aspekte der Implementierung</b>	<b>53</b>
4.1	Datenstruktur für dünne Gitter . . . . .	53
4.2	Adaptionsstrategie . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>57</b>
5.1	Erster Test . . . . .	57
5.2	Zweiter Test . . . . .	61
5.3	Dritter Test . . . . .	64
5.4	Vierter Test . . . . .	67
5.5	Fünfter Test . . . . .	71
5.6	Zusammenfassung . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Fazit</b>	<b>75</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>77</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Zahlreiche Aufgabenstellungen aus den Ingenieur- und Naturwissenschaften, sowie auch viele Problemstellungen aus dem Bereich der Finanzwissenschaft können durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Eine wichtige Anwendung aus dem Finanzbereich stellt dabei die Bewertung von Optionen dar, also die Bestimmung des sogenannten *fairen Preises* einer Option auf einen oder mehrere zugrundeliegende Basiswerte, wie z.B. Aktien.

Optionen gehören zu der Familie der Finanzderivate und können sowohl zur Absicherung von finanziellen Transaktionen, als auch zur Spekulation genutzt werden. Ihre Geschichte lässt sich bis in die Niederlande des 17. Jahrhunderts zurückverfolgen, wobei sie in den 70er Jahren des 20. Jahrhunderts eine rasante Entwicklung durchlebten und so aus der heutigen Finanzwelt nicht mehr wegzudenken sind. Im Laufe der Jahre gab es einige Versuche, wie z.B. die Arbeit von Bachelier [Bac00], ein geeignetes mathematisches Modell zur Bewertung von Optionen aufzustellen. Der entscheidende Durchbruch in dieser Frage gelang 1973 F. Black und M. Scholes mit der Arbeit [BS73], sowie unabhängig davon R. Merton. Unter bestimmten Anforderungen an den Finanzmarkt entwickelten sie eine partielle Differentialgleichung, die sogenannte *Black-Scholes-Gleichung*, die der faire Preis einer Option erfüllt. Die Black-Scholes-Gleichung kann dabei sowohl für Optionen mit nur einem zugrundeliegenden Basiswert, als auch für Optionen auf mehrere Basiswerte, die sogenannten *Basket-Optionen*, aufgestellt werden. Die Anzahl der der Option zugrundeliegenden Basiswerte wird dabei als Dimension der Option bezeichnet. Für eine (europäische) Option auf nur einen Basiswert besitzt die Black-Scholes-Gleichung eine analytische Lösung, welche als Black-Scholes-Formel bezeichnet wird. Um den Preis einer Basket-Optionen zu bestimmen, muss jedoch die mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung mittels geeigneter numerischer Verfahren ermittelt werden. Zur Vereinfachung der Problemstellung kann die Black-Scholes-Gleichung für beliebige Dimensionen  $d \in \mathbb{N}$  zuerst auf die Form der Wärmeleitungsgleichung transformiert werden. Verschiedene Möglichkeiten einer solchen Transformation sind zum Beispiel in der Arbeit von Reisinger [Rei04] und in der Arbeit von Mertens [Mer05], wo der Ansatz von Seydel [Sey00] auf mehrere Dimensionen erweitert wird, zu finden.

Um eine partielle Differentialgleichung numerisch lösen zu können, muss sie auf einem Gitter diskretisiert werden, wodurch ein zu lösendes, lineares Gleichungssystem entsteht. Zu Diskretisierung hat man dabei mehrere Möglichkeiten zur Auswahl, so können dazu Finite-Elemente-Methoden oder auch Finite-Differenzen-Methoden genutzt wer-

den. Geht man dabei von einem  $d$ -dimensionalen Gebiet und einem äquidistanten Diskretisierungsgitter, bzw. *Vollgitter*, mit einer Maschenweite  $h$  aus, so besitzt dieses Gitter  $\mathcal{O}(h^{-d})$  Punkte. Die Genauigkeit der Näherungslösung einer partiellen Differentialgleichung beträgt dabei, unter geeigneten Voraussetzungen,  $\mathcal{O}(h^2)$ . Um die Genauigkeit der Näherungslösung zu erhöhen, muss also das Diskretisierungsgitter verfeinert werden, was eine Verkleinerung der Maschenweite  $h$  bedeutet. Bei einem kleinen  $h$  und der steigenden Dimension  $d \geq 3$  des Problems, also bei den sogenannten hochdimensionalen Aufgabenstellungen, erreicht die Speicherkapazität und die zur Verfügung stehende Rechenzeit der heutigen Computer ihre Grenzen. Dieses Phänomen nennt man auch den „*Fluch der Dimensionen*“ und es ist gleichzeitig auch die Motivation zur Suche nach anderen Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen, die dieses Problem umgehen.

Eine Möglichkeit die Anzahl der Freiheitsgrade, also der Gitterpunkte und damit auch die Dimensionsabhängigkeit zu verringern, ohne dabei deutlich an Lösungsgenauigkeit zu verlieren, bieten die sogenannten *dünnen Gitter*, die von Zenger in [Zen90] eingeführt und später in mehreren Arbeiten, unter anderem auch von Bungartz in [Bun92], untersucht wurden. Diese besitzen  $\mathcal{O}(h^{-1} \log(h^{-1})^{d-1})$  Punkte und bringen dabei eine Genauigkeit von  $\mathcal{O}(h^2 \log(h^{-1})^{d-1})$  mit sich. Die dünnen Gitter benötigen also für eine leicht geringere Lösungsgenauigkeit eine deutlich geringere Anzahl an Gitterpunkten, was besonders bei steigenden Dimensionen  $d \in \mathbb{N}$  sichtbar wird und damit entscheidende Vorteile mit sich bringt.

Ein weiterer Ansatz um den „*Fluch der Dimensionen*“ zu umgehen, besteht in der auf der Idee der dünnen Gitter basierenden, *Kombinationstechnik*, die in der Arbeit von Griebel [GSZ92] eingeführt wurde. Dabei wird das gegebene Problem nicht auf einem einzelnen, feineren Vollgitter, sondern auf mehreren, gröberen Gittern mit unterschiedlichen Maschenweiten in den verschiedenen Raumrichtungen, gelöst. Anschliessend werden die einzelnen Grobgitterlösungen nach einer speziellen Vorschrift miteinander kombiniert, wodurch eine Dünngitterlösung, die sogenannte Kombinationslösung, entsteht. Die Summe der Gitterpunkte der einzelnen groben Gitter ist dabei wesentlich kleiner als die Anzahl der Gitterpunkte des feinen Vollgitters, wobei die Genauigkeit der Kombinationslösung unter bestimmten Voraussetzungen, die im Laufe dieser Arbeit vorgestellt werden, der Genauigkeit der Dünngitterlösung entspricht. Ein weiterer Vorteil der Kombinationstechnik ist ihre einfache und intuitive Parallelisierbarkeit, da die einzelnen Grobgitterlösungen unabhängig voneinander berechnet werden können.

Eine weitere Möglichkeit die Anzahl der Gitterpunkte zu reduzieren, besteht in der Verwendung eines *adaptiven* Verfahrens. Auch wenn die betrachtete Funktion nicht hinreichend glatt ist, ist die Verwendung eines adaptiven Verfahrens vorteilhaft. Dabei werden, im Gegensatz zu regulären dünnen Gittern, zusätzliche Gitterpunkte nur dort eingesetzt, wo sie auch tatsächlich gebraucht werden. Das heißt also nur an den Stellen, die den Gesamtfehler reduzieren. Im Bezug auf die hier bereits erwähnten Optionspreisaufgaben wurde in der Arbeit von Heineke [Hei11] festgestellt, dass reguläre dünne Gitter an den „kritischen“ Stellen zu wenig Punkte aufweisen, so dass dort der Einsatz von adaptiven Dünngitterstrukturen sinnvoll ist.

In der vorliegenden Arbeit liegt das Augenmerk jedoch nicht auf der Lösung von partiellen Differentialgleichungen, sondern auf der Interpolation von Funktionen. Nichts desto trotz werden auch alle, zur Lösung von bei der Simulation von Optionspreisaufgaben

entstehenden partiellen Differentialgleichungen, notwendigen numerischen Werkzeuge beschrieben.

Auch bei der Interpolation hinreichend glatter Funktionen stellen die, bereits vorgestellten, dünnen Gitter, sowie die darauf basierende Kombinationstechnik ein Konzept zur Reduzierung des benötigten Speicheraufwandes dar. So benötigt die Interpolation auf einem dünnen Gitter einen deutlich geringeren Speicheraufwand, als auf einem entsprechenden vollen Gitter, wobei die Genauigkeit annähernd gleich bleibt.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In **Kapitel 2** wird dem Leser ein Überblick über die Optionspreistheorie gegeben. Dabei werden notwendige Definitionen, sowie Modelle zur Bewertung von Optionen, vorgestellt. Weiterhin wird eine Möglichkeit präsentiert, wie die entstandene Black-Scholes-Gleichung, für die Vereinfachung der Diskretisierung, auf die Form der Wärmeleitungsgleichung transformiert werden kann. **Kapitel 3** liefert wichtige numerische Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen und stellt dem Leser die dünnen Gitter, sowie die daraufbasierende reguläre Kombinationstechnik und die adaptive Kombinationstechnik, die in [NH00] vorgestellt und untersucht wurde, vor. Zusätzlich wird auch die, zur Behandlung zeitabhängiger Probleme entwickelte, Kombinationstechnik in diesem Kapitel vorgestellt. In **Kapitel 4** wird eine effiziente Datenstruktur zur Darstellung von Funktionen auf einem dünnen Gitter, nach der Arbeit von Bungartz [Bun92], vorgestellt, sowie die Strategie zum Aufbau einer geeigneten adaptiven Struktur erläutert. Die reguläre und die adaptive Kombinationstechnik, die in Kapitel 3 vorgestellt wurden, werden in **Kapitel 5** einigen Test unterzogen. Dabei wird der, bei der Interpolation der Testfunktionen entstandene, Fehler in der  $L_2$ -Norm gemessen und miteinander verglichen. Schließlich werden in **Kapitel 6** die Erkenntnisse aus dieser Arbeit zusammengefasst und weitere Möglichkeiten der Verwendung der Adaptiven Kombinationstechnik diskutiert.

Zusätzlich zu den bereits im obigen Text erwähnten Arbeiten werden zum Schluss noch einige Arbeiten vorgestellt, in denen die Kombinationstechnik zur Lösung verschiedener Probleme verwendet wurde. So wurde die Kombinationstechnik in der Arbeit von Pflaum [Pfl96] zur numerischen Lösung von elliptischen Differentialgleichungen verwendet, wobei dort auch eine adaptive Erweiterung der Kombinationstechnik entwickelt und untersucht wurde, um die Konvergenz der Kombinationslösung im Falle von Singularitäten zu verbessern. Weiterhin wurde in den Arbeiten von Kranz [Kra02] und Huber [Hub96] die Kombinationstechnik zur Strömungssimulation, sowie in der Arbeit von Fleischer [Fle05] zur Bestimmung von Optionspreisen, eingesetzt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit, sowie während meines Studiums, unterstützt haben.

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. Ulrich Trottenberg. Ein ganz besonderer Dank gebührt Prof. Dr. Jochen Garcke für die intensive Betreuung meiner Diplomarbeit, sowie für die vielen hilfreichen Ratschläge und die nahezu unendliche Geduld.

Weiterhin bedanke ich mich bei meinen Eltern Irina und Boris Gefen und meiner Schwester Marianna, für all ihre Hilfe und die moralische Unterstützung.

Schließlich möchte ich mich bei meinen Freunden Marielle Brüggemann, Haizhang Ge, Antonia Podesta, Vladimir Huber und Florian Marnier für die schöne Studienzeit und ihre Unterstützung bedanken.

## Kapitel 2

# Optionen und ihre Bewertung

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Begriffe aus der Optionspreistheorie eingeführt. Ausserdem werden dem Leser verschiedene Optionstypen vorgestellt und auch Motive für den Handel mit Optionen erläutert. Des Weiteren wird hier das bekannteste und meist verwendete Modell zur Bewertung von Optionen, das sogenannte *Black-Scholes-Modell*, präsentiert. Wir verwenden in diesem Kapitel hauptsächlich [Hul09],[JG03],[Sey00].

### 2.1 Optionstypen

In diesem Abschnitt werden dem Leser verschiedene Typen von Optionen vorgestellt. Dabei wird zuerst auf Standard Optionen und anschließend auf exotische Optionen eingegangen, wobei die Basket-Optionen besonders aufmerksam betrachtet werden.

#### 2.1.1 Standard-Optionen

Ein Derivat ist ein Finanzinstrument, dessen Wert am Fälligkeitstag eindeutig aus dem Preis des Basiswertes abgeleitet werden kann.

Es gibt dabei 3 Klassen von Finanzderivaten:

1. Optionen
2. Forwards und Futures
3. Swaps

Diese Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit *Optionen*. Für Informationen zu *Forwards und Futures* und *Swaps* wird auf [Hul09] verwiesen.

Die einfachsten Optionen werden Standard-Optionen oder auch Plain Vanilla Optionen genannt. Dabei wird zwischen dem Käufer der Option (*holder*) und dem Verkäufer der Option (*writer*) ein Vertrag geschlossen, der es dem Käufer erlaubt, eine vor dem Vertragsabschluss festgelegte Menge eines bestimmten Basiswertes zu einem vor dem Vertragsabschluss vereinbarten Preis, dem Ausübungspreis, zu kaufen oder zu verkaufen. Dieser Sachverhalt wird in der folgenden Definition zusammengefasst:

**Definition 2.1.1 (Plain Vanilla Optionen).** *Eine Option gibt dem Halter das Recht, aber nicht die Pflicht, eine bestimmte Menge eines Basiswertes zu einem festen Preis  $K$ , dem Ausübungspreis, zu oder vor einem festgelegten Zeitpunkt  $T$ , dem Fälligkeitszeitpunkt, zu kaufen oder zu verkaufen.*

Der Fälligkeitszeitpunkt  $T$  wird ebenfalls vor dem Vertragsabschluss festgelegt und als Basiswert stehen den Parteien Nahrungsmittel, Rohstoffe, Währungen, Aktien oder sogar das Wetter zu Verfügung. Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch angenommen, dass es sich beim Basiswert stets um dividendengeschützte Aktien handelt, das heißt Aktien, für die während der gesamten Laufzeit der Option keine Dividende ausgeschüttet werden.

Optionen werden aufgrund ihrer Ausübungsmöglichkeiten unterschieden, was die folgenden Definitionen zeigen:

**Definition 2.1.2 (Kauf-/Verkaufsoption).** *Eine Option, die dem Inhaber das Recht gewährt den Basiswert zu kaufen, heißt Kaufoption oder Call. Das Recht zum Verkauf eines Basiswertes wird Verkaufsoption oder Put genannt.*

**Definition 2.1.3 (Europäische/Amerikanische Option).** *Darf eine Option nur am Fälligkeitstag ausgeübt werden, so heisst sie Europäische Option. Eine Option, die einmalig während ihrer Laufzeit ausgeübt werden darf, nennt man Amerikanische Option.*

**Bemerkung 2.1.4.** Die Begriffe *amerikanisch* und *europäisch* beziehen sich dabei weder auf den Ort der Option noch auf den Ort der Börse. Tatsächlich ist es so, dass die meisten an den Börsen gehandelten Optionen amerikanischen Typs sind.

Es stellt sich nun die Frage, welchen Wert die Option an ihrem Fälligkeitstag  $T$  besitzt. Der Wert der Option  $V$  hängt dabei nicht nur von dem momentanen Zeitpunkt  $t \leq T$ , sondern auch von dem Kurs des Basiswertes  $S(t)$  ab. Der Besitzer der Kaufoption wird diese nur dann ausüben, wenn der Kurs des Basiswertes größer ist als der Ausübungspreis, also  $S(T) > K$ . Denn genau dann kann ein Gewinn in Höhe von  $S(T) - K$  erzielt werden, indem man den Basiswert zum Preis  $K$  kauft und ihn dann an der Börse zum Preis  $S(T)$  sofort wieder verkauft. Die Transaktionskosten werden dabei der Einfachheit halber vernachlässigt. Sei jedoch  $S(T) < K$ , so macht das Ausüben der Option keinen Sinn, da der Basiswert an der Börse zu einem günstigeren Preis beschafft werden kann. Die Option verfällt also und ist damit wertlos.

Durch diese Überlegungen kann der Wert des Calls,  $V_C(S, T)$ , wie folgt angegeben werden:

$$V_C(S, T) = \begin{cases} S(T) - K, & \text{falls } S(T) > K \quad (\text{Ausüben der Option}) \\ 0, & \text{falls } S(T) \leq K \quad (\text{Verfall der Option}) \end{cases}$$

bzw.

$$V_C(S, T) = \max(S(T) - K, 0) = (S(T) - K)^+ =: \mathcal{H}_C(S) \quad (2.1)$$

Der Besitzer der Verkaufsoption übt diese aus, wenn  $S(T) < K$  gilt und lässt es anderenfalls verfallen. Das führt zu:

$$V_P(S, T) = \begin{cases} K - S(T), & \text{falls } S(T) < K \quad (\text{Ausüben der Option}) \\ 0, & \text{falls } S(T) \geq K \quad (\text{Verfall der Option}) \end{cases}$$

bzw.

$$V_P(S, T) = \max(K - S(T), 0) = (K - S(T))^+ =: \mathcal{H}_P(S) \quad (2.2)$$

Die Funktionen  $\mathcal{H}_C(S)$  und  $\mathcal{H}_P(S)$  bezeichnet man als *Auszahlungsfunktionen* oder auch *Payoff-Funktionen* und ihr Wert ist der *innere Wert* der Option. Die Abbildung 2.1 zeigt die Graphen der Auszahlungsfunktionen für einen Call und einen Put.

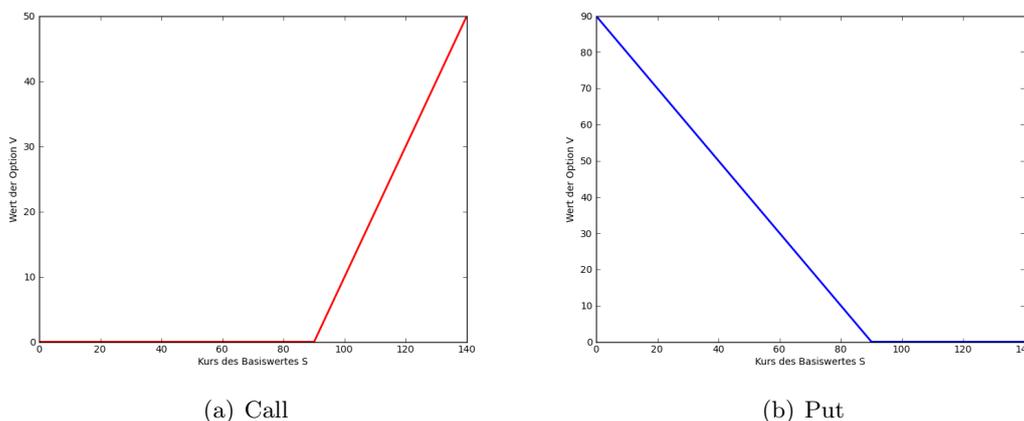


Abbildung 2.1: Auszahlungsfunktionen mit dem Ausübungspreis  $K = 90$

Aufgrund der Auszahlungsfunktionen (2.1) und (2.2) lässt sich einiges über die Einstellung des Inhabers der Option aussagen. So setzt der Käufer eines Calls auf steigende Preise des Basiswertes, wogegen der Käufer eines Puts auf fallende Preise des Basiswertes setzt.

### 2.1.2 Exotische Optionen

Außer den Standard-Optionen, die dem Leser im vorherigen Abschnitt präsentiert wurden, existieren auch die sogenannten *exotische Optionen*. Diese können ebenfalls vom europäischen oder amerikanischen Typ sein, in Abhängigkeit davon, wann (*am Fälligkeitstag oder schon davor*) sie ausgeübt werden können.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass es neben europäischen und amerikanischen Optionen noch die sogenannten *Bermuda Optionen* gibt, die in dieser Arbeit jedoch keine Rolle spielen werden.

**Definition 2.1.5 (Bermuda Option).** *Eine amerikanische Option, die nur zu fest vorgegebenen Zeitpunkten (z.B. wöchentlich, monatlich,...) während ihrer Laufzeit vorzeitig ausgeübt werden darf, bezeichnet man als Bermuda Option.*

Exotische Optionen lassen sich in folgende Klassen einteilen:

1. pfadabhängig oder pfadunabhängig
2. single-asset oder multi-asset

**Definition 2.1.6 (pfadabhängige/pfadunabhängige Option).** *Hängt die Auszahlung einer Option von dem Kurs des Basiswertes vor dem Fälligkeitszeitpunkt ab, so handelt es sich um eine pfadabhängige Option. Hängt die Auszahlung dagegen nicht von dem Kurs des Basiswertes vor dem Fälligkeitszeitpunkt ab, so bezeichnet man das als eine pfadunabhängige Option.*

**Definition 2.1.7 (Single-asset-/Multi-asset-Option).** *Hängt die Auszahlung einer Option von nur einem Basiswert ab, so handelt es sich um eine Single-asset-Option. Hängt die Auszahlung von mehreren Basiswerten ab, so spricht man von einer Multi-asset-Option.*

Eine sehr populäre Multi-asset-Option ist die sogenannte *Basket-Option*, wobei die Auszahlung der Option von einem Portfolio (Basket) von Assets abhängt. Dieser Sachverhalt wird in der folgenden Definition zusammengefasst.

**Definition 2.1.8 (Basket-Option).** *Bei Basket-Optionen hängt die Auszahlung von dem Wert eines Portfolios (oder Baskets) von mehreren Wertpapieren,  $S_1, \dots, S_d$ , ab. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten den Wert eines Baskets  $B(t)$ , der von den Wertpapieren  $S_1, \dots, S_d$  abhängt, zum Zeitpunkt  $t \leq T$  zu definieren, z.B.: (vgl. [Kür08])*

$$\begin{aligned} B(t) &:= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d S_k(t) && \text{(Arithmetisches Mittel)} \\ B(t) &:= \left( \prod_{i=1}^d S_i(t) \right)^{\frac{1}{d}} && \text{(Geometrisches Mittel)} \\ B(t) &:= \max_{i=1, \dots, d} S_i(t) && \text{(Maximum)} \\ B(t) &:= \min_{i=1, \dots, d} S_i(t) && \text{(Minimum)} \end{aligned}$$

dabei wird mit  $S_i(t)$  für  $i = 1, \dots, d$  der Kurs des  $i$ -ten Wertpapiers zum Zeitpunkt  $t \leq T$  bezeichnet.

Zum Schluss müssen noch die Auszahlungsfunktionen bestimmt werden. Sei  $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_d)$  und  $K$  der vereinbarte Ausübungspreis, so ist die Payoff-Funktion eines Calls gegeben durch:

$$V_C(\mathbf{S}, T) = (B(T) - K)^+ =: \mathcal{H}_C(\mathbf{B}) \quad (2.3)$$

Analog dazu lautet die Payoff-Funktion eines Puts:

$$V_P(\mathbf{S}, T) = (K - B(T))^+ =: \mathcal{H}_P(\mathbf{B}) \quad (2.4)$$

## 2.2 Grundlagen der Optionsbewertung

In diesem Abschnitt werden zuerst die Gründe für den Handel mit Optionen erläutert. Anschließend werden, anhand von Standardoptionen, obere und untere Schranken hergeleitet, die eine Eingrenzung des Optionswertes erlauben. Aussagen in ähnlicher Form können auch für komplexere Optionstypen getätigt werden.

### 2.2.1 Motive für den Handel mit Optionen

Es gibt im Wesentlichen zwei Hauptgründe für den Handel mit Optionen:

1. Absicherung (Hedging)
2. Spekulation

Hedger nutzen Optionen, um sich gegen ungünstige zukünftige Kursschwankungen des zugrunde liegenden Basiswertes zu schützen. Rechnet der Anleger damit, dass der Preis des Basiswertes in der Zukunft fällt, so bietet sich der Kauf von Verkaufsoptionen zum Hedgen an, da dadurch ein bestimmter Verkaufspreis bis zum Fälligkeitstag sichergestellt wird.

**Beispiel 2.2.1 (Hedging).** (vgl. [Kür08]) Ein Investor kauft zum Zeitpunkt  $t$  eine Aktie mit dem Wert  $S(t)$  und möchte diese zu einem späteren Zeitpunkt  $T$  mindestens zu einem Preis  $K$  wieder verkaufen. Das heisst, er sichert sich gegen Aktienkurse  $S(T) < K$  ab. Dazu investiert er in eine Verkaufsoption mit Fälligkeitszeitpunkt  $T$ , Ausübungspreis  $K$  und Wert  $V(S, t)$ . Der Wert seines Portfolios  $P = P(S, V, t)$ , bestehend aus einer Aktie und einem Put, ist zum Zeitpunkt  $t = T$  gegeben durch:

$$P(S, V, T) = S(T) + V(S, T) = S(T) + (K - S(T))^+ = \max(S(T), K)$$

der Wert des Portfolios unterschreitet in keinem Fall den Wert  $K$ .

Dieses Portfolio wird als **Protective Put** und die Kosten  $V(S, t)$  als **Hedgekosten** bezeichnet.

Spekulanten können bei relativ geringer Anfangsinvestition, bei einer günstigen Entwicklung des Basiswertes, sehr hohe Gewinne erzielen. Ein ungünstiger Verlauf hat allerdings den Verlust der gesamten Anfangsinvestition zur Folge. Dieser Sachverhalt impliziert eine höhere Risikotoleranz des Anlegers. Kaufoptionen bieten sich besonders gut für Spekulationszwecke an.

**Beispiel 2.2.2 (Spekulation).** Eine Aktie hat zum Zeitpunkt  $t$  den Wert  $S(t) = 100$  und es existiert eine europäische Kaufoption auf diese Aktie mit dem Fälligkeitszeitpunkt  $T$ , dem Ausübungspreis 115 und dem Preis  $V(S, t) = 15$ . Ein Investor glaubt an einen stark steigenden Kurs der Aktie und erwirbt die beschriebene Option. Steigt der Aktienkurs tatsächlich auf  $S(T) = 150$ , so wird die Option durch den Investor ausgeübt und ein Gewinn in Höhe von 20 realisiert.

Steigt der Aktienkurs nicht so stark an, oder fällt sogar, so dass  $S(T) < K$ , dann verfällt die Option und der Investor verliert seine Anfangsinvestition in Höhe von  $V(S, t) = 15$ .

## 2.2.2 Strukturaussagen

Bevor nun erste Schranken für europäische und amerikanische Optionen hergeleitet werden, müssen noch die Einflussfaktoren auf Optionspreise aufgezeigt und grundlegende Marktannahmen geklärt werden. Ausserdem wird auch auf die Notation eingegangen, die im Laufe dieser Arbeit im Zusammenhang mit Optionen verwendet wird.

Es gibt mehrere Faktoren, die den Preis einer Option beeinflussen können:

1. Der aktuelle Kurs des Basiswertes  $S(t)$
2. Der Ausübungspreis  $K$

3. Der Fälligkeitszeitpunkt  $T$
4. Die Volatilität, d.h. die Schwankungsbreite des Basiswertkurses  $\sigma$
5. Der risikolose Zinssatz  $r$

Die vollständige Beschreibung der Auswirkungen der aufgezählten Variablen auf den Optionspreis findet sich in [Hul09].

Bestimmte Modellannahmen machen es möglich, den fairen Preis für Optionen zu berechnen. Dieser muss nicht gleich dem Börsenwert der Option, der durch Angebot und Nachfrage bestimmt wird, sein, stellt aber eine wichtige Orientierungshilfe für alle Marktteilnehmer dar.

Eine zentrale Annahme zur Bewertung von Optionen und auch anderer Finanzderivate ist der Ausschluss von Arbitragemöglichkeiten.

**Definition 2.2.3 (Arbitrage).** *Arbitrage bezeichnet die Möglichkeit eines risikolosen Gewinns, zum Beispiel durch Ausnutzen der Preisdifferenz für das gleiche Gut an zwei verschiedenen Märkten.*

**Definition 2.2.4 (Arbitragefreier Markt).** *Ein Finanzmarkt, in dem keine Arbitragemöglichkeiten bestehen, wird als arbitragefreier Markt bezeichnet.*

**Beispiel 2.2.5 (Arbitrage).** Eine Arbitragemöglichkeit ergibt sich zum Beispiel im folgenden Fall: Eine Aktie wird an der Börse in Frankfurt zum Preis von 120 Euro gehandelt. An der Börse in New York kostet die gleiche Aktie 150 Dollar. Der Wechselkurs beträgt 1,2 Dollar pro Euro. Ein Kauf der Aktie in Frankfurt bei gleichzeitigem Verkauf in New York führt zu einem risikolosen Gewinn von  $150 - 1,2 \cdot 120 = 6$  Dollar. Transaktionskosten werden dabei vernachlässigt.

Durch den Ausschluss von Arbitragemöglichkeiten tritt das *Gesetz des einheitlichen Preises* in Kraft, welches besagt, dass alle Finanzderivate mit der selben Auszahlung den selben Preis besitzen müssen.

Damit werden nun obere und untere Schranken für den Preis von europäischen und amerikanischen Optionen auf ein dividendenloses Wertpapier hergeleitet, wobei folgende Bezeichnungen verwendet werden:

Bezeichnung	Bedeutung
$T \in \mathbb{R}^+$	Fälligkeitszeitpunkt der Option
$S(t) \in \mathbb{R}^+$	Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt $t \leq T$
$K \in \mathbb{R}^+$	Ausübungspreis der Option
$V_C^{eur}(S, t) \in \mathbb{R}^+$	Wert eines europäischen Calls zum Zeitpunkt $t$ beim Aktienkurs $S(t)$
$V_P^{eur}(S, t) \in \mathbb{R}^+$	Wert eines europäischen Puts zum Zeitpunkt $t$ beim Aktienkurs $S(t)$
$V_C^{am}(S, t) \in \mathbb{R}^+$	Wert eines amerikanischen Calls zum Zeitpunkt $t$ beim Aktienkurs $S(t)$
$V_P^{am}(S, t) \in \mathbb{R}^+$	Wert eines amerikanischen Puts zum Zeitpunkt $t$ beim Aktienkurs $S(t)$
$r \in \mathbb{R}^+$	Risikoloser Zinssatz
$\sigma \in \mathbb{R}^+$	Volatilität

Tabelle 2.1: Bezeichnungen im Zusammenhang mit Optionen

### Wertobergrenzen:

Eine europäische und amerikanische Kaufoption kann niemals mehr Wert sein, als der

zugrunde liegende Basiswert, anderenfalls könnte durch den Verkauf eines Calls beim gleichzeitigen Kauf des Basiswertes ein risikoloser Gewinn erwirtschaftet werden. Folglich muss der Kurs des Basiswertes eine Wertobergrenze für die Option sein:

$$V_C^{eur}(S, t) \leq S(t) \quad \text{und} \quad V_C^{am}(S, t) \leq S(t)$$

Eine europäische und amerikanische Verkaufsoption gibt dem Inhaber das Recht, den zugrunde liegenden Basiswert zum Ausübungspreis  $K$  zu verkaufen. Unabhängig davon, wie tief der Wert des zugrunde liegenden Basiswertes zum Verkaufszeitpunkt ist, kann der Wert der Option nicht größer sein als  $K$ . Um den Wert der europäischen Option zum Zeitpunkt  $t$ ,  $V(S, t)$  angeben zu können, muss  $K$  diskontiert werden. Daraus ergeben sich folgende Aussagen:

$$V_P^{eur}(S, t) \leq Ke^{-r(T-t)} \leq K \quad \text{und} \quad V_P^{am}(S, t) \leq K$$

### Wertuntergrenzen:

Da im schlimmsten Fall Wertlosigkeit vorliegt, ist der Wert einer europäischen Kauf- und Verkaufsoption immer größer oder gleich Null. Weiterhin lässt sich die untere Schranke für europäische Optionen durch die folgende Überlegung noch präzisieren:

Man betrachtet zwei Portfolios:

Portfolio **A**, mit dem Wert  $A(t)$  zum Zeitpunkt  $t$ , bestehend aus:  $V_C^{eur}(S, t)$  und ein Geldbetrag in Höhe von  $Ke^{-r(T-t)}$

Der Geldbeitrag wird dabei zum risikolosem Zinssatz angelegt.

$$A(T) = \begin{cases} S(T), & \text{falls } S(T) > K & \text{Ausübung der Option} \\ K, & \text{falls } S(T) < K & \text{Verfall der Option} \end{cases}$$

Also ist  $A(T) = \max(S(T), K)$

Portfolio **B**, mit dem Wert  $B(t)$  zum Zeitpunkt  $t$ , bestehend aus: Aktie mit dem Wert  $S(t)$

Also ist  $B(T) = S(T)$

Man sieht sofort, dass  $A(T) \geq B(T)$  gilt und nach dem *Gesetz des einheitlichen Preises* auch  $A(t) \geq B(t) \Rightarrow V_C^{eur}(t) + Ke^{-r(T-t)} \geq S(t)$  gelten muss.

Mit der selben Argumentation lässt sich auch die untere Schranke für den Wert einer europäischen Verkaufsoption herleiten. Insgesamt lässt sich also die folgende Aussage treffen:

$$(S(t) - Ke^{-r(T-t)})^+ \leq V_C^{eur}(S, t) \tag{2.5}$$

$$(Ke^{-r(T-t)} - S(t))^+ \leq V_P^{eur}(S, t) \tag{2.6}$$

Da amerikanische Optionen jederzeit ausgeübt werden können, muss gelten:

$$V^{am}(S, t) \geq \mathcal{H}(S)$$

für alle  $S \geq 0$  und alle  $0 \leq t \leq T$ . Das bedeutet, dass der Wert einer amerikanischen Option immer mindestens so hoch ist, wie der Wert der Auszahlungsfunktion  $\mathcal{H}$ . Andernfalls könnte der Händler durch einen Kauf und die sofortige Ausübung einer solchen Option einen risikolosen Gewinn in Höhe von  $\mathcal{H}(S) - V^{am}(S, t) > 0$  verbuchen. Dies stünde jedoch im Widerspruch zur Annahme eines arbitragefreien Marktes.

Zusammengefasst lässt sich folgendes aussagen:

$$(S(t) - K)^+ \leq V_C^{am}(S, t) \quad (2.7)$$

$$(K - S(t))^+ \leq V_P^{am}(S, t) \quad (2.8)$$

Nun stellt sich natürlich auch die Frage, wie sich europäische und amerikanische Optionen zueinander verhalten. Aufgrund der Möglichkeit zur vorzeitigen Ausübung bei amerikanischen Optionen gilt:

$$V^{eur}(S, t) \leq V^{am}(S, t) \quad (2.9)$$

für alle  $S > 0$  und alle  $t \in [0, T]$ , wobei zum Fälligkeitszeitpunkt der Wert einer europäischen Option mit dem einer amerikanischen Option übereinstimmt. Es lassen sich jedoch noch weitere Aussagen zu diesem Thema tätigen.

**Satz 2.2.6.** *Die vorzeitige Ausübung eines amerikanischen Calls auf ein dividendenloses Wertpapier vor dem Fälligkeitszeitpunkt ist niemals optimal und es gilt ausserdem:*

$$V_C^{eur}(S, t) = V_C^{am}(S, t)$$

für alle  $S > 0$  und  $t \in [0, T]$

Beweis: Betrachtet man die Gleichungen 2.9 und 2.6 und berücksichtigt, dass für den risikolosen Zinssatz  $r > 0$ , so gilt:  $V_C^{am}(S, t) \geq V_C^{eur}(S, t) \geq (S(t) - Ke^{-r(T-t)})^+ \geq (S(t) - K)^+$ . Daraus kann gefolgert werden, dass sich das vorzeitige Ausüben der Option nicht lohnt. Andernfalls bestünde bei der letzten Umformung eine Gleichheit. Vergleiche [Hul09] Seite 268.  $\square$

Für amerikanische Puts kann es jedoch optimal sein, die Option vor dem Fälligkeitstag auszuüben.

**Satz 2.2.7.** *Für einen amerikanischen Put auf ein dividendenloses Wertpapier kann es einen Aktienkurs,  $S(t) > 0$ , geben für den eine vorzeitige Ausübung der Option zum Zeitpunkt  $t < T$  optimal ist.*

Beweis: Man betrachtet die maximale Auszahlung eines amerikanischen Puts zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$ , wobei diese dem Ausübungspreis  $K$  entspricht. Der Inhaber dieser Option wird sie also spätestens zu dem Zeitpunkt  $t$  ausüben, wenn die Auszahlung grösser als der diskontierte Ausübungspreis  $K$  ist. Es sollte also gelten:

$$K - S(t) > e^{-r(T-t)}K \Leftrightarrow S(t) < \left(1 - e^{-r(T-t)}\right)K$$

Dies ist die hinreichende Bedingung für die vorzeitige Ausübung der beschriebenen Option. Der Beweis ist in [Kür08] auf Seite 15 zu finden.  $\square$

Zum Schluss dieses Abschnittes wird nun sowohl für europäische als auch für amerikanische Optionen ein Zusammenhang zwischen einem Call und einem Put hergeleitet, der es erlaubt, aus dem Preis eines Optionstypen den Preis des anderen zu bestimmen. Diesen Zusammenhang nennt man *Put-Call-Parität*.

**Satz 2.2.8. [Put-Call-Parität]** Für einen europäischen Call und einen europäischen Put auf ein dividendenloses Wertpapier mit demselben Ausübungspreis  $K$  und demselben Fälligkeitszeitpunkt  $T$  gilt zum Zeitpunkt  $t$ :

$$S(t) + V_P^{eur}(S, t) = V_C^{eur}(S, t) + Ke^{-r(T-t)}$$

Beweis: Zum Beweis betrachtet man zwei Portfolios, die wie folgt aussehen:

1. Portfolio 1,  $\Pi_1$ : Europäischer Call und Geldbetrag in Höhe  $Ke^{-r(T-t)}$
2. Portfolio 2,  $\Pi_2$ : Europäischer Put und Aktie mit Kurs  $S(t)$

Beide Portfolios liefern zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  die gleiche Auszahlung:  $\Pi_1 = \Pi_2 = \max(S(T), K)$ . Nach dem Gesetz des einheitlichen Preises müssen die beiden Portfolios auch zum heutigen Zeitpunkt  $t$  den gleichen Wert haben, woraus die Behauptung folgt. Dieser Beweis ist in [Hul09] auf Seite 264 zu finden.  $\square$

Für amerikanische Optionen existiert eine ähnliche, jedoch eine schwächere Beziehung. So gilt:

$$S(t) - K \leq V_C^{am}(S, t) - V_P^{am}(S, t) \leq S(t) - Ke^{-r(T-t)}$$

## 2.3 Black-Scholes-Modell

Ein entscheidender Durchbruch bei der Bewertung von Aktienoptionen gelang 1973 Fischer Black, Myron Scholes, sowie unabhängig davon Robert Merton. Sie entwickelten das nach Ihnen benannte *Black-Scholes-Modell*, welches auch dazu beitrug, dass Optionen in der Finanzwelt an Bedeutung gewannen, da nun dadurch ihr fairer Preis bestimmt werden konnte.

Für diese Entdeckung wurden Myron Scholes und Robert Merton 1997 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet. Fischer Black verstarb schon 1995.

### 2.3.1 Stochastische Hilfsmittel

Bevor in den nächsten Abschnitten näher auf das Black-Scholes-Modell eingegangen wird, müssen zuerst einige wichtige Hilfsmittel aus der Stochastik präsentiert werden, die für die Herleitung der *Black-Scholes-Gleichung* notwendig sind. (vgl. [Sey00] und [JG03])

**Definition 2.3.1 (Stetiger Stochastischer Prozess).** Ein stetiger stochastischer Prozess  $X_t$ ,  $t \in [0, T]$ , ist eine Familie von Zufallsvariablen  $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $t \mapsto X(\omega, t)$  stetig ist für alle  $\omega \in \Omega$ .

Für diese Arbeit ist ein spezieller stochastischer Prozess, der *Wiener Prozess*, interessant.

**Definition 2.3.2 (Wiener-Prozess oder Brownsche Bewegung).** Ein Wiener Prozess  $W_t$  ist ein stetiger stochastischer Prozess mit folgenden Eigenschaften:

1.  $W_0 = 0$
2.  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$  für alle  $t \geq 0$ , d.h. für jedes  $t$  ist  $W_t$  normalverteilt mit Erwartungswert  $E(W_t) = 0$  und  $\text{Var}(W_t) = E(W_t^2) = t$
3. für alle  $0 \leq r \leq u \leq s \leq t$  gilt:  $W_t - W_s$  und  $W_u - W_r$  sind unabhängig

Allgemein gilt noch für  $0 \leq s < t$  die Eigenschaft  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ , also  $E(W_t - W_s) = 0$  und  $\text{Var}(W_t - W_s) = E(W_t - W_s)^2 = t - s$

Für die folgenden Abschnitte sind weiterhin folgende zwei Definitionen hilfreich.

**Definition 2.3.3 (Stochastische Differentialgleichung von Itô).** Eine stochastische Differentialgleichung von Itô ist gegeben durch:

$$dX_t = \underbrace{a(X_t, t)}_{\text{Driftterm}} dt + \underbrace{b(X_t, t)dW_t}_{\text{Diffusionsterm}} \quad (2.10)$$

wobei  $X_t$  ein stochastischer Prozess,  $W_t$  der Wiener-Prozess und  $a$  und  $b$  hinreichend reguläre Funktionen sind. Dabei ist die Gleichung (2.10) die symbolische Schreibweise für die Integralgleichung:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s, s)ds + \int_0^t b(X_s, s)dW_s \quad (2.11)$$

Dabei heißt ein stochastischer Prozess, der die Gleichung (2.11) erfüllt, **Itô-Prozess**.

**Bemerkung 2.3.4.** Das zweite Integral aus der Gleichung (2.11) heisst **Itô-Integral** über einen Wiener-Prozess  $W_t$ .

Als nächstes wird das *Lemma von Itô* vorgestellt, welches fundamental für die Herleitung der Black-Scholes-Gleichung ist.

**Lemma 2.3.5 (Itô).** Seien  $X_t$  ein Itô-Prozess und  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ . Dann ist auch  $f_t = f(X_t, t)$  ein Itô-Prozess mit dem gleichem Wiener-Prozess  $W$  und es gilt:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b \frac{\partial f}{\partial x} dW \quad (2.12)$$

Für die Herleitung der Black-Scholes-Gleichung für Optionen auf mehrere Basiswerte wird die mehrdimensionale Itô-Formel benötigt.

**Lemma 2.3.6.** Seien  $(X_1(t), \dots, X_n(t))$  ein  $n$ -dimensionaler Itô-Prozess und  $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty])$ . Dann ist auch  $f_t = f(X_1(t), \dots, X_n(t))$  ein Itô-Prozess und es gilt:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mu_i S_i \frac{\partial f}{\partial S_i} + \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \frac{\partial^2 f}{\partial S_i \partial S_j} \right) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i S_i \frac{\partial f}{\partial S_i} dW_i \quad (2.13)$$

### 2.3.2 Modellannahmen

Folgende Annahmen über den Markt werden im Black-Scholes-Modell getroffen und sollen auch für den gesamten weiteren Verlauf dieser Arbeit gelten.

1. Der risikolose Zinssatz  $r \geq 0$  ist konstant über die Zeit.
2. Es gibt keine Transaktionskosten und keine Steuern.
3. Der Handel mit Aktien und Optionen ist zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  möglich. Alle Wertpapiere sind dabei beliebig teilbar, d.h. dass auch Bruchteile der Wertpapiere gehandelt werden können. Ausserdem sind Leerverkäufe erlaubt, d.h. dass auch Wertpapiere verkauft werden können, die sich zum Zeitpunkt des Verkaufs noch nicht im Besitz des Verkäufers befinden.
4. Für die Aktien werden keine Dividende gezahlt.
5. Der Markt ist arbitragefrei.
6. Der Aktienkurs  $S(t)$  genügt einer linearen stochastischen Differentialgleichung mit konstanten Parametern  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ :

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (2.14)$$

und folgt damit einer *geometrischen Brownschen Bewegung*.  $W(t)$  bezeichnet dabei den Wiener-Prozess, wie er im Abschnitt 2.3.1 definiert wurde. Weiterhin wird der Parameter  $\mu$  als der Drift (erwartete Rendite der Aktie) und der Parameter  $\sigma$  als die Volatilität des Aktienkursprozesses bezeichnet.

Die beiden wichtigsten Annahmen des Black-Scholes-Modells sind die Punkte [5.] und [6.]. Bezüglich der anderen Punkte sind Verallgemeinerungen vorstellbar. So ist es zum Beispiel möglich Dividendenzahlungen und auch Transaktionskosten zu berücksichtigen oder auch zeitabhängige Drift- und Zinsraten zu verwenden. Solche Erweiterungen steigern die Komplexität des Modells, bringen aber auch eine grössere Realitätsnähe mit sich.

Mit dem Lemma von Itô kann die Lösung der stochastische Differentialgleichung (2.14) bestimmt werden, wobei man die folgende Lösung erhält:

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \quad (2.15)$$

Durch Division von (2.15) mit  $S(0)$  und die Verwendung des Logarithmus naturalis kann man sehen, dass der logarithmierte normierte Aktienkurs  $\ln(S(t)/S(0))$  normalverteilt ist, mit dem Erwartungswert  $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$  und der Varianz  $\sigma^2 t$ . Weiterhin lässt sich zeigen, dass für den Erwartungswert und die Varianz des stochastischen Prozesses  $S(t)$  gilt:

$$E[S(t)] = e^{\mu t} S(0) \quad \text{und} \quad Var[S(t)] = S(0)^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1) \quad (2.16)$$

### 2.3.3 Black-Scholes-Gleichung

Der Preis eines beliebigen Derivates auf eine dividendenlose Aktie, insbesondere der Optionspreis  $V(S, t)$ , wobei  $V(S, t)$  eine Funktion von dem aktuellen Aktienkurs  $S \geq 0$  und der Zeit  $t \in [0, T]$  ist, erfüllt unter den im Abschnitt 2.3.2 getroffenen Annahmen die nach den Entdeckern benannte *Black-Scholes-Gleichung*, die im weiteren Verlauf hergeleitet wird.

Nach dem Lemma von Itô erfüllt  $V(S, t)$  die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dV = \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW \quad (2.17)$$

Da  $V$  und  $S$  durch den gleichen Wiener-Prozess bestimmt sind, lässt sich ein Portfolio  $\Pi$  aus Aktien mit dem Aktienkurs  $S$  und Optionen mit dem Wert  $V$  zusammenstellen, sodass der Wiener-Prozess  $W$  eliminiert wird. Das geeignete Portfolio sieht dabei wie folgt aus:

$$\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S \quad (2.18)$$

Betrachtet man die Änderung des Portfolios  $d\Pi = -dV + \frac{\partial V}{\partial S} dS$  und setzt dabei die Gleichungen (2.14) und (2.17) ein, erhält man:

$$d\Pi = - \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (2.19)$$

Da  $W$  nun eliminiert wurde, muss das Portfolio über die Zeit  $dt$  risikolos sein. Weiterhin muss das Portfolio, bei Berücksichtigung der Annahmen aus dem Abschnitt 2.3.2, die gleiche Rendite wie andere kurzfristige risikolose Anlagen erzielen, da anderenfalls Arbitragemöglichkeiten (siehe Seite 360 in [Hul09]) entstehen. Bei gewöhnlicher Verzinsung mit dem risikolosen Zinssatz  $r$  gilt für die Entwicklung des Portfolios  $\Pi$  folgendes:

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (2.20)$$

Setzt man nun die Gleichung (2.18) in (2.20) ein, muss, bei Ausschluss einer vorzeitigen Ausübungsmöglichkeit (also bei europäischen Optionen), das Ergebnis mit dem aus der Gleichung (2.19) übereinstimmen, da sonst Arbitragemöglichkeiten entstehen. Es folgt die Black-Scholes-Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.21)$$

Bei amerikanischen Optionen gilt wegen der Möglichkeit vorzeitiger Ausübung eine Ungleichung.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0 \quad (2.22)$$

Eine eindeutige Lösung der Black-Scholes-Gleichung für eine bestimmte Option hängt von den jeweiligen Anfangs-(bzw. End-) und Randbedingungen ab. Diese werden nun bestimmt, wobei auch auf die Lösungen der entstehenden Randwertprobleme für europäische Kauf- und Verkaufsoptionen, die sogenannten *Black-Scholes-Formeln*, eingegangen wird.

Für europäische Calls und Puts lassen sich die End- und Randbedingungen durch folgende Überlegungen angeben. Die Endbedingungen entsprechen dabei dem Wert der

Option am Fälligkeitstag  $t = T$  und sind durch die Auszahlungsfunktionen (2.1) für einen Call und (2.2) für einen Put gegeben. Also

$$V_C(S, T) = \mathcal{H}_C(S) \quad V_P(S, T) = \mathcal{H}_P(S)$$

Für die Randbedingungen muss der Wert der Option für  $S = 0$  und  $S \rightarrow \infty$  bestimmt werden. So ist am Rand  $S = 0$  für einen Call bzw.  $S \rightarrow \infty$  für einen Put die Option wegen (2.1) und (2.2) offensichtlich wertlos. Das bedeutet, für alle  $t < T$  gilt:

$$V_C(S, t) = 0 \text{ für } S = 0 \quad \text{und} \quad V_P(S, t) = 0 \text{ für } S \rightarrow \infty$$

Über die Put-Call-Parität (aus Satz 2.2.8) kann die zweite Randbedingung für  $S \rightarrow \infty$  für einen Call und  $S = 0$  für einen Put bestimmt werden. So gilt:

$$V_C(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)} \text{ für } S \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad V_P(S, t) = Ke^{-r(T-t)} - S \text{ für } S = 0$$

Zusammenfassend lässt sich der Wert eines europäischen Calls und eines europäischen Puts durch folgende Randwertprobleme eindeutig charakterisieren:

**Satz 2.3.7.** [*Bewertung europäischer Calls*] Der Wert eines europäischen Calls  $V = V(S, t)$  erfüllt für  $S \geq 0$  und  $0 \leq t \leq T$  die Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

mit den Randdaten

$$V(S, t) = 0 \text{ für } S = 0 \quad \text{und} \quad V(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)} \text{ für } S \rightarrow \infty$$

und den Enddaten

$$V(S, T) = (S(T) - K)^+$$

**Satz 2.3.8.** [*Bewertung europäischer Puts*] Der Wert eines europäischen Puts  $V = V(S, t)$  erfüllt für  $S \geq 0$  und  $0 \leq t \leq T$  die Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

mit den Randdaten

$$V(S, t) = Ke^{-r(T-t)} - S \text{ für } S = 0 \quad \text{und} \quad V(S, t) = 0 \text{ für } S \rightarrow \infty$$

und den Enddaten

$$V(S, T) = (K - S(T))^+$$

Die Randwertaufgaben 2.3.7 und 2.3.8 können explizit gelöst werden. Die Lösungen werden *Black-Scholes-Formeln* genannt.

**Satz 2.3.9.** [*Black-Scholes-Formel für Calls*] Der Wert eines europäischen Calls  $V = V(S, t)$  kann mit der folgenden Formel bestimmt werden

$$V(S, t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad \text{für } S > 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.23)$$

mit der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds, \quad x \in \mathbb{R}$$

und  $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

**Satz 2.3.10.** [*Black-Scholes-Formel für Puts*] Der Wert eines europäischen Puts  $V = V(S, t)$  kann mit der folgenden Formel bestimmt werden

$$V(S, t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1), \quad \text{für } S > 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.24)$$

mit  $\Phi, d_1, d_2$  wie in Satz 2.3.9

Eine detailreiche Herleitung der Black-Scholes-Formeln kann in [JG03] auf Seite 57 ff. gefunden werden. Wenn der Wert eines Optionstyps schon bekannt ist, kann allerdings auch die Put-Call-Parität aus Satz 2.2.8 zur Herleitung des anderen Wertes benutzt werden.

### 2.3.4 Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung

Die Black-Scholes-Gleichung ist eine parabolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung und lässt sich durch eine Variablentransformation

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right) \Leftrightarrow S = Ke^x \quad \tau = \frac{\sigma^2(T-t)}{2} \Leftrightarrow t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$$

in die Wärmeleitungsgleichung

$$u_\tau = u_{xx} \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in (0, \frac{\sigma^2 T}{2}]$$

umformen. Die Transformation findet dabei in zwei Schritten statt und lässt sich, sowie auch die Rücktransformation

$$V(S, t) = K \exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)u(x, \tau), \quad \text{mit } k = \frac{2r}{\sigma^2}$$

in [JG03] auf den Seiten 57 ff. finden. Durch die Transformation ändert sich auch der Definitionsbereich, so wird aus  $S \geq 0, 0 \leq t \leq T$ :

$$-\infty \leq x \leq \infty \quad \text{und} \quad 0 \leq \tau \leq \frac{\sigma^2 T}{2}$$

Für die praktische Rechnung kann jedoch nur ein endliches Intervall betrachtet werden und so gilt für  $x$

$$a = x_{\min} \leq x \leq x_{\max} = b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Zusätzlich müssen natürlich auch die Anfangs- und Randbedingungen transformiert werden, wodurch folgende Randwertprobleme (analog zu denen im Abschnitt 2.3.3) entstehen.

**Satz 2.3.11.** [*Transformiertes Randwertproblem für einen europäischen Call*] Finde die Funktion  $u = u(x, \tau)$ , so dass für alle  $(x, \tau) \in [a, b] \times (0, \frac{\sigma^2 T}{2}]$  die Gleichung  $u_\tau = u_{xx}$  mit den Anfangsdaten

$$u(x, 0) = \left( e^{(k+1)\frac{x}{2}} - e^{(k-1)\frac{x}{2}} \right)^+$$

und den Randdaten

$$u(a, \tau) = 0, \quad u(b, \tau) = \left( e^{\frac{1}{2}(k+1)b} + e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \right)$$

**Satz 2.3.12.** [*Transformiertes Randwertproblem für einen europäischen Put*] Finde die Funktion  $u = u(x, \tau)$ , so dass für alle  $(x, \tau) \in [a, b] \times (0, \frac{\sigma^2 T}{2}]$  die Gleichung  $u_\tau = u_{xx}$  mit den Anfangsdaten

$$u(x, 0) = \left( e^{(k-1)\frac{x}{2}} - e^{(k+1)\frac{x}{2}} \right)^+$$

und den Randdaten

$$u(a, \tau) = \left( e^{\frac{1}{2}(k-1)a} + e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \right), \quad u(b, \tau) = 0,$$

Eine genaue Herleitung der Randbedingungen kann z.B. in [Sey00] in Kapitel 4 nachgelesen werden.

## 2.4 Mehrdimensionales Black-Scholes-Modell

In diesem Abschnitt wird die *mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung* für eine Option mit  $d$  zugrunde liegenden Aktien hergeleitet. Die Modellannahmen lassen sich fast vollständig aus dem Abschnitt 2.3.2 übernehmen. Lediglich die letzte Annahme muss angepasst werden. So genügen die Aktienkurse  $S_i(T), i = 1, \dots, d$  den stochastischen Differentialgleichungen:

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t) dt + \sigma_i S_i(t) dW_i(t), \quad i = 1, \dots, d \quad (2.25)$$

Dabei sind  $\mu_i$  der Drift und  $\sigma_i$  die Volatilität der Aktie  $i$  und  $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))$  ein  $d$ -dimensionaler Wiener-Prozess.

### 2.4.1 Mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung

Unter den getroffenen Modellannahmen lautet die *mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung* für eine Option mit  $d$  zugrunde liegenden Aktien wie folgt, wobei die Herleitung analog zum ein-dimensionalen Fall (auf Seite 15 ff.) durchgeführt werden kann:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r \sum_{i=1}^d S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} - rV = 0 \quad (2.26)$$

$V = V(\mathbf{S}, t)$  ist dabei die Bezeichnung für den Wert einer Basket-Option, der  $d$  Aktien  $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_d)^T$  zugrunde liegen und  $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$  steht für die Korrelation zwischen

der  $i$ -ten und  $j$ -ten Aktie. Ihre Bedeutung wird nun kurz erläutert. Korrelation bedeutet, dass die Kursänderung einer Aktie (oder allgemein eines Basiswertes) den Kurs einer anderen Aktie beeinflussen kann. Zur Verdeutlichung dient die folgende Tabelle.

Wert	Bedeutung
$\rho_{ij} = -1$	Die betroffenen Kursentwicklungen kompensieren sich vollständig.
$-1 < \rho_{ij} < 0$	Die Kurse entwickeln sich in entgegengesetzte Richtungen.
$\rho_{ij} = 0$	Zwischen den beiden Aktien gibt es keinen statistischen Zusammenhang.
$0 < \rho_{ij} \leq 1$	Die Kurse entwickeln sich in die gleiche Richtung.

Tabelle 2.2: Korrelationskoeffizienten und ihre Bedeutung

Genauso wie im ein-dimensionalen Fall müssen nun die End- und Randbedingungen bestimmt werden. Die Überlegungen sind dabei zum ein-dimensionalen Fall analog. So ergeben sich folgende Randwertprobleme.

**Satz 2.4.1.** [*Bewertung eines europäischen Basket-Calls*] Der Wert eines Basket-Calls erfüllt für  $0 < S_1, \dots, S_d < \infty$  und  $0 \leq t \leq T$  die mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r \sum_{i=1}^d S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} - rV = 0$$

mit den Randdaten

$$V(S_1, \dots, S_d, t) = 0 \text{ für } \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad V(S_1, \dots, S_d, t) = \sum_{i=1}^d S_i(t) - K e^{-r(T-t)} \text{ für } \sum_{i=1}^d S_i(t) \rightarrow \infty$$

und den Enddaten

$$V(S_1, \dots, S_d, T) = \left( \sum_{i=1}^d S_i(T) - K \right)^+$$

**Satz 2.4.2.** [*Bewertung eines europäischen Basket-Puts*] Der Wert eines Basket-Puts erfüllt für  $0 < S_1, \dots, S_d < \infty$  und  $0 \leq t \leq T$  die mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r \sum_{i=1}^d S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} - rV = 0$$

mit den Randdaten

$$V(S_1, \dots, S_d, t) = K e^{-r(T-t)} \text{ für } \mathbf{S} = (0, \dots, 0)^T \quad \text{und} \quad V(S_1, \dots, S_d, t) = 0 \text{ für } \sum_{i=1}^d S_i(t) \rightarrow \infty$$

und den Enddaten

$$V(S_1, \dots, S_d, T) = \left( K - \sum_{i=1}^d S_i(T) \right)^+$$

**Bemerkung 2.4.3.** Für europäische Basket-Optionen auf zwei Aktien sieht die zu betrachtende Black-Scholes-Gleichung wie folgt aus:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_1} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2 \partial S_2} \right) + r \left( S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} \right) - rV = 0$$

wobei  $\rho$  der Korrelationskoeffizient zwischen den beiden Aktien ist und für  $i = 1, 2$   $\rho_{ii} = 1$  gelten muss. Die End- und Randbedingungen müssen entsprechend angepasst werden.

## 2.4.2 Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung

Auch die mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung lässt sich durch eine Variablentransformation

$$x_i = \frac{1}{\sigma_i} \ln \left( \frac{S_i}{K} \right) \Leftrightarrow S_i = K e^{\sigma_i x_i}, \quad t = T - 2\tau \Leftrightarrow \tau = \frac{T - t}{2}$$

in die Wärmeleitungsgleichung

$$u_\tau = \Delta u, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d \quad \text{und} \quad \tau \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$$

umformen, wobei  $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  den Laplace-Operator bezeichnet. Analog zu dem Vorgehen im Abschnitt 2.3.4 findet diese Transformation in zwei Schritten statt.

Nun müssen noch die End- und Randbedingungen entsprechend transformiert werden, wobei der Einfachheit halber europäische Basket-Optionen auf zwei Aktien betrachtet werden und für die Korrelation  $\rho = 0$  angenommen wird.

**Satz 2.4.4.** [*Transformiertes Randwertproblem für einen europäischen Basket-Call auf zwei Aktien*] Finde die Funktion  $u = u(x_1, x_2, \tau)$ , so dass für alle  $(x_1, x_2, \tau) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (0, \frac{T}{2}]$  die Gleichung  $u_\tau = \Delta u$  mit den Anfangsdaten

$$u(x_1, x_2, 0) = e^{\frac{\gamma x_1 + \beta x_2}{2}} + e^{\frac{\alpha x_1 + \delta x_2}{2}} - e^{\frac{\alpha x_1 + \beta x_2}{2}}$$

und den Randdaten

$$u(b_1, b_2, \tau) = e^{\frac{\gamma b_1 + \beta b_2}{2} + \frac{-\alpha^2 \tau - \beta^2 \tau}{4}} + e^{\frac{\alpha b_1 + \delta b_2}{2} + \frac{-\alpha^2 \tau - \beta^2 \tau}{4}} - e^{\frac{\alpha b_1 + \beta b_2}{2} + \frac{-\alpha^2 \tau - \beta^2 \tau - 8r\tau}{4}}$$

$$u(a_1, a_2, \tau) = 0$$

mit  $k_1 = \frac{2r}{\sigma_1}$ ,  $k_2 = \frac{2r}{\sigma_2}$ ,  $\alpha = k_1 - \sigma_1$ ,  $\beta = k_2 - \sigma_2$ ,  $\gamma = k_1 + \sigma_1$ ,  $\delta = k_2 + \sigma_2$  gilt.

**Satz 2.4.5.** [*Transformiertes Randwertproblem für einen europäischen Basket-Put auf zwei Aktien*] Finde die Funktion  $u = u(x_1, x_2, \tau)$ , so dass für alle  $(x_1, x_2, \tau) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (0, \frac{T}{2}]$  die Gleichung  $u_\tau = \Delta u$  mit den Anfangsdaten

$$u(x_1, x_2, 0) = e^{\frac{\alpha x_1 + \beta x_2}{2}} - e^{\frac{\gamma x_1 + \beta x_2}{2}} - e^{\frac{\alpha x_1 + \delta x_2}{2}}$$

und den Randdaten

$$u(a_1, a_2, \tau) = e^{\frac{\alpha a_1 + \beta a_2}{2} + \frac{-\alpha^2 \tau - \beta^2 \tau - 8r\tau}{4}} - e^{\frac{\gamma a_1 + \beta a_2}{2} + \frac{-\alpha^2 \tau - \beta^2 \tau}{4}} - e^{\frac{\alpha a_1 + \delta a_2}{2} + \frac{-\alpha^2 \tau - \beta^2 \tau}{4}}$$

$$u(b_1, b_2, \tau) = 0$$

mit  $k_1, k_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  wie im Satz 2.4.4 gilt.

# Kapitel 3

## Numerische Grundlagen

Viele naturwissenschaftliche, aber auch wirtschaftswissenschaftliche Prozesse, wie zum Beispiel die Bewertung von Optionen, lassen sich, wie in Kapitel 2 zu sehen war, durch gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen beschreiben.

Finite Differenzen und die Finite-Elemente-Methode können benutzt werden, um die so entstehenden, Aufgaben numerisch zu lösen. Diese werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels eingeführt und genauso wie die Grundlagen der dünnen Gitter und die darauf basierende Kombinationstechnik näher erläutert.

### 3.1 Sobolevräume und Variationsformulierung von Randwertaufgaben

Betrachtet wird nun die Wärmeleitungsgleichung auf dem Zeit-Ortsgebiet  $I \times \Omega$  mit homogenen Dirichlet-Randwerten

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= f(x, t) \quad \text{in } I \times \Omega \\u(x, 0) &= u_0(x) \quad \forall x \in \Omega \\u(x, t) &= 0 \quad \text{auf } I \times \partial\Omega\end{aligned}\tag{3.1}$$

wobei  $I=(0,T)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und  $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  den Laplace-Operator darstellt.

Der Grund für die Konzentration auf den Fall mit homogenen Randdaten besteht darin, dass Probleme mit nicht-homogenen Randdaten,  $u = g$  auf  $I \times \Omega$ , durch eine Transformation, wie z.B. in [Bas08] auf Seite 18 gezeigt wurde, wieder auf den homogenen Fall reduziert werden können.

Bevor die Variationsformulierung von (3.1) angegeben wird, müssen allerdings noch einige grundlegende Begriffe geklärt und passende Funktionenräume für Variationsformulierungen von Randwertaufgaben präsentiert werden.

**Definition 3.1.1 (Schwache Ableitung, Multiindex).** Sei  $u \in L_2(\Omega)$ , dann heißt die Funktion  $w \in L_2(\Omega)$  verallgemeinerte oder auch schwache Ableitung von  $u$  zum Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ , falls

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w v dx \quad \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

dabei gilt für den Multiindex  $\alpha$

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

Mit der Definition 3.1.1 können nun auch die sogenannten Sobolev-Räume definiert werden.

**Definition 3.1.2 (Sobolev-Raum).** Sei  $l \in \mathbb{N}$ . Dann heisst

$$H^l(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : D^{|\alpha|} u \in L_2(\Omega), \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq l\}$$

Sobolev-Raum der Ordnung  $l$ .

Definiert man nun eine Norm auf  $H^l(\Omega)$

$$\|u\|_l = \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq l} |D^\alpha u(x)|^2 dx}$$

und das Skalarprodukt

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq l} D^\alpha u D^\alpha v dx$$

So können folgende 2 Aussagen getroffen werden:

1.  $H^l(\Omega)$  mit  $\|\cdot\|_l$  ist ein Banachraum.
2.  $H^l(\Omega)$  mit  $(\cdot, \cdot)$  ist ein Hilbertraum.

Da, wie z.B. in Aufgabe (3.1) oft Funktionen mit Nullrandbedingungen betrachtet werden, wird zum Schluss die folgende Definition präsentiert:

**Definition 3.1.3.** Die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_l$  wird mit  $H_0^l(\Omega)$  bezeichnet und es gilt:  $H_0^l(\Omega) \subset H^l(\Omega)$ .

Für Randwertaufgaben 2. Ordnung ist der Hilbertraum  $H^1(\Omega)$  von großer Bedeutung. In diesem Fall gilt dann auch:  $H^1(\Omega) \supset H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ .

Mit den neuen Erkenntnissen wird nun die Variationsformulierung der Aufgabe (3.1) angegeben. Multipliziert man die Gleichung  $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t)$  mit einer Testfunktion  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ , integriert über  $\Omega$  und führt die partielle Integration durch, so erhält man die **variationelle Formulierung**:

Sei  $V = H_0^1(\Omega)$ . Gesucht wird eine Funktion  $u(t) \in V$  mit  $u(0) = u_0 \in V$ , so dass

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v), \quad \forall v \in V \quad (3.2)$$

wobei  $(\phi_1, \phi_2) = \int_{\Omega} \phi_1 \phi_2 dx$  und  $a(\cdot, \cdot)$  eine beschränkte, V-elliptische Bilinearform auf  $V \times V$  ist.

**Definition 3.1.4 (Symmetrische, Beschränkte, V-elliptische Bilinearform).** Sei  $V$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  und der dazugehörigen Norm  $\|\cdot\|$ . Eine Bilinearform  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  heisst symmetrisch, wenn gilt:

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$$

Sie heisst beschränkt, wenn gilt:

$\exists k > 0$ :

$$|a(u, v)| \leq k \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$$

Sie heisst V-elliptisch, wenn gilt:

$\exists K > 0$ :

$$a(u, u) \geq K \|u\|^2 \quad \forall u \in V$$

**Definition 3.1.5 (Schwache Lösung).** Eine Funktion  $u \in H_0^1(\Omega)$  heisst schwache Lösung des Anfangs-Randwertproblems (3.1), falls  $u \in H_0^1(\Omega)$  (3.2) erfüllt. Dabei wird die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  wie folgt definiert:  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$ .

## 3.2 Diskretisierung in Ort und Zeit

Um die Wärmeleitungsgleichung (3.1) numerisch zu lösen, muss das Problem diskretisiert werden. Dabei wird das Problem zuerst bezüglich der räumlichen Variablen  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  und das Resultat anschließend bezüglich der Zeit  $t$  diskretisiert. Die räumliche Diskretisierung geschieht mittels der Finite-Elemente oder Finite-Differenzen-Methode. Die Finite-Elemente-Methode wird im Abschnitt 3.2.1 und die Finite-Differenzen-Methode im Abschnitt 3.2.2 näher erklärt. Im Abschnitt 3.2.3 wird außerdem kurz auf die Zeitdiskretisierung eingegangen.

Weiterführende Informationen, sowie einige Beispiele, können zum Beispiel den folgenden Medien entnommen werden: [Bra07], [GR94].

### 3.2.1 Finite Elemente

Die Methode der finiten Elemente ist ein Verfahren zur numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Dabei betrachtet man zuerst die variationelle Formulierung (3.2) des Ausgangsproblems (3.1).

Sei nun  $V_n \subset V$  ein endlichdimensionaler diskreter Funktionenraum mit  $\dim V_n = N$ , so erhält man das folgende diskrete Problem:

Gesucht wird ein  $u_n(t) \in V_n$ , so dass für alle  $t \in I$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_n(t), v_n) + a(u_n(t), v_n) = (f(t), v_n), \quad \forall v_n \in V_n \quad (3.3)$$

mit der Anfangsbedingung  $u_n(0) = u_n^0 \in V_n$ .

Sei also  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  eine Basis von  $V_n$ , so liefert die Darstellung der gesuchten Funktion

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \varphi_i(x) \quad (3.4)$$

die Galerkingleichungen für (3.3)

$$\sum_{i=1}^N u_i'(t)(\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^N u_i(t)a(\varphi_i, \varphi_j) = (f(t), \varphi_j), \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (3.5)$$

mit  $u_i(0) = \gamma_i^0$ , wobei  $u_n^0(x) = \sum_{i=1}^N \gamma_i^0 \varphi_i(x)$ .

Verwendet man nun die folgenden Abkürzungen

$$\begin{aligned} D &= (d_{ij}), & d_{ij} &= (\varphi_i, \varphi_j) \\ A &= (a_{ij}), & a_{ij} &= a(\varphi_i, \varphi_j) \\ \hat{f}(t) &= (f_i), & f_j &= (f, \varphi_j) \\ \hat{u}(t) &= (u_i) \end{aligned}$$

erhält man ein System von Differentialgleichungen in Matrixform, das zu (3.5) äquivalent ist

$$D(\hat{u}(t))' + A\hat{u}(t) = \hat{f}(t), \quad \text{mit } \hat{u}(0) = \gamma^0 \quad (3.6)$$

Dabei heißt  $D$  Massematrix und  $A$  die Steifigkeitmatrix.

Durch die geeignete Wahl von Basisfunktionen versucht man zu erreichen, dass das gerade beschriebene Gleichungssystem dünnbesetzt ist. Dazu zerlegt man bei der Methode der finiten Elemente das Gebiet  $\Omega$  in endlich viele, geometrisch einfache Teilgebiete, wie Dreiecke oder Rechtecke und verwendet Basisfunktionen, die nur lokal, das heißt nur auf wenigen Elemente der Zerlegung, ungleich Null sind, jedoch global, das heißt über Elementgrenzen hinweg, wohldefinierte Glattheitsbedingungen erfüllen.

In der vorliegenden Arbeit werden **rechteckige finite Elemente von Lagrange-Typ** benutzt. Dafür wird nun die folgende Definition angegeben.

**Definition 3.2.1 (Rechteckiges Element von Lagrange-Typ).** (Vgl. [Tis12] Seite 54 ff. mit  $d = 2$  und  $k = 1$ )  $(R, P, \Sigma)$  ist ein rechteckiges Element von Lagrange-Typ, falls

1.  $R$  ist ein Rechteck
2.  $P = Q_1(R)$
3.  $\Sigma = \{p(a) : a \in \mathfrak{K}_1(R)\}$

$Q_1$  ist dabei die Menge der Polynome, die in jeder Variable höchstens vom Grad 1 sind:

$$p(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2 \quad \forall p \in Q_k$$

Alle Polynome  $p \in Q_1$  sind dabei durch die Werte auf der Knotenpunktmenge, im vorliegenden Fall in den vier Eckpunkten des Rechtecks,

$$\mathfrak{K}_1(R) = \{x = (c_1 + i_1r_1, c_2 + i_2r_2) \in \mathbb{R}^2, i_j = \{0, 1\}, 1 \leq j \leq 2\}$$

wobei  $R = [c_1, c_1 + r_1] \times [c_2, c_2 + r_2]$ , eindeutig bestimmt.

Zum Schluss wird noch die Definition einer zulässigen Zerlegung des Gebietes  $\Omega$  mit rechteckigen Elementen von Lagrange-Typ, der sogenannten Triangulierung, gegeben.

**Definition 3.2.2 (Triangulierung).** (Vgl. [Tis12] Seite 56 ff. mit  $d=2$ ) Eine Triangulierung  $T(\bar{\Omega})$  eines Polyeders  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  mit rechteckigen Elementen von Lagrange-Typ ist eine endliche Menge

$$T(\bar{\Omega}) = \{(R_i, Q_1(R_i), \Sigma(R_i)), i = 1, \dots, M\}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M R_i$
2.  $\text{int}R_i \cap \text{int}R_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
3. Jeder Rand eines Elementes  $R_i$  gehört vollständig zu einem Element  $R_j$  oder zu  $\partial\Omega$
4.  $\mathfrak{K}(R_i) \cap R_j = R_i \cap \mathfrak{K}(R_j)$

Weiterhin nennt man

$$\mathfrak{K}(\bar{\Omega}) := \bigcup_{i=1}^M \mathfrak{K}(R_i)$$

die **Knotenpunktmenge der Triangulierung** und für alle  $a \in \mathfrak{K}(\bar{\Omega})$  bezeichnet man mit

$$\Lambda(a) := \{i : a \in \mathfrak{K}(R_i)\}$$

die **Indexmenge** aller Elemente, die den Knoten  $a$  besitzen.

### 3.2.2 Finite Differenzen

Die Methode der Finiten Differenzen ist ebenfalls ein Verfahren zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen. Man betrachtet dabei zuerst das Ausgangsproblem (3.1) und überdeckt das Rechengebiet  $\Omega = [0, 1]^2$  mit einem Gitter zur Diskretisierung der Raumvariablen. Einfachheit halber geht man hier von einem äquidistanten Gitter mit den Gitterpunktkoordinaten

$$x_1^{(i)} = i \cdot h \quad \text{und} \quad x_2^{(j)} = j \cdot h \quad \text{mit} \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

aus, wobei  $n$  die Anzahl der Gitterpunkte in einer Raumrichtung und  $h = \frac{1}{n}$  die entsprechende Schrittweite darstellt. Das Diskretisierungsgitter

$$\bar{\Omega}_h = \left\{ (x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) : i, j = 0, \dots, n \right\}$$

lässt sich dabei in innere Punkte

$$\Omega_h = \left\{ (x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) : i, j = 1, \dots, n-1 \right\}$$

und Randpunkte

$$\partial\Omega_h = \bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h$$

aufteilen. Als nächsten Schritt wird der Differentialoperator  $\Delta u$  durch den Differenzenoperator

$$\Delta_h u(x_1, x_2) = \frac{1}{h^2} [-4u(x_1, x_2) + u(x_1+h, x_2) + u(x_1-h, x_2) + u(x_1, x_2+h) + u(x_1, x_2-h)]$$

ersetzt, was zu folgendem System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen  $u_h(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, t)$ , aufgefasst als Funktionen von  $t$ , mit  $i, j = 1, \dots, n-1$ , führt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_h(\underline{x}, t)}{\partial t} &= \Delta_h u_h(\underline{x}, t) + f(\underline{x}, t) & \underline{x} \in \Omega_h, t > 0 \\ u_h(\underline{x}, t) &= \gamma(\underline{x}, t) & \underline{x} \in \partial\Omega_h, t > 0 \\ u_h(\underline{x}, 0) &= u_0(\underline{x}) & \underline{x} \in \bar{\Omega}_h, t = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Das bedeutet also, dass in jedem Gitterpunkt  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$  das entsprechende  $u_h(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, t)$  gesucht wird, wobei die Anzahl der gesuchten Werte der Anzahl der inneren Punkte und damit  $(n-1)^2$  entspricht.

Das System (3.7) wird nun in die Matrixdarstellung überführt, wobei diese Darstellungsform von der Nummerierung der Gitterpunkte abhängig ist. Es gibt hierbei unterschiedliche Ansätze die Gitterpunkte zu nummerieren, wie zum Beispiel:

1. Zeilenweise Nummerierung
2. Spaltenweise Nummerierung
3. Lexinographische Nummerierung, d.h.  $P_k = (x_1^{(i_k)}, x_2^{(j_k)})$  mit  $k = (j_k - 1) \cdot (n - 1) + i_k$

Das System (3.7) in Matrixschreibweise sieht nun wie folgt aus:

$$\begin{aligned} U'(t) &= -M_h U(t) + F(t) \\ U(0) &= (u_0(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}))_{i,j=0,1,\dots,n} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Wobei bei lexinografischer Nummerierung der Gitterpunkte gilt:

$$M_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B & -I & 0 & \cdots & 0 \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -I \\ & & & -I & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2 \times (n-1)^2}$$

$$\text{mit } I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_h(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, t) \\ u_h(x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_h(x_1^{(n-1)}, x_2^{(1)}, t) \\ u_h(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_h(x_1^{(n-1)}, x_2^{(2)}, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_h(x_1^{(1)}, x_2^{(n-1)}, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_h(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, t) \end{pmatrix}$$

Der Vektor  $F(t)$  enthält die Randbedingungen und die Werte der Funktion  $f(x_1, x_2, t)$  und die Matrix  $M_h$  ist eine Blockdiagonalmatrix.

### 3.2.3 Zeitliche Diskretisierung

In diesem Abschnitt werden dem Leser kurz die numerischen Verfahren vorgestellt, welche für die Lösung des, durch die Semidiskretisierung entstandenen, Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (3.6), geeignet sind.

Das entstandene System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist steif, weswegen für die Lösung ein A-stabiles Verfahren verwendet werden sollte. So kann zum Beispiel das implizite Euler-Verfahren, das die Anforderung der A-Stabilität erfüllt, dafür verwendet werden.

Betrachtet man also ein Anfangswertproblem für ein System von Differentialgleichungen der Form:

$$u'(t) = Bu(t) + f(t), \quad u(0) = u_0$$

So hat das **implizite Euler-Verfahren** die Form

$$u_{i+1} = u_i + k(Bu_{i+1} + f(t_{i+1}))$$

wobei  $k$  der zeitliche Diskretisierungsparameter (Schrittweite) ist.

Andere geeignete Verfahren für die Zeitdiskretisierung können zum Beispiel [GR94] entnommen werden.

### 3.3 Dünne Gitter und die Kombinationstechnik

Die auf dem Dünngitterverfahren basierende Kombinationstechnik wird in dieser Arbeit zur Interpolation von Funktionen verwendet. Sie kann allerdings auch zur numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen benutzt werden. Bei der Theorie der dünnen Gitter spielt die sogenannte *Hierarchische Basis* eine wichtige Rolle, so wird bei der diskreten Funktionsdarstellung nicht, wie üblich, die konventionelle *Nodale Basis*, sondern die eben angesprochene Hierarchische Basis verwendet, wobei die Teilräume der Hierarchischen Basis, die nicht entscheidend zu der Darstellung der Funktion auf einem *Dünnen Gitter* beitragen, einfach weggelassen werden.

In den nachfolgenden Unterkapiteln werden nun die erwähnten Begriffe erläutert, sowie die Vor- und Nachteile der Dünnen Gitter und der Kombinationstechnik vorgestellt. Zum Einstieg betrachtet man zuerst den eindimensionalen Fall. Als Quellen wird hier auf [Gar04], [Gar11a], [Gar98], [GG08], [Kra02], sowie [Zen90] verwiesen.

#### 3.3.1 Nodale und Hierarchische Basis in einer Dimension

Sei  $\bar{\Omega} = [0, 1]$  ein abgeschlossenes Intervall und

$$\Omega_l = \{x_i := i \cdot h_l, 0 \leq i \leq 2^l\}$$

ein äquidistantes Gitter vom Level  $l$ , mit der Maschenweite  $2^{-l}$ . Betrachtet man nun partielle Differentialgleichungen mit Dirichlet-Randwerten, welche, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, auf den homogenen Fall reduziert werden können, so werden hier die Randfunktionen vernachlässigt. Das heißt also, dass keine Basisfunktionen für den Rand benötigt werden. Aus diesem Grund betrachtet man nun nur die *innere Gitterpunkte*.

Man benutzt nun die *Standard-Hutfunktionen*

$$\phi_{l,i}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} = 1 - \frac{x_i-x}{h_l}, & x \in [x_i - h_l, x_i] \\ 1 + \frac{x_i-x}{h_l}, & x \in [x_i, x_i + h_l] \\ 0 : & \text{sonst} \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq 2^l - 1 \quad (3.9)$$

um eine Basis zu definieren. Eine solche Basis wird auch *Nodale Basis* oder *Knotenbasis* genannt. Der Index  $i$  steht hierbei für die Lage eines Gitterpunktes oder der, zu diesem Gitterpunkt zugehörigen, Basisfunktion und  $[x_i - h_l, x_i + h_l]$  bezeichnet den Träger der Basisfunktion  $\phi_{l,i}$ . Die Gesamtheit dieser Basisfunktionen spannt den zugehörigen diskreten, endlich-dimensionalen Funktionenraum  $V_l$ , der stückweise linearen Funktionen auf. Es gilt also:

$$V_l = \text{span}\{\phi_{l,i}, 1 \leq i \leq 2^l - 1\}. \quad (3.10)$$

Der Raum  $V_l$  kann allerdings auch mit den Hierarchischen Basisfunktionen aufgespannt werden. Dafür definiert man zuerst die *hierarchischen Teilräume*  $W_l$ , wie folgt:

$$W_l := \text{span}\{\phi_{l,i} : i \in I_l\} \quad (3.11)$$

mit der zugehörigen Indexmenge  $I_l$

$$I_l := \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 2^l - 1, i \text{ ungerade}\} \quad (3.12)$$

Damit kann der Raum  $V_l$  nun folgendermaßen beschrieben werden:

$$V_l = \bigoplus_{k \leq l} W_k \quad (3.13)$$

Dabei wird die Familie von Funktionen

$$\{\phi_{k,i}, i \in I_k\}_{k=1}^l \quad (3.14)$$

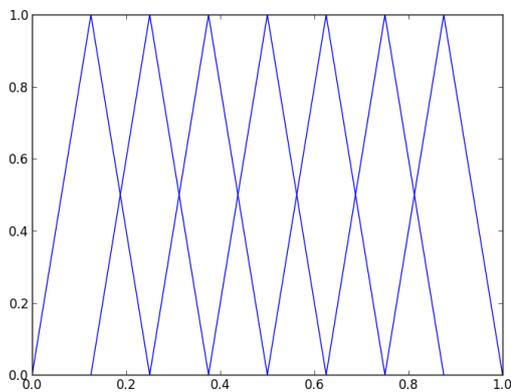
die *hierarchische Basis* von  $V_l$  genannt. Dessen Basisfunktionen sind nun nicht mehr nur punktbezogen, d.h. jedem Gitterpunkt  $x_i$  wird eine zugehörige Basisfunktion der hierarchischen Basis zugeordnet, sondern auch hierarchisch geschachtelt. Dieser Sachverhalt wird durch die Abbildung 3.1 verdeutlicht, wobei auch der Unterschied zwischen der Nodalen Basis und der Hierarchischen Basis aufgezeigt wird.

Desweiteren sind die Träger der hierarchischen Basisfunktionen  $\phi_{k,i}$  in jedem Funktionenraum  $W_l$  paarweise disjunkt, wobei sie auch, je nach Hierarchieebene, unterschiedlich groß sind.

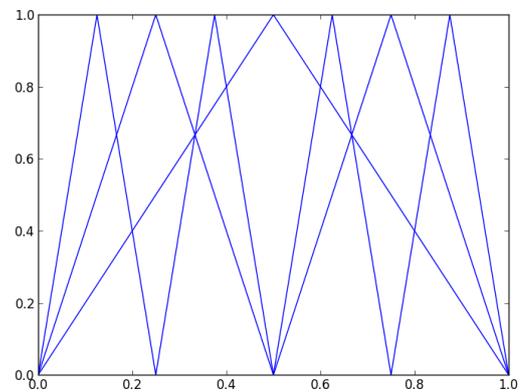
Eine Funktion  $u_l \in V_l$  kann nun mit Hilfe der hierarchischen Teilraumzerlegung wie folgt dargestellt werden

$$u_l(x) = \sum_{k=1}^l \sum_{i \in I_k} \alpha_{k,i} \cdot \phi_{k,i}(x) \quad (3.15)$$

Wobei erwähnt werden muss, dass diese Funktionsdarstellung zu der Darstellung der Funktion  $V_l \ni u(x) = \sum_{i=1}^{l-1} u_i \cdot \phi_i(x)$  mit der Nodalen Basis,  $\phi_i$  seien hier die Basisfunktionen der Nodalen Basis, äquivalent ist.  $\alpha_{k,i}$  bezeichnet man dabei als *hierarchische Überschüsse*.



(a) Nodale Basis für  $V_3$



(b) Hierarchische Basis für  $V_3$

Abbildung 3.1: Nodale und Hierarchische Basis der Stufe 3

### 3.3.2 Nodale und Hierarchische Basis im d-dimensionalen Raum

In diesem Kapitel werden die Erkenntnisse aus dem Abschnitt 3.3.1 im Hinblick auf einen d-dimensionalen Raum verallgemeinert.

Als Quellen wird hier auf [Gar04], [Gar11a], [Gar98], [GG08], [Kra02],[Bun92], sowie [Zen90] verwiesen.

#### 3.3.2.1 Raumzerlegung mit der Nodalen Basis

Sei  $\bar{\Omega} = [0, 1]^d$  und  $\underline{l} := (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{N}^d$  ein Multiindex für den gilt:

$$\begin{aligned} |\underline{l}|_1 &= \sum_{t=1}^d l_t \\ |\underline{l}|_\infty &= \max_t l_t \\ \underline{l} \leq \underline{k} &\Leftrightarrow \forall t \ l_t \leq k_t \\ \underline{k}^{\underline{l}} &= (k_1^{l_1}, \dots, k_d^{l_d}) \end{aligned}$$

so bezeichnet  $\Omega_{\underline{l}}$  ein d-dimensionales Gitter mit der Maschenweite  $h_{\underline{l}} := (h_{l_1}, \dots, h_{l_d}) := (2^{-l_1}, \dots, 2^{-l_d})$ .  $\Omega_{\underline{l}}$  hat im allgemeinen verschiedene Maschenweiten in den verschiedenen Koordinatenrichtungen, ist hier jedoch äquidistant und enthält die Punkte

$$x_{\underline{l}, \underline{j}} = (x_{l_1, j_1}, \dots, x_{l_d, j_d}) \quad (3.16)$$

mit  $x_{l_t, j_t} = j_t \cdot h_t = j_t \cdot 2^{-l_t}$  und  $j_t = 1, \dots, 2^{l_t} - 1$ , das heißt also, dass analog zu dem 1-dimensionalen Fall im Abschnitt 3.3.1 nur die inneren Gitterpunkte betrachtet werden.

Für jeden Gitterpunkt von  $\Omega_{\underline{l}}$  wird nun eine d-dimensionale stückweise d-lineare Basisfunktion  $\phi_{\underline{l}, \underline{j}}$  als Tensorprodukt 1-dimensionaler Basisfunktionen aus (3.9), wie folgt, definiert:

$$\phi_{\underline{l}, \underline{j}} = \prod_{t=1}^d \phi_{l_t, j_t}(x_t) \quad (3.17)$$

wobei der Multi-Index  $\underline{l} \in \mathbb{N}^d$  den Level beziehungsweise die Diskretisierungsstufe des Gitters, des Raums oder auch einer Funktion und der Multi-Index  $\underline{j} \in \mathbb{N}^d$  die Lage des Punktes  $x_{\underline{l}, \underline{j}}$  und der dazugehörigen Basisfunktion  $\phi_{\underline{l}, \underline{j}}(\underline{x})$  angibt.

Die in (3.17) definierten Basisfunktionen spannen den Raum  $V_{\underline{l}}$  der stückweise d-linearen Funktionen auf dem Gitter  $\Omega_{\underline{l}}$ , die auf dem Rand  $\delta\bar{\Omega}$  verschwinden, auf:

$$V_{\underline{l}} := \text{span}\{\phi_{\underline{l}, \underline{j}} \mid l_t > 0, j_t = 1, \dots, 2^{l_t} - 1, t = 1, \dots, d\} \quad (3.18)$$

Zur visuellen Verdeutlichung wird nun in der Abbildung 3.2 die Anordnung der, zu den Basisfunktionen  $\phi_{\underline{l}, \underline{j}}$  gehörigen, Gitterpunkte in 2-dimensionalen Räumen  $V_{(l_1, l_2)}$  für verschiedene  $l_1$  und  $l_2$  dargestellt. In der Abbildung 3.4 sieht man die Basisfunktionen der nodalen Basis von  $V_{(3,3)}$ .

#### 3.3.2.2 Hierarchische Teilraumzerlegung

Mit den Bezeichnungen aus dem vorherigen Unterkapitel definiert man die hierarchischen Differenzräume

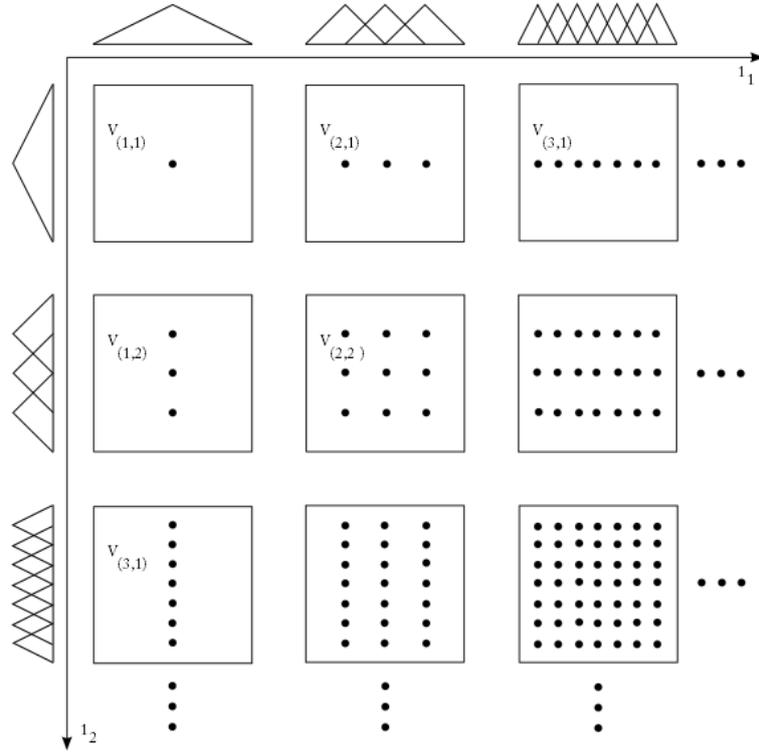


Abbildung 3.2: Stützstellen der Basisfunktionen  $\phi_{\underline{l},j}$  in den zweidimensionalen Räumen  $V_{l_1, l_2}$ . Die Basisfunktionen werden als Tensorprodukt der am Rand angezeichneten Standard-Hutfunktionen gebildet.

$$W_{\underline{l}} := V_{\underline{l}} \setminus \bigcup_{t=1}^d V_{\underline{l}-\underline{e}_t} \quad (3.19)$$

wobei  $\underline{e}_t = (0 \dots 0 \overbrace{1}^t 0 \dots 0)$  den t-ten Einheitsvektor bezeichnet. Die Definition (3.19) bedeutet, dass  $W_{\underline{l}}$  aus den Basisfunktionen  $\phi_{\underline{l},j} \in V_{\underline{l}}$  besteht, die nicht in einem  $V_{\underline{k}}$  enthalten sind, der kleiner als  $V_{\underline{l}}$  ist. Mit Hilfe der Differenzräume  $W_{\underline{l}}$  können die Räume  $V_{\underline{l}}$  wie folgt definiert werden

$$V_{\underline{l}} := \bigoplus_{k_1=1}^{l_1} \cdots \bigoplus_{k_d=1}^{l_d} W_{\underline{k}} = \bigoplus_{\underline{k} \leq \underline{l}} W_{\underline{k}} \quad (3.20)$$

Im Spezialfall  $n = l_1 = \dots = l_d$ , für  $\underline{l} = (l_1, \dots, l_d)$ , kann die folgende Kurzschreibweise verwendet werden,  $V_{(n, \dots, n)} = V_n$ , mit dem zugehörigen Gitter  $\Omega_{(n, \dots, n)} = \Omega_n$ , wobei der Raum  $V_n$  analog zu (3.20) als direkte Summe der teilträume  $W_{\underline{l}}$  definiert werden kann

$$V_n = \bigoplus_{l_1=1}^n \cdots \bigoplus_{l_d=1}^n W_{\underline{l}} = \bigoplus_{|\underline{l}|_{\infty} \leq n} W_{\underline{l}} \quad (3.21)$$

Führt man nun die Indexmengen

$$B_{\underline{l}} := \{\underline{j} \in \mathbb{N}^d | j_t = 1, \dots, 2^{l_t} - 1, j_t \text{ ungerade}, t = 1, \dots, d\} \quad (3.22)$$

ein, so können die hierarchischen Differenzräume wie folgt umschrieben werden

$$W_{\underline{l}} := \text{span}\{\phi_{\underline{l}, \underline{j}} | l_t > 0, \underline{j} \in B_{\underline{l}}, t = 1, \dots, d\} \quad (3.23)$$

Die Familie von Funktionen  $\{\phi_{\underline{l}, \underline{j}}, \underline{j} \in B_{\underline{l}}\}_{\underline{l}=1}^n$  bezeichnet man dabei, wie auch im eindimensionalen Fall, als die hierarchische Basis des Raumes  $V_n$  aus (3.21). Die Basisfunktionen der hierarchischen Basis des Raumes  $V_3$  sieht man in der Abbildung 3.4. Es muss ausserdem erwähnt werden, dass die Träger der Basisfunktionen  $\phi_{\underline{l}, \underline{j}}$ , die  $W_{\underline{l}}$  aufspannen, disjunkt sind, wie es auch schon im eindimensionalen Fall, im Abschnitt 3.3.1, diskutiert wurde. Diese Tatsache, sowie die Größe der Träger der Basisfunktionen in den zweidimensionalen Teilräumen  $W_{(l_1, l_2)}$ , wird in der Abbildung 3.3 veranschaulicht.

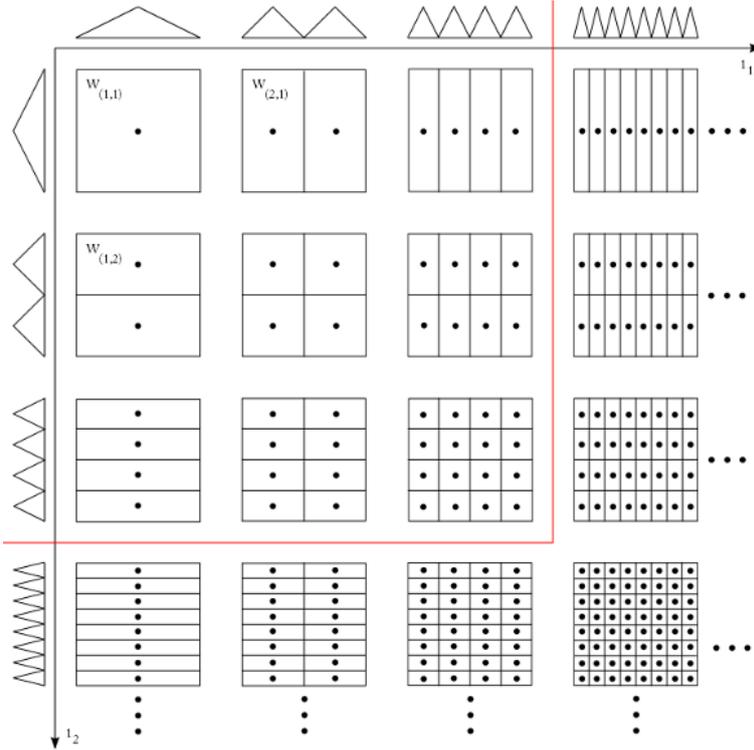
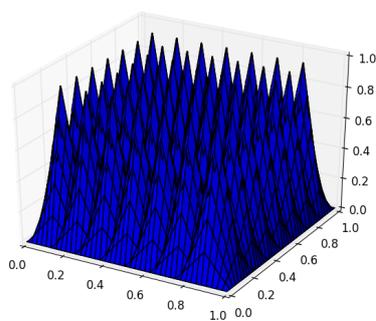


Abbildung 3.3: Stützstellen und Träger der Basisfunktionen  $\phi_{\underline{l}, \underline{j}}$  in den zweidimensionalen Räumen  $W_{l_1, l_2}$ . Die Basisfunktionen werden als Tensorprodukt der am Rand angezeichneten Standard-Hutfunktionen gebildet. Aus den rotumrandeten Teilräumen setzt sich der Raum  $V_3$  zusammen.

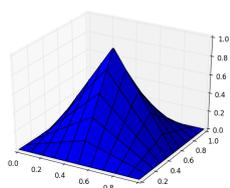
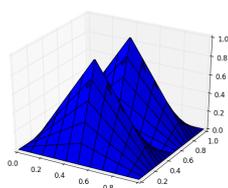
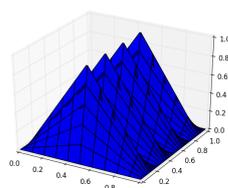
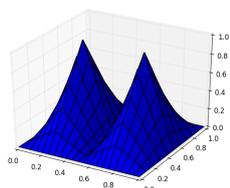
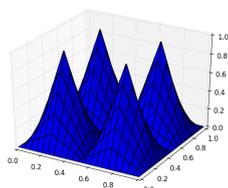
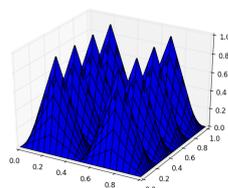
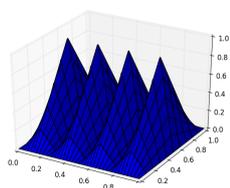
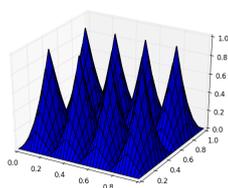
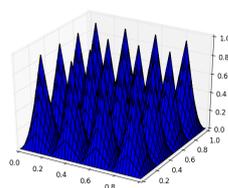
Abschließend lässt sich eine Aussage über die Dimension der Teilräume  $W_{\underline{l}}$ , die durch die Anzahl der zugehörigen Basisfunktionen gegeben ist, treffen. So gilt:

$$\dim(W_{\underline{l}}) = 2^{l_1-1} \cdot \dots \cdot 2^{l_d-1} = 2^{|\underline{l}-1|} \quad (3.24)$$

Dadurch kann nun auch die Dimension des Raums  $V_{\underline{l}}$  näher bestimmt werden. Es gilt der folgende Satz.



(a) Nodale Basis

(b)  $W_{(1,1)}$ (c)  $W_{1,2}$ (d)  $W_{(1,3)}$ (e)  $W_{(2,1)}$ (f)  $W_{2,2}$ (g)  $W_{2,3}$ (h)  $W_{(3,1)}$ (i)  $W_{(3,2)}$ (j)  $W_{(3,3)}$ Abbildung 3.4: Nodale und hierarchische Basis von  $V_{(3,3)}$

**Satz 3.3.1.** *Die Dimension des Vollgitterraumes  $V_{\underline{l}}$  entspricht der Anzahl der inneren Gitterpunkte des dazugehörigen Gitters  $\Omega_{\underline{l}}$  und beträgt:*

$$\dim(V_{\underline{l}}) = (2^{l_1} - 1) \cdot \dots \cdot (2^{l_d} - 1) \quad (3.25)$$

Dieses Ergebnis kann für  $V_n$  aus (3.21) zu  $\dim(V_n) = (2^n - 1)^d = \mathcal{O}(h_n^d)$  umgeformt werden und gibt gleichzeitig die Anzahl der inneren Gitterpunkte des dazugehörigen Gitters  $\Omega_n$  an.

### 3.3.3 Interpolation und Interpolationsfehler im Vollgitterraum $V_n$

Man betrachtet nun, nach [Bun92], die Menge der Funktionen  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit stetigen gemischten Ableitungen bis zur Ordnung  $2d$  auf  $\bar{\Omega}$ , die auf dem Rand  $\delta\bar{\Omega}$  verschwinden und bezeichnet diese mit  $V$ , so dass mit  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  gilt

$$V := \{u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \frac{\partial^{|\underline{\alpha}|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), |\underline{\alpha}|_{\infty} \leq 2, u|_{\delta\bar{\Omega}} = 0\} \quad (3.26)$$

Eine Funktion  $u \in V$  wird nun durch den  $d$ -dimensionalen, stückweise multilinearen Interpolanten  $u_n \in V_n$ , den sogenannten *Vollgitterinterpolanten*, approximiert. Das Ziel dieses Abschnittes ist es nun die obere Schranke für die Maximumsnorm

$$\|u\|_{\infty} := \max_{\underline{x} \in \bar{\Omega}} |u(\underline{x})|$$

und die  $L_2$ -Norm

$$\|u\|_2 := \left( \int_{\bar{\Omega}} |u(\underline{x})|^2 d\underline{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

des auftretenden Fehlers zu bestimmen. Dazu werden nun 2 Halbnormen für  $u \in V$ , wie folgt, definiert

$$\begin{aligned} |u|_{\infty} &:= \left\| \frac{\partial^{2d} u}{\partial x_1^2 \dots \partial x_d^2} \right\|_{\infty} = \max_{\underline{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^{2d} u}{\partial x_1^2 \dots \partial x_d^2} \right| \\ |u|_2 &:= \left\| \frac{\partial^{2d} u}{\partial x_1^2 \dots \partial x_d^2} \right\|_2 = \left( \int_{\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^{2d} u}{\partial x_1^2 \dots \partial x_d^2} \right|^2 d\underline{x} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Als nächstes kann die Funktion  $u \in V$ , sowie der Interpolant  $u_n \in V_n$  mit Hilfe der hierarchischen Teilraumzerlegung (3.21) als Summen von Funktionen  $u_{\underline{l}} \in W_{\underline{l}}$  geschrieben werden

$$u = \sum_{\underline{l} \in \mathbb{N}^d} u_{\underline{l}} = \sum_{\underline{l} \in \mathbb{N}^d} \sum_{j \in B_{\underline{l}}} \alpha_{\underline{l}, j} \phi_{\underline{l}, j}(\underline{x}) \quad (3.27)$$

$$u_n = \sum_{|\underline{l}|_{\infty} \leq n} u_{\underline{l}} = \sum_{|\underline{l}|_{\infty} \leq n} \sum_{j \in B_{\underline{l}}} \alpha_{\underline{l}, j} \phi_{\underline{l}, j}(\underline{x}) \quad (3.28)$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass jede Funktion  $u_{\underline{l}} \in W_{\underline{l}}$  als Linearkombination der Basisfunktionen  $\phi_{\underline{l},j}$  des hierarchischen Teilraums  $W_{\underline{l}}$  dargestellt werden kann

$$u_{\underline{l}}(\underline{x}) = \sum_{j \in B_{\underline{l}}} \alpha_{\underline{l},j} \phi_{\underline{l},j}(\underline{x}) \quad (3.29)$$

$\alpha_{\underline{l},j}$  werden dabei, analog zum eindimensionalen Fall, als *hierarchische Überschüsse* bezeichnet und können folgendermassen berechnet werden

$$\alpha_{\underline{l},j} = \prod_{t=1}^d -\frac{h_{l_t}}{2} \int_{\Omega} \phi_{\underline{l},j}(\underline{x}) \frac{\partial^{2d} u(\underline{x})}{\partial x_1^2 \dots \partial x_d^2} d\underline{x} \quad (3.30)$$

Bevor nun die obere Schranke für den Interpolationsfehler angegeben werden kann, müssen noch einige Hilfsaussagen vorgestellt werden, welche einige wichtige Eigenschaften der Basisfunktionen  $\phi_{\underline{l},j}$  der hierarchischen Teilräume  $W_{\underline{l}}$ , sowie der hierarchischen Überschüsse liefern. Ausserdem wird auch eine Abschätzung für den Beitrag der Funktionen  $u_{\underline{l}} \in W_{\underline{l}}$  für unterschiedliche  $\underline{l} \in \mathbb{N}^d$  zum Interpolanten  $u_n \in V_n$  der Funktion  $u \in V$  gegeben.

Für Beweise der nachfolgenden Aussagen, sowie des Ausdrucks (3.30) wird auf [Bun92] verwiesen.

**Lemma 3.3.2.** *Für jede Basisfunktion  $\phi_{\underline{l},j} \in W_{\underline{l}}$  gilt:*

$$\begin{aligned} \|\phi_{\underline{l},j}\|_{\infty} &= 1 \\ \|\phi_{\underline{l},j}\|_2 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{d}{2}} \cdot h_{l_1}^{\frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot h_{l_d}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{d}{2}} \cdot 2^{-\frac{|\underline{l}|_1}{2}} \end{aligned}$$

**Lemma 3.3.3.** *Für die hierarchischen Überschüsse aus (3.29) der Form (3.30) gilt:*

$$\begin{aligned} |\alpha_{\underline{l},j}| &\leq \frac{|u|_{\infty}}{2^d} \cdot h_{l_1}^2 \cdot \dots \cdot h_{l_d}^2 = \frac{|u|_{\infty}}{2^d} \cdot 2^{-2|\underline{l}|_1} \\ |\alpha_{\underline{l},j}| &\leq \frac{|u|_{\text{supp}(\phi_{\underline{l},j})|_2}{6^{\frac{d}{2}}} \cdot h_{l_1}^{\frac{3}{2}} \cdot \dots \cdot h_{l_d}^{\frac{3}{2}} = \frac{|u|_{\text{supp}(\phi_{\underline{l},j})|_2}{6^{\frac{d}{2}}} \cdot 2^{-\frac{3|\underline{l}|_1}{2}} \end{aligned}$$

**Lemma 3.3.4.** *Für den Beitrag der Funktion  $u_{\underline{l}} \in W_{\underline{l}}$  zum Interpolanten  $u_n \in V_n$  der Funktion  $u \in V$  gilt die folgende Abschätzung:*

$$\begin{aligned} \|u_{\underline{l}}\|_{\infty} &\leq \frac{|u|_2}{2^d} \cdot h_{l_1}^2 \cdot \dots \cdot h_{l_d}^2 = \frac{|u|_{\infty}}{2^d} \cdot 2^{-2|\underline{l}|_1} \\ \|u_{\underline{l}}\|_2 &\leq \frac{|u|_2}{3^d} \cdot h_{l_1}^2 \cdot \dots \cdot h_{l_d}^2 = \frac{|u|_2}{3^d} \cdot 2^{-2|\underline{l}|_1} \end{aligned}$$

Mit diesen Lemmata ist es nun möglich, den auftretenden Interpolationsfehler  $u - u_n$  nach oben abzuschätzen. Die Ergebnisse werden im folgenden Satz festgehalten

**Satz 3.3.5.** *Seien  $u \in V$  eine Funktion und  $u_n \in V_n$  ihr Interpolant der Form (3.27) gegeben, so gilt die für den Interpolationsfehler  $u - u_n$  die folgende Abschätzung:*

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_{\infty} &\leq \frac{d \cdot |u|_{\infty}}{6^d} \cdot 2^{-2n} = \frac{d \cdot |u|_{\infty}}{6^d} \cdot h_n^2 = \mathcal{O}(h_n^2) \\ \|u - u_n\|_2 &\leq \frac{d \cdot |u|_2}{9^d} \cdot 2^{-2n} = \frac{d \cdot |u|_2}{9^d} \cdot h_n^2 = \mathcal{O}(h_n^2) \end{aligned}$$

### 3.3.4 Dünne Gitter

An der Abschätzung aus Lemma 3.3.4 sieht man, dass bei wachsendem  $|l|_1$  der Beitrag von  $u_l \in W_l$  zum Interpolanten  $u_n \in V_n$  immer kleiner wird. Diese Erkenntnis veranlasste Zenger in [Zen90] dazu, zweidimensionale sogenannte *dünne Gitter* einzuführen, indem hierarchische Basisfunktionen mit einem kleinen Träger aus dem Ansatzraum entfernt wurden. In [Bun92] wurden anschliessend  $d$ -dimensionale dünne Gitter betrachtet.

Für den  $d$ -dimensionalen Fall lässt sich der Dünngitterraum  $V_n^s$  und das dazugehörige dünne Gitter  $\Omega_n^s$  wie folgt darstellen:

$$V_n^s := \bigoplus_{|l|_1 \leq n+d-1} W_l \quad \Omega_n^s = \bigcup_{|l|_1 \leq n+d-1} \Omega_l \quad (3.31)$$

Für die hierarchische Darstellung des Dünngitterraums  $V_n^s$  braucht man weniger Teilräume  $W_l$  als für die Darstellung des Vollgitterraumes gleicher Stufe  $V_n$ , wobei die verwendeten Teilräume in ein dreieckiges Schema passen. Dieses Konzept wird in der Abbildung 3.6 veranschaulicht. Das zugehörige dünne Gitter  $\Omega_n^s$  erhält man, indem die den weggelassenen Teilräumen entsprechende Gitterpunkte aus dem vollen Gitter entfernt werden. Zur Veranschaulichung werden in der Abbildung 3.5 zwei zweidimensionale dünne Gitter mit den entsprechenden Randpunkten vorgestellt.

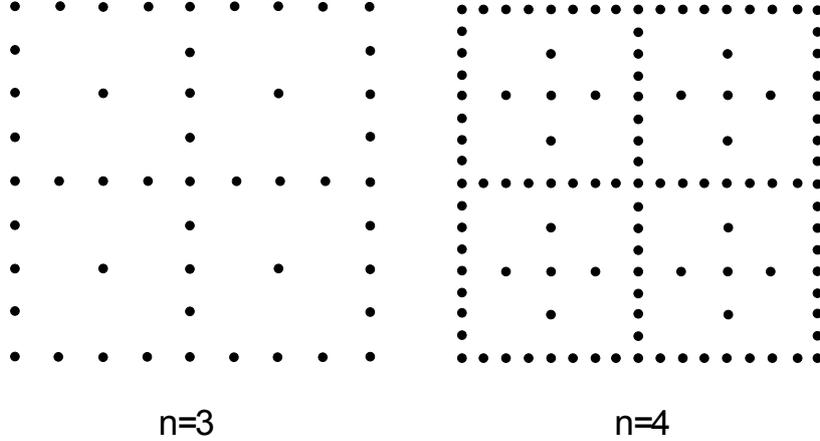


Abbildung 3.5: Dünne Gitter  $\Omega_n^s$  mit  $n = 3$  links und  $n = 4$  rechts

Analog zu der hierarchischen Darstellung der Funktion  $u \in V$ , sowie des Vollgitterinterpolanten  $u_n \in V_n$  aus (3.27), lässt sich auch der Dünngitterinterpolant  $u_n^s \in V_n^s$  als Summe der einzelnen  $u_l \in W_l$  schreiben:

$$u_n^s = \sum_{|l|_1 \leq n+d-1} u_l = \sum_{|l|_1 \leq n+d-1} \sum_{j \in B_l} \alpha_{l,j} \phi_{l,j}(x) \quad (3.32)$$

Als nächstes wird die Dimension des Dünngitterraumes  $V_n^s$ , die analog zu der Aussage des Satzes 3.3.1 der Anzahl der inneren Gitterpunkte des zugehörigen dünnen Gitters

$\Omega_n^s$  entspricht, bestimmt und im nachfolgenden Satz festgehalten. Für den Beweis dieses Satzes, sowie der nachstehenden Aussagen wird erneut auf [Bun92] verwiesen.

**Satz 3.3.6.** *Für die Dimension des Dünngitterraumes  $V_n^s$  gilt:*

$$\dim(V_n^s) = \sum_{|\mathbb{l}|_1 \leq n+d-1} 2^{|\mathbb{l}-1|} = \mathcal{O}(2^n \cdot n^{d-1}) = \mathcal{O}(h_n^{-1} \cdot (\log(h_n^{-1}))^{d-1}) \quad (3.33)$$

Die nächste Frage ist nun, wie genau die Dünngitterlösung  $u_n^s$  im Vergleich zu der Vollgitterlösung  $u_n$  ist. Um diese Frage beantworten zu können, muss der Interpolationsfehler  $u - u_n^s$  betrachtet werden. Der folgende Satz gibt nun Schranken für den eben angesprochenen Interpolationsfehler bezüglich der  $L_2$ -Norm und der Maximumsnorm (siehe Abschnitt 3.3.3) an.

**Satz 3.3.7.** *Sei eine Funktion  $u$  in  $V$ , sowie ihr stückweise  $d$ -linearer Dünngitterinterpolant  $u_n^s \in V_n^s$  gegeben, so gelten folgende Abschätzungen:*

$$\|u - u_n^s\|_\infty \leq \frac{|u|_\infty}{6^d} \cdot \left( 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot \binom{n+i-1}{i} \right) \cdot h_n^2 = \mathcal{O}(h_n^2 \cdot (\log(h_n^{-1}))^{d-1}) \quad (3.34)$$

$$\|u - u_n^s\|_2 \leq \frac{|u|_2}{9^d} \cdot \left( 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot \binom{n+i-1}{i} \right) \cdot h_n^2 = \mathcal{O}(h_n^2 \cdot (\log(h_n^{-1}))^{d-1}) \quad (3.35)$$

### 3.3.5 Zusammenfassung und Fazit

Zum Vollgitterinterpolanten tragen alle Teilräume  $W_{\mathbb{l}}$  bei, die in ein quadratisches Schema passen, wohingegen es beim Dünngitterinterpolanten nur die Teilräume sind, die in ein Dreiecksschema passen. Die Stützstellen der Basisfunktionen der verwendeten Teilräume bilden dabei einerseits ein *volles* und im anderen Fall ein sogenanntes *dünnes Gitter*, was in der Abbildung 3.6 veranschaulicht wird.

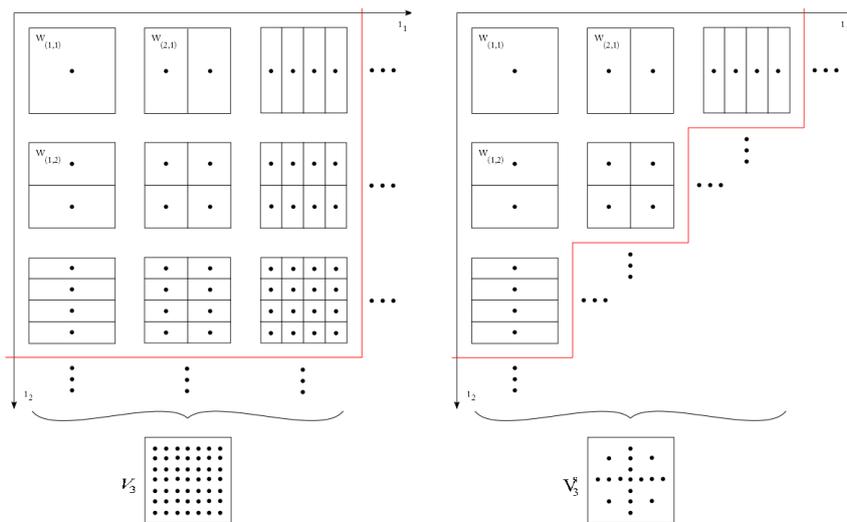


Abbildung 3.6: Räume  $V_3$  links und  $V_3^s$  rechts und ihre Teilräume  $W_{l_1, l_2}$

Dies führt dazu, dass die dünnen Gitter im Vergleich zu vollen Gittern deutlich weniger Gitterpunkte enthalten. So stehen den  $\mathcal{O}(h_n^{-d})$  (siehe Satz 3.3.1) Gitterpunkten

bei einem vollen Gitter lediglich  $\mathcal{O}(h_n^{-d} \cdot (\log(h_n^{-1}))^{d-1})$  (siehe Satz 3.3.6) Gitterpunkte bei einem dünnen Gitter gegenüber. Die Dimensionen der, zu den beschriebenen Gittern gehörenden, Funktionenräume  $V_n$  aus (3.21) und  $V_n^s$  aus (3.31) unterscheiden sich voneinander im gleichen Maße. Dieser Unterschied wird bei wachsendem  $d$  besonders deutlich. Der, wie gerade festgestellt wurde, beträchtlichen Reduktion an Gitterpunkten steht nur eine unwesentliche Verschlechterung der Genauigkeit gegenüber. So erhält man bei der Nutzung eines dünnen Gitters einen Interpolationsfehler der Ordnung  $\mathcal{O}(h_n^2 \cdot (\log(h_n^{-1}))^{d-1})$  (siehe Satz 3.3.7), wogegen bei einer Vollgitterlösung ein Interpolationsfehler der Ordnung  $\mathcal{O}(h_n^2)$  (siehe Satz 3.3.5) entsteht.

Der Gebrauch von dünnen Gittern bringt also eine Verringerung des Rechenaufwandes, sowie eine Speicherplatzersparnis mit sich.

Es muss noch erwähnt werden, dass in der Nichtlokalität der hierarchischen Basisfunktionen ein Nachteil der dünnen Gitter besteht. So entstehen beim konventionellen Finite-Element-Ansatz dünnbesetzte Matrizen, die eine Bandstruktur aufweisen und damit eine konstante Anzahl an nichtverschwindenden Einträgen in einer Zeile besitzen, wogegen die Matrizen in der Dünngitterbasis zwar eine kleinere Matrixdimension besitzen, dafür aber auch voller besetzt sind.

### 3.3.6 Kombinationstechnik

Die auf der Idee der dünnen Gitter basierende *Kombinationstechnik* wurde von Griebel in [GSZ92] eingeführt. Dabei erhält man eine Lösung auf einem dünnen Gitter durch eine geeignete Linearkombination verschiedener Vollgitterlösungen  $u_l \in V_l$ . Die so erhaltene Lösung  $u_n^c$  wird auch *Kombinationslösung* genannt und mit der *Kombinationsformel* berechnet

$$u_n^c = \sum_{q=0}^{d-1} (-1)^q \binom{d-1}{q} \sum_{|l|_1 = n+(d-1)-q} u_l \tag{3.36}$$

Wie in vorherigen Kapiteln muss auch hier  $l_t > 0$  gelten. In der Abbildung 3.7 werden die, bei der Kombinationstechnik verwendeten, vollen Gitter und das resultierende dünne Gitter für ein Beispiel in zwei Raumdimensionen, also  $d = 2$ , dargestellt.

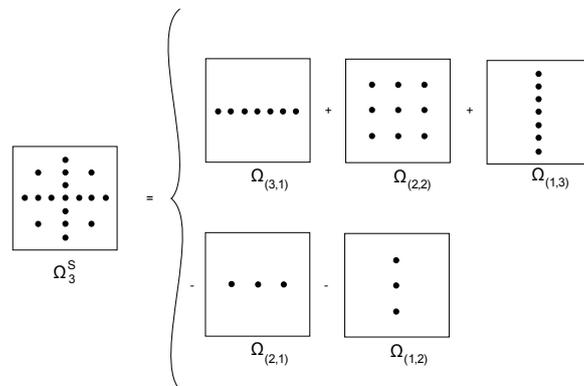


Abbildung 3.7: Kombinationstechnik der Stufe 3 in zwei Raumdimensionen,  $n = 3$  und  $d = 2$

Für  $d = 2$  kann die Kombinationsformel vereinfacht dargestellt werden

$$u_n^c = \sum_{l_1+l_2=n+1} u_{l_1,l_2} - \sum_{l_1+l_2=n} u_{l_1,l_2} \quad (3.37)$$

Der mit der Kombinationstechnik erhaltene Interpolant  $u_n^s$  einer Funktion  $u \in V$  ist gleich dem Dünngitterinterpolanten  $u_n^s \in V_n^s$ , siehe dazu [Gar11a] Seite 17 ff. und es gilt  $u_n^c \in V_n^s$ . Bei der Behandlung von partiellen Differentialgleichungen entspricht die Dünngitterkombinationslösung  $u_n^c$  im Allgemeinen jedoch nicht der Dünngitterlösung  $u_n^s$ . Wobei ihre Genauigkeit von der gleichen Ordnung  $\mathcal{O}(h_n^2 \cdot (\log(h_n^{-1}))^{d-1})$  ist, wenn die punktweise Fehlerentwicklung folgendermassen

$$u - u_{\underline{l}} = \sum_{i=1}^d \sum_{j_1, \dots, j_m \subset 1, \dots, d} c_{j_1, \dots, j_m}(h_{j_1}, \dots, h_{j_m}) \cdot h_{j_1}^{p_1} \dots h_{j_m}^{p_m}$$

mit nach oben beschränkten  $c_{j_1, \dots, j_m}(h_{j_1}, \dots, h_{j_m}) \leq \mathbf{k}$ , darstellbar ist. Für den, in (3.37) präsentierten, zweidimensionalen Fall muss für die Fehlerentwicklung entsprechend die folgende Darstellung gelten

$$u - u_{l_1, l_2} = c_1(h_{l_1})h_{l_1}^2 + c_2(h_{l_2})h_{l_2}^2 + d(h_{l_1}, h_{l_2})h_{l_1}^2 h_{l_2}^2$$

wobei  $c_1(h_{l_1})$ ,  $c_2(h_{l_2})$  und  $d(h_{l_1}, h_{l_2})$  geeignet gewählt und durch die positive Konstante  $\mathbf{k}$  nach oben beschränkt sind. Siehe dazu auch [GSZ92] Seite 5 ff. oder [Gar11a] Seite 18 ff..

Anstelle eines Problems der Größe  $\dim(V_n) = \mathcal{O}(h_n^{-d}) = \mathcal{O}(2^{nd})$  müssen bei der Kombinationstechnik nun also mehrere Probleme auf vollen Gittern gelöst werden, wobei die Größe der einzelnen Teilprobleme  $\dim(V_{\underline{l}}) = \mathcal{O}(h_n^{-1}) = \mathcal{O}(2^n)$  beträgt. Dies ist gleichzeitig auch die Anzahl der Gitterpunkte der erwähnten vollen Gitter. Die einzelnen Teilprobleme sind ausserdem voneinander unabhängig und können dadurch parallel betrachtet werden. Diese Möglichkeit zur einfachen Parallelisierung ist ein Vorteil der Kombinationstechnik. Da einzelne Punkte jedoch zu mehreren vollen Gittern gehören, werden dort auch mehrmals Lösungen berechnet. In der dadurch verursachten Zunahme des Rechenaufwandes besteht der Nachteil der Kombinationstechnik.

### 3.3.7 Verallgemeinerte Kombinationstechnik

In diesem Abschnitt werden nun *anisotrope dünne Gitter* definiert und die darauf aufbauende *verallgemeinerte Kombinationsformel* vorgestellt. Desweiteren werden auch die sogenannten *dünnen Gitter mit variablem Ausdünnungsgrad* erwähnt.

Die bisher getroffenen Aussagen bezogen sich auf regelmässige Voll- bzw. Dünngitter,  $\Omega_n$  und  $\Omega_n^s$ . Nun werden diese Aussagen für anisotrope Gitter, das heisst Gitter, die unterschiedliche Maschenweiten in verschiedenen Koordinatenrichtung haben, erweitert. Beispiele für regelmässige und anisotrope volle Gitter können in der Abbildung 3.2 gefunden werden.

Anisotrope dünne Gitter wurden in [GH95] eingeführt. Dabei werden zusätzliche Gewichtungsfaktoren  $\kappa_t$  für jede Koordinatenrichtung  $t$  gewählt und die neue Maschen-

weite  $\hat{h}_t$  durch  $\hat{h}_t := \kappa_t^{-1} \cdot h_t$  mit  $\kappa_t \in \mathbb{N}$  und  $\kappa_t \geq 2$ , bestimmt. Weiterhin wird in [GG98] eine verallgemeinerte Kombinationstechnik definiert, welche nun nachfolgend vorgestellt wird.

Sei nun der Levelindex  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d)$  eines anisotropen dünnen Gitters gegeben, so besteht die zugehörige Indexmenge  $I_{\underline{n}}$  aus allen Indizes  $\underline{k}$ , für die gilt:

$$\sum_{t=1}^d \frac{k_t}{n_t + d - 1} \leq 1, \quad k_t \geq 1 \quad (3.38)$$

Die Indexmenge  $I_{\underline{n}}$  ist dabei so gewählt, dass, wie vorher, nur innere Gitterpunkte betrachtet werden. Eine Indexmenge, wo auch die zugehörigen Randpunkte eines anisotropen dünnen Gitters betrachtet werden, wird in [Gar04] definiert. Durch die Vereinigung aller Gitter  $\Omega_{\underline{k}}$  mit  $\underline{k} \in I_{\underline{n}}$  entsteht ein anisotropes dünnes Gitter  $\Omega_{I_{\underline{n}}}$  vom Level  $\underline{n}$ . Der dazugehörige Dünngitterraum wird mit  $V_{I_{\underline{n}}}$  bezeichnet.

Für das beschriebene anisotrope dünne Gitter kann nun die Formel für die verallgemeinerte Kombinationstechnik definiert werden:

$$u_{I_{\underline{n}}}^c := \sum_{\underline{k} \in I_{\underline{n}}} \left( \sum_{\underline{z}=0}^1 (-1)^{|\underline{z}|} \cdot \chi^{I_{\underline{n}}}(\underline{k} + \underline{z}) \right) u_{\underline{k}}(\underline{x}) \quad (3.39)$$

$\chi^{I_{\underline{n}}}$  wird dabei die charakteristische Funktion von  $I_{\underline{n}}$  genannt und durch

$$\chi^{I_{\underline{n}}}(\underline{k}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \underline{k} \in I_{\underline{n}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.40)$$

definiert.

In Abbildung 3.8 werden die Indexmengen zweier Kombinationstechniken,  $I_{(4,4)}$  zur regulären Kombinationstechnik und  $I_{(7,4)}$  zur anisotropen Kombinationstechnik, dargestellt. Dabei steht jedes kleine Quadrat für ein einzelnes grobes Gitter mit unterschiedlichen Maschenweiten in verschiedenen Raumrichtungen, die durch die  $(l_1, l_2)$  festgelegt werden.

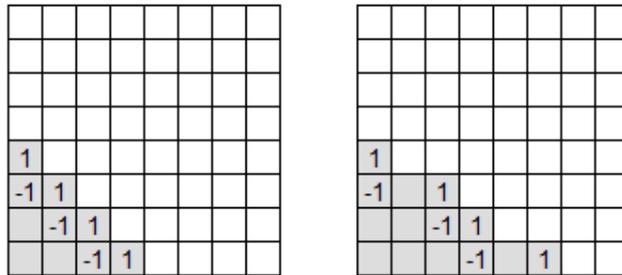


Abbildung 3.8: Reguläre Kombinationstechnik für den Index  $I_{(4,4)}$  links und anisotrope Kombinationstechnik für den Index  $I_{(7,4)}$  rechts. Die Indizes  $(k_1, k_2)$ , die nach (3.38) zum Indexset gehören, sind grau unterlegt. Die Indizes, deren dazugehöriges Gitter nach Kombinationsformel (3.39) einen Faktor ungleich Null aufweist, enthalten den zugehörigen Faktor  $\{-1, 1\}$ . Die Achsen sind dabei von Eins bis Acht nummeriert.

Die zu solchen anisotropen Gittern verwandten Funktionenräume werden in dieser Arbeit nicht näher betrachtet. Stattdessen wird auf [Gar04] oder auf die dortigen Referenzen verwiesen.

Wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt geschrieben, wird nun der Begriff der Ausdünnung und das dahinterstehende Konzept auf Grundlage von [Bun92] und [Kna00] grob erläutert. Ein anderes Konzept eines Ausdünnungsgrades für die Kombinationstechnik wird ausserdem in [Kra02] vorgestellt. Für nähere Informationen zu diesem Thema wird auf die oben genannten Quellen verwiesen.

Erste Ansätze zur Veränderung des Ausdünnungsgrades eines dünnen Gitters wurden bereits in [Bun92] dargestellt und anschliessend in [Kna00] und weiteren Arbeiten von Knappek verallgemeinert. Unter *Ausdünnung* versteht man dabei die Konstruktion von gröberen vollen Gitter, die bei der Kombinationstechnik verwendet werden, durch das Weglassen von Gitterpunkten in unterschiedlichen Raumrichtungen aus einem für das behandelte Problem geeigneten Vollgitter. Siehe dazu auch die Definition in [Kra02] auch Seite 28.

In [Kna00] werden für die Funktionen  $u \in H_{mix}^{t,l}$  Approximationsräume  $V_n^T$  konstruiert und anschliessend untersucht, wie gut diese diskreten Räume Funktionen aus  $H_{mix}^{t,l}$  approximieren. Auf eine genaue Definition der Räume  $H^{t,l}$  wird verzichtet und stattdessen auf die Definitionen in [Gar04] und [Kna00] verwiesen. Nachfolgend werden nun die Räume  $V_n^T$  definiert und wichtige Ergebnisse dazu aus [Kna00] präsentiert, wobei auf Beweise verzichtet und auf die Ursprungsquelle verwiesen wird.

**Definition 3.3.8.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $T \in (-\infty, 1]$ , so gilt für die Approximationsräume  $V_n^T$ :

$$V_n^T := \bigoplus_{l \in I_n^T} W_l \quad (3.41)$$

mit  $W_l$  aus (3.23) und der Multiindexmenge

$$I_n^T := \{l \in \mathbb{N}^d \mid |l|_1 - T|l|_\infty \leq n + d - 1 - Tn\} \quad (3.42)$$

mit der natürlichen Erweiterung für  $T = -\infty$

$$I_n^{-\infty} := \{l \in \mathbb{N}^d \mid |l|_\infty \leq n\} \quad (3.43)$$

Dabei erhält man für  $T = 0$  den Dünngitterraum  $V_n^s$  aus (3.31) und für  $T = -\infty$  den Vollgitterraum  $V_n$  aus (3.21). Setzt man die Indexmenge (3.42) in die Formel (3.39) ein, so erhält man die für beschriebene Probleme geeignete Kombinationstechnik. Weiterhin wird in [Gar04] auf Seite 65 auf die gleiche Art eine Indexmenge definiert, bei der auch die zugehörigen Randpunkte betrachten werden. In der Abbildung 3.9 werden analog zu der Abbildung 3.8 nun einige Kombinationstechniken zu ausgewählten Indexmengen aus (3.42) bzw. (3.43) schematisch dargestellt.

Zum Schluss werden noch einige wichtige Aussagen zu den Räumen  $V_n^T$  aus [Kna00], welche dort auch ausführlich bewiesen wurden, präsentiert. So gilt für die Dimension der diskreten Funktionenräume  $V_n^T$  der folgende Satz.

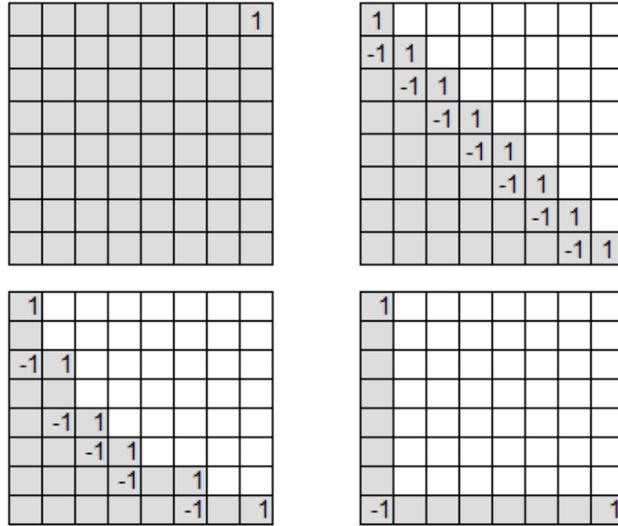


Abbildung 3.9: Kombinationstechniken zu den Indexmengen  $I_8^{-\infty}$ ,  $I_8^0$ ,  $I_8^{0.5}$  und  $I_8^1$  aus (3.42) bzw. (3.43). Die Indizes  $(l_1, l_2)$ , die nach (3.42) bzw. (3.43) zum Indexset gehören, sind grau unterlegt. Die Indizes, deren dazugehöriges Gitter nach Kombinationsformel (3.39) einen Faktor ungleich Null aufweist, enthalten den zugehörigen Faktor  $\{-1, 1\}$ . Die Achsen sind dabei von Eins bis Acht nummeriert.

**Satz 3.3.9.** Für die Dimension der Räume  $V_n^T$  gilt:

$$\dim(V_n^T) \leq \begin{cases} d \cdot 2^n & \text{für } T = 1 \\ \frac{d}{2} \left( \frac{1}{1-2^{-1/T-1}} \right)^d \cdot 2^n = \mathcal{O}(2^n) & \text{für } \frac{1}{n} < T < 1 \\ \mathcal{O}(2^{\frac{T-1}{T}n}) & \text{für } T < 0 \\ \mathcal{O}(2^{dn}) & \text{für } T = -\infty \end{cases} \quad (3.44)$$

und

$$\dim(V_n^T) \leq \left( \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + \mathcal{O}(n^{d-2}) \right) \cdot 2^n \mathcal{O}(2^n n^{d-1}) \quad (3.45)$$

Weiterhin wurde in [Kna00] ermittelt, dass das dünnste Gitter für die Indexmenge (3.42) mit der gewünschten Approximationsordnung für  $T = 0.5$  erreicht wird. Diese beiden Aussagen ermöglichen die „optimale“ Auswahl eines zur Approximation der Funktion  $u \in H_{mix}^{t,l}$  benötigten Approximationsraumes  $V_n^T$ , wobei „optimal“ so zu verstehen ist, dass das dazugehörige Gitter, im Vergleich zu einem vollen Gitter, möglichst wenige Freiheitsgrade/Gitterpunkte, bei gleichbleibender oder vergleichbarer Approximationsordnung, aufweist.

### 3.3.8 Kombinationstechnik für zeitabhängige Probleme

In diesem Abschnitt wird auf die Lösung von zeitabhängigen Problemen mit der Kombinationstechnik (3.36) eingegangen und die entsprechende Vorgehensweise erläutert.

Die Grundlage dafür bilden die Arbeiten von Kranz [Kra02] und Huber [Hub96], wo die Kombinationstechnik dazu verwendet wurde, die Navier-Stokes-Gleichungen zu lösen und damit Probleme aus der numerischer Strömungssimulation zu behandeln. Auch finanzmathematische Probleme, insbesondere Optionspreisbewertungsaufgaben, wie sie in Kapitel 2 beschrieben wurden, hängen von der Zeit ab.

In [Hub96] wurden zwei Möglichkeiten beschrieben, wie die Kombinationstechnik bei zeitabhängigen Problemen angewendet werden kann:

- Die Zeit wird als eine weitere Dimension betrachtet, sodass die Kombination nach Formel (3.36) erfolgt, allerdings mit  $d = d + 1$ .
- Die Kombinationslösung  $u_n^c$  wird nach Formel (3.36) alle  $p$  Zeitschritte  $\Delta t$ , in  $d$  Dimensionen, gebildet.

Bei der ersten der beiden Möglichkeiten wird, wie in [Hub96] erklärt, eine höhere Anforderung an die verwendete Diskretisierung gestellt, womit nur der zweite Ansatz ausführlicher erklärt und anschliessend verwendet wird. Analog zu dieser Arbeit wird auch hier nur auf die zweite Möglichkeit näher eingegangen.

Auf den verschiedenen anisotropen, vollen Gittern  $\Omega_n$  aus der Kombinationsformel (3.36) wird das gegebene Problem für mehrere Zeitschritte  $\Delta t$  gelöst und anschließend die Dünngitterlösung  $u_n^c$  gebildet. Die numerischen Experimente aus [Hub96] haben gezeigt, dass es nicht ausreichend ist, die Dünngitterlösung  $u_n^c$  ausschliesslich im Endzeitpunkt  $T$  zu bilden, da dies höhere Fehler verursacht. Stattdessen ist es unbedingt notwendig die einzelnen Lösungen  $u_n^t$ , wobei  $t$  den betrachteten Zeitpunkt angibt, auf den Gittern  $\Omega_n$ , nach einigen Zeitschritten  $\Delta t$  zu kombinieren. Bezeichnet man diese Anzahl an Zeitschritten mit  $p$ , so gilt die Aussage, dass die Wahl von  $p$  die Genauigkeit der Gesamtlösung beeinflusst, was auch in [Hub96] untersucht und beobachtet wurde. Die gerade präsentierten Aussagen werden in den Abbildungen 3.10 schematisch und 3.11 algorithmisch veranschaulicht. Dabei ist in der Abbildung 3.10 das Prinzip der zeitabhängigen Kombinationstechnik verdeutlicht. In der Abbildung 3.11 wird dagegen gezeigt, wann eine Dünngitterlösung aus den einzelnen Grobgitterlösungen gebildet werden muss.

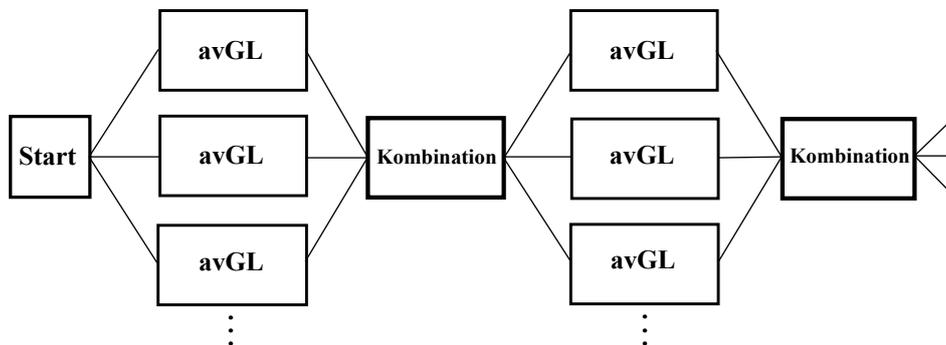


Abbildung 3.10: Schematische Darstellung der zeitabhängigen Kombinationstechnik. In „avGL“ wird das Problem auf anisotropen vollen Gittern aus der Formel (3.36) für  $p$  Zeitschritte gelöst. In „Kombination“ wird aus diesen Lösungen  $u_l$  eine Kombinationslösung  $u_n^c$  auf einem dünnen Gitter  $\Omega_n^s$  in einem Zeitschritt  $t = \Delta t \cdot p$  gebildet.

Zum Schluss muss noch erklärt werden, wie bzw. auf welchem Gitter eine Dünngitterlösung gebildet werden muss.

$\forall t_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  und  $t_i = i \cdot \Delta t$ , wobei  $\Delta t$  die Schrittweite bezüglich der Zeit ist .

1. Löse die Wärmeleitungsgleichung auf den Gittern  $\Omega_l$  aus der Formel (3.36).
2. Wenn  $(i \bmod p = 0)$  gilt, dann wird die Kombinationslösung  $u_n^c$  auf dem dünnen Gitter  $\Omega_n^s$  gebildet.

Abbildung 3.11: Algorithmische Beschreibung der zeitabhängigen Kombinationstechnik

Zur Bildung einer Lösung sind Gitteroperationen notwendig, wobei die Lösung auf zwei verschiedene Arten berechnet werden kann. Bei der expliziten Methode wird die Lösung  $u_n^c$  auf einem dünnen Gitter berechnet, was eine Speicherung eines solchen Gitters im Laufe der Implementierung erfordert. Bei der impliziten Methode wird eine Dünngitterlösung auf jedem einzelnen Gitter  $\Omega_l$  gebildet. Dabei werden Grobgitterlösungen von einem Gitter auf jedes andere Grobgitter abgebildet. Diese Verfahren, sowie die dazu nötigen Gittertransporte werden in [Kra02] und [Hub96] genau beschrieben und erläutert. Auf diese Quellen wird an dieser Stelle verwiesen.

### 3.3.9 Adaptive Kombinationstechnik

Die bisher in dieser Arbeit definierten (siehe (3.31)) und bei der Anwendung der Kombinationsformel (3.36) entstehenden dünnen Gitter  $\Omega_n^s$  besitzen eine regelmäßige Struktur und sind lokal von unterschiedlicher Feinheit, was auch in der Abbildung 3.5 veranschaulicht wird. Desweiteren ist die Darstellung solcher dünnen Gitter nicht von der konkreten Gestalt der darzustellenden Funktion abhängig, weshalb sie auch als *reguläre dünne Gitter* bezeichnet werden.

Damit sich die Genauigkeit einer Lösung einer partiellen Differentialgleichung verbessert, muss notwendigerweise die Maschenweite des verwendeten Diskretisierungsgitters verkleinert werden, was jedoch zu einem größeren Rechenaufwand, aufgrund von steigender Anzahl an Gitterpunkten, führt und daher nicht immer sinnvoll ist. Dieses Problem kann umgangen werden, indem die Maschenweite  $h_n$  nur an bestimmten Stellen, wo große Fehler erwartet werden, verfeinert wird. So muss in der Umgebung von Singularitäten die Gittermaschenweite besonders klein sein, wohingegen in den Bereichen des Problemgebiets, wo die Lösungsfunktion genügend glatt ist, auch eine gröbere Maschenweite ausreichend ist. Bezogen auf die in dieser Arbeit betrachteten Optionspreisaufgaben, wäre eine solche lokale Verfeinerung im Bereich des Ausübungspreises  $K$  sinnvoll, da die den Optionswert beschreibende Funktion dort einen Knick aufweist, was auch in der Abbildung 2.1 veranschaulicht wird. Diese Technik wird *adaptive Verfeinerung* genannt und die, dadurch entstehenden, *adaptiven dünnen Gitter* werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine grosse Rolle spielen.

In [Pfl10] auf den Seiten 20 ff. wird eine adaptive Verfeinerung eines dünnen Gitters vorgestellt. Ausgehend von einem regulären dünnen Gitter  $\Omega_n^s$  eines bestimmten Levels  $n$  wird dabei durch einen lokalen Fehlerschätzer der Gitterpunkt bestimmt, welcher als nächstes verfeinert werden soll, wonach die hierarchischen Kinder dieses Punktes dem Gitter hinzugefügt werden. Bei der Kombinationstechnik ist eine solche lokale Adaptivität nicht einfach so möglich, da auf allen Teilgittern dabei gleich verfeinert werden muss. Eine einfache Möglichkeit dieses Ziel zu erreichen ist die Einführung einer Gradierungsfunktion, wie dies in [Gar98] beschrieben und veranschaulicht wurde. Dabei wird die Position der Gitterpunkte eines äquidistanten Diskretisierungsgitters durch die gewählte Gradierungsfunktion verändert und so das Gitter an die zu bestimmende Funktion angepasst.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Technik verwendet, die in [NH00] eingeführt und untersucht wurde. Dabei wird die Kombinationstechnik auf adaptiv erzeugten Gittern angewendet. Die so genannte *adaptive Kombinationstechnik* aus [NH00] wird nun in diesem Abschnitt vorgestellt, wobei zuerst einige wichtige Begriffe definiert werden müssen.

Die, im Abschnitt 3.3.2.1 definierten,  $d$ -dimensionalen Gitter  $\Omega_l$ , werden nun als ein Verbund einzelner Zellen betrachtet, wobei aus Übersichtlichkeitsgründen und, da es für die vorgegebene Aufgabenstellung ausreichend ist,  $d = 2$  gesetzt wird. Die folgenden Definitionen lassen sich allerdings auch für  $d > 2$  verallgemeinern. Daraus ergibt sich für das Gitter  $\Omega_l$  mit  $l \in \mathbb{R}^2$  nun die folgende Definition

$$\Omega_l = \left\{ \Omega_{l_j} \mid 0 \leq j < 2^l, \Omega_{l_j} \subset \Omega \right\}, \quad (3.46)$$

wobei

$$\Omega_{\underline{l}\underline{j}} := \left[ j_1 \cdot 2^{-l_1}, (j_1 + 1) \cdot 2^{-l_1} \right] \times \left[ j_2 \cdot 2^{-l_2}, (j_2 + 1) \cdot 2^{-l_2} \right] \quad (3.47)$$

als Zelle bezeichnet wird und die Gitterpunkte des Gitters  $\Omega_{\underline{l}}$  auch die Eckpunkte der einzelnen Zellen  $\Omega_{\underline{l}\underline{j}}$  sind. Beginnend mit dem größten Gitter  $\Omega_{\underline{1}}$  wird durch Verfeinerung in beide Raumrichtungen,  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  und  $e = (1, 1)$ , eine unendliche Sequenz von Gittern  $\Omega_{\underline{1}+e_1}, \Omega_{\underline{1}+e_2}, \Omega_{\underline{1}+e}, \Omega_{\underline{1}+2\cdot e_1}, \Omega_{\underline{1}+2\cdot e_2}, \Omega_{\underline{1}+2\cdot e}, \dots$  erzeugt. Diese Menge kann wie folgt geschrieben werden

$$\mathbf{G}_{\infty} = \{ \Omega_{\underline{l}} | \underline{1} \leq \underline{l} \leq \underline{\infty} \} \approx \left\{ \Omega_{\underline{l}\underline{j}} | \underline{1} \leq \underline{l} \leq \underline{\infty}, \underline{0} \leq \underline{j} \leq 2^{\underline{l}} \right\} \quad (3.48)$$

und wird als „virtuelle Familie von Gittern“ oder auch als „virtuelle Familie von Zellen“ bezeichnet. Die Zellen  $\Omega_{\underline{l}\underline{j}}$  aus dieser Menge stehen in Beziehungen zueinander, welche durch die folgenden Definitionen charakterisiert werden können.

**Definition 3.3.10.** Gegeben sei eine Zelle  $\Omega_{\underline{l}\underline{j}} \in \mathbf{G}_{\infty}$ . So ist der **Vater** dieser Zelle in  $e_i$ -Richtung, für  $i \in \{1, 2\}$ , definiert durch:

$$\mathcal{F}^{e_i}(\Omega_{\underline{l}\underline{j}}) = \Omega_{\underline{l}-e_i, \underline{j}-\frac{1}{2}\underline{j}e_i}$$

Es sei bemerkt, dass für alle Zellen  $\Omega_{\underline{l}\underline{j}} \in \mathbf{G}_{\infty}$ , für die  $|\underline{l}|_{\infty} = 1$  gilt, kein Vater existiert. Anders ausgedrückt heißt es, dass nur Zellen aus dem größten Gitter keinen Vater besitzen.

**Definition 3.3.11.** Gegeben sei eine Zelle  $\Omega_{\underline{l}\underline{j}} \in \mathbf{G}_{\infty}$ . So sind die **Kinder** dieser Zelle in  $e_i$ -Richtung, für  $i \in \{1, 2\}$ , definiert durch:

$$\mathcal{K}^{e_i}(\Omega_{\underline{l}\underline{j}}) = \left\{ \Omega_{\underline{l}+e_i, \underline{j}+\underline{j}e_i}, \Omega_{\underline{l}+e_i, \underline{j}+\underline{j}e_i+e_i} \right\}$$

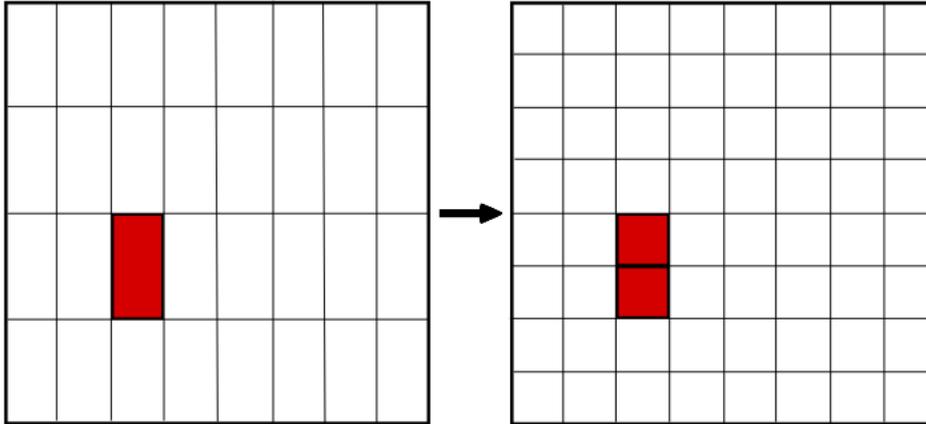


Abbildung 3.12: Die auf dem linken Bild markierte Zelle  $\Omega_{\underline{l}\underline{j}} = \Omega_{(3,2)(2,1)}$  ist nach Definition 3.3.10 der Vater der auf dem rechten Bild markierten Zellen  $\Omega_{(3,3)(2,2)}$  und  $\Omega_{(3,3)(2,3)}$ . Dementsprechend sind die Zellen auf dem rechten Bild die Kinder der Zelle auf dem linken Bild in  $e_2$ -Richtung.

Wie man sieht, hat jede Zelle 2 Kinder in jeder Raumrichtung. Das bedeutet, dass eine Zelle in einem 2-dimensionalen Raum insgesamt 4 Kinder hat.

**Definition 3.3.12.** Sei eine Menge  $\{\Omega_{l_1 j_1}, \dots, \Omega_{l_p j_p}\} \in \mathbf{G}_\infty$  von Zellen mit einer nicht-leeren Schnittfläche gegeben. Sei weiterhin der Punkt  $x_{ni}$  in allen diesen Zellen enthalten. So ist ein **Ahne** dieser Zellen  $\mathcal{A}(\Omega_{l_1 j_1}, \dots, \Omega_{l_p j_p}) \in \mathbf{G}_\infty$  definiert durch:

$$\mathcal{A}(\Omega_{l_1 j_1}, \dots, \Omega_{l_p j_p}) = \Omega_{\min(l_1, \dots, l_p), \underline{i}} = \Omega_{\underline{n}\underline{i}}$$

Dabei ist  $\underline{i}$  eindeutig bestimmt.

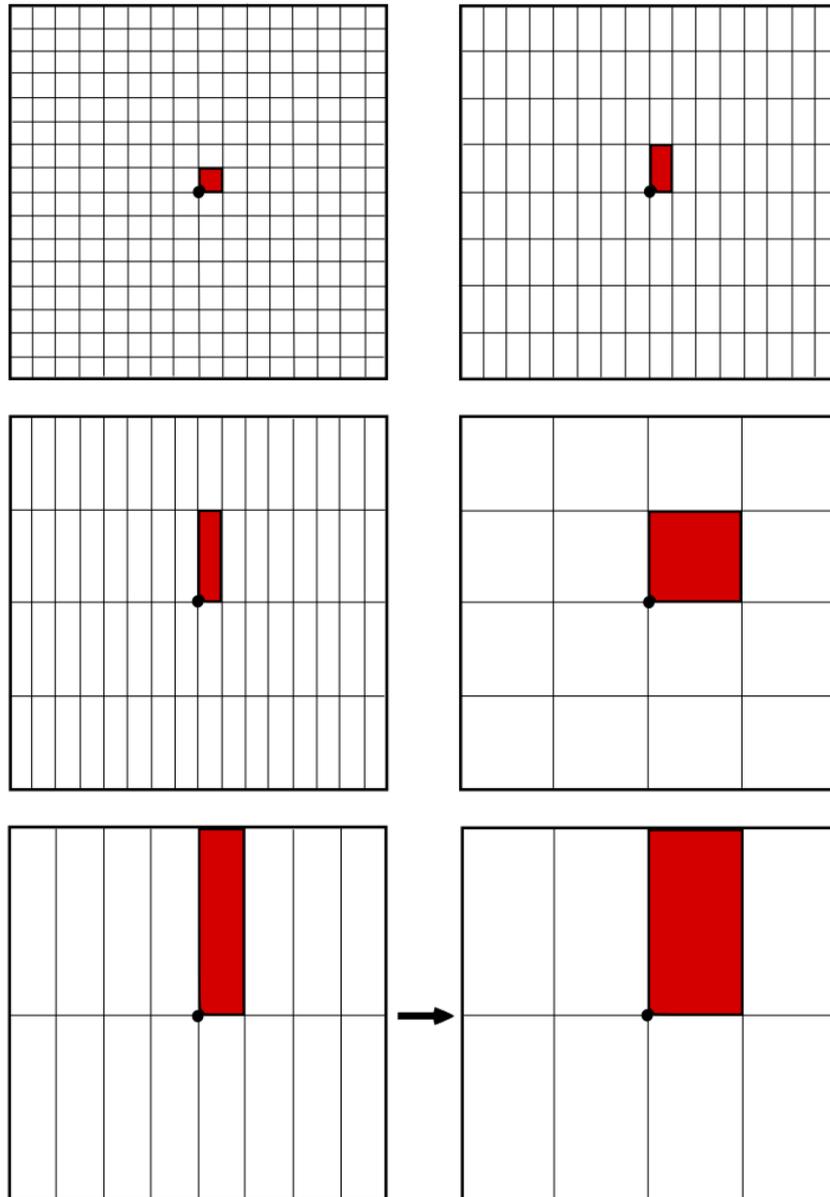


Abbildung 3.13: Auf den ersten fünf Bildern sind die Zellen  $\Omega_{(4,4)(8,8)}, \Omega_{(4,3)(8,4)}, \Omega_{(4,2)(8,2)}, \Omega_{(2,2)(2,2)}$  und  $\Omega_{(3,1)(4,1)}$ , die alle den Punkt  $x_{ni}$  enthalten, dargestellt. Auf dem letzten Bild ist der Ahne  $\mathcal{A}(\Omega_{l_1 j_1}, \dots, \Omega_{l_5 j_5}) = \Omega_{\min(l_1, \dots, l_5), \underline{i}} = \Omega_{(2,1)(2,1)}$  dieser fünf Zellen dargestellt.

Das bedeutet, dass ein Ahne die feinste Zelle ist, die die Zellen  $\Omega_{l_1 j_1}, \dots, \Omega_{l_p j_p}$  einschließt und es sogar möglich ist, dass dies ein Element dieser Menge ist. Außerdem sei festgehalten, dass der Ahne im Gegensatz zu Vätern und Kindern richtungsunabhängig ist. Zur Veranschaulichung der Definitionen 3.3.10, 3.3.11 und 3.3.12, sowie von den, in (3.47) definierten, Zellen wird an dieser Stelle auf die Abbildungen 3.12 und 3.13 verwiesen.

Führt man sich nun die Formel (3.31) vor Augen, so kann man alle anisotropen vollen Gitter, aus denen ein dünnes Gitter zusammengesetzt wird, als eine endliche Untermenge von  $\mathbf{G}_\infty$ , wie folgt, zusammenfassen:

$$\mathbf{G}_n = \{\Omega_{\underline{l}} \mid |\underline{l}| \leq n + d - 1\} \approx \{\Omega_{\underline{l}_j} \mid |\underline{l}| \leq n + d - 1, \underline{0} \leq \underline{j} < 2^{\underline{l}}\} \quad (3.49)$$

Diese Menge wird als „dünne Familie von Gittern“ bezeichnet, wobei die Gitterpunkte der einzelnen Gitter  $\Omega_{\underline{l}}$ , bzw. die Eckpunkte der einzelnen Zellen  $\Omega_{\underline{l}_j}$ , die nicht auf dem Rand von  $\Omega$  liegen, genau das dünne Gitter aus (3.31) bilden. Die Existenz der Väter für alle Zellen  $\Omega_{\underline{l}_j} \in \mathbf{G}_n \setminus \Omega_{(1,1)}$  ist garantiert. Die Existenz der Kinder für alle Zellen  $\Omega_{\underline{l}_j} \in \mathbf{G}_n$  kann dagegen nicht garantiert werden, was bedeutet, dass der Fall  $\mathcal{K}^{e_i}(\Omega_{\underline{l}_j}) \cap \mathbf{G}_n = \emptyset$  möglich ist.

Betrachtet man nun eine endliche Untermenge  $\mathbf{G} \subset \mathbf{G}_\infty$ , für die gilt:

$$\mathbf{G} = \{\Omega_{\underline{l}_j} \mid \forall i = 1, 2 \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } l_i = 1 \\ \text{oder } \mathcal{F}^{e_i}(\Omega_{\underline{l}_j}) \in \mathbf{G} \end{array} \right. \}, \quad (3.50)$$

so sieht man, dass  $\mathbf{G}_n$  ein Spezialfall davon ist, der durch eine Beschränkung von  $|\underline{l}|$  entsteht. Die Menge  $\mathbf{G}$  wird die Menge der erzeugten Zellen genannt, wobei die Menge der dazugehörigen Indizes  $\underline{l}$  als *adaptive Struktur* bezeichnet wird.

In dem Abschnitt 3.3.4 wurde der Dünngitterraum  $V_n^s$  mit Hilfe der hierarchische Differenzräume  $W_{\underline{l}}$  definiert. In [NH00] wird eine Darstellung des Dünngitterraums  $V_n^s$  mittels nodaler Basisfunktionen vorgestellt, so wird  $V_n^s$  von den Funktionen

$$\{\phi_{\underline{l}_j} \mid l_t > 0, |\underline{l}|_1 = n, j_t = 1, \dots, 2^{l_t} - 1, t = 1, 2\}$$

aufgespannt und kann, wie folgt, dargestellt werden:

$$V_n^s = \text{span}\{\phi_{\underline{l}_j} \mid l_t > 0, |\underline{l}|_1 = n, j_t = 1, \dots, 2^{l_t} - 1, t = 1, 2\}$$

Wobei die Randfunktionen, wie im bisherigen Arbeitsverlauf, vernachlässigt werden. Demnach kann eine Funktion  $u_n^s \in V_n^s$ , bzw. eine Funktion, die auf  $\mathbf{G}_n$  dargestellt werden kann, folgendermaßen definiert werden:

$$u_n^s = \sum_{|\underline{l}|=n} u_{\underline{l}} = \sum_{|\underline{l}|=n} \sum_j u_{\underline{l}_j} \phi_{\underline{l}_j},$$

wobei  $\phi_{\underline{l}_j}$  eine stückweise bilineare Basisfunktion und  $u_{\underline{l}_j} = u_{\underline{l}}(x_{\underline{l}_j})$ , also der Wert der Funktion  $u_{\underline{l}}$  im Punkt  $x_{\underline{l}_j}$ , darstellt. Die eben gemachten Aussagen gelten für die, in

(3.49) definierten, Mengen  $\mathbf{G}_n$ , können allerdings auch, auf die selbe Weise, für die adaptiven Strukturen  $\mathbf{G}$  aus (3.50) gemacht werden.

Betrachtet man nun eine adaptive Struktur, bzw. eine adaptiv generierte Menge an Zellen  $\mathbf{G}$ , so besteht das *adaptive dünne Gitter*,  $\Omega_{\mathbf{G}}$ , aus den Eckpunkten der einzelnen Zellen,  $\Omega_{\underline{l}_j}$ , die nicht auf dem Rand von  $\Omega$  liegen. Der zu dem adaptiven dünnen Gitter dazugehörige Funktionenraum wird dabei mit  $V_{\mathbf{G}}$  bezeichnet.

Um nun eine Kombinationslösung  $u_{\mathbf{G}}^c \in V_{\mathbf{G}}$  auf dem adaptiven dünnen Gitter  $\Omega_{\mathbf{G}}$  zu erhalten, wird nachfolgend die adaptive Kombinationsformel aus [NH00] vorgestellt, wobei dafür zuerst die folgenden Mengen definiert werden müssen.

**Definition 3.3.13.** Sei eine adaptive Struktur  $\mathbf{G}$  gegeben, so wird die Menge der feinsten Zellen für einen Gitterpunkt  $x_{\underline{l}_j} \in \mathbf{G}_{\infty}$  in eine Raumrichtung  $e_i$  wie folgt definiert:

$${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i} = \left\{ \Omega_{\underline{n}s} \mid \mathcal{K}^{e_i}(\Omega_{\underline{n}s}) \cap \mathbf{G} = \emptyset, x_{\underline{l}_j} \in \overline{\Omega_{\underline{n}s}} \right\}$$

**Definition 3.3.14.** Sei eine adaptive Struktur  $\mathbf{G}$  gegeben, so wird die Menge der Ahnen für einen Gitterpunkt  $x_{\underline{l}_j} \in \mathbf{G}_{\infty}$  in eine Raumrichtung  $e_i$  wie folgt definiert:

$${}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i} = \left\{ \Omega_{\underline{m}r} = \mathcal{A}(\Omega_{\underline{k}p}, \Omega_{\underline{n}q}) \mid \left\{ \Omega_{\underline{k}p}, \Omega_{\underline{n}q} \right\} \subset {}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}, \underline{n} = \underline{k} + e_t, t \neq i, x_{\underline{l}_j} \in \overline{\Omega_{\underline{m}r}} \right\}$$

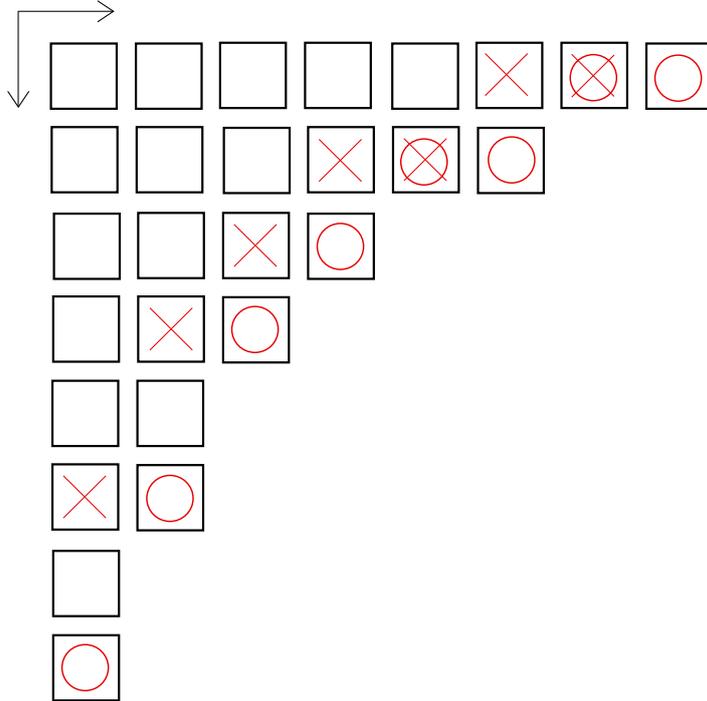


Abbildung 3.14: Die in dieser Abbildung dargestellten Quadrate entsprechen den Zellen,  $\Omega_{\underline{l}_j}$ , aus Gittern,  $\Omega_{\underline{l}}$ , mit unterschiedlicher Maschenweite, die den Punkt  $x_{\underline{l}_j}$  enthalten. Die Menge  ${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  besteht dabei aus den Zellen, die mit einem roten Kreis gekennzeichnet sind, und die Menge  ${}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  besteht aus den Zellen, die mit einem roten Kreuz gekennzeichnet sind. Die, für das vorliegende Beispiel, gewählte Raumrichtung ist  $e_i = e_2$ .

Die, in 3.3.13 und 3.3.14 definierten Mengen werden in der Abbildung 3.14 zum besseren Verständnis veranschaulicht. Dabei sind in der Menge  ${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  alle Zellen  $\Omega_{\underline{n}s}$  der adaptiven Struktur  $\mathbf{G}$  zusammengefasst, die keine Kinder nach Definition 3.3.11 haben, was bedeutet, dass es keine Zellen  $\Omega_{\underline{n}s}$  in der adaptiven Struktur  $\mathbf{G}$  mit einer feineren/kleineren Maschenweite in  $e_i$ -Richtung gibt, die den Punkt  $x_{\underline{l}_j}$  enthalten.

Nimmt man jeweils 2 „benachbarte“ Zellen aus  ${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  und bestimmt deren Ahnen nach Definition 3.3.12, so bilden die so ermittelten Zellen die Menge  ${}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$ . Benachbart bedeutet in diesem Kontext, dass die Auflösung der einen Zelle,  $\Omega_{\underline{k}p}$ , in der Raumrichtung  $e_t \neq e_i$  um 1 grösser ist, als die Auflösung der anderen Zelle,  $\Omega_{\underline{n}q}$ , in der selben Raumrichtung, also  $\underline{n} = \underline{k} + e_t$ .

Mit diesen Mengen kann nun die adaptive Kombinationsformel definiert werden.

**Definition 3.3.15.** *Sei eine adaptive Struktur  $\mathbf{G}$ , ein Punkt  $x_{\mathbf{G}_j} \in \mathbf{G}_\infty$  und eine Raumrichtung  $e_i$  gegeben. Die adaptive Kombinationsformel für diesen Punkt wird dann wie folgt definiert:*

$$u_{\mathbf{G}_j} = \sum_{\Omega_{\underline{n}s} \in {}^0\mathcal{P}_{\mathbf{G}_j}^{e_i}} (u_{\underline{n}s})_{\underline{j}} - \sum_{\Omega_{\underline{n}s} \in {}^1\mathcal{P}_{\mathbf{G}_j}^{e_i}} (u_{\underline{n}s})_{\underline{j}} \quad (3.51)$$

Man sieht nun, dass die Kombinationsformel aus Definition 3.3.15 eine punktweise Formel ist, was bedeutet, dass für jeden Gitterpunkt  $x_{\mathbf{G}_j}$  des adaptiven dünnen Gitters  $\Omega_{\mathbf{G}}$  neue Mengen  ${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  und  ${}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  bestimmt werden müssen. Im Gegensatz dazu werden in den, in den vorherigen Abschnitten definierten, Kombinationstechniken (3.36) und (3.39) für jeden Gitterpunkt des dünnen Gitters die selben Teilgitter, bzw. einzelne Zellen der Teilgitter, verwendet.

Betrachtet man nun die Kombinationsformel aus Definition 3.3.15 und setzt  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_n$ , d.h. man bestimmt die Kombinationslösung  $u_n^c \in V_n^s$  auf einem dünnen Gitter der Stufe  $n$  mit der Formel (3.51), so erhält man das selbe Ergebnis, wie mit den Formeln (3.36) bzw. (3.39). Weiterhin kann gezeigt werden, dass die Kombinationsformel (3.51) das selbe Ergebnis liefert wie die Kombinationsformel (3.39) für die Indextmengen  $I_n^1$  und  $I_n^{0,5}$  aus (3.42).

Beweis: Diese Aussage beweist man nun dadurch, dass man zeigt, dass die Kombinationsformeln (3.36) und (3.39) die Gitter verwenden, die den Mengen  ${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  und  ${}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  bei der Kombinationsformel 3.51 entsprechen.

Damit die Definition 3.3.11 angewendet werden kann, werden hier und auch nachfolgend nicht die Gitter  $\Omega_l$ , sondern die entsprechenden Gitterzellen  $\Omega_{\underline{l}_j}$  betrachtet.

1. Betrachtet man die Kombinationsformel (3.36) für  $d = 2$ :

$$u_n^c = \sum_{l_1+l_2=n+1} u_{l_1,l_2} - \sum_{l_1+l_2=n} u_{l_1,l_2}$$

und will dafür die Mengen  ${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  und  ${}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  bestimmen, so gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_n &= \{ \Omega_l \mid |l|_1 \leq n + 2 - 1 = n + 1 \} \\ \mathbf{G}_{n-1} &= \{ \Omega_l \mid |l|_1 \leq n + 2 - 1 - 1 = n \} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_n \setminus \mathbf{G}_{n-1} &= \{\Omega_{\underline{l}} \mid |\underline{l}|_1 = n + 1\} \\ \mathbf{G}_{n-1} \setminus \mathbf{G}_{n-2} &= \{\Omega_{\underline{l}} \mid |\underline{l}|_1 = n\}\end{aligned}$$

Sei  $\underline{k} = (k_1, k_2)$  mit  $k_1 + k_2 = n$  und wählt man die  $e_1$ -Richtung, so wären die Kinder jeder Zelle,  $\Omega_{\underline{k}_j}$ , aus dem Gitter  $\Omega_{\underline{k}}$  nach Definition 3.3.11, wie folgt definiert:  $\Omega_{\underline{l}}$  mit  $\underline{l} = (k_1 + 1, k_2)$  mit  $|\underline{l}|_1 = l_1 + l_2 = k_1 + 1 + k_2 = n + 1 + 1 = n + 2$ . Das führt jedoch zu einem Widerspruch, da solche  $\Omega_{\underline{l}}$  nicht in  $\mathbf{G}_n$  enthalten sind und damit gilt:  $\mathcal{K}^{e_1}(\Omega_{\underline{l}_j}) \cap \mathbf{G}_n = \emptyset \quad \forall \underline{j}$ . Es gilt also:

$${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_1} = \mathbf{G}_n \setminus \mathbf{G}_{n-1}$$

Seien nun  $\underline{s} = (s_1, s_2), \underline{r} = (r_1, r_2) \in \mathbf{G}_n \setminus \mathbf{G}_{n-1}$ , d.h.  $|\underline{s}|_1 = n + 1$  und  $|\underline{r}|_1 = n + 1$ . Gelte weiterhin  $s_2 = r_2 + 1$  und  $s_1 = r_1 - 1$ , so gilt:  $\min(\underline{s}, \underline{r}) = (s_1, r_2)$  und damit  $|\min(\underline{s}, \underline{r})|_1 = n$ . Das bedeutet nun, dass:

$${}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_1} = \mathbf{G}_{n-1} \setminus \mathbf{G}_{n-2}$$

Damit sieht man nun, dass die beiden Kombinationstechniken die selben Gitter verwenden, um die Kombinationslösung  $u_n^c \in V_n^s$  zu erhalten.

2. Betrachtet man nun die Kombinationsformel (3.39) mit der Indexmenge  $I_n^1$  und  $d = 2$ :

$$u_n^c = u_{(1,n)} + u_{(n,1)} - u_{(1,1)}$$

Will man nun dafür die Mengen  ${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  und  ${}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  für die Richtung  $e_1$  bestimmen, so betrachtet man zuerst die Indexmenge  $I_n^1$ :

$$\begin{aligned}I_n^1 &= \{\underline{l} \in \mathbb{N}^d \mid |\underline{l}|_1 - |\underline{l}|_\infty \leq n + d - 1 - n = 1\} \\ &\Rightarrow l_1 + l_2 - \max(l_1, l_2) \leq 1 \\ &\Rightarrow \underline{l} = (1, x) \vee \underline{l} = (x, 1) \quad \text{mit } x \in \{1, \dots, n\}\end{aligned}$$

Damit kann nun die Menge  ${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_1}$  bestimmt werden. Es gilt:

$${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_1} = \{\Omega_{\underline{l}_j} \text{ mit } \underline{l} = (1, x)_{1 < x \leq n} \cup (n, 1)\}$$

Die Menge  ${}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_1}$  besteht aus den Gittern mit den Levelindizes  $\underline{r}$ , für die gilt:

$$\underline{r} = \min(\underline{l}, \underline{k}) \text{ für } \underline{l}, \underline{k} \in {}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_1} \text{ mit } l_2 = k_2 + 1$$

Damit gilt:

$${}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_1} = \{\Omega_{\underline{l}_j} \text{ mit } \underline{l} = (1, x)_{1 \leq x \leq n-1}\}$$

Setzt man nun diese Mengen in die Kombinationsformel (3.51) ein, so ergibt sich eine Formel, die der Kombinationsformel (3.39) mit der Indexmenge  $I_n^1$  und  $d = 2$  entspricht.

3. Dass die Kombinationsformel (3.51) das selbe Ergebnis, wie die Kombinationsformel (3.39) für  $d = 2$  und die Indexmenge  $I_n^{0,5}$  liefert, wird hier anhand eines Beispiels mit der, in Abbildung 3.9 präsentierten, Indexmenge  $I_8^{0,5}$  gezeigt.

Es gilt:

$$\begin{aligned} {}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_1} &= \left\{ \Omega_{\underline{l}_j} | \underline{l} = \{(1, 8), (1, 7), (2, 6), (2, 5), (8, 1), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\} \right\} \\ {}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_1} &= \left\{ \Omega_{\underline{l}_j} | \underline{l} = \{(1, 7), (1, 6), (2, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (6, 1)\} \right\} \end{aligned}$$

Setzt man diese Mengen in die Kombinationsformel (3.51) ein, so sieht man, dass dabei genau das gleiche Ergebnis, wie für die Kombinationsformel (3.39) mit der Indexmenge  $I_8^{0,5}$  und  $d = 2$  aus der Abbildung 3.9, entsteht.

□

Betrachtet man nun nochmal die Definitionen 3.3.13 und 3.3.14, so sieht man, dass die Mengen  ${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  und  ${}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  von der Richtung  $e_i$  abhängen. Das bedeutet, dass bei der Anwendung der Kombinationsformel (3.51) für verschiedene Raumrichtungen  $e_i \neq e_j$  auch verschiedene Mengen  ${}^0\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  und  ${}^1\mathcal{P}_{\underline{l}_j}^{e_i}$  erstellt werden müssen. Es muss also der folgende Satz gelten.

**Satz 3.3.16.** *Die Kombinationsformel (3.51) ist richtungsunabhängig.*

Für den Beweis dieses Satzes wird auf [NH00] verwiesen.

Zum Schluss muss nur noch die Frage geklärt werden, wie eine geeignete adaptive Struktur, bzw. eine geeignete Menge von generierten Zellen, zu erzeugen wäre. Um diese Frage zu beantworten, wurde in [NH00] das „Verfeinerungskriterium“ definiert. Diese Verfeinerungsstrategie wird nun im Algorithmus 1 zusammengefasst.

```

 $\Omega_{\underline{l}_j} = \Omega_{(1,1)\underline{j}}$ ;
 $\underline{m} := (0, 0)$ ;
if Lokaler hierarchischer Überschuss =  $|\tilde{u}_{\underline{l}_j}| > \delta$  then
  for  $i = 1, 2$  do
    if  $\|\underline{l} - e_i\| = 0$  then
       $\underline{m} = \max(\underline{m}, \underline{l} + \underline{e})$ ;
    end
     $r_1 := (\underline{m} \geq \underline{l} + e_1)$ ;
     $r_2 := (\underline{m} \geq \underline{l} + e_2)$ ;
    for  $i = 1, 2$  do
      if  $r_i := True$  then
        Erstelle  $\mathcal{K}_i^e(\Omega_{\underline{l}_j})$ 
      end
    end
  end
end

```

**Algorithmus 1 :** Algorithmus zur Erzeugung einer geeigneten adaptiven Struktur

# Kapitel 4

## Aspekte der Implementierung

### 4.1 Datenstruktur für dünne Gitter

In diesem Abschnitt wird dem Leser zuerst eine effiziente Datenstruktur für dünne Gitter vorgestellt, die auch in den Arbeiten von Bungartz und Feuersänger, [Bun92], [Feu05], beschrieben wurde.

Dort wurden zur Darstellung einer Funktion auf einem regulären oder adaptiv verfeinerten dünnen Gitter Binärbäume als geeignete Datenstruktur verwendet. Um diese Datenstruktur hier vorzustellen und angemessen beschreiben zu können, werden dabei nur Funktionen in einer und zwei Unbekannten betrachtet. Es sei jedoch erwähnt, dass das nachfolgend beschriebene Darstellungsprinzip auch auf Funktionen von drei oder mehr Unbekannten verallgemeinern lässt.

Betrachtet man zuerst eine Funktion mit einer Veränderlichen, so kann diese als Baum von Gitterpunkten dargestellt werden. Dabei entspricht jeder Baumknoten einem Punkt im dünnen Gitter. In der Abbildung 4.1 wird die Baumstruktur zur Darstellung einer Funktion in einer Unbekannten,  $u(x)$ , auf einem dünnen Gitter veranschaulicht. Dabei ist deutlich zu sehen, dass die Randpunkte  $x = 0$  und  $x = 1$  oberhalb der eigentlichen Wurzel  $x = 0,5$  des Baumes gespeichert werden und dabei die hierarchisch höchste Position in diesem Baum einnehmen. Diese besondere Behandlung der Randwerte hat einen Grund, so werden die Werte einer Funktion am Rand dazu benötigt, um den hierarchischen Überschuss in den inneren Gitterpunkten zu berechnen.

Betrachtet man nun eine Funktion zweier Veränderlicher, so kann diese ebenfalls durch einen Baum beschrieben werden. Dabei entspricht jeder Knoten dieses Baumes einer Linie im dünnen Gitter, weshalb man auch von einem Baum von Gitterlinien spricht. Das bedeutet weiterhin, dass jeder Knoten selbst einem Baum von Gitterpunkten, also den Punkten auf der entsprechenden Gitterlinie, entspricht. Der Baum zur Darstellung einer Funktion in zwei Unbekannten,  $u(x, y)$ , auf einem dünnen Gitter wird in der Abbildung 4.2 veranschaulicht. Dabei ist zu sehen, dass auch in diesem Fall die beiden Randlinien  $y = 0$  und  $y = 1$ , analog zu der Darstellung einer Funktion mit einer Unbekannten, oberhalb der eigentlichen Wurzel  $y = 0,5$  gespeichert werden. An dieser Stelle wird auf ein anschauliches Beispiel zum Baumaufbau für den Dünngitterinterpolanten einer Funktion  $u(x, y)$  in [Bun92] auf Seite 46 f. verwiesen. Wobei dort auch erklärt wird, wieso die strenge Einhaltung der hierarchischen Ordnung der Teilräume für den

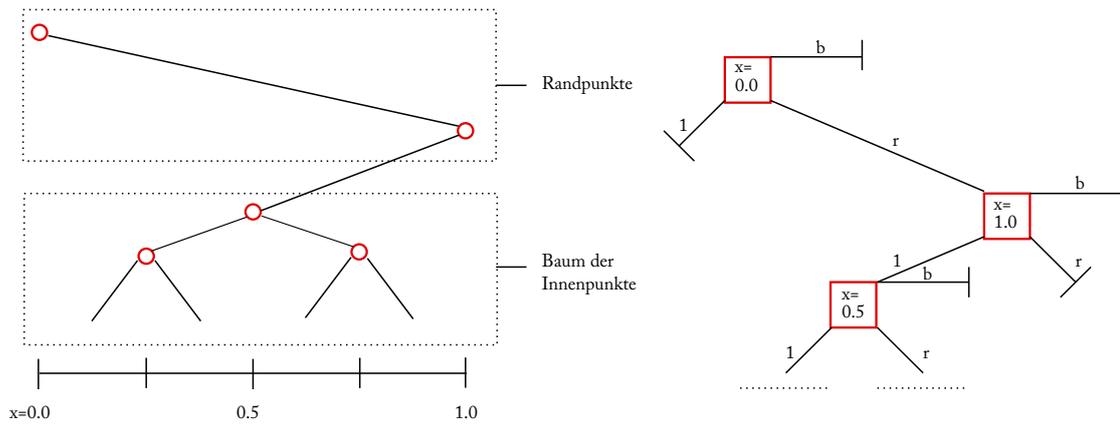


Abbildung 4.1: Baum zur Darstellung einer Funktion  $u(x)$  auf einem dünnen Gitter

Baumaufbau von großer Bedeutung ist.

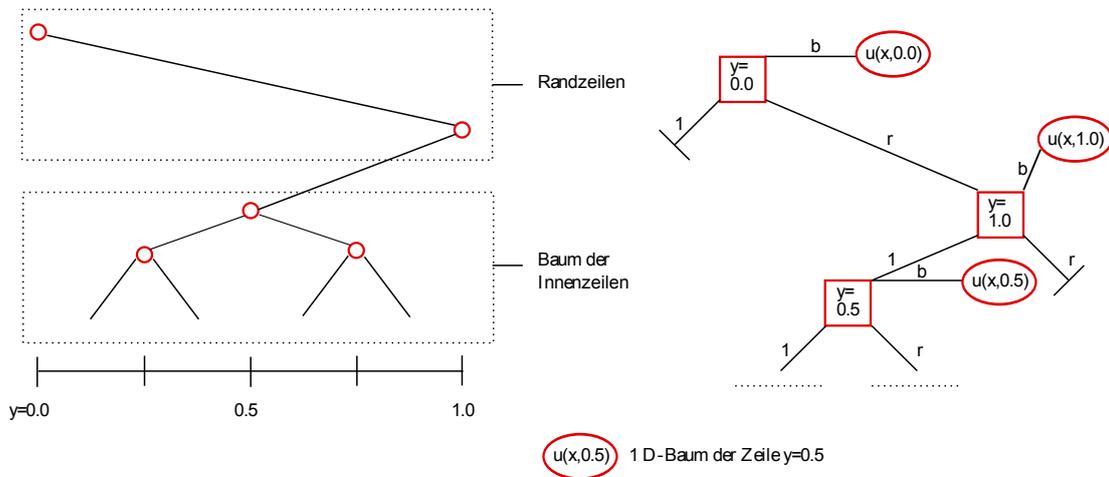


Abbildung 4.2: Baum zur Darstellung einer Funktion  $u(x, y)$  auf einem dünnen Gitter

Zum Schluss wird noch über die Realisierung der Adaptivität mittels Binärbäumen gesprochen, welche auf eine sehr einfache Art und Weise vorgenommen wird. Der Baum wächst da in die Tiefe, wo es die gewählte Adaptionstrategie erfordert. Dadurch können zwei wichtige Schlussfolgerungen gezogen werden:

1. Reguläre und adaptive dünne Gitter lassen sich mit den selben Programmen erzeugen.
2. Reguläre dünne Gitter sind lediglich ein Spezialfall adaptiv verfeinerter dünner Gitter.

## 4.2 Adaptionstrategie

In diesem Abschnitt wird nun auf die Konstruktion eines adaptiven dünnen Gitters eingegangen. Wie im vorherigen Kapitel beschrieben, besteht das adaptive dünne Gitter  $\Omega_{\mathbf{G}}$  dabei aus den Eckpunkten der einzelnen Zellen  $\Omega_{\underline{l}j} \in \mathbf{G}$ , die nicht auf dem Rand von  $\Omega$  liegen. Der Aufbau einer geeigneten adaptiven Struktur  $\mathbf{G}$  wurde schon im Algorithmus 1 in Kapitel 4 zusammengefasst. Dabei wird anhand eines, im Anschluss beschriebenen, Kriteriums entschieden, ob die Zelle  $\Omega_{\underline{l}j} \in \mathbf{G}$  verfeinert und der so entstehende Punkt  $x_{\underline{k}j}$  zum adaptiven dünnen Gitter  $\Omega_{\mathbf{G}}$  hinzugefügt werden soll oder nicht.

Als geeigneter Fehlerindikator für die Verfeinerung wird hier, analog zu der Arbeit von Bungartz [Bun92], der hierarchische Überschuss verwendet. So wird, bei einem frei wählbaren Adaptionparameter  $\delta$ , mit dem Test

$$|\tilde{u}_{\underline{l}j}| > \delta \quad (4.1)$$

entschieden, ob die vorliegende Zelle, mit dem Erzeugen von Kindern nach Definition 3.3.11, weiter verfeinert werden soll und damit ein neuer Punkt dem adaptiven dünnen Gitter hinzugefügt wird ( $> \delta$ ) oder nicht ( $\leq \delta$ ).

Der lokale hierarchische Überschuss  $\tilde{u}_{\underline{l}j}$  wird in [NH00] mit der folgenden Formel berechnet

$$\tilde{u}_{\underline{l}j} = u_{\underline{l}j} - u_{\underline{l}-e_1j} - u_{\underline{l}-e_2j} + u_{\underline{l}-ej}, \quad (4.2)$$

wobei  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  und  $e = (1, 1)$  sind. Weiterhin sind  $u_{\underline{l}j}$ ,  $u_{\underline{l}-e_1j}$ ,  $u_{\underline{l}-e_2j}$  und  $u_{\underline{l}-ej}$  Interpolanten der Funktion  $u$  auf den Gittern  $\Omega_{\underline{l}}$ ,  $\Omega_{\underline{l}-e_1}$ ,  $\Omega_{\underline{l}-e_2}$  und  $\Omega_{\underline{l}-e}$  jeweils ausgewertet im Punkt  $x_{\underline{k}j}$  mit  $\underline{k} = \{\underline{l}, \underline{l} - e_1, \underline{l} - e_2, \underline{l} - e\}$ .

Der lokale hierarchische Überschuss  $\tilde{u}_{\underline{l}j}$  wird in [Bun92] auf eine andere Art und Weise, aus dem Funktionswert am Punkt  $x_{\underline{l}j}$ , sowie den Funktionswerten an den Punkten auf dem Rand des Trägers der, zu dem Punkt  $x_{\underline{l}j}$  gehörenden, Basisfunktion  $\phi_{\underline{l}j}$  mit der folgenden Formel in Operator Schreibweise

$$\tilde{u}_{\underline{l}j} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}_{x_{l_1,j_1}, h_{l_1}, x_{l_2,j_2}, h_{l_2}} u^{(2)} \quad (4.3)$$

berechnet. Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes wird gezeigt, dass die Formeln (4.2) und (4.3) das selbe Ergebnis liefern. Dazu werden nun die Interpolanten genauer betrachtet, so kann jeder Interpolant einer 2-dimensionalen Funktion als Linearkombination aus bilinearen Basisfunktionen  $\phi_{(l_1,l_2)(j_1,j_2)}$  einer nodalen Basis auf rechteckigen Trägern gebildet werden und hat damit die Form

$$u_{(l_1,l_2)}(x_1, x_2) = \sum_{j_1=1}^{2^{l_1}-1} \sum_{j_2=1}^{2^{l_2}-1} u_{(l_1,l_2)(j_1,j_2)} \phi_{(l_1,l_2)(j_1,j_2)}(x_1, x_2),$$

wobei  $u_{(l_1,l_2)(j_1,j_2)} = u(x_{l_1,j_1}, x_{l_2,j_2})$  der Wert der Funktion  $u$  im Gitterpunkt  $x_{(l_1,l_2)(j_1,j_2)}$  ist.

Die bilinearen Basisfunktionen  $\phi_{(l_1, l_2)(j_1, j_2)}$  können dabei, wie in (3.17) beschrieben, als Tensorprodukte eindimensionaler Standard-Hutfunktionen dargestellt werden und haben die Form

$$\phi_{(l_1, l_2)(j_1, j_2)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 - x_{l_1, j_1 - 1}}{h_{l_1}} \cdot \frac{x_2 - x_{l_2, j_2 - 1}}{h_{l_2}} & : x_{l_1, j_1 - 1} \leq x_1 < x_{l_1, j_1} \wedge x_{l_2, j_2 - 1} \leq x_2 < x_{l_2, j_2} \\ \frac{x_{l_1, j_1 + 1} - x_1}{h_{l_1}} \cdot \frac{x_2 - x_{l_2, j_2 - 1}}{h_{l_2}} & : x_{l_1, j_1} \leq x_1 < x_{l_1, j_1 + 1} \wedge x_{l_2, j_2 - 1} \leq x_2 < x_{l_2, j_2} \\ \frac{x_1 - x_{l_1, j_1 - 1}}{h_{l_1}} \cdot \frac{x_{l_2, j_2 + 1} - x_2}{h_{l_2}} & : x_{l_1, j_1 - 1} \leq x_1 < x_{l_1, j_1} \wedge x_{l_2, j_2} \leq x_2 < x_{l_2, j_2 + 1} \\ \frac{x_{l_1, j_1 + 1} - x_1}{h_{l_1}} \cdot \frac{x_{l_2, j_2 + 1} - x_2}{h_{l_2}} & : x_{l_1, j_1} \leq x_1 < x_{l_1, j_1 + 1} \wedge x_{l_2, j_2} \leq x_2 < x_{l_2, j_2 + 1} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (4.4)$$

Siehe dazu auch [Kra02] Seite 7 f..

Betrachtet man nun die einzelnen Interpolanten aus (4.2), so liegt der Punkt  $x_{\underline{l}j}$  im Träger nur einer Basisfunktion im Gitter  $\Omega_{\underline{l}}$ . Der Punkt  $x_{\underline{l}-e\underline{j}}$  liegt dagegen in den Trägern von 4 „benachbarten“ Basisfunktionen im Gitter  $\Omega_{\underline{l}-e}$ , weshalb mit (4.4) gilt:

$$\begin{aligned} u_{\underline{l}-e\underline{j}} &= u_{(l_1-1, l_2-1)(i_1, i_2)} \cdot \phi_{(l_1-1, l_2-1)(i_1, i_2)}(x_{l_1-1, i_1} + h_{l_1}/2, x_{l_2-1, i_2} + h_{l_2}/2) \\ &+ u_{(l_1-1, l_2-1)(i_1, i_2+1)} \cdot \phi_{(l_1-1, l_2-1)(i_1, i_2+1)}(x_{l_1-1, i_1} + h_{l_1}/2, x_{l_2-1, i_2} - h_{l_2}/2) \\ &+ u_{(l_1-1, l_2-1)(i_1+1, i_2)} \cdot \phi_{(l_1-1, l_2-1)(i_1+1, i_2)}(x_{l_1-1, i_1} - h_{l_1}/2, x_{l_2-1, i_2} + h_{l_2}/2) \\ &+ u_{(l_1-1, l_2-1)(i_1+1, i_2+1)} \cdot \phi_{(l_1-1, l_2-1)(i_1+1, i_2+1)}(x_{l_1-1, i_1} - h_{l_1}/2, x_{l_2-1, i_2} - h_{l_2}/2) \\ &= \frac{1}{4} \cdot u_{(l_1-1, l_2-1)(i_1, i_2)} + \frac{1}{4} \cdot u_{(l_1-1, l_2-1)(i_1, i_2+1)} + \frac{1}{4} \cdot u_{(l_1-1, l_2-1)(i_1+1, i_2)} + \frac{1}{4} \cdot u_{(l_1-1, l_2-1)(i_1+1, i_2+1)} \\ &= \frac{1}{4} \cdot u_{(l_1, l_2)(j_1-1, j_2-1)} + \frac{1}{4} \cdot u_{(l_1, l_2)(j_1-1, j_2+1)} + \frac{1}{4} \cdot u_{(l_1, l_2)(j_1+1, j_2+1)} + \frac{1}{4} \cdot u_{(l_1, l_2)(j_1+1, j_2-1)} \end{aligned}$$

Analog dazu lassen sich weiterhin folgende Aussagen treffen, so liegen die Punkte  $x_{\underline{l}-e_1\underline{j}}$ ,  $x_{\underline{l}-e_2\underline{j}}$  in den Trägern von jeweils 2 „benachbarten“ Basisfunktionen in den Gittern  $\Omega_{\underline{l}-e_1}$  und  $\Omega_{\underline{l}-e_2}$ . Mit (4.4) gilt damit:

$$\begin{aligned} u_{\underline{l}-e_1\underline{j}} &= \frac{1}{2} \cdot u_{(l_1, l_2)(j_1-1, j_2)} + \frac{1}{2} \cdot u_{(l_1, l_2)(j_1+1, j_2)} \\ u_{\underline{l}-e_2\underline{j}} &= \frac{1}{2} \cdot u_{(l_1, l_2)(j_1, j_2-1)} + \frac{1}{2} \cdot u_{(l_1, l_2)(j_1, j_2+1)} \end{aligned}$$

Setzt man diese Ergebnisse nun in (4.2) ein und wendet die Operatorschreibweise an, so ergibt sich exakt die in (4.3) beschriebene Formel.

# Kapitel 5

## Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel wird nun anhand einiger numerischer Ergebnisse untersucht, in welchem Maße die, hier vorgestellte und erstmals in [NH00] präsentierte, adaptive Kombinationstechnik (3.51) zur Interpolation von Funktionen geeignet ist. Dabei wird zuerst mittels des, in Kapitel 3 vorgestellten, Algorithmus' 1 eine dafür geeignete adaptive Struktur ermittelt und auf dieser Grundlage die zu interpolierende Funktion mittels hierarchischer Basisfunktionen approximiert. Diese Ergebnisse werden anschließend mit den Ergebnissen der regulären Kombinationstechnik (3.36) verglichen, wobei der zu vergleichende Interpolationsfehler in der  $L_2$ -Norm

$$\|u\|_2 := \left( \int_{\Omega} |u(\underline{x})|^2 d\underline{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.1)$$

gemessen wird. Das Integral wird dabei wie folgt approximiert:  $\int_{\Omega} f(x_1, x_2) d\underline{x} = h_1 \cdot h_2 \cdot \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} f(x_1, x_2)$ .  $n_1$  und  $n_2$  sind dabei die Anzahlen der inneren Punkte in Richtung  $e_1$  und  $e_2$ . Weiterhin sind  $h_1$  und  $h_2$  die Maschenweiten des Gitters in der entsprechenden Raumrichtung.

An dieser Stelle wird auch auf die Arbeit von Feuersänger [Feu10] verwiesen, wo ebenfalls unterschiedliche Funktionen auf adaptiven dünnen Gittern interpoliert und die Ergebnisse, anhand von Interpolationsfehlern in der  $L_2$ -Norm, bewertet wurden.

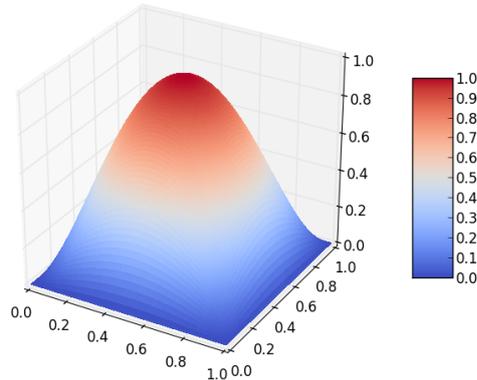
### 5.1 Erster Test

Beim ersten Test wird die Funktion

$$f_1(x_1, x_2) := 16 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1) \cdot x_2 \cdot (1 - x_2),$$

die in der Abbildung 5.1 veranschaulicht wird, mittels beider, hier vorgestellten, Kombinationstechniken, der regulären (3.36) und der adaptiven (3.51), interpoliert.

In den Abbildungen 5.2 und 5.3 werden die Kombinationsgitter verschiedener Stufen, von 2 bis 10, bei der Anwendung der regulären Kombinationstechnik (3.36) präsentiert, welche sich ebenfalls bei der Ermittlung einer geeigneten adaptiven Struktur, in Abhängigkeit vom Fehlerindikator  $\epsilon$ , zur Interpolation der Funktion  $f_1(x_1, x_2)$ , mit dem Algorithmus 1

Abbildung 5.1: Zu interpolierende Funktion  $f_1(x_1, x_2)$ 

ergeben. Die übereinstimmenden dünnen Gitter lassen vermuten, dass die beiden, in dieser Arbeit vorgestellten, Kombinationstechniken, sowohl die reguläre (3.36), als auch die adaptive (3.51) bei der Interpolation der Funktion  $f_1(x_1, x_2) := 16 \cdot x_1 \cdot (1-x_1) \cdot x_2 \cdot (1-x_2)$  das selbe Ergebnis liefern.

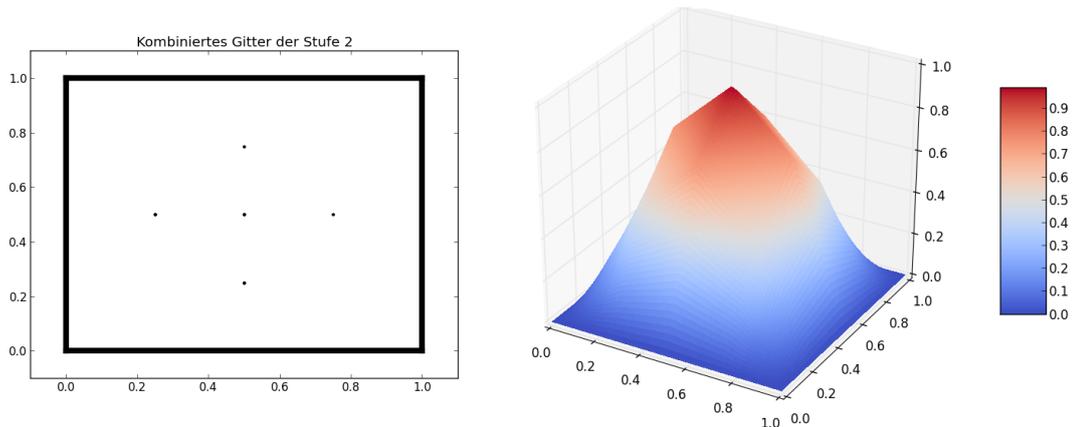


Abbildung 5.2: Kombinationsgitter der Stufe 2 bei der Anwendung der regulären Kombinationstechnik (3.36) und gleichzeitig das dünne Gitter bei der Anwendung des Algorithmus' 1 für  $\epsilon = 0.5$  und  $f_1(x_1, x_2)$  (links) und der dazugehörige Interpolant der Funktion  $f_1(x_1, x_2)$  (rechts).

Um das Konvergenzverhalten der Kombinationstechniken anschaulicher zu machen und besser bewerten zu können, werden in der Abbildung 5.4 die  $L_2$ -Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade bei der Interpolation der Funktionen  $f_1(x_1, x_2)$  dargestellt.

Die anfangs ausgesprochene Vermutung, dass die Interpolation der Funktion  $f_1(x_1, x_2)$  mittels der regulären und der adaptiven Kombinationstechnik das selbe Ergebnis liefert, erweist sich als wahr. Dies wird auch durch die Ergebnisse in den Tabellen 5.1 und 5.2, wo die entsprechenden  $L_2$ -Fehler abgebildet werden und den dazugehörigen Plot 5.4, bestätigt. Die errechneten  $L_2$ -Fehler stimmen dabei überein. Die Tabellen 5.1 und 5.2 zeigen weiterhin, dass auch die Anzahl der verwendeten Teilgitter übereinstimmt.

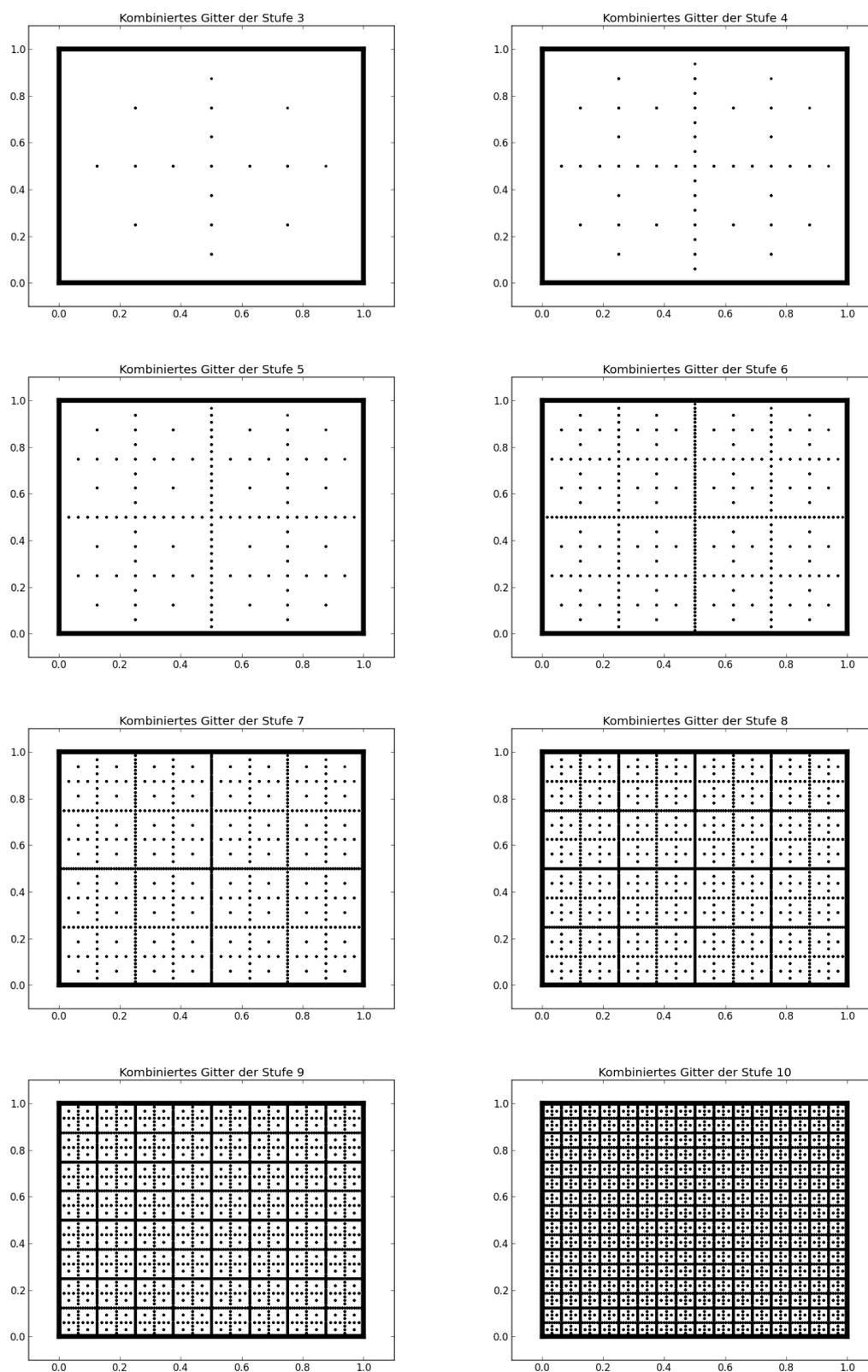


Abbildung 5.3: Von links oben nach rechts unten: Kombinationsgitter der Stufen 3 bis 10 bei der Anwendung der regulären Kombinationstechnik (3.36) und gleichzeitig die dünnen Gitter bei der Anwendung des Algorithmus' 1 für  $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.01, 0.0025, 0.0005, 0.0001, 0.00005, 0.00001$  und  $f_1(x_1, x_2)$

Level	Dof	Teilgitter	$L_2 - Fehler$	Ordnung
2	5	3	$7.6 \cdot 10^{-2}$	0
3	17	5	$2.42 \cdot 10^{-2}$	3.15
4	49	7	$7.24 \cdot 10^{-3}$	3.34
5	129	9	$2.01 \cdot 10^{-3}$	3.6
6	321	11	$4.24 \cdot 10^{-4}$	4.75
7	769	13	$8.65 \cdot 10^{-5}$	4.9
8	1,793	15	$1.69 \cdot 10^{-5}$	5.13
9	4,097	17	$3.05 \cdot 10^{-6}$	5.52
10	9,217	19	$4.77 \cdot 10^{-7}$	6.4

Tabelle 5.1: Die Stufe der regulären Kombinationstechnik (3.36), die Anzahl der inneren Gitterpunkte des dünnen Gitters und die Anzahl der verwendeten Teilgitter, sowie der gemessene  $L_2$ -Fehler bei der Interpolation von  $f_1(x_1, x_2)$  und die Fehlerordnung  $= \frac{e_{n-1}}{e_n}$

Epsilon	DoF	Teilgitter	Zellen	$L_2 - Fehler$	Ordnung
0.5	5	3	7	$7.6 \cdot 10^{-2}$	0
0.1	17	5	29	$2.42 \cdot 10^{-2}$	3.15
$5 \cdot 10^{-2}$	49	7	95	$7.24 \cdot 10^{-3}$	3.34
$1 \cdot 10^{-2}$	129	9	273	$2.01 \cdot 10^{-3}$	3.6
$2.5 \cdot 10^{-3}$	321	11	723	$4.24 \cdot 10^{-4}$	4.75
$5 \cdot 10^{-4}$	769	13	1,813	$8.65 \cdot 10^{-5}$	4.9
$1 \cdot 10^{-4}$	1,793	15	4,375	$1.69 \cdot 10^{-5}$	5.13
$5 \cdot 10^{-5}$	4,097	17	10,265	$3.05 \cdot 10^{-6}$	5.52
$1 \cdot 10^{-5}$	9,217	19	23,579	$4.77 \cdot 10^{-7}$	6.4

Tabelle 5.2: Fehlerindikator  $\epsilon$  bei der Verwendung des Algorithmus' 1 zum Aufbau einer geeigneten adaptiven Struktur für die Interpolation der Funktion  $f_1(x_1, x_2)$ , Anzahl der inneren Gitterpunkte des dünnen Gitters und die Anzahl der Teilgitter und Zellen, sowie der gemessene  $L_2$ -Fehler bei der Verwendung der adaptiven Kombinationstechnik (3.51) und die dazugehörige Fehlerordnung  $= \frac{e_{n-1}}{e_n}$

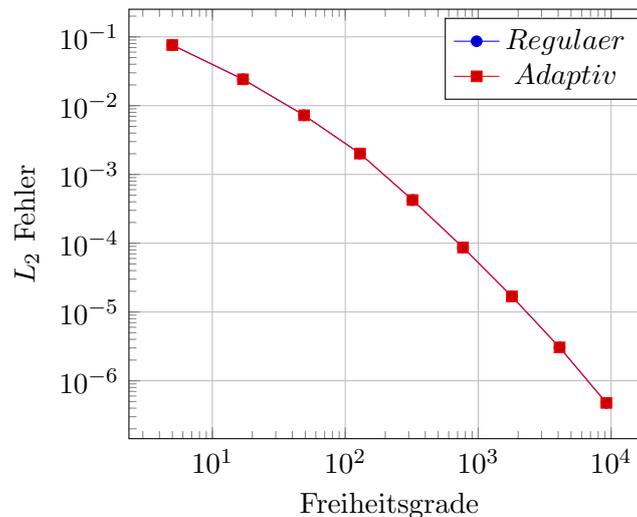


Abbildung 5.4: Vergleich des Konvergenzverhaltens der regulären und adaptiven Kombinationstechniken bei der Interpolation der Funktion  $f_1(x_1, x_2)$

## 5.2 Zweiter Test

Beim zweiten Test wird die Funktion

$$f_2(x_1, x_2) := 16 \cdot x_1^2 \cdot (1 - x_1^3) \cdot x_2^2 \cdot (1 - x_2^3),$$

die in der Abbildung 5.5 veranschaulicht wird, mittels beider, hier vorgestellten, Kombinationstechniken, der regulären (3.36) und der adaptiven (3.51), interpoliert.

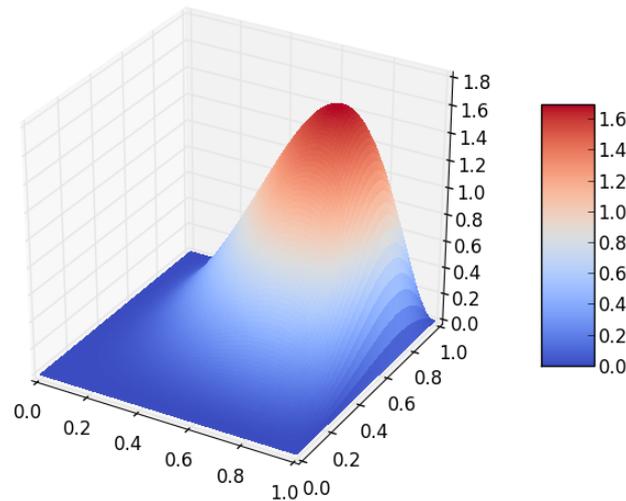


Abbildung 5.5: Zu interpolierende Funktion  $f_2(x_1, x_2)$

Die Gitter für die reguläre Kombinationstechnik wurden schon in dem Abschnitt 5.1 präsentiert. In der Abbildung 5.6 sind die adaptiven dünnen Gitter abgebildet, die, in Abhängigkeit vom Fehlerindikator  $\epsilon$ , mit dem Algorithmus 1 für die Interpolation der Funktion  $f_2(x_1, x_2) := 16 \cdot x_1^2 \cdot (1 - x_1^3) \cdot x_2^2 \cdot (1 - x_2^3)$  gebildet werden.

In den Tabellen 5.3 und 5.4 sind die  $L_2$ -Fehler, die bei der Interpolation der Funktion  $f_2(x_1, x_2)$  mittels regulärer (3.36) und adaptiver (3.51) Kombinationstechnik entstehen, sowie deren Fehlerordnung  $\left(\frac{e_{n-1}}{e_n}\right)$ , also die Änderungsrate des Fehlers, aufgelistet. Weiterhin geben die Tabellen 5.3 und 5.4 die Anzahl der verwendeten Teilgitter an, sowie die Anzahl der verwendeten Zellen im Falle der adaptiven Kombinationstechnik. Das Konvergenzverhalten der Kombinationstechniken bei der Interpolation der Funktion  $f_2(x_1, x_2)$  wird in der Abbildung 5.7 anschaulich dargestellt. Dort werden die  $L_2$ -Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade abgebildet.

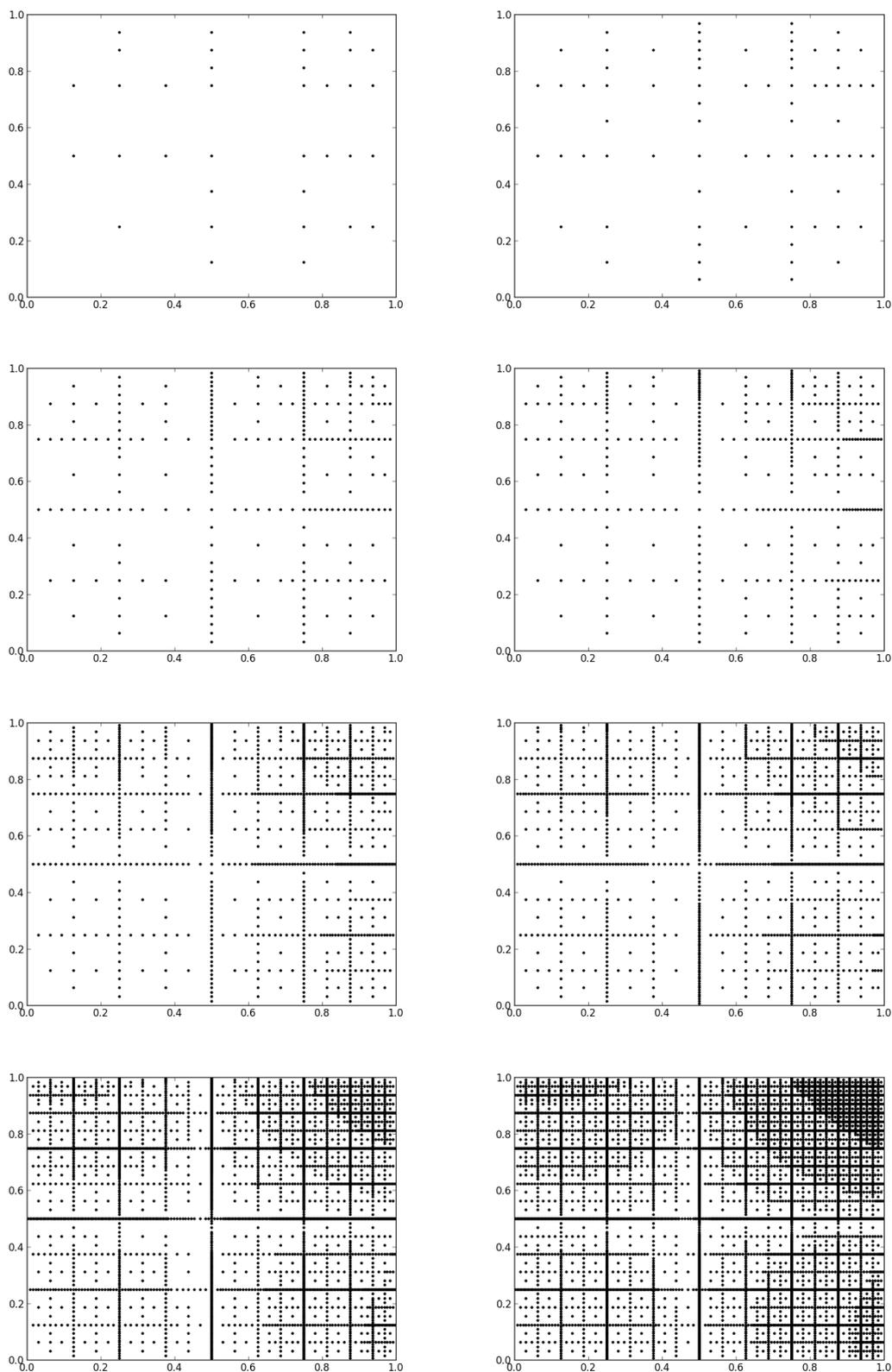


Abbildung 5.6: Von links oben nach rechts unten: Die adaptiven dünnen Gitter bei der Anwendung des Algorithmus' 1 für  $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001, 0.000025$ , und  $f_2(x_1, x_2)$

Level	DoF	Teilgitter	$L_2 - Fehler$	Ordnung
2	5	3	0.28	0
3	17	5	0.11	2.43
4	49	7	$4.05 \cdot 10^{-2}$	2.82
5	129	9	$1.3 \cdot 10^{-2}$	3.12
6	321	11	$3.71 \cdot 10^{-3}$	3.5
7	769	13	$8.48 \cdot 10^{-4}$	4.37
8	1,793	15	$1.71 \cdot 10^{-4}$	4.96
9	4,097	17	$3.13 \cdot 10^{-5}$	5.46
10	9,217	19	$4.9 \cdot 10^{-6}$	6.38

Tabelle 5.3: Die Stufe der regulären Kombinationstechnik (3.36), die Anzahl der inneren Gitterpunkte des dünnen Gitters und die Anzahl der verwendeten Teilgitter, sowie der gemessene  $L_2$ -Fehler bei der Interpolation von  $f_2(x_1, x_2)$  und die Fehlerordnung  $= \frac{e_{n-1}}{e_n}$

Epsilon	DoF	Teilgitter	Zellen	$L_2 - Fehler$	Ordnung
0.5	12	8	20	$7.62 \cdot 10^{-2}$	0
0.1	36	17	66	$5 \cdot 10^{-2}$	1.52
$5 \cdot 10^{-2}$	78	18	158	$1.03 \cdot 10^{-2}$	4.87
$1 \cdot 10^{-2}$	235	27	507	$2.44 \cdot 10^{-3}$	4.22
$5 \cdot 10^{-3}$	357	31	801	$1.2 \cdot 10^{-3}$	2.03
$1 \cdot 10^{-3}$	973	39	2,289	$1.95 \cdot 10^{-4}$	6.17
$5 \cdot 10^{-4}$	1,489	43	3,547	$8.39 \cdot 10^{-5}$	2.32
$1 \cdot 10^{-4}$	3,965	54	9,741	$1.16 \cdot 10^{-5}$	7.21
$2.5 \cdot 10^{-5}$	8,924	61	22,414	$2.29 \cdot 10^{-6}$	5.08

Tabelle 5.4: Fehlerindikator  $\epsilon$  bei der Verwendung des Algorithmus' 1 zum Aufbau einer geeigneten adaptiven Struktur für die Interpolation der Funktion  $f_2(x_1, x_2)$ , Anzahl der inneren Gitterpunkte des dünnen Gitters und die Anzahl der Teilgitter und Zellen, sowie der gemessene  $L_2$ -Fehler bei der Verwendung der adaptiven Kombinationstechnik (3.51) und die dazugehörige Fehlerordnung  $= \frac{e_{n-1}}{e_n}$

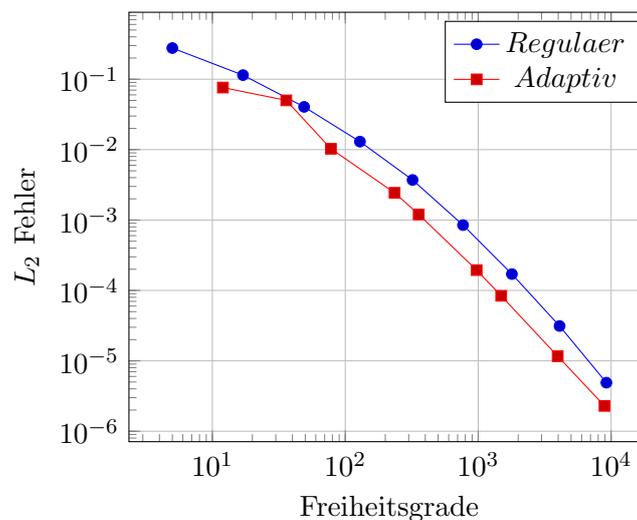


Abbildung 5.7: Vergleich des Konvergenzverhaltens der regulären und adaptiven Kombinationstechniken bei der Interpolation der Funktion  $f_2(x_1, x_2)$

### 5.3 Dritter Test

Beim dritten Test wird die Funktion

$$f_3(x_1, x_2) := 16 \cdot x_1^6 \cdot (1 - x_1^3) \cdot x_2 \cdot (1 - x_2),$$

die in der Abbildung 5.8 veranschaulicht wird, mittels beider, hier vorgestellten, Kombinationstechniken, der regulären (3.36) und der adaptiven (3.51), interpoliert.

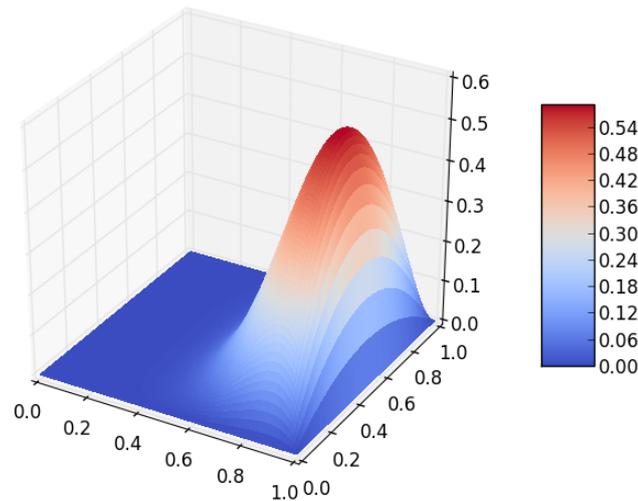


Abbildung 5.8: Zu interpolierende Funktion  $f_3(x_1, x_2)$

Die Gitter für die reguläre Kombinationstechnik wurden schon in dem Abschnitt 5.1 präsentiert. In der Abbildung 5.9 sind die adaptiven dünnen Gitter abgebildet, die, in Abhängigkeit vom Fehlerindikator  $\epsilon$ , mit dem Algorithmus 1 für die Interpolation der Funktion  $f_3(x_1, x_2) := 16 \cdot x_1^6 \cdot (1 - x_1^3) \cdot x_2 \cdot (1 - x_2)$  gebildet werden.

In den Tabellen 5.5 und 5.6 sind die  $L_2$ -Fehler, die bei der Interpolation der Funktion  $f_3(x_1, x_2)$  mittels regulärer (3.36) und adaptiver (3.51) Kombinationstechnik entstehen, sowie deren Fehlerordnung  $\left(\frac{e_{n-1}}{e_n}\right)$ , also die Änderungsrate des Fehlers, aufgelistet. Weiterhin geben die Tabellen 5.5 und 5.6 die Anzahl der verwendeten Teilgitter an, sowie die Anzahl der verwendeten Zellen im Falle der adaptiven Kombinationstechnik. Das Konvergenzverhalten der Kombinationstechniken bei der Interpolation der Funktion  $f_3(x_1, x_2)$  wird in der Abbildung 5.10 anschaulich dargestellt. Dort werden die  $L_2$ -Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade abgebildet.

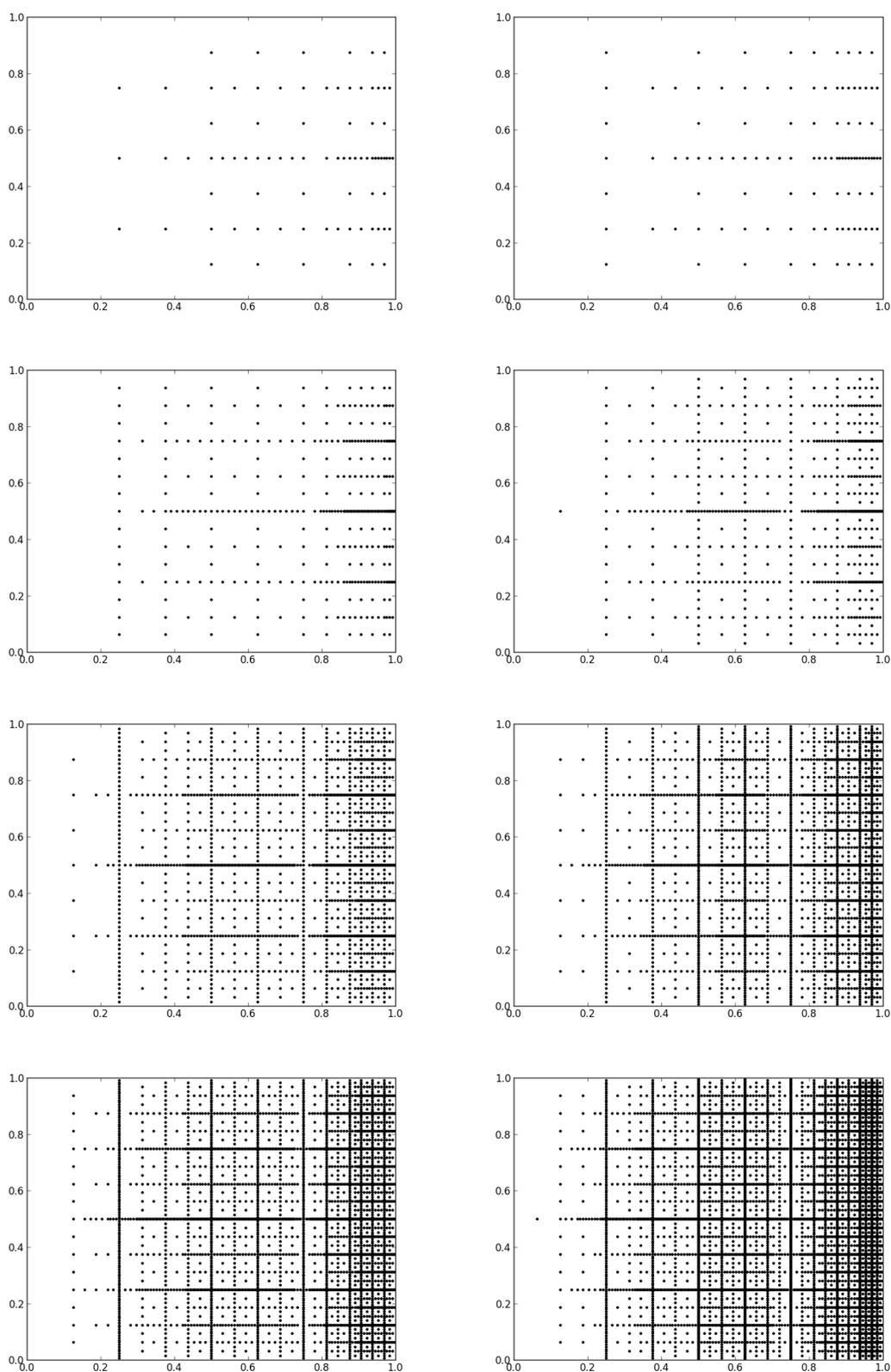


Abbildung 5.9: Von links oben nach rechts unten: Die adaptiven dünnen Gitter bei der Anwendung des Algorithmus' 1 für  $\epsilon = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001, 0.00005, 0.000025, 0.00001$ , und  $f_3(x_1, x_2)$

Level	DoF	Teilgitter	$L_2 - Fehler$	Ordnung
2	5	3	0.12	0
3	17	5	$5.22 \cdot 10^{-2}$	2.33
4	49	7	$1.86 \cdot 10^{-2}$	2.81
5	129	9	$5.86 \cdot 10^{-3}$	3.17
6	321	11	$1.45 \cdot 10^{-3}$	4.04
7	769	13	$3.48 \cdot 10^{-4}$	4.17
8	1,793	15	$7.43 \cdot 10^{-5}$	4.68
9	4,097	17	$1.39 \cdot 10^{-5}$	5.34
10	9,217	19	$2.19 \cdot 10^{-6}$	6.34

Tabelle 5.5: Die Stufe der regulären Kombinationstechnik (3.36), die Anzahl der inneren Gitterpunkte des dünnen Gitters und die Anzahl der verwendeten Teilgitter, sowie der gemessene  $L_2$ -Fehler bei der Interpolation von  $f_3(x_1, x_2)$  und die Fehlerordnung  $= \frac{e_{n-1}}{e_n}$

Epsilon	DoF	Teilgitter	Zellen	$L_2 - Fehler$	Ordnung
$5 \cdot 10^{-2}$	22	11	34	$1.73 \cdot 10^{-2}$	0
$5 \cdot 10^{-3}$	105	17	195	$3.3 \cdot 10^{-3}$	5.24
$1 \cdot 10^{-3}$	333	27	695	$7.97 \cdot 10^{-4}$	4.14
$5 \cdot 10^{-4}$	602	31	1,328	$2.35 \cdot 10^{-4}$	3.39
$1 \cdot 10^{-4}$	1,660	40	3,912	$1.57 \cdot 10^{-5}$	15.01
$5 \cdot 10^{-5}$	2,869	49	7,009	$7.13 \cdot 10^{-6}$	2.2
$2.5 \cdot 10^{-5}$	3,866	49	9,446	$3.43 \cdot 10^{-6}$	2.08
$1 \cdot 10^{-5}$	7,182	59	17,926	$1.6 \cdot 10^{-6}$	2.15

Tabelle 5.6: Fehlerindikator  $\epsilon$  bei der Verwendung des Algorithmus' 1 zum Aufbau einer geeigneten adaptiven Struktur für die Interpolation der Funktion  $f_3(x_1, x_2)$ , Anzahl der inneren Gitterpunkte des dünnen Gitters und die Anzahl der Teilgitter und Zellen, sowie der gemessene  $L_2$ -Fehler bei der Verwendung der adaptiven Kombinationstechnik (3.51) und die dazugehörige Fehlerordnung  $= \frac{e_{n-1}}{e_n}$

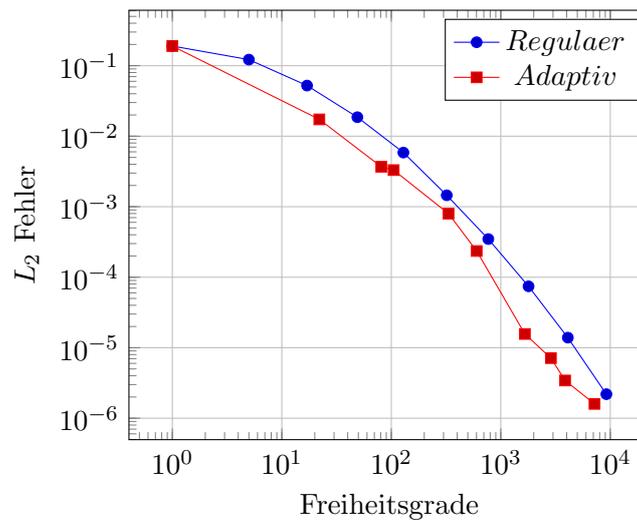


Abbildung 5.10: Vergleich des Konvergenzverhaltens der regulären und adaptiven Kombinationstechniken bei der Interpolation der Funktion  $f_3(x_1, x_2)$

## 5.4 Vierter Test

Beim vierten Test wird eine Funktion mit steifem Gradienten betrachtet.

$$f_4(x_1, x_2) := \begin{cases} 1, & 0.2 \leq x, y \leq 0.8 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion wird in der Abbildung 5.11 veranschaulicht und mittels beider, hier vorgestellten, Kombinationstechniken, der regulären (3.36) und der adaptiven (3.51), interpoliert.

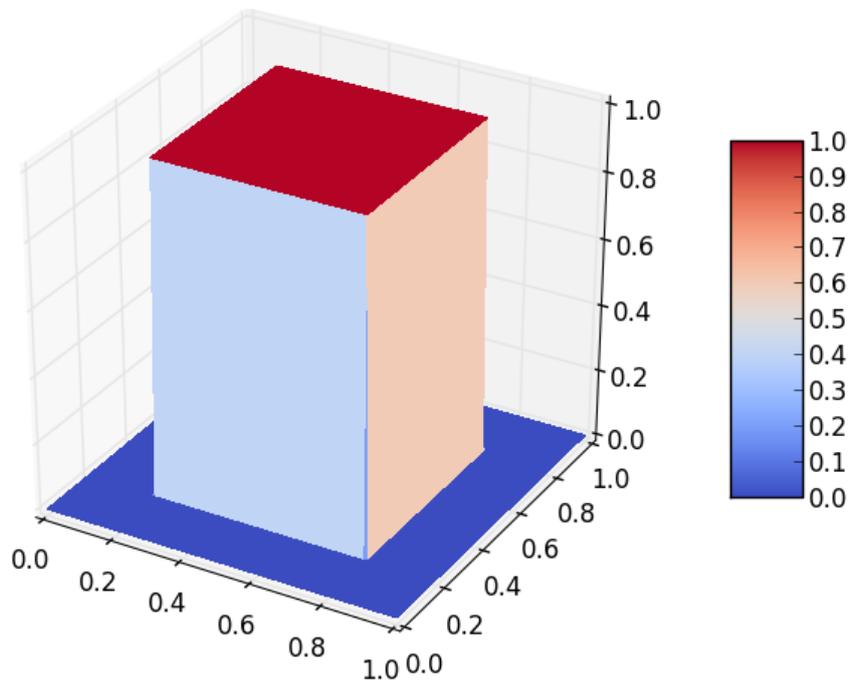


Abbildung 5.11: Zu interpolierende Funktion  $f_4(x_1, x_2)$

Die Gitter für die reguläre Kombinationstechnik wurden schon in dem Abschnitt 5.1 präsentiert.

In den Abbildungen 5.12 und 5.13 sind die adaptiven dünnen Gitter abgebildet. Jedoch hängt die Anzahl der Freiheitsgrade in diesem Fall nicht mehr von der Wahl des Fehlerindicators  $\epsilon$  ab, da aufgrund der Beschaffenheit der Funktion  $f_4(x_1, x_2)$  der hierarchische Überschuss in den einzelnen Gitterpunkten nur eine kleine Menge an bestimmten Werten annehmen kann, wie es auch in der Arbeit von Feuersänger [Feu10] festgestellt wurde. Stattdessen muss nun also eine andere Möglichkeit der Verfeinerung gewählt werden. So wird ein fester Wert für  $\epsilon$ , hier zum Beispiel  $\epsilon = 0.1$ , gesetzt und anschliessend der maximale Level der Gitterpunkte variiert, womit die Lage des jeweiligen Gitterpunktes im Binärbaum, wie es in Kapitel 4.1 beschrieben wurde, gemeint ist.

In den Tabellen 5.7 und 5.8 sind die  $L_2$ -Fehler, die bei der Interpolation der Funktion  $f_4(x_1, x_2)$  mittels regulärer (3.36) und adaptiver (3.51) Kombinationstechnik entstehen, sowie deren Fehlerordnung  $\left(\frac{e_{n-1}}{e_n}\right)$ , also die Änderungsrate des Fehlers, aufgelistet.

Weiterhin geben die Tabellen 5.7 und 5.8 die Anzahl der verwendeten Teilgitter an, sowie die Anzahl der verwendeten Zellen im Falle der adaptiven Kombinationstechnik. Das Konvergenzverhalten der Kombinationstechniken bei der Interpolation der Funktion  $f_4(x_1, x_2)$  wird in der Abbildung 5.14 anschaulich dargestellt. Dort werden die  $L_2$ -Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade abgebildet. Zusätzlich wird in der Abbildung 5.15 die Wahl des maximalen Levels der Anzahl der Freiheitsgrade gegenübergestellt, was die entsprechende Abhängigkeit verdeutlicht.

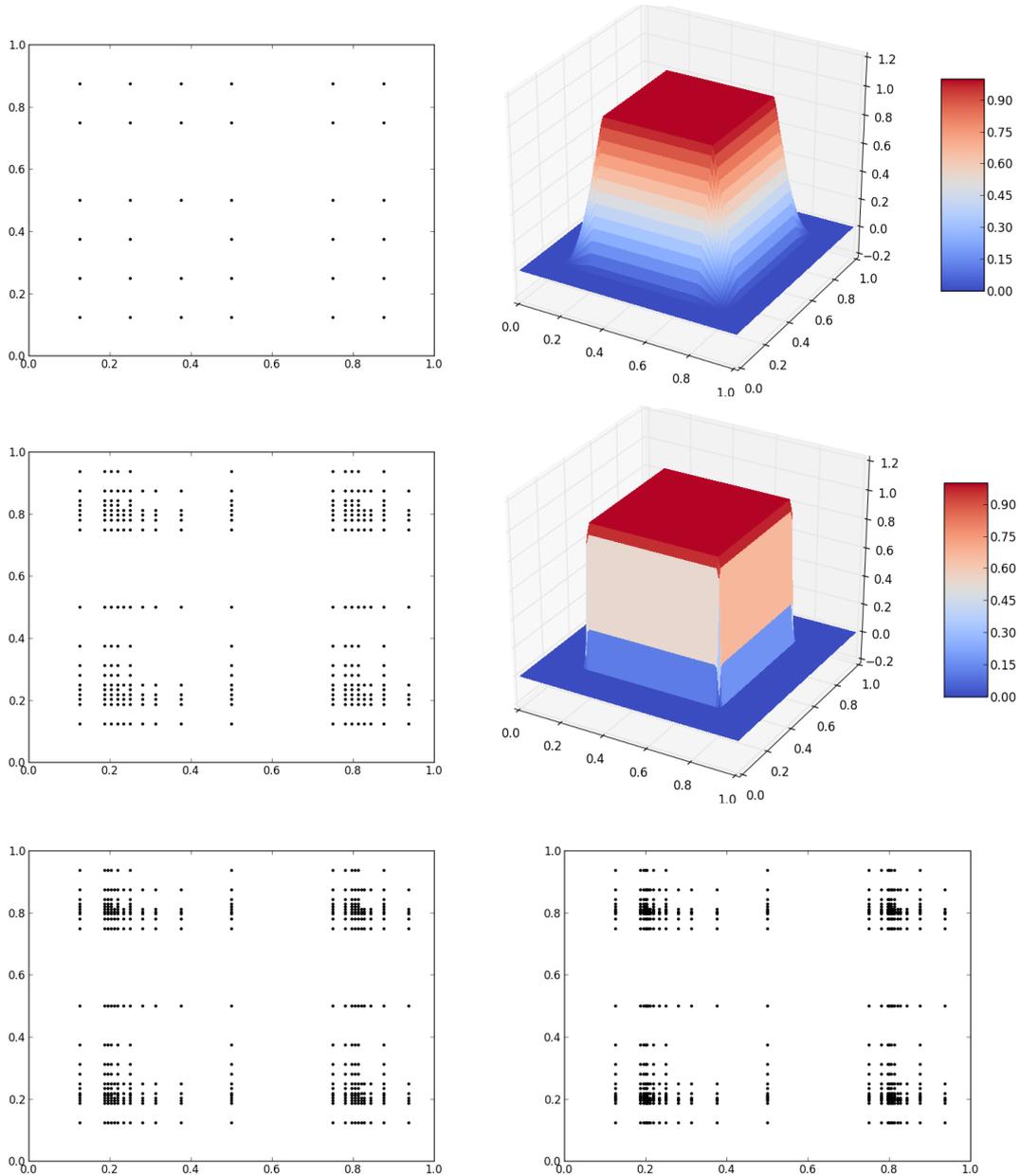


Abbildung 5.12: Von links oben nach rechts unten: Die adaptiven dünnen Gitter bei der Anwendung des Algorithmus' 1 für  $\epsilon = 0.1$ , maximaler Level = 3, 6, 7, 8 und  $f_4(x_1, x_2)$  und die entsprechenden Interpolanten

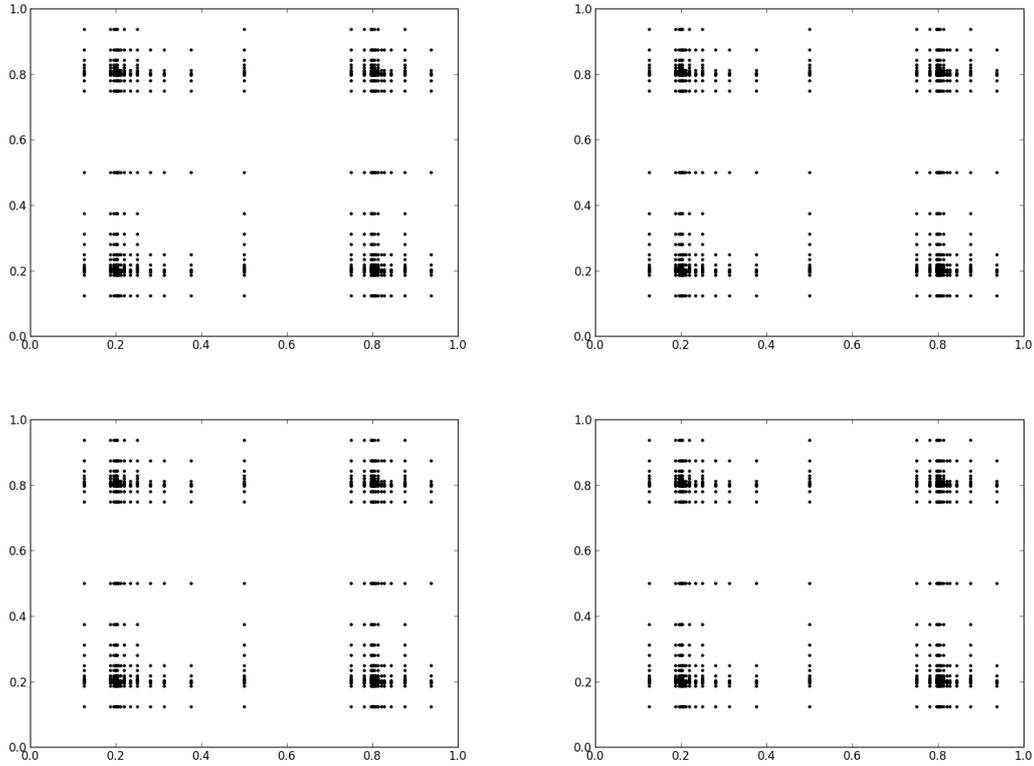


Abbildung 5.13: Von links oben nach rechts unten: Die adaptiven dünnen Gitter bei der Anwendung des Algorithmus' 1 für  $\epsilon = 0.1$ , maximaler Level = 9, 10, 15, 20 und  $f_4(x_1, x_2)$

Level	DoF	Teilgitter	$L_2 - Fehler$	Ordnung
1	1	1	0.35	0
2	5	3	0.29	1.18
3	17	5	0.2	1.47
4	49	7	0.16	1.22
5	129	9	0.12	1.36
6	321	11	$8.11 \cdot 10^{-2}$	1.48
7	769	13	$5.98 \cdot 10^{-2}$	1.36
8	1,793	15	$5.85 \cdot 10^{-2}$	1.02
9	4,097	17	$5.33 \cdot 10^{-2}$	1.1
10	9,217	19	$2.58 \cdot 10^{-2}$	2.07

Tabelle 5.7: Die Stufe der regulären Kombinationstechnik (3.36), die Anzahl der inneren Gitterpunkte des dünnen Gitters und die Anzahl der verwendeten Teilgitter, sowie der gemessene  $L_2$ -Fehler bei der Interpolation von  $f_4(x_1, x_2)$  und die Fehlerordnung  $= \frac{e_{n-1}}{e_n}$

MaxLevel	DoF	Teilgitter	Zellen	$L_2$ - Fehler	Ordnung
1	1	1	1	0.35	0
2	9	4	15	0.33	1.06
4	91	16	213	0.17	1.96
5	171	25	429	$8.71 \cdot 10^{-2}$	1.91
6	275	36	717	$7.2 \cdot 10^{-2}$	1.21
8	555	64	1,509	$5.9 \cdot 10^{-2}$	1.22
9	731	81	2,013	$4.16 \cdot 10^{-2}$	1.42
10	931	100	2,589	$1.84 \cdot 10^{-2}$	2.26
12	1,403	144	3,957	$1.42 \cdot 10^{-2}$	1.3
15	2,291	225	6,549	$2.67 \cdot 10^{-3}$	5.3
17	3,003	289	8,637	$1.26 \cdot 10^{-3}$	2.13
20	4,251	400	12,309	$3.09 \cdot 10^{-4}$	4.06

Tabelle 5.8: Der maximale Level, MaxLevel, bei der Verwendung des Algorithmus' 1 zum Aufbau einer geeigneten adaptiven Struktur für die Interpolation der Funktion  $f_4(x_1, x_2)$ , Anzahl der inneren Gitterpunkte des dünnen Gitters und die Anzahl der Teilgitter und Zellen, sowie der gemessene  $L_2$ -Fehler bei der Verwendung der adaptiven Kombinationstechnik (3.51) und die dazugehörige Fehlerordnung  $= \frac{e_{n-1}}{e_n}$

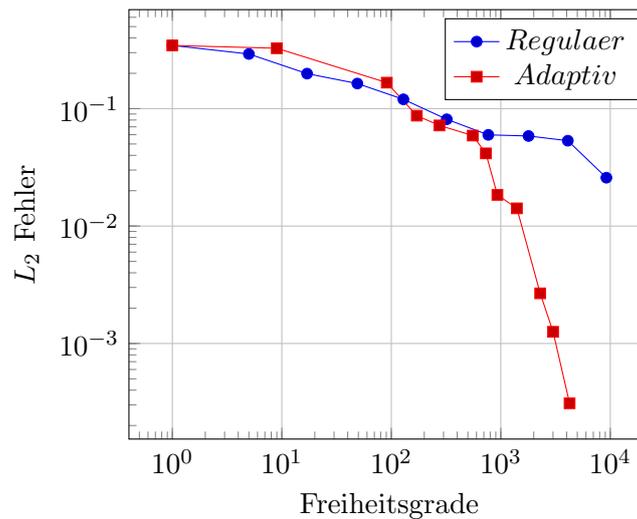


Abbildung 5.14: Vergleich des Konvergenzverhaltens der regulären und adaptiven Kombinationstechniken bei der Interpolation der Funktion  $f_4(x_1, x_2)$

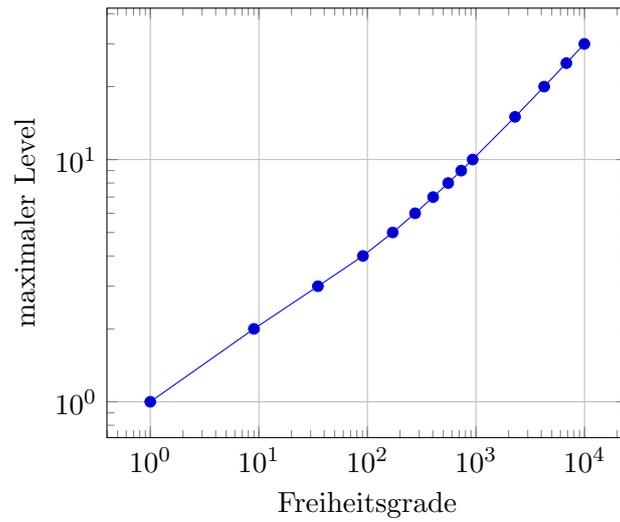


Abbildung 5.15: Anzahl der Freiheitsgrade in Abhängigkeit von der Wahl des maximalen Levels bei der Interpolation der Funktion  $f_4(x_1, x_2)$

## 5.5 Fünfter Test

Beim fünften Test wird eine weitere Funktion mit steifem Gradienten betrachtet.

$$f_5(x_1, x_2) := \begin{cases} 1, & (x_1 - 0.7)^2 + (x_2 - 0.6)^2 \leq 0.25 \text{ und } x \leq 0.7 \text{ und } y \leq 0.6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion wird in der Abbildung 5.16 veranschaulicht und mittels beider, hier vorgestellten, Kombinationstechniken, der regulären (3.36) und der adaptiven (3.51), interpoliert.

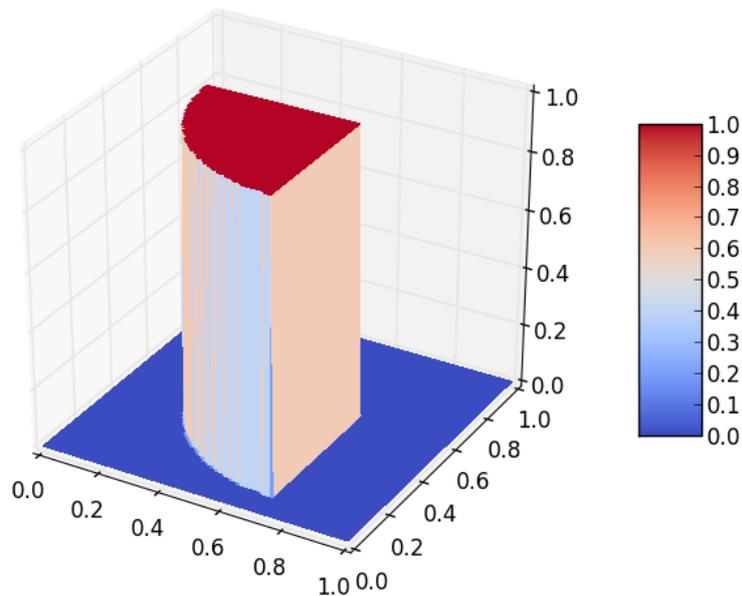


Abbildung 5.16: Zu interpolierende Funktion  $f_5(x_1, x_2)$

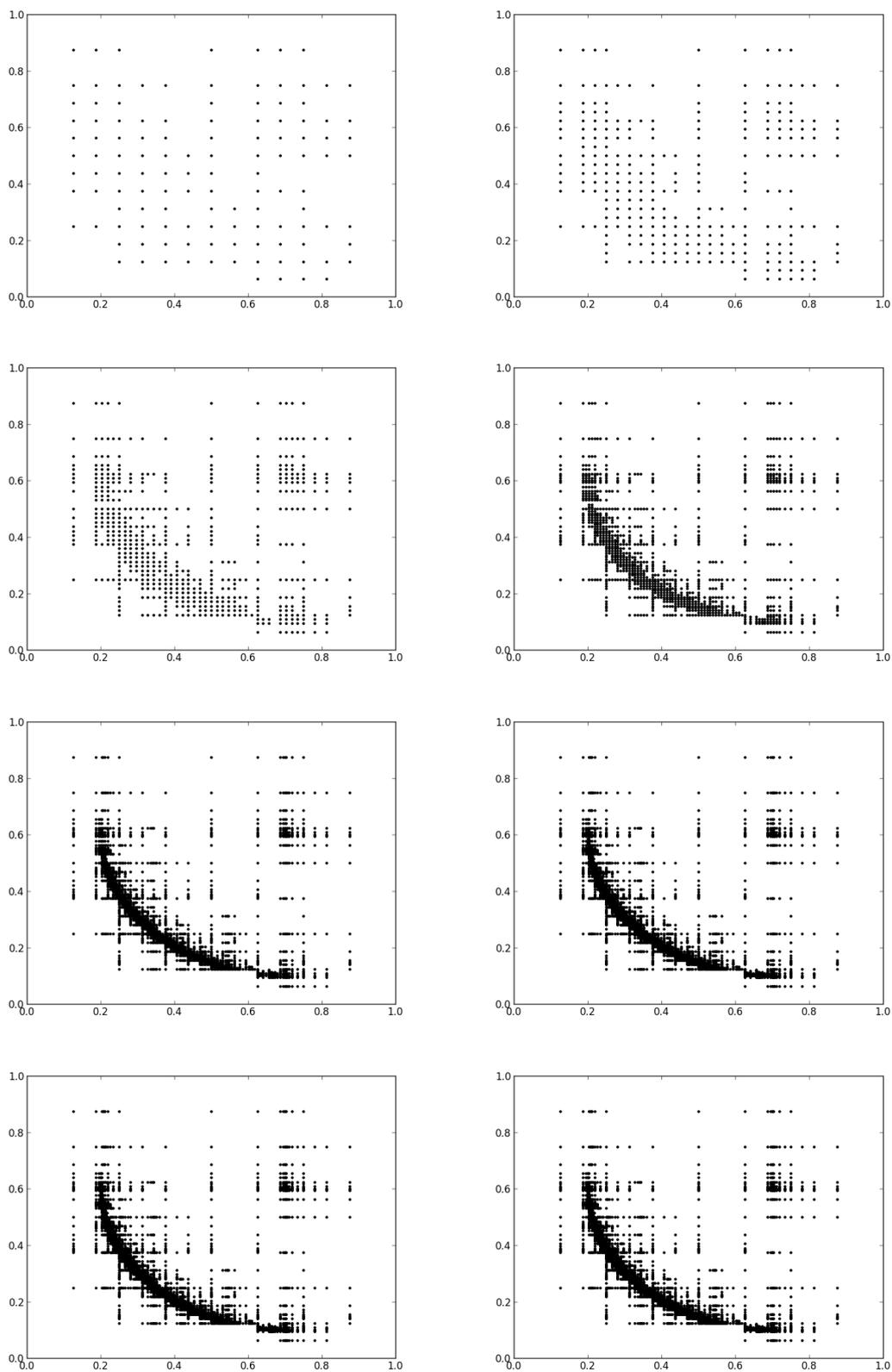


Abbildung 5.17: Von links oben nach rechts unten: Die adaptiven dünnen Gitter bei der Anwendung des Algorithmus<sup>7</sup> 1 für  $\epsilon = 0.1$ , maximaler Level = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und  $f_5(x_1, x_2)$

Level	DoF	Teilgitter	$L_2 - Fehler$	Ordnung
1	1	1	0.3	0
2	5	3	0.27	1.09
3	17	5	0.21	1.3
4	49	7	0.18	1.14
5	129	9	0.15	1.24
6	321	11	0.11	1.3
7	769	13	$9.97 \cdot 10^{-2}$	1.14
8	1,793	15	$9.41 \cdot 10^{-2}$	1.06
9	4,097	17	$7.56 \cdot 10^{-2}$	1.24
10	9,217	19	$6.83 \cdot 10^{-2}$	1.11

Tabelle 5.9: Die Stufe der regulären Kombinationstechnik (3.36), die Anzahl der inneren Gitterpunkte des dünnen Gitters und die Anzahl der verwendeten Teilgitter, sowie der gemessene  $L_2$ -Fehler bei der Interpolation von  $f_5(x_1, x_2)$  und die Fehlerordnung  $= \frac{e_{n-1}}{e_n}$

MaxLevel	DoF	Teilgitter	Zellen	$L_2 - Fehler$	Ordnung
1	1	1	1	0.3	0
3	45	8	97	0.18	1.7
5	272	24	708	$9.54 \cdot 10^{-2}$	1.83
7	1,091	48	2,899	$8.62 \cdot 10^{-2}$	1.11
9	4,047	80	10,841	$7.41 \cdot 10^{-2}$	1.16
10	7,838	99	20,994	$6.74 \cdot 10^{-2}$	1.1

Tabelle 5.10: Der maximale Level, MaxLevel, bei der Verwendung des Algorithmus' 1 zum Aufbau einer geeigneten adaptiven Struktur für die Interpolation der Funktion  $f_5(x_1, x_2)$ , Anzahl der inneren Gitterpunkte des dünnen Gitters und die Anzahl der Teilgitter und Zellen, sowie der gemessene  $L_2$ -Fehler bei der Verwendung der adaptiven Kombinationstechnik (3.51) und die dazugehörige Fehlerordnung  $= \frac{e_{n-1}}{e_n}$

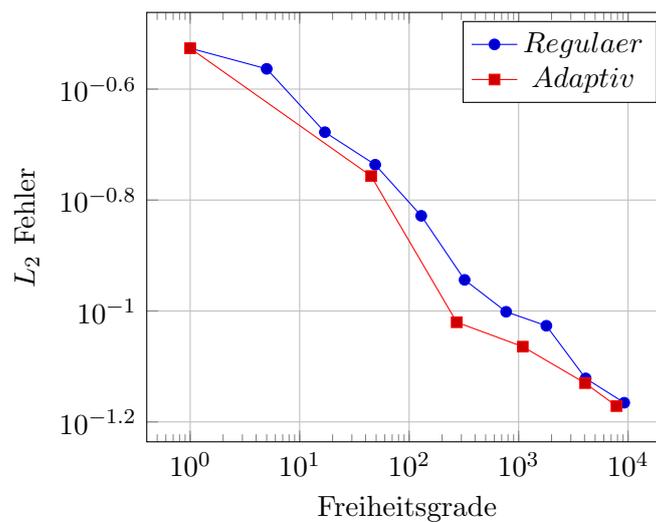


Abbildung 5.18: Vergleich des Konvergenzverhaltens der regulären und adaptiven Kombinationstechniken bei der Interpolation der Funktion  $f_5(x_1, x_2)$

Auch in diesem Fall wurden die Gitter für die reguläre Kombinationstechnik schon in dem Abschnitt 5.1 präsentiert.

In der Abbildung 5.17 sind die adaptiven dünnen Gitter abgebildet, wobei auch in diesem Fall, aus dem selben Grund, die Verfeinerungstechnik aus dem vorherigen Abschnitt angewendet werden muss.

In den Tabellen 5.9 und 5.10 sind die  $L_2$ -Fehler, die bei der Interpolation der Funktion  $f_5(x_1, x_2)$  mittels regulärer (3.36) und adaptiver (3.51) Kombinationstechnik entstehen, sowie deren Fehlerordnung  $\left(\frac{e_{n-1}}{e_n}\right)$ , also die Änderungsrate des Fehlers, aufgelistet. Weiterhin geben die Tabellen 5.9 und 5.10 die Anzahl der verwendeten Teilgitter an, sowie die Anzahl der verwendeten Zellen im Falle der adaptiven Kombinationstechnik. Das Konvergenzverhalten der Kombinationstechniken bei der Interpolation der Funktionen  $f_5(x_1, x_2)$  wird in der Abbildung 5.18 anschaulich dargestellt. Dort werden die  $L_2$ -Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade abgebildet.

## 5.6 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wird eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse aus den vorangegangenen Tests wiedergegeben.

Im ersten Testfall, Abschnitt 5.1, stimmen die Gitter, sowie die Anzahl der verwendeten Teilgitter, die bei der regulären und der adaptiven Kombinationstechnik verwendet werden, überein. Das hat zur Folge, dass bei der Interpolation der Funktion  $f_1(x_1, x_2)$  der selbe  $L_2$ -Fehler gemessen wird. Dies kann in den Tabellen 5.1 und 5.2 betrachtet werden und wird in der Abbildung 5.4 graphisch dargestellt.

Bei den übrigen Testfällen sind die regulären und die adaptiven dünnen Gitter jeweils unterschiedlich. Die adaptiven dünnen Gitter sind dabei in den Abbildungen 5.6, 5.9, 5.12, 5.13, 5.17 zu sehen.

Weiterhin wird aus den Abbildungen 5.7, 5.10, 5.14 und 5.18 und den dazugehörigen Tabellen deutlich, dass die adaptive Kombinationstechnik bei den Testfunktionen  $f_2(x_1, x_2)$ ,  $f_3(x_1, x_2)$ ,  $f_4(x_1, x_2)$  und  $f_5(x_1, x_2)$  stets ein besseres Ergebnis als die reguläre Kombinationstechnik liefert. Das bedeutet, dass im adaptiven Fall bei geringerer Anzahl an Freiheitsgraden auch ein kleinerer  $L_2$ -Fehler gemessen wird, was zu einem „günstigeren“ Kosten-Nutzen-Verhältnis als bei der regulären Kombinationstechnik führt. Allerdings zeigen die Tabellen 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 und 5.10 auch, dass die adaptive Kombinationstechnik stets eine höhere Anzahl an Teilgittern verwendet, als die reguläre Kombinationstechnik.

Festzuhalten bleibt auch, dass in den letzten beiden Testfällen, in den Abschnitten 5.4 und 5.5, eine etwas abgeänderte Verfeinerungsstrategie verfolgt werden musste. Bei einem festgelegten  $\epsilon$  ist die Anzahl der Freiheitsgrade von einem frei wählbaren maximalen Level abhängig, wie es in dem Abschnitt 5.4 beschrieben wurde.

## Kapitel 6

# Zusammenfassung und Fazit

In den vorherigen Kapiteln der vorliegenden Arbeit wurden dem Leser die reguläre und die adaptive Kombinationstechnik vorgestellt und untersucht. Die Kombinationstechnik basiert dabei auf der Idee der dünnen Gitter, die ebenfalls, wie die hierarchischen Basen, die einen wesentlichen Bestandteil der Dünn-Gitter-Theorie bilden, in dieser Arbeit erklärt werden.

Die reguläre Kombinationstechnik, die von Griebel in [GSZ92] eingeführt wurde, und die adaptive Kombinationstechnik von Hemker und Noordmans aus [NH00] werden in dieser Arbeit für die Interpolation von verschiedenen Funktionen genutzt und die Ergebnisse anschließend miteinander verglichen. Betrachtet man ausschließlich die Anzahl der inneren Gitterpunkte des jeweiligen dünnen Gitters und den dazugehörigen  $L_2$ -Fehler, so zeigen die Tabellen und die dazugehörigen Plots aus Kapitel 5, dass die adaptive Kombinationstechnik stets bessere, oder wie bei der Interpolation der Funktion  $f_1(x_1, x_2)$  aus 5.1, bei übereinstimmenden dünnen Gittern, gleiche Ergebnisse liefert. Allerdings haben die Tests aus dem vorherigen Kapitel auch gezeigt, dass bei der Verwendung der adaptiven Kombinationstechnik für die Erhöhung der Genauigkeit, also für die Verkleinerung des  $L_2$ -Fehlers, eine deutliche Erhöhung des Aufwandes nötig ist, welche sich in dem Anstieg der Anzahl der verwendeten Teilgitter widerspiegelt. Es sollte also genau abgewogen werden, ob der erzielte Genauigkeitsgewinn den dazu notwendigen Zusatzaufwand rechtfertigt. In [Gar98] wurde beschrieben, dass sich die Kombinationstechnik sehr gut zur Nutzung von Parallelrechnern eignet. Für die Parallelisierung der adaptiven Kombinationstechnik werden dabei aufgrund der höheren Anzahl an Teilgittern mehr Ressourcen als bei der regulären Kombinationstechnik benötigt.

Aufgrund der deutlichen Reduktion der Anzahl der erforderlichen Gitterpunkte, die jedoch nur einen geringen Verlust der Genauigkeit, bei der Interpolation von hinreichend glatten Funktionen nach sich zieht, bieten die dünnen Gitter und die darauf basierende Kombinationstechnik im Vergleich zu herkömmlichen vollen Gittern einige Vorteile, die besonders bei hochdimensionalen Funktionen deutlich werden. Aus dieser Überlegung werden die dünnen Gitter und auch die Kombinationstechnik auch auf andere, besonders hochdimensionale, Aufgabenstellungen der numerischen Mathematik, wie z.B. die numerische Integration [GG98] oder auch Lösung partieller Differentialgleichungen höherer Dimensionen  $d \geq 3$  angewendet.

In der vorliegenden Arbeit wurden die Kombinationstechniken für die Interpolation

von Funktionen verwendet. Allerdings können diese auch zur Lösung anderer Probleme genutzt werden, wobei die adaptive Kombinationstechnik, wie in der folgenden Anwendung, bessere Ergebnisse liefert.

Probleme aus dem Finanzbereich, wie die Bewertung von Optionen und insbesondere von Basketoptionen, die in Abhängigkeit von der Anzahl der zugrunde liegenden Basiswerte zu höherdimensionalen partiellen Differentialgleichungen führen, die in Kapitel 2 beschrieben wurden, lassen sich unter Verwendung der dünnen Gitter und/oder der Kombinationstechnik lösen. Wobei es bei Optionspreisaufgaben wie es in der Arbeit von Heineke erwähnt wird, sinnvoll wäre, nicht mehr reguläre, sondern adaptive dünne Gitter zu verwenden, da diese zusätzliche Gitterpunkte an den kritischen Stellen erlauben, wogegen reguläre dünne Gitter zu wenig Gitterpunkte an diesen Stellen aufweisen. Adaptive dünne Gitter wurden unter anderem in den Arbeiten von Mertens [Mer05], Heineke [Hei11] und Schraufstetter [Sch12] zur Bewertung von Basketoptionen genutzt. Auch die in der Arbeit von Hemker und Noordmans [NH00] vorgestellte und in der vorliegenden Arbeit beschriebene adaptive Kombinationstechnik lässt sich zu diesem Zweck verwenden.

# Literaturverzeichnis

- [Bac00] Louis Bachelier. *Theorie de la speculation*. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure 17, 1900. Seiten 21-86.
- [Bas08] Peter Bastian. *Finite-Elemente-Verfahren und schnelle Löser*. Vorlesungsskript, Universität Stuttgart, Sommersemester 2008.
- [BG04] Hans-Joachim Bungartz and Michael Griebel. Sparse grids. *Acta Numerica*, pages 1–123, 2004.
- [Bra07] Dietrich Braess. *Finite Elemente*. Springer, Berlin-Heidelberg, 2007.
- [BS73] F. Black and M. Scholes. *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy 81, 1973. Seiten 637-659.
- [Bun92] Hans-Joachim Bungartz. *Dünne Gitter und deren Anwendung bei der adaptiven Lösung der dreidimensionalen Poisson Gleichung*. Dissertation, Technische Universität München, Fakultät für Informatik, 1992.
- [Feu05] Christian Feuersänger. *Dünngitterverfahren für hochdimensionale elliptische partielle Differentialgleichungen*. Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2005.
- [Feu10] Christian Feuersänger. *Sparse Grid Methods for Higher Dimensional Approximation*. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2010.
- [Fle05] Stefan Fleischer. *Numerik von Optionsgeschäften unter Zuhilfenahme der Kombinationstechnik*. Diplomarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2005.
- [Gar98] Jochen Garcke. *Berechnung von Eigenwerten der stationären Schrödingergleichung mit der Kombinationstechnik*. Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 1998.
- [Gar04] Jochen Garcke. *Maschinelles Lernen durch Funktionsrekonstruktion mit verallgemeinersten dünnen Gittern*. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2004.
- [Gar11a] Jochen Garcke. *Sparse Grid Tutorial*. Technische Universität Berlin, 2011.
- [Gar11b] Jochen Garcke. *Sparse Grids in a Nutshell*. Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2011.

- [GG98] Michael Griebel and Thomas Gerstner. Numerical Integration using sparse grids. In P. de Coen and R. Beauwens, editors, *Iterative Methods in Linear Algebra*, pages 263–281. Elsevier, 1998.
- [GG08] Thomas Gerstner and Michael Griebel. Sparse grids. *Encyclopedia of Quantitative Finance*, 2008.
- [GH95] Michael Griebel and Wolfgang Huber. Turbulence simulation on sparse grids using the combination method. In P. de Coen and R. Beauwens, editors, *Iterative Methods in Linear Algebra*, pages 263–281. Elsevier, 1995.
- [GR94] Christian Großmann and Hans-Görg Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [GSZ92] Michael Griebel, Michael Schneider, and Christoph Zenger. A combination technique for the solution of sparse grid problems. In P. de Coen and R. Beauwens, editors, *Iterative Methods in Linear Algebra*, pages 263–281. Elsevier, 1992.
- [Hei11] Alexander Heineke. *Integration von Adaptivität in einen Dünngitterlöser für Basketoptionen*. Masterarbeit, Technische Universität München, 2011.
- [Hub96] Walter Huber. *Turbulenzsimulation mit der Kombinationsmethode auf Workstation-Netzen und Parallelrechnern*. Dissertation, Technische Universität München, 1996.
- [Hul09] J.C. Hull. *Optionen, Futures und andere Derivate*. Pearson Studium, München, 2009.
- [JG03] Ansgar Jüngel and Michael Günther. *Finanzderivate mit Matlab*. Vieweg, Wiesbaden, 2003.
- [Kna00] Stephan Knappek. *Approximation und Kompression mit Tensorprodukt-Multiskalen-Approximationsräumen*. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2000.
- [Kra02] Christian Joseph Kranz. *Untersuchung zur Kombinationstechnik bei der numerischen Strömungssimulation auf versetzten Gittern*. Dissertation, Technische Universität München, 2002.
- [Kür08] Christina Kürten. *Dünngitter-Binomialbäume zur Bewertung von Multiasset-Optionen*. Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2008.
- [Mer05] Thomas Mertens. *Optionsbewertung mit dünnen Gittern*. Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2005.
- [NH00] J. Noordmans and P. W. Hemker. Application of an adaptive sparse-grid technique to a model singular perturbation problem. *Computing* 65, pages 357–378, 2000.
- [Pfl96] Christoph Pflaum. *Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen mit dünnen Gittern*. Dissertation, Technische Universität München, 1996.
- [Pfl10] Dirk Pflüger. *Spatially Adaptive Sparse Grids for High-Dimensional Problems*. Dissertation, Technische Universität München, 2010.

- [Rei04] Christoph Reisinger. *Numerische Methoden für hochdimensionale parabolische Gleichungen am Beispiel von Optionspreisaufgaben*. Dissertation, Ruprechts-Karls-Universität Heidelberg, 2004.
- [Sch12] Stefanie Schraufstetter. *A Pricing Framework for the Efficient Evaluation of Financial Derivatives Based on Theta Calculus and Sparse Grids*. Dissertation, Technische Universität München, 2012.
- [Sey00] Rüdiger Seydel. *Einführung in die numerische Berechnung von Finanzderivaten*. Springer, Berlin Heidelberg, 2000.
- [Tis12] Caren Tischendorf. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Vorlesungsskript, Universität zu Köln, Wintersemester 2011/2012.
- [Zen90] Christoph Zenger. *Sparse Grids*. Technische Universität München, 1990.



# Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht zu haben.

Köln, den 30. Juni 2014

---

(Unterschrift)