

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN

**Über die Ausbreitung
von Flammenfronten
in unendlichen Zylindern**

Diplomarbeit
von
Marcel Arndt

Bonn, im Juli 1999

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 5 |
| 2 | Existenz und Regularität | 9 |
| 2.1 | Modellbildung und Hauptresultat | 9 |
| 2.2 | Das Problem auf beschränkten Zylindern | 12 |
| 2.3 | Das Problem auf unbeschränkten Zylindern | 19 |
| 3 | Monotonie | 27 |
| 3.1 | Monotonie- und Eindeutigkeitsaussage | 28 |
| 3.2 | Parabolische Maximumprinzipien | 31 |
| 4 | Eigenwertproblem | 47 |
| 4.1 | Situation und Aussage | 47 |
| 4.2 | Reduktion auf ein klassisches Eigenwertproblem | 48 |
| 4.3 | Klassisches Eigenwertproblem | 51 |
| 5 | Elliptische Abschätzungen | 55 |
| 5.1 | Hilfsmittel | 56 |
| 5.2 | Konstante Koeffizienten | 59 |
| 5.3 | Variable Koeffizienten | 61 |
| 5.4 | Glatte Gebiete | 63 |
| 5.5 | Nichtglatte Gebiete | 66 |
| 6 | Eindeutigkeit | 73 |
| 6.1 | Asymptotische Darstellung | 74 |
| 6.2 | Verschiebungssatz | 75 |
| 6.3 | Verschiebung | 76 |
| 6.4 | Maximumprinzip für $u^s - u'$ | 78 |
| 6.5 | Eindeutigkeit der Lösung | 79 |
| 6.6 | Strenge Monotonie | 80 |
| | Literatur | 81 |

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit betrachten wir die Ausbreitung von Flammenfronten in einem beidseitig unendlichen Zylinder. Man stellt sich vor, daß sich in diesem Zylinder ein brennbares Gasgemisch befindet. Bei der Verbrennung dieses Gases breitet sich eine Flammenfront im Zylinder aus, deren Form und Fortbewegungsgeschwindigkeit untersucht werden soll. Wir nehmen an, daß die Flammenfront sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang der Zylinderachse ausbreitet.

Der Zylinder wird durch das cartesische Produkt der reellen Zahlen und eines beschränkten glatten Gebietes $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ beschrieben:

$$Z_\infty := \mathbb{R} \times \omega. \quad (1.1)$$

Die Punkte aus Z_∞ bezeichnen wir mit (x_1, y) , wobei $x_1 \in \mathbb{R}$ und $y \in \omega$ ist. Gegeben sei die Situation, daß sich als Grenzwert zur linken Seite hin ($x_1 = -\infty$) nur frisches Gas und zur rechten Seite hin ($x_1 = +\infty$) nur verbranntes Gas befindet. Gesucht ist eine Funktion $u : \overline{Z_\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ der Temperaturverteilung des Gases innerhalb des Zylinders, sowie die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Flammenfront. Die Verbrennung wird modelliert durch die semilineare elliptische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u - (c + \alpha(y))u_{x_1} + g(u) &= 0 && \text{in } Z_\infty, \\ u(-\infty, y) &= 0, \quad u(+\infty, y) = 1 && \text{für } y \in \overline{\omega}, \\ u_\nu &= 0 && \text{auf } \partial Z_\infty, \end{aligned} \quad (1.2)$$

wobei $\alpha(y)$ ein Geschwindigkeitsfeld in x_1 -Richtung ist, das dem Gas im Zylinder aufgeprägt ist. Die Funktion g beschreibt das Maß der Verbrennung abhängig von der Temperatur.

Das Hauptergebnis der Arbeit ist ein Satz über die Existenz einer solchen Lösung (u, c) unter sinnvollen Voraussetzungen an die Problemdata. Als Zusatz wird in Kapitel 6 die Eindeutigkeit der Lösung behandelt, wobei allerdings nicht alle Hilfsmittel bewiesen werden.

Die Arbeit gliedert sich im Anschluß an diese Einleitung in fünf weitere Kapitel. Das folgende Kapitel 2 „Existenz und Regularität“ stellt den Hauptteil dar, während die

anderen Kapitel einige dort benutzte Teilaspekte behandeln. Es wurde bewußt an den Anfang gestellt, damit die Notwendigkeit der anderen Kapitel erkennbar wird, obwohl durch diese Aufteilung viele Verweise auf spätere Textstellen entstehen.

Kapitel 2 beginnt mit dem Abschnitt „Modellbildung und Hauptresultat“, in dem die Differentialgleichung hergeleitet und näher beschrieben sowie das Hauptresultat formuliert wird, nämlich ein Existenzsatz über die Lösung des Problems. Der Rest des Kapitels ist dem Beweis gewidmet, der im wesentlichen folgende Struktur hat: Im Abschnitt 2.2 wird ein ähnliches Problem auf beschränkten Zylindern behandelt, das nach Herleitung einer a priori-Abschätzung mittels einer verallgemeinerten Kontinuitätsmethode gelöst wird. Die Schwierigkeit dabei liegt in der Behandlung des unbekanntes Parameters c , die mit Hilfe von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen und einer zusätzlichen Homotopie bei der Kontinuitätsmethode überwunden wird. Im Abschnitt 2.3 lassen wir dann die Größe der beschränkten Zylinder gegen unendlich konvergieren und kontrollieren das Grenzwertverhalten der Lösungen. Hierzu sind wieder a priori-Abschätzungen, Energieungleichungen und andere Betrachtungen notwendig.

Das Kapitel folgt in der Grundstruktur der Argumentation von [BLL] und [BL], wobei verschiedene Teilaspekte neu ausgearbeitet wurden. Dies betrifft zum einen die elliptischen Abschätzungen, auf die keiner der Artikel näher eingeht, und zum anderen zahlreiche Details.

Ein zentraler Punkt in der Argumentation ist die Tatsache, daß Lösungen auf dem beschränkten Zylinder immer streng monoton wachsend in x_1 -Richtung sind. Dem Beweis dieser Aussage ist Kapitel 3 gewidmet. Sie wird gezeigt, indem man die Differenz zweier Lösungen betrachtet, wovon eine um einen variablen Parameter λ in x_1 -Richtung verschoben ist. Man erhält so eine parabolische Differentialgleichung, in der λ der sonst als Zeitparameter bezeichneten Variablen entspricht. Die Verwendung parabolischer Maximumprinzipien erlaubt eine Aussage über das Vorzeichen der Differenz, woraus dann leicht Monotonie- und Eindeutigkeitsaussagen für Differentialgleichungslösungen gefolgert werden können. Die Herleitung der parabolischen Maximumprinzipien nimmt einigen Raum in Anspruch. Zum einen werden bekannte Standardaussagen gezeigt, wie man sie z.B. in [PW] finden kann, wobei einer der Beweise wesentlich vereinfacht und eleganter gestaltet werden konnte. Zum anderen werden spezielle Varianten hergeleitet, die im wesentlichen auf [BN2] und [GNN] zurückgehen, insbesondere eine, die Aussagen in Gebietsecken ermöglicht. Da die in dieser Arbeit an vielen Stellen verwendeten elliptischen Maximumprinzipien wie das Starke Maximumprinzip von E. Hopf wohlbekannt sind, wird auf sie nicht weiter eingegangen.

In Kapitel 4 wird ein sog. verallgemeinertes Eigenwertproblem gelöst, d.h. es sind eine Funktion $\Psi : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$ und ein kleinstes $\lambda \in \mathbb{R}$ zu finden, die der Gleichung

$$(-\Delta + a(y) + \lambda\beta(y))\Psi = \lambda^2\Psi \quad (1.3)$$

unter homogenen Neumannrandbedingungen genügen. Dies geschieht durch Reduk-

tion auf ein gewöhnliches Eigenwertproblem. Es ist bemerkenswert, daß die Eigenfunktionen des verallgemeinerten Eigenwertproblems dieselben wie die des gewöhnlichen Eigenwertproblems sind. Die so gewonnenen Lösungen (Ψ, λ) werden sowohl in Kapitel 2 als auch in Kapitel 6 genutzt, um aus Vergleichen von

$$\Phi(x_1, y) := e^{\lambda x_1} \Psi(y) \quad (1.4)$$

mit Lösungen von (1.2) asymptotische Darstellungen zu gewinnen. Das Kapitel wurde unter Nutzung von Methoden aus [BN1] frei erarbeitet.

Kapitel 5 befaßt sich mit elliptischen Abschätzungen, die an vielen Stellen der Diplomarbeit genutzt werden, so z.B. als a priori-Abschätzung oder zur Feststellung der Regularität von Lösungen verschiedener Differentialgleichungen. Die bearbeiteten Artikel verweisen stets auf „standard elliptical estimates“, die jedoch nicht anwendbar sind, da sie ein hinreichend glattes Gebiet voraussetzen, was in unserer Anwendung nicht gegeben ist. Um diesen Mangel zu beheben, wurden verschiedene Abschätzungstypen mit verschiedenen Varianten zur Umgehung der Gebietsecken untersucht. Es stellte sich heraus, daß die sog. L^p -Abschätzungen kombiniert mit einer Spiegelung der Lösung über den Neumannrand hinweg zum Erfolg führen. L^p -Abschätzungen beruhen auf der Abschätzung des Newtonschen Potentials zur Dichte Δu mittels der Calderon-Zygmund-Ungleichung und anschließender Verallgemeinerung auf allgemeine gleichmäßig elliptische Operatoren. Sie stellen eine Abschätzung der Form

$$\|u\|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\text{rechte Seite}\|_{L^p(\Omega)} + \|\text{Randwerte}\|_{\text{geeignete Randnorm}}) \quad (1.5)$$

zur Verfügung. Der Spiegelung kommt die Bedeutung zu, die Funktion auf ein glattes Gebiet fortzusetzen. Die Herleitung der L^p -Abschätzungen ist [ADN] entnommen und wird in den Abschnitten 5.2 bis 5.4 durchgeführt. Der Abschnitt 5.5 nutzt dann die Spiegelungstechnik zur Erzielung der Abschätzungen auf den nichtglatten Gebieten.

Die $H^{2,p}$ -Abschätzungen implizieren mit Hilfe des Sobolewschen Einbettungssatzes sofort eine $C^{1,\gamma}$ -Abschätzung, da p beliebig groß gewählt werden kann. An zwei Stellen in Kapitel 2 wird jedoch die C^2 -Regularität benötigt, die wohl nur über $C^{2,\gamma}$ -Schauder-Abschätzungen erreicht werden kann. An dieser Stelle befindet sich möglicherweise ein Fehler in den Artikeln [BLL] und [BL], da die Voraussetzungen an die Koeffizienten der Differentialgleichung dazu nicht scharf genug zu sein scheinen¹. Leider ist es nur gelungen, diese Lücke für die Raumdimensionen $n = 2$ und $n = 3$ zu füllen, während in den allgemeinen Fällen $n \geq 4$ die Anwendung

¹In [BLL], Gleichung (1.9) wird für den Koeffizienten α lediglich die Stetigkeit gefordert, während zumindest eine Hölderstetigkeit erforderlich scheint. Die Autoren schreiben in der Bemerkung 1.2, daß diese für die Schauderabschätzungen und damit die C^2 -Regularität erforderlich ist.

der Schauderabschätzungen an möglichen Unstetigkeitsstellen der gespiegelten Differentialgleichung scheitert. Für eine ausführliche Begründung sei auf Abschnitt 5.5 verwiesen.

Zur Abrundung befaßt sich das letzte Kapitel mit Eindeutigkeitsfragen. Da es als Zusatz über die eigentliche Aufgabenstellung hinausgeht, werden nicht alle Hilfsmittel bewiesen; das trifft insbesondere auf Aussagen über die asymptotische Darstellung von Lösungen zu. Einige Argumente sind [BN1] entnommen, andere Aussagen daraus zitiert, und wieder andere Teile wie die Abschnitte 6.2, 6.4 und auszugsweise 6.3 sind neu. Hauptergebnis ist, daß das Problem (1.2) unter etwas schärferen Annahmen eindeutig lösbar ist. Die dargestellten Argumente ermöglichen weiterhin unmittelbar die Folgerung, daß jede Lösung streng monoton wachsend in x_1 -Richtung ist.

Wünschenswert für eine zukünftige Arbeit wäre neben der Ausfüllung der Lücke bei den elliptischen Abschätzungen noch die Behandlung allgemeinerer Modelle des Verbrennungsproblems. Beispielsweise wäre es interessant zu untersuchen, ob es Lösungen gibt, die sich nicht mit konstanter Geschwindigkeit ausbreiten, oder wie sich andere Randbedingungen auf die Lösungen auswirken. Weiterhin lassen sich zusätzliche physikalische Größen wie die Gasdichte oder der Gasdruck in das Modell einbeziehen. Läßt man eine von 1 verschiedene Lewis-Konstante zu (siehe Abschnitt 2.1), so wird aus der einen Differentialgleichung ein System von zwei Gleichungen, so daß ganz neue Erkenntnisse zu erwarten sind. Noch andere Fragestellungen ergeben sich auch bei anderen Gebietsgeometrien.

Ich bedanke mich bei Herrn Professor Hildebrandt für die interessante Themenstellung und gute Betreuung, bei Ulrich Clarenz, Heiko von der Mosel, Gudrun Turowski und Daniel Wienholtz für viele wertvolle Hinweise und Hilfen bei Problemen aller Art sowie bei Matthias Kurzke für das Korrekturlesen.

Kapitel 2

Existenz und Regularität

2.1 Modellbildung und Hauptresultat

Gegeben sei ein beidseitig unendlicher Zylinder, in dem sich ein brennbares Gasgemisch befindet. Zur Beschreibung der Verbrennungsvorgänge dieses Gasgemisches gibt es zahlreiche mehr oder weniger zutreffende Modelle. Ein sehr allgemeines und umfassendes ist im Anhang von [BL] auf Seite 37 beschrieben. Da es jedoch aus vielen hinsichtlich der Form wesentlich verschiedenen Einzelgleichungen besteht, die sich wiederum aus vielen unterschiedlichen Variablen wie Druck, Dichte, Geschwindigkeitsfeld, Temperatur und Massenanteil des Frischgases zusammensetzen, entzieht es sich aus Komplexitätsgründen einer analytischen Behandlung. Daher wird das Modell folgendermaßen vereinfacht:

Die „isobare Approximation“ geht davon aus, daß der Druck des Gasgemischs überall und zu jedem Zeitpunkt konstant ist. Diese Einschränkung ist sinnvoll, da sich Flammenfronten i. allg. mit einer Geschwindigkeit ausbreiten, die unterhalb der des Schalls liegt, und daher die bei der Verbrennung entstehenden Druckwellen sich von der entstehenden Flammenfront entfernen und keinen Einfluß auf die weitere Verbrennung haben. Weiterhin verwendet man die „Konstante-Dichte-Approximation“, die das Modell so lange nicht in unzulässiger Weise beeinträchtigt, wie die Reaktions-Diffusions-Effekte die hydrodynamischen dominieren, was z.B. bei hinreichend gleichmäßigen Gasströmungen der Fall ist. Beide Approximationen führen uns zu folgendem System:

$$\begin{aligned} u_t + \alpha(y)u_{x_1} &= \Delta u + f(u)v \\ v_t + \alpha(y)v_{x_1} &= \frac{1}{Le}\Delta v - f(u)v \end{aligned} \quad \text{in } Z_\infty. \quad (2.1)$$

Hierbei sei

$$Z_\infty := \mathbb{R} \times \omega \subset \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

der beidseitig unendliche Zylinder; das Gebiet $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ sei beschränkt und habe einen $C^{2,\kappa}$ -Rand für ein beliebiges $\kappa \in (0, 1)$. Wir nehmen $n \geq 2$ an, da eine kleinere

Raumdimension eine Entartung bedeuten würde. Für einen Punkt $x \in Z_\infty$ schreiben wir $x = (x_1, y)$ mit $x_1 \in \mathbb{R}$ und $y \in \omega$. Die Funktion $u = u(x, t)$ bezeichnet die auf $[0, 1]$ normalisierte Temperatur des Gasgemischs an der Stelle x zum Zeitpunkt t . Analog dazu bezeichnet $v = v(x, t)$ den Massenanteil des Frischgases im Zylinder. $v = 1$ bedeutet, daß nur frisches Gas vorliegt, während $v = 0$ besagt, daß alles Gas verbrannt ist. $\alpha(y)$ bezeichnet die künstlich aufgeprägte Grundgeschwindigkeit des Gases parallel zu der Zylinderwand; das Geschwindigkeitsfeld $\vec{V} := (\alpha(y), 0, \dots, 0)$ ist divergenzfrei. Die positive Konstante Le ist die „Lewis-Zahl“, in die verschiedene physikalische Konstanten eingehen. Sie wird hier als $Le = 1$ angenommen und findet daher keine weitere Berücksichtigung. Zuletzt bezeichnet $f(u)$ das Maß des chemischen Verbrennungsvorgangs.

Bei der Verbrennung entsteht eine Flammenfront, die sich im Zylinder ausbreitet. Wir interessieren uns hier nur für „travelling-wave-solutions“ dieses Systems, d.h. wir nehmen an, daß sich die Flammenfront mit konstanter Geschwindigkeit in x_1 -Richtung ausbreitet. Daher betrachten wir nur Lösungen der Form $u(x_1 + ct, y)$ bzw. $v(x_1 + ct, y)$. Die Konstante c bezeichnet dabei die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Flammenfront und darf als Unbekannte als eine Art „Eigenwert“ angesehen werden. Mit diesem Ansatz wird aus dem parabolischen System (2.1) das elliptische System

$$\begin{aligned} (c + \alpha(y))u_{x_1} &= \Delta u + f(u)v \\ (c + \alpha(y))v_{x_1} &= \Delta v - f(u)v \end{aligned} \quad \text{in } Z_\infty. \quad (2.3)$$

Als Randwerte legen wir fest:

$$u_\nu = v_\nu = 0 \quad \text{auf } \partial Z_\infty, \quad (2.4)$$

$$u(-\infty, y) = 0, \quad u(+\infty, y) = 1, \quad (2.5)$$

$$v(-\infty, y) = 1, \quad v(+\infty, y) = 0 \quad \text{für } y \in \omega. \quad (2.6)$$

Hierbei bezeichnet das nach unten gestellte ν die Ableitung in Normalenrichtung $\frac{\partial}{\partial \nu}$. Die Gleichung (2.4) legt fest, daß die Zylinderwand keinen Einfluß auf die Verbrennung nimmt. Die Gleichungen (2.5) und (2.6) sind als Grenzwert zu verstehen und besagen, daß sich in Richtung $-\infty$ als Grenzwert nur frisches Gas und in Richtung $+\infty$ nur verbranntes Gas befindet; die Verbrennung verläuft also von $+\infty$ nach $-\infty$. Zwischen den Funktionen u und v besteht ein direkter Zusammenhang:

Lemma 2.1: *Unter der Voraussetzung $u + v \in C^2(\overline{Z_\infty})$ gilt $u + v \equiv 1$.*

BEWEIS. Sei $w := u + v$. Die Funktion $\tilde{w}(\xi, y) := w(\tan(\xi), y)$ ist eine stetige Abbildung der kompakten Menge $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \times \overline{\omega}$ nach \mathbb{R} , wobei $\tan(\pm\frac{\pi}{2}) := \pm\infty$ vereinbart sei. \tilde{w} nimmt dort also sowohl Minimum als auch Maximum an. Liegen diese beiden Extrema in $\{\pm\frac{\pi}{2}\} \times \overline{\omega}$, so gilt $\tilde{w} \equiv 1$ wegen $\tilde{w}(\pm\frac{\pi}{2}, y) = 1$, und das Lemma ist bewiesen.

Ansonsten besitzt w ein Extremum in $\mathbb{R} \times \bar{\omega}$. Da w die Differentialgleichung

$$\Delta w - (c + \alpha(y))w_{x_1} = 0 \quad (2.7)$$

erfüllt, folgt aus dem Starken Maximumprinzip von E. Hopf¹, daß w keine inneren Extrema besitzt, es sei denn w ist konstant. Das Extremum kann aber nicht auf dem Rand $\partial Z_\infty = \mathbb{R} \times \partial\omega$ liegen, denn dann müßte an diesem Punkt nach Theorem 7 aus [PW] $w_\nu \neq 0$ gelten, die äußere Normalenableitung von w ist aber null. Somit bleibt nur der Fall $w \equiv 1$. \square

Daher kann man v durch $1 - u$ ausdrücken und die zwei Gleichungen des Systems (2.3) auf eine reduzieren. Mit der Bezeichnung $g(u) := (1 - u)f(u)$ ergibt sich

$$(c + \alpha(y))u_{x_1} = \Delta u + g(u) \quad \text{in } Z_\infty \quad (2.8)$$

mit den Randbedingungen

$$u(-\infty, y) = 0, \quad u(+\infty, y) = 1, \quad (2.9)$$

$$u_\nu = 0 \quad \text{auf } \partial Z_\infty. \quad (2.10)$$

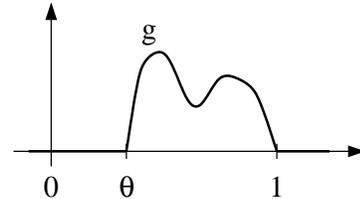
An die Koeffizienten stellen wir die Forderungen

$$\alpha \in C^{0,\kappa}(\bar{\omega}), \quad (2.11)$$

$$g \in C^{0,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_0^+), \quad (2.12)$$

$$\exists \vartheta \in (0; 1) : \quad g|_{(\vartheta; 1)} > 0 \quad \text{und} \quad g|_{(-\infty; \vartheta] \cup [1; \infty)} \equiv 0. \quad (2.13)$$

Die Forderung $g(1) = 0$ ergibt sich in natürlicher Weise aus $g(u) = (1 - u)f(u)$. Der Parameter ϑ aus (2.13) modelliert eine Zündtemperatur, unterhalb der keine Verbrennung stattfindet. Überschreitet die Temperatur den Wert ϑ , so verbrennt in jedem Fall Gas, erst bei der Endtemperatur $u = 1$ kommt die Verbrennung zum Erliegen ($g(1) = 0$). Aus technischen Gründen wird die Funktion g außerhalb des hier relevanten Definitionsbereichs von $[0; 1]$ in $C^{0,1}$ -Weise durch null auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt.



Die Konstante $\kappa \in (0, 1)$ ist bereits von der Randglattheit $\partial\omega \in C^{2,\kappa}$ her bekannt. Unter diesen Voraussetzungen beweisen wir in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ das Hauptresultat:

Theorem: Für alle den Bedingungen (2.11)-(2.13) genügenden Funktionen α und g gibt es eine Lösung $(u, c) \in C^{2,\kappa}(\bar{Z}_\infty) \times \mathbb{R}$ des Problems (2.8)-(2.10). Für die Lösung gilt:

¹Siehe [PW], Theorem 5 (Seite 61).

$$0 < u \leq 1 \quad \text{in} \quad \overline{Z_\infty}, \quad (2.14)$$

$$u_{x_1} \geq 0 \quad \text{in} \quad \overline{Z_\infty}, \quad (2.15)$$

$$c + \int_{\omega} \alpha(y) dy > 0. \quad (2.16)$$

Im Fall $n > 3$ gilt die Aussage vermutlich auch, jedoch gibt es im Beweis eine Lücke, die selbst nach langer Arbeit nicht geschlossen werden konnte: Es fehlt der Schluß, daß Lösungen der Klasse $C^{1,\gamma}$ automatisch von der Klasse $C^{2,\kappa}$ sind. Ausführliche Bemerkungen und Begründungen dazu finden sich in Kapitel 5.

Die prinzipielle Vorgehensweise ist die folgende: Im Abschnitt 2.2 wird die Existenz einer Lösung eines ähnlichen Problems auf beschränkten Zylindern gezeigt. Im Abschnitt 2.3 betrachtet man dann behutsam den Grenzübergang für immer größer werdende Zylinder und erhält so eine Lösung des Problems auf dem unbeschränkten Zylinder.

2.2 Das Problem auf beschränkten Zylindern

Zu $a > 0$ seien

$$Z_a := (-a; a) \times \omega, \quad Z_a^+ := (0; a) \times \omega \quad \text{und} \quad Z_a^- := (-a; 0) \times \omega \quad (2.17)$$

abgeschnittene Zylinder mit Länge $2a$ bzw. a . Wir betrachten in diesem Abschnitt das folgende Problem:

$$(c + \alpha(y))u_{x_1} = \Delta u + g(u) \quad \text{in } Z_a, \quad (2.18)$$

$$u_\nu = 0 \quad \text{in } (-a; a) \times \partial\omega, \quad (2.19)$$

$$u(-a, y) = 0, \quad u(+a, y) = 1 \quad \text{für } y \in \omega, \quad (2.20)$$

$$\max_{(x_1, y) \in Z_a^-} u(x_1, y) = \vartheta. \quad (2.21)$$

Der Gleichung (2.21) kommt folgende Bedeutung zu: Eine Lösung des Problems auf dem unendlichen Zylinder ist maximal bestimmt bis auf Translation, d.h. wenn $u(x_1, y)$ eine Lösung ist, so auch $u(x_1 + \xi, y)$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}$. Bei der späteren Grenzwertbildung $a \rightarrow \infty$, d.h. beim Übergang von beschränkten Zylindern auf den unbeschränkten, muß daher die Lösung an einem Punkt fixiert werden, um als

Grenzwert keine konstante Funktion zu erhalten. Die Gleichung (2.21) legt hierzu den „Beginn“ der Flammenfront an die Stelle $x_1 = 0$.²

Zuerst stellen wir fest, daß jede $H^{2,p}$ -Lösung der Differentialgleichung gemäß Satz 5.8 automatisch von der Klasse $C^{2,\kappa}$ ist. Dies ermöglicht uns die problemlose Anwendung der Maximumprinzipien und der Monotonieaussagen aus Kapitel 3.

Das Problem auf einem endlichen Zylinder soll mit Hilfe einer verallgemeinerten Kontinuitätsmethode gelöst werden. Dazu wird zunächst eine a priori-Abschätzung bewiesen:

Lemma 2.2: *Sei (u, c) eine Lösung des Problems (2.18) - (2.21), die Koeffizienten mögen den Bedingungen (2.11) - (2.13) genügen. Weiterhin seien α_0, α_1 und M so gewählt, daß $\alpha_0 \leq \alpha(y) \leq \alpha_1$ und $g \leq M$. Dann gibt es eine Konstante K , die nur von $a, \alpha_0, \alpha_1, M, n$ und ω abhängt, so daß gilt:*

$$|c| \leq K \quad \text{und} \quad \|u\|_{C^1(\overline{Z_a})} \leq K. \quad (2.22)$$

BEWEIS. Da u der Differentialungleichung $\Delta u - (c + \alpha(y))u_{x_1} = -g(u) \leq 0$ genügt, folgt aus dem Starken Maximumprinzip von E. Hopf³: Falls u ein absolutes Minimum an einem Punkt innerhalb Z_a annimmt, so ist u konstant. Aufgrund der Randwerte (2.20) auf der rechten und der linken Zylinderwand kann u aber nicht konstant sein und somit kein Minimum im Innern annehmen. Für den Fall, daß u ein absolutes Minimum an einem Randpunkt $x_0 \in \partial Z_a$ annimmt, so besagt das Maximumprinzip ebenfalls, daß $u_\nu(x_0) < 0$ gilt. Aufgrund der Neumannrandwerte (2.19) muß ein solches Randminimum auf dem Dirichletrand $\{\pm a\} \times \omega$ liegen, so daß $u > 0$ in Z_a folgt.

Falls es ein $x_0 \in (-a; +a) \times \overline{\omega}$ mit $u(x_0) > 1$ geben würde, so gäbe es aufgrund der Stetigkeit eine Umgebung $U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ mit $u|_{U(x_0) \cap \overline{Z_a}} > 1$. Wegen $g \circ u|_{U(x_0) \cap \overline{Z_a}} = 0$ ließe sich dann ebenfalls das Maximumprinzip anwenden, und man erhielte einen Widerspruch. Also gilt $u \leq 1$ auf $\overline{Z_a}$.

Damit ist bereits eine C^0 -Schranke für u gefunden. Bevor diese zu einer C^1 -Schranke ausgedehnt werden kann, wird eine Schranke für c benötigt. Betrachte dazu die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen für $z_0, z_1 \in C^2([-a; a])$:

$$\begin{aligned} -z_0'' + (c + \alpha_1)z_0' &= 0, & z_0(-a) &= 0, & z_0(+a) &= 1, \\ -z_1'' + (c + \alpha_0)z_1' &= M, & z_1(-a) &= 0, & z_1(+a) &= 1. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dieses Randwertproblem ist eindeutig lösbar⁴. Mit der Bezeichnung $z_{0,1}(x_1, y) := z_{0,1}(x_1)$ ersieht man aus (2.18) und (2.23):

$$-\Delta u + (c + \alpha)u_{x_1} = g(u) \quad \text{und} \quad z_0'' - (c + \alpha_1)z_0' = 0$$

²Weitere Bemerkungen zu dieser „Normalisierungsbedingung“ finden sich in [BL] auf Seite 18.

³Siehe [PW], Theorem 5 (Seite 61), und Theorem 7 (Seite 65).

⁴Siehe [Wal], Kapitel III, Paragraph 20, Satz 1 (Seite 174).

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\Delta u + (c + \alpha)u_{x_1} + (\alpha_1 - \alpha)u_{x_1} + z_0'' - (c + \alpha_1)z_0' = g(u) + (\alpha_1 - \alpha)u_{x_1} \\
&\Leftrightarrow -\Delta(u - z_0) + (c + \alpha_1)(u - z_0)_{x_1} = \underbrace{g(u)}_{\geq 0} + \underbrace{(\alpha_1 - \alpha)}_{\geq 0} \underbrace{u_{x_1}}_{\geq 0} \geq 0. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir uns die strenge Monotonie von u in x_1 -Richtung zunutze gemacht:

$$u_{x_1} \geq 0 \quad \text{in} \quad \overline{Z_a}; \quad (2.25)$$

sie folgt aus Satz 3.1 des Kapitels 3 über Monotonie. Die strenge Monotonie impliziert übrigens sofort $0 < u < 1$ in $(-a, a) \times \overline{\omega}$.

$v := -(u - z_0)$ erfüllt die Bedingungen des Starken Maximumprinzips von E. Hopf⁵, also besitzt v kein inneres Maximum, es sei denn v ist konstant. Das Maximum liegt nicht auf dem Neumannrand $(-a; a) \times \partial\omega$, falls v nicht konstant ist, denn sonst müßte in einem solchen Punkt $v_\nu > 0$ gelten, was die homogene Neumannrandbedingung $v_\nu|_{(-a; a) \times \partial\omega} \equiv 0$ aber ausschließt. Daher wird das Maximum auf dem Dirichletrand angenommen, also

$$v(x_1, y) \leq \max v|_{\{\pm a\} \times \overline{\omega}} = 0 \quad (2.26)$$

und somit

$$u(x_1, y) \geq z_0(x_1). \quad (2.27)$$

Analog dazu erhält man über die Ungleichung

$$-\Delta(u - z_1) + (c + \alpha_0)(u - z_1)_{x_1} = g(u) - M + (\alpha_0 - \alpha)u_{x_1} \leq 0 \quad (2.28)$$

eine obere Abschätzung für $u(x_1, \cdot)$ durch $z_1(x_1)$, es gilt also

$$z_0(x_1) \leq u(x_1, y) \leq z_1(x_1) \quad \text{für alle } (x_1, y) \in \overline{Z_a}. \quad (2.29)$$

Rechnet man z_0 und z_1 explizit aus, so erhält man

$$z_0(x_1) = \frac{e^{(c+\alpha_1)x_1} - e^{-(c+\alpha_1)a}}{e^{(c+\alpha_1)a} - e^{-(c+\alpha_1)a}} \quad (2.30)$$

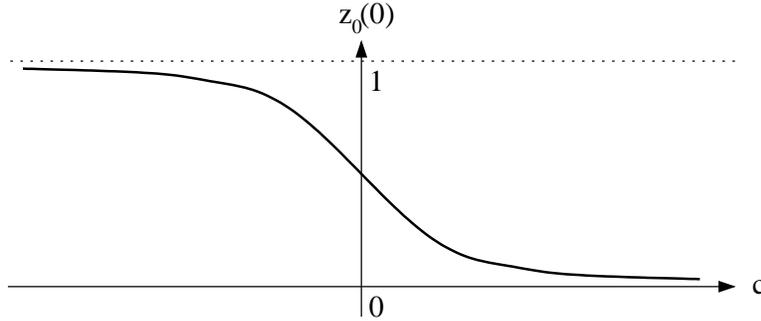
$$z_1(x_1) = \frac{e^{(c+\alpha_1)x_1} - e^{-(c+\alpha_1)a}}{e^{(c+\alpha_1)a} - e^{-(c+\alpha_1)a}} \left(1 - \frac{2Ma}{c + \alpha_0} \right) + \frac{M}{c + \alpha_0} (x_1 + a). \quad (2.31)$$

Daraus ersieht man

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} z_0(0) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} z_1(0) = 0. \quad (2.32)$$

Weil u monoton wachsend in x_1 -Richtung ist, nimmt u den Wert ϑ aus der Gleichung (2.21) für $x_1 = 0$ an. Daher ergibt sich aus (2.29)

⁵Siehe [PW], Theorem 5 (Seite 61).



$$z_0(0) \leq \vartheta \leq z_1(0). \quad (2.33)$$

Daraus läßt sich folgendermaßen eine Schranke für $|c|$ herleiten (vgl. dazu auch die Abbildung):

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{c \rightarrow +\infty} z_1(0) = 0 \quad \text{und} \quad z_1(0) \geq \vartheta > 0 \Rightarrow c \leq K \\ \lim_{c \rightarrow -\infty} z_0(0) = 1 \quad \text{und} \quad z_0(0) \leq \vartheta < 1 \Rightarrow c \geq -K \end{array} \right\} \Rightarrow |c| \leq K. \quad (2.34)$$

Die Konstante K hängt dabei von z_0 und z_1 ab, diese Funktionen wiederum von a , α_0 , α_1 und M .

Mit Hilfe der C^0 -Schranke für u und der Schranke für $|c|$ läßt sich nun aus dem Kapitel 5 über elliptische Abschätzungen eine $H^{2,p}$ -Schranke für u herleiten: Für beliebiges $p > 1$ gibt es gemäß Satz 5.7 eine Konstante C_1 , die nur von n , p , ω , a , α_0 , α_1 und M abhängt, so daß gilt:

$$\|u\|_{H^{2,p}(Z_a)} \leq C_1(\|g \circ u\|_{L^p(Z_a)} + \|u\|_{L^p(Z_a)}). \quad (2.35)$$

Wegen $|g| \leq M$ und $|u| \leq 1$ ist die rechte Seite beschränkt durch $(M+1)|Z_a|^{1/p}$. Mit Hilfe des Sobolewschen Einbettungssatzes⁶ läßt sich aus der $H^{2,p}$ -Abschätzung leicht eine C^1 -Abschätzung gewinnen: Wähle $p > n$, dann gilt

$$\|u\|_{C^{1,1-n/p}(\overline{Z_a})} \leq C_2 \|u\|_{H^{2,p}(Z_a)} \quad (2.36)$$

mit einer Konstanten C_2 , die nur von ω , a , n und p abhängt. Somit folgt unmittelbar die gewünschte C^1 -Abschätzung für u :

$$\|u\|_{C^1} \leq K. \quad (2.37)$$

□

Lemma 2.3: *Unter den Voraussetzungen (2.11) - (2.13) ist das Problem (2.18) - (2.21) für alle $a > 0$ lösbar.*

⁶Siehe [Alt], Satz 8.13 (Seite 319).

BEWEIS. Zum Beweis dieses Lemmas wird eine modifizierte Kontinuitätsmethode verwendet. Konkret bedeutet das, daß die Lösung (u, c) ein Fixpunkt eines Operators $\mathcal{F}_{1,0}$ sein wird, dessen Existenz über die Lösungseigenschaft des Leray-Schauderschen Abbildungsgrades garantiert wird. Um zu zeigen, daß der Abbildungsgrad von null verschieden ist, werden zwei Homotopien verwendet. Die erste „verbiegt“ den Operator $\mathcal{F}_{1,0}$ zu einem leicht handhabbaren Operator $\mathcal{F}_{0,0}$, und die zweite diagonalisiert diesen zu einem Operator $\mathcal{F}_{0,1}$. Der Abbildungsgrad des Operators $\mathcal{F}_{0,1}$ läßt sich dann leicht mit Hilfe des Produktsatzes bestimmen.

Zu $v \in C^1(\overline{Z_a})$, $c \in \mathbb{R}$ und $\tau \in [0; 1]$ seien

$$\begin{aligned} u &= \Phi_{\tau,0}(v, c) \text{ die eindeutige Lösung der linearen Gleichung} \\ &\quad -\Delta u + (c + \tau\alpha(y))u_{x_1} = \tau g(v) \\ &\quad \text{mit den Randwerten (2.19) - (2.20),} \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$h_\tau(v, c) = \max_{\overline{Z_a}} \Phi_{\tau,0}(v, c), \tag{2.39}$$

$$\mathcal{F}_{\tau,0}(v, c) = (\Phi_{\tau,0}(v, c), c - h_\tau(v, c) + \vartheta). \tag{2.40}$$

Offenbar ist (u, c) eine Lösung des Problems (2.18) - (2.21), wenn (u, c) Fixpunkt von $\mathcal{F}_{1,0}$ bzw. Nullstelle von $Id - \mathcal{F}_{1,0}$ ist.

Sei K die Konstante aus der a priori-Abschätzung (Lemma 2.2), mindestens jedoch so groß, daß

$$\frac{1 - e^{-(K+1)a}}{e^{(K+1)a} - e^{-(K+1)a}} < \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{1 - e^{(K+1)a}}{e^{-(K+1)a} - e^{(K+1)a}} > \vartheta. \tag{2.41}$$

Setze

$$B := \{(v, c) : v \in C^1(\overline{Z_a}), \|v\|_{C^1} < K + 1, |c| < K + 1\}. \tag{2.42}$$

Zeige nun, daß der Leray-Schaudersche Abbildungsgrad $\deg(Id - \mathcal{F}_{\tau,0}, B, 0)$ definiert ist, d.h. daß $Id - \mathcal{F}_{\tau,0}$ eine kompakte Störung der Identität ist und daß $Id - \mathcal{F}_{\tau,0} \neq 0$ auf ∂B gilt. Beachte, daß auf B die $C^1(\overline{Z_a}) \times \mathbb{R}$ -Topologie zugrunde gelegt wird.

Zum Beweis der Kompaktheit von $\mathcal{F}_{\tau,0}$ muß gezeigt werden, daß $\mathcal{F}_{\tau,0}(B)$ präkompakt ist. Hierzu bedienen wir uns wieder der $H^{2,p}$ -Abschätzung aus Satz 5.7 und des Sobolewschen Einbettungssatzes:

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\tau,0}(v, c)\|_{C^{1,1-n/p}(\overline{Z_a})} &\leq C \|\Phi_{\tau,0}(v, c)\|_{H^{2,p}(Z_a)} \\ &\leq C (\|\Phi_{\tau,0}(v, c)\|_{L^p(Z_a)} + \|g \circ v\|_{L^p(Z_a)}) \leq C. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Die L^p -Norm von $\Phi_{\tau,0}(v, c)$ ist beschränkt, da wie mit früherer Argumentation gemäß dem Maximumprinzip $0 \leq \Phi_{\tau,0}(v, c) \leq 1$ gilt. Also ist $D\Phi_{\tau,0}(B)$ gleichgradig stetig. Der Satz von Arzela-Ascoli⁷ garantiert nun die Präkompaktheit dieser Menge,

⁷Siehe [Alt], Satz 2.11 (Seite 93).

d.h. $\Phi_{\tau,0}$ ist eine kompakte Abbildung. Daraus folgt unmittelbar, daß $\mathcal{F}_{\tau,0}$ kompakt ist und damit $Id - \mathcal{F}_{\tau,0}$ eine kompakte Störung der Identität ist.

Weiterhin gilt $Id - \mathcal{F}_{\tau,0} \neq 0$ auf ∂B , denn aus $Id - \mathcal{F}_{\tau,0}(u, c) = 0$ folgt, daß (u, c) eine Lösung des Problems (2.18) - (2.21) ist. Gemäß der a priori-Abschätzung Lemma 2.2 folgt $\|u\|_{C^1} \leq K$ und $|c| \leq K$, jedoch liegt (u, c) nur dann auf ∂B , wenn $\|u\|_{C^1} = K + 1$ oder $|c| = K + 1$ gilt.

Nachdem nun gezeigt ist, daß der Abbildungsgrad wohldefiniert ist, muß noch nachgewiesen werden, daß \mathcal{F} auch stetig ist. Dazu nehmen wir an, daß $(v_i, c_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge ist, die gegen (v, c, τ) konvergiert, wobei die Konvergenz der v_i wieder in der C^1 -Topologie zu verstehen ist. Sei $u_i := \Phi_{\tau_i,0}(v_i, c_i)$. Mit der gewohnten $H^{2,p}$ -Abschätzung folgern wir wie in (2.35), daß die u_i in der $H^{2,p}$ -Norm beschränkt sind. Weil beschränkte Teilmengen von $H^{2,p}$ schwach folgenkompakt⁸ sind, gibt es eine Teilfolge, die schwach gegen ein $u_0 \in H^{2,p}(Z_a)$ konvergiert. Da die u_i gemäß dem Sobolewschen Einbettungssatz auch in der $C^{1,1-n/p}$ -Norm beschränkt sind, sind deren Gradienten gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli sind die u_i präkompakt bzgl. C^1 , durch nochmaligen Übergang zu einer Teilfolge erreicht man also, daß die u_i in C^1 gegen u_0 konvergieren. Weil die eine Seite $(c_i + \tau_i \alpha(y))(u_i)_{x_1} - \tau_i g(v_i)$ der Differentialgleichung somit in C^0 gegen $(c + \tau \alpha(y))(u_0)_{x_1} - \tau g(v)$ konvergiert, so konvergiert auch Δu_i in C^0 gegen eine Funktion $U \in C^0$. Da die u_i in $H^{2,p}$ schwach gegen $u_0 \in H^{2,p}$ konvergieren, gilt $U = \Delta u_0$, und u_0 ist Lösung der Differentialgleichung zu (v, c, τ) . Da die Lösung des linearen Problems eindeutig ist, muß $u_0 = \Phi_{\tau,0}(v, c)$ gelten. Mit der gleichen Argumentation erhält man, daß jeder Häufungspunkt der ursprünglichen Folge u_i die eindeutige Lösung ist, d.h. es gibt genau diesen einen Häufungspunkt, und die ganze Folge u_i konvergiert gegen $\Phi_{\tau,0}(v, c)$. Also sind $\Phi_{\tau,0}$ und damit auch $(\tau, v, c) \mapsto \mathcal{F}_{\tau,0}(v, c)$ stetig. Aus der eindeutigen Lösbarkeit und der a priori-Abschätzung konnte also die Stetigkeit gewonnen werden.

Die Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades liefert uns daher

$$\deg(Id - \mathcal{F}_{1,0}, B, 0) = \deg(Id - \mathcal{F}_{0,0}, B, 0). \quad (2.44)$$

Untersuche nun $\mathcal{F}_{0,0}$: Die Lösung der Differentialgleichung $-\Delta u + cu_{x_1} = 0$ von (2.38) für $\tau = 0$ ist (analog zu den Lösungen z_0 und z_1)

$$\Psi_c(x) = \frac{e^{cx_1} - e^{-ca}}{e^{ca} - e^{-ca}}. \quad (2.45)$$

Bemerke, daß Ψ_c nur von x_1 und nicht von y abhängt, die Elimination des einzigen von y abhängigen Terms $\alpha(y)$ in der Differentialgleichung führt also dazu, daß sich die partielle Differentialgleichung wie eine gewöhnliche verhält. Dies wird freilich erst durch die homogenen Neumannrandbedingungen auf $(-a, a) \times \omega$ ermöglicht. Da $c \mapsto \Psi_c(0)$ eine bijektive Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow (0; 1)$ ist, legt die Fixpunktgleichung c fest:

⁸Siehe [Alt], Beispiel 6.10.3 (Seite 218).

$$\mathcal{F}_{0,0}(u, c) = (u, c) \stackrel{(2.40)}{\Rightarrow} \vartheta = h_0(u, c) = \Psi_c(0) \Rightarrow c = (\Psi_c(0))^{-1}(\vartheta) =: c^*. \quad (2.46)$$

Das nun feste c^* erlaubt die Definition der zweiten Homotopie: Zu $v \in C^1(\overline{Z}_a)$, $c \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in [0; 1]$ seien

$$\begin{aligned} u &= \Phi_{0,\sigma}(v, c) \text{ die eindeutige Lösung der linearen Gleichung} \\ &\quad -\Delta u + (\sigma c^* + (1 - \sigma)c)u_{x_1} = 0 \\ &\quad \text{mit den Randwerten (2.19) - (2.20),} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\mathcal{F}_{0,\sigma}(v, c) = (\Phi_{0,\sigma}(v, c), c - h_0(v, c) + \vartheta). \quad (2.48)$$

Wie oben kann man nachweisen, daß diese Homotopie zulässig ist und somit gilt:

$$\deg(Id - \mathcal{F}_{0,0}, B, 0) = \deg(Id - \mathcal{F}_{0,1}, B, 0). \quad (2.49)$$

Der Operator

$$(Id - \mathcal{F}_{0,1})(u, c) = (u - \Psi_{c^*}, \Psi_c(0) - \vartheta) \quad (2.50)$$

ist nun diagonalisiert, d.h. die erste Komponente $u - \Psi_{c^*}$ des Bildbereichs hängt nur von u ab, und die zweite Komponente $\Psi_c(0) - \vartheta$ nur von c . Dies ermöglicht die Anwendung des Produktsatzes⁹:

$$\begin{aligned} \deg(Id - \mathcal{F}_{0,1}, B, 0) &= \deg(u \mapsto u - \Psi_{c^*}, \{v : \|v\|_{C^1} < K + 1\}, 0) \\ &\quad \cdot \deg(c \mapsto \Psi_c(0) - \vartheta, (-(K+1); K+1), 0). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Wegen $\|\Psi_{c^*}\| \leq K$ besitzt die erste Abbildung im Produkt den Grad +1. Wegen (2.41) gilt $\Psi_{(K+1)}(0) - \vartheta < 0$ und $\Psi_{-(K+1)}(0) - \vartheta > 0$, so daß die zweite Abbildung den Grad -1 besitzt. Somit gilt

$$\deg(Id - \mathcal{F}_{1,0}, B, 0) = \deg(Id - \mathcal{F}_{0,0}, B, 0) = \deg(Id - \mathcal{F}_{0,1}, B, 0) = -1. \quad (2.52)$$

Die Lösungseigenschaft¹⁰ des Abbildungsgrades garantiert nun die Existenz einer Nullstelle von $\mathcal{F}_{1,0}$ und damit einer Lösung (u, c) des Problems (2.18) - (2.21). \square

⁹Siehe [Bgr], Theorem 5.3.14 (vii) (Seite 251).

¹⁰Siehe [Bgr], Theorem 5.3.12 (Seite 249).

2.3 Das Problem auf unbeschränkten Zylindern

In diesem Abschnitt wird der Grenzübergang $a \rightarrow \infty$ durchgeführt, wozu wir zunächst eine a priori-Abschätzung für c benötigen, diesmal jedoch unabhängig von a .

Lemma 2.4: *Seien $a \geq 1$ und (u_a, c_a) eine Lösung des Problems (2.18) - (2.21). Dann gibt es eine von a unabhängige Konstante $K = K(\alpha_0, \alpha_1, M)$ mit*

$$|c_a| \leq K. \quad (2.53)$$

BEWEIS. Die Existenz einer solchen Konstante, die von a abhängt, wurde bereits in Lemma 2.2 gezeigt. Zur Abschätzung nach unten verfahren wir wie dort: Für die Lösung $z_0(x_1)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung (2.23) zeigt man mit Hilfe des Maximumprinzips die Ungleichung $z_0(x_1) \leq u(x_1, y)$. Daraus folgt die Ungleichung $z_0(0) \leq u(0, y) \leq \vartheta$. Da $z_0(0)$ als Funktion von $(c_a + \alpha(y))a$ monoton fällt und \mathbb{R} bijektiv auf $(0, 1)$ abbildet, folgt die Schranke $(c_a + \alpha(y))a \geq -\tilde{K}$. Für $a \geq 1$ ergibt sich daraus

$$c_a \geq -\alpha(y) - \frac{\tilde{K}}{a} \geq -\alpha(y) - \tilde{K}. \quad (2.54)$$

Zur Abschätzung nach oben kann man nicht genauso mit z_1 statt z_0 verfahren, da $z_1(0)$ nicht als Funktion von $(c_a + \alpha(y))a$ darstellbar ist (siehe explizite Darstellung (2.31) von z_1). Betrachte stattdessen die Lösung

$$z(x_1) := \begin{cases} \gamma(e^{(c_a + \alpha_0)x_1} - e^{-(c_a + \alpha_0)a}) & \text{für } x_1 \leq 0 \\ \left(\gamma - \frac{M}{(c_a + \alpha_0)^2}\right)e^{(c_a + \alpha_0)x_1} + \frac{M}{c_a + \alpha_0}x_1 + \frac{M}{(c_a + \alpha_0)^2} - \gamma e^{-(c_a + \alpha_0)a} & \text{für } x_1 \geq 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$-z'' + (c_a + \alpha_0)z' = MH(x_1), \quad (2.56)$$

wobei H die Heavyside-Funktion ist, d.h. $H|_{(-\infty, 0]} \equiv 0$, $H|_{(0, +\infty)} \equiv 1$. Wir nehmen dabei an, daß $c_a > \alpha_0$ ist; ansonsten ist eine a priori-Schranke bereits gegeben. Wählt man

$$\gamma := \frac{1 + \frac{M}{(c_a + \alpha_0)^2}(e^{(c_a + \alpha_0)a} - 1) - \frac{Ma}{c_a + \alpha_0}}{e^{(c_a + \alpha_0)a} - e^{-(c_a + \alpha_0)a}}, \quad (2.57)$$

so erfüllt z die Randwerte $z(-a) = 0$ und $z(a) = 1$. Man rechnet nach, daß z stetig differenzierbar ist, und sieht leicht, daß z außer im Punkt $x_1 = 0$ beliebig oft differenzierbar ist. Mit dem üblichen Maximumprinzip-Argument von oben sieht man wegen $g(u) - MH(x_1) \leq 0$ leicht $z(x_1) \geq u(x_1, y)$ ein. Hierbei ist zu beachten,

daß das Maximumprinzip trotz des kleinen Regularitätsmangels in 0 anwendbar ist, denn falls $u - z$ dort ein Maximum annimmt, so folgt $\nabla(u - z) = 0$ (das gilt für beliebige C^1 -Funktionen) und $\Delta(u - z) \leq 0$ rechts- und linksseitig getrennt, denn $z \in C^2([-a, 0]) \cap C^2([0, a])$. Insbesondere folgt $z(0) \geq \vartheta$, also

$$\gamma(1 - e^{-(c_a + \alpha_0)a}) \geq \vartheta. \quad (2.58)$$

Setze die Definition von γ ein und schätze ab:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{M}{(c_a + \alpha_0)^2} (e^{(c_a + \alpha_0)a} - 1) &\geq 1 + \frac{M}{(c_a + \alpha_0)^2} (e^{(c_a + \alpha_0)a} - 1) - \frac{Ma}{c_a + \alpha_0} \\ &\geq \frac{e^{(c_a + \alpha_0)a} - e^{-(c_a + \alpha_0)a}}{1 - e^{-(c_a + \alpha_0)a}} \vartheta \\ &\geq (e^{(c_a + \alpha_0)a} - 1) \vartheta, \end{aligned} \quad (2.59)$$

also

$$\left(\vartheta - \frac{M}{(c_a + \alpha_0)^2} \right) (e^{(c_a + \alpha_0)a} - 1) \leq 1. \quad (2.60)$$

Falls $c_a \geq \sqrt{\frac{2M}{\vartheta}} - \alpha_0$ sein sollte, so folgt $\vartheta - \frac{M}{(c_a + \alpha_0)^2} \geq \frac{\vartheta}{2}$ und somit $e^{(c_a + \alpha_0)a} - 1 \leq \frac{2}{\vartheta}$, was äquivalent zu $c_a \leq \frac{\ln(1 + \frac{2}{\vartheta})}{a} - \alpha_0$ ist. Da nach Voraussetzung $a \geq 1$ ist, liefert uns dies die von a unabhängige Schranke

$$c_a \leq \max \left(\sqrt{\frac{2M}{\vartheta}} - \alpha_0, \ln \left(1 + \frac{2}{\vartheta} \right) - \alpha_0, \alpha_0 \right). \quad (2.61)$$

□

Mit Hilfe der von a unabhängigen a priori-Abschätzung läßt sich nun durch Grenzübergang eine Lösung finden:

Lemma 2.5: *Es gibt eine Folge $a_n \rightarrow \infty$, so daß c_{a_n} in \mathbb{R} und u_{a_n} lokal in der C^1 -Norm konvergieren und der Grenzwert (u, c) die Gleichungen (2.18) - (2.21) erfüllt.*

BEWEIS. Da nach Lemma (2.4) c unabhängig von a beschränkt ist, garantiert die bereits mehrfach verwendete $H^{2,p}$ -Abschätzung Satz 5.7 wie vorhin, daß die $H^{2,p}$ -Normen der Funktionen u_a auf jedem Teilgebiet der Form $(x_1, x_1 + 1) \times \omega \subset Z_a$ beschränkt sind, diesmal jedoch unabhängig von a . Das heißt, daß es ein K gibt, so daß für alle a und $x_1 \in [-a, a - 1]$ gilt:

$$\|u_a\|_{H^{2,p}((x_1, x_1 + 1) \times \omega)} \leq K. \quad (2.62)$$

Weil beschränkte Teilmengen von $H^{2,p}$ schwach folgenkompakt sind¹¹, gibt es zu jedem solchen Teilgebiet eine Folge $a_i \rightarrow \infty$, so daß u_{a_i} dort schwach in $H^{2,p}$ gegen ein $u \in H^{2,p}$ konvergiert. Da die c_{a_i} gemäß Lemma 2.4 beschränkt sind, kann man durch Übergang zu einer Teilfolge erreichen, daß die zugehörigen c_{a_i} gegen ein c konvergieren.

Mit Hilfe des Sobolewschen Einbettungssatzes folgt aus der $H^{2,p}$ -Abschätzung

$$\|u_a\|_{C^{1,1-n/p}((x_1, x_1+1) \times \omega)} \leq K. \quad (2.63)$$

Gemäß dem Satz von Arzela-Ascoli sind diese Funktionen u_a daher präkompakt bzgl. der C^1 -Norm auf jedem solchen Teilgebiet, also konvergiert nach erneutem Übergang zu einer Teilfolge u_{a_n} in dem Teilgebiet bezüglich der C^1 -Norm gegen ein $u \in C^1(\overline{Z_\infty})$. (Die Grenzwerte der schwachen $H^{2,p}$ -Konvergenz und der C^1 -Konvergenz stimmen überein.) Die u_{a_i} genügen der Differentialgleichung $\Delta u_{a_i} = (c + \alpha(y))(u_{a_i})_{x_1} - g(u_{a_i})$. Weil die rechte Seite in C^0 gegen $(c + \alpha(y))u_{x_1} - g(u)$ konvergiert, tut dies auch die linke Seite, so daß u der Differentialgleichung $\Delta u = (c + \alpha(y))u_{x_1} - g(u)$ genügt.

Wegen $(u_a)_{x_1} \geq 0$ und $0 < u_a < 1$ in Z_a ergibt sich weiterhin $u_{x_1} \geq 0$ und $0 \leq u \leq 1$ in $\overline{Z_\infty}$. \square

Von nun an sei mit (u, c) stets ein solcher Grenzwert gemeint. Gemäß Satz 5.8 gilt $u \in C^{2,\kappa}$.

Lemma 2.6: *Die folgenden Integrale sind endlich:*

$$\int_{Z_\infty} g(u) dx < +\infty, \quad \int_{Z_\infty} |\nabla u|^2 dx < +\infty. \quad (2.64)$$

BEWEIS. Auf Z_∞^- gilt $u \leq \vartheta$ und somit $g(u) = 0$. Daher genügt es, das erste Integral auf Z_∞^+ zu betrachten. Für beliebiges $z > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{Z_z^+} g(u) dx &= \int_{\omega} \int_0^z (c + \alpha(y))u_{x_1} dx_1 dy - \int_{Z_z^+} \Delta u dx \\ &= \int_{\omega} (c + \alpha(y))u(x_1, y) dy \Big|_{x_1=0}^{x_1=z} - \int_{\partial Z_z^+} u_\nu ds(x) \\ &= \int_{\omega} (c + \alpha(y))u(x_1, y) dy \Big|_{x_1=0}^{x_1=z} - \int_{\omega} u_{x_1}(x_1, y) dy \Big|_{x_1=0}^{x_1=z} \\ &\leq \int_{\omega} (c + \alpha(y))u(x_1, y) dy \Big|_{x_1=0}^{x_1=z} + \int_{\omega} u_{x_1}(0, y) dy. \end{aligned} \quad (2.65)$$

¹¹Siehe [Alt], Beispiel 6.10.3 (Seite 218).

Hierbei wurde verwendet, daß die Normalenableitung von u auf $\mathbb{R} \times \partial\omega$ verschwindet und daß $u_{x_1} \geq 0$ ist. Wegen $u \leq 1$ und $c + \alpha(y) \in C^0(\bar{\omega})$ ist das erste Integral der letzten Zeile unabhängig von z nach oben beschränkt. Durch den Grenzübergang $z \rightarrow \infty$ erhält man die Endlichkeit von $\int_{Z_\infty} g(u) dx$.

Durch Multiplikation der Differentialgleichung (2.8) mit u vor der Aufintegration erhält man analog die Endlichkeit von $\int_{Z_\infty} |\nabla u|^2 dx$:

$$\begin{aligned}
\int_{Z_z} |\nabla u|^2 dx &= - \int_{Z_z} u \Delta u dx + \int_{\partial Z_z} u u_\nu ds(x) \\
&= \int_{Z_z} u g(u) dx - \int_{Z_z} u u_{x_1} (c + \alpha(y)) dx + \int_{\omega} u u_{x_1} dy \Big|_{x_1=-z}^{x_1=z} \\
&= \int_{Z_z} u g(u) dx - \frac{1}{2} \int_{\omega} u^2 (c + \alpha(y)) dy \Big|_{x_1=-z}^{x_1=z} + \int_{\omega} u u_{x_1} dy \Big|_{x_1=-z}^{x_1=z} \\
&\leq \int_{Z_z} g(u) dx + \int_{\omega} |c + \alpha(y)| dy + \int_{\omega} u(z, y) u_{x_1}(z, y) dy. \quad (2.66)
\end{aligned}$$

Die beiden ersten Summanden der letzten Zeile sind unabhängig von z beschränkt, es bleibt also noch die Untersuchung des letzten. Weil

$$\begin{aligned}
&\int_{\omega} u(z, y) u_{x_1}(z, y) dy - \int_{\omega} u(0, y) u_{x_1}(0, y) dy \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\omega} u^2(x_1, y) dy \Big|_{x_1=0}^{x_1=z} = \frac{1}{2} \int_{Z_z^+} u^2 dx \quad (2.67)
\end{aligned}$$

monoton in z ist, ist auch $\int_{\omega} u(z, y) u_{x_1}(z, y) dy$ monoton in z . Daher ist dieser Term entweder beschränkt oder er konvergiert gegen ∞ für $z \rightarrow \infty$. Falls er gegen ∞ konvergiert, so müßte dies aber auch für $\int_{\omega} u_{x_1}(z, y) dy$ gelten, was wegen der Beschränktheit von u jedoch ausgeschlossen ist. Also ist $\int_{\omega} u(z, y) u_{x_1}(z, y) dy$ unabhängig von z beschränkt. \square

Lemma 2.7: *Es gibt Konstanten $\beta_- \in [0, 1]$ und $\beta_+ \in \{\vartheta, 1\}$ mit*

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} u(x_1, y) = \beta_{\pm}. \quad (2.68)$$

BEWEIS. Da u beschränkt und monoton in x_1 -Richtung ist, existieren die Limes

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} u(x_1, y) =: \beta_{\pm}(y). \quad (2.69)$$

Zu $j \in \mathbb{N}$ setze

$$u_j^\pm(x_1, y) := u(x_1 \pm j, y). \quad (2.70)$$

Für beliebige $j, k \in \mathbb{N}$ erfüllt $z^\pm := u_j^\pm - u_k^\pm$ die Differentialgleichung $\Delta z^\pm - (c + \alpha(y))z^\pm = g(u_j^\pm) - g(u_k^\pm)$, also gilt gemäß der gewohnten $H^{2,p}$ -Abschätzung 5.7

$$\|z^\pm\|_{C^{1,\alpha}(\overline{Z_1})} \leq C(\|z^\pm\|_{L^p(\overline{Z_1})} + \|g(u_j^\pm) - g(u_k^\pm)\|_{L^p(\overline{Z_1})}) \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0, \quad (2.71)$$

denn $z^\pm = u_j^\pm - u_k^\pm \rightarrow 0$ für $j, k \rightarrow \infty$. Also konvergiert u_j^\pm in Z_1 nicht nur bezüglich der C^0 -Norm, sondern auch bezüglich der C^1 -Norm. Weil $\int_{Z_\infty} |\nabla u|^2 dx$ wie in Lemma 2.6 gezeigt endlich ist, muß $\nabla \beta_\pm(y) = 0$ gelten, d.h. β_\pm sind Konstanten. Da auch das Integral $\int_{Z_\infty} g(u) dx$ endlich ist, muß $g(\beta_+) = 0$ gelten. Wegen $g|_{[0,\vartheta]} = g(1) = 0$, $g|_{(\vartheta,1)} > 0$ und $\max_{y \in \overline{\omega}} u(0, y) = \vartheta$ folgt $\beta_+ = \vartheta$ oder $\beta_+ = 1$. \square

Lemma 2.8: Falls $\beta_+ = \vartheta$ ist, so folgt $\beta_- = \vartheta$ und $u \equiv \vartheta$.

BEWEIS. Sei $\beta_+ = \vartheta$. Die Monotonie in x_1 -Richtung von u impliziert $u \leq \vartheta$ und wegen (2.13) $g(u) \equiv 0$. Integriere die Differentialgleichung (2.8) über das Gebiet Z_z und betrachte die Grenze $z \rightarrow +\infty$. Weil $\nabla u(x_1, y)$ wie eben gezeigt für $x_1 \rightarrow \pm\infty$ gleichmäßig in y gegen 0 konvergiert, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{Z_z} (c + \alpha(y))u_{x_1} dx - \int_{Z_z} \Delta u dx \\ &= \int_{\omega} (c + \alpha(y))u(x_1, y) dy \Big|_{x_1=-z}^{x_1=z} - \int_{\omega} u_{x_1}(x_1, y) dy \Big|_{x_1=-z}^{x_1=z} \\ &\xrightarrow{z \rightarrow \infty} \int_{\omega} (c + \alpha(y))(\beta_+ - \beta_-) dy - (0 - 0), \end{aligned} \quad (2.72)$$

und somit

$$(\beta_+ - \beta_-)(c + \int_{\omega} \alpha dy) = 0. \quad (2.73)$$

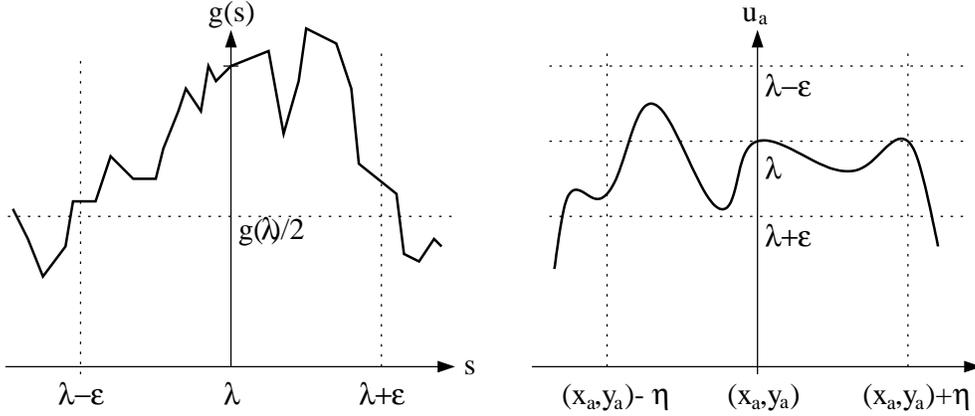
Falls man die Differentialgleichung vorher mit u multipliziert, folgt analog

$$\int_{Z_\infty} |\nabla u|^2 dx + \frac{|\omega|}{2}(\beta_+^2 - \beta_-^2)(c + \int_{\omega} \alpha dy) = 0. \quad (2.74)$$

Der zweite Summand auf der linken Seite ist ein Vielfaches von (2.73), also folgt

$$\int_{Z_\infty} |\nabla u|^2 dx = 0. \quad (2.75)$$

Also ist u konstant und $\beta_- = \vartheta$. \square



Lemma 2.9: *Es gibt eine von a unabhängige Konstante $\delta > 0$, so daß jede Lösung (u_a, c_a) mit $a \geq 1$ der Bedingung*

$$\int_{Z_a} g(u_a) dx \geq \delta > 0 \quad (2.76)$$

genügt.

BEWEIS. Wähle $\lambda \in (\vartheta; 1)$ beliebig. Aufgrund der Stetigkeit von g gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $g|_{(\lambda-\varepsilon; \lambda+\varepsilon)} > \frac{g(\lambda)}{2}$. Zu jedem $a \geq 1$ gibt es ein $x_a \in (0; a)$ und ein $y_a \in \omega$ mit $u_a(x_a, y_a) = \lambda$. Setze $\eta = \frac{\varepsilon}{K}$. Wegen $|\nabla u_a| \leq K$, K unabhängig von a , folgt für $x \in B_a := B_\eta(x_a, y_a)$ die Abschätzung $|u_a(x) - \lambda| < \varepsilon$ (vgl. dazu auch die Abbildung). Aufgrund der Glattheit des Randes von ω gibt es ein von $a \geq 1$ unabhängiges $\delta' > 0$, so daß $|Z_a \cap B_\eta(x_a, y_a)| \geq \delta'$ gilt. Damit folgt

$$\int_{Z_a} g \circ u_a dx \geq \int_{Z_a \cap B_a} g \circ u_a dx \geq \int_{Z_a \cap B_a} \frac{g(\lambda)}{2} dx \geq \frac{g(\lambda)}{2} \delta' =: \delta > 0. \quad (2.77)$$

□

Lemma 2.10:

$$\int_{\omega} \alpha dy + c > \frac{\delta}{|\omega|} \quad (2.78)$$

BEWEIS. Gemäß Lemma 2.7 können nur die beiden Fälle $\beta_+ = \vartheta$ und $\beta_+ = 1$ auftreten. Wir untersuchen beide Fälle getrennt.

Fall 1: $\beta_+ = \vartheta$. Integriere die Differentialgleichung (2.18) für die Funktion u_{a_n} über dem Gebiet $Z_{a_n}^+ = (0, a_n) \times \omega$ auf:

$$\begin{aligned}
\int_{Z_{a_n}^+} g(u_{a_n}) dx &= \int_{\omega} \int_0^{a_n} (c_{a_n} + \alpha(y))(u_{a_n})_{x_1} dx_1 dy - \int_{Z_{a_n}^+} \Delta u_{a_n} dx \\
&= (c_{a_n} + \int_{\omega} \alpha dy)|\omega| - \int_{\omega} (c_{a_n} + \alpha(y))u_{a_n}(0, y) dy \\
&\quad - \int_{\omega} (u_{a_n})_{x_1}(a_n, y) dy + \int_{\omega} (u_{a_n})_{x_1}(0, y) dy. \tag{2.79}
\end{aligned}$$

Aus Lemma 2.5 wissen wir, daß u_{a_n} in der C^1 -Norm kompakt gegen ϑ konvergiert. Also konvergiert der drittletzte Summand gegen $(c + \int \alpha)\vartheta|\omega|$ und der letzte gegen null. Wegen $(u_{a_n})_{x_1} \geq 0$ kann der zweitletzte Summand wegeschätzt werden, und nach Lemma 2.9 gilt

$$(1 - \vartheta)(c + \int_{\omega} \alpha dy)|\omega| \geq \delta > 0. \tag{2.80}$$

Wegen $0 < 1 - \vartheta < 1$ folgt nach Division durch $|\omega|$ die Behauptung.

Fall 2: $\beta_+ = 1$. Mit einer Rechnung analog zum Beweis von Lemma 2.8 erhält man

$$(\beta_+ - \beta_-)(c + \int_{\omega} \alpha dy)|\omega| = \int_{Z_{\infty}} g(u) dx \geq \delta > 0. \tag{2.81}$$

□

Nun soll der Fall $\beta_+ = \vartheta$ ausgeschlossen werden. Dies geschieht durch den Vergleich von u mit einer Funktion Φ , die das asymptotische Verhalten von u modelliert. Sie wird mittels verallgemeinerter Eigenwert- und Eigenfunktionverfahren aus dem Kapitel 4 gewonnen.

Lemma 2.11: *Es gilt $\beta_- = 0$.*

BEWEIS. Aufgrund von Lemma 2.10 ist es möglich, ein γ mit $\int \alpha + \gamma > 0$ und $\gamma < c_a$ für hinreichend große a zu finden. Gemäß Satz 4.1 gibt es eine strikt positive Funktion $\Psi \in C^2(\bar{\omega})$ und einen verallgemeinerten Eigenwert λ , so daß gilt:

$$-\Delta_y \Psi + \lambda(\gamma + \alpha(y))\Psi = \lambda^2 \Psi \quad \text{in } \omega, \tag{2.82}$$

$$\Psi_{\nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\omega. \tag{2.83}$$

Da Ψ nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt ist, können wir $\Psi \geq \vartheta$ auf $\bar{\omega}$ annehmen. Mit

$$\Phi(x_1, y) := e^{\lambda x_1} \Psi(y) \tag{2.84}$$

gilt

$$\Delta\Phi = \lambda^2 e^{\lambda x_1} \Psi - e^{\lambda x_1} (\lambda^2 \Psi - \lambda(\gamma + \alpha(y))\Psi) = \lambda(\gamma + \alpha(y))\Phi = (\gamma + \alpha(y))\Phi_{x_1}. \quad (2.85)$$

Wegen $(u_a)_{x_1} \geq 0$ und $g(u) \equiv 0$ folgt auf Z_a^- :

$$\begin{aligned} & -\Delta(\Phi - u_a) + (\gamma + \alpha(y))(\Phi - u_a)_{x_1} \\ &= -(\gamma + \alpha(y))\Phi_{x_1} + (c + \alpha(y))(u_a)_{x_1} - g(u) + (\gamma + \alpha(y))(\Phi - u_a)_{x_1} \\ &= (c - \gamma)(u_a)_{x_1} - g(u) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Wegen $\Psi \geq \vartheta$ und (2.83) folgt

$$(\Phi - u_a)(-a, y) \geq 0 \text{ und } (\Phi - u_a)(0, y) \geq 0 \text{ für } y \in \bar{\omega} \quad (2.87)$$

$$(\Phi - u_a)_\nu = 0 \text{ auf } (-a; 0) \times \partial\omega. \quad (2.88)$$

Mit Hilfe des gewohnten Maximumprinzips folgt nun $\Phi - u_a \geq 0$ und somit

$$u_a(x_1, y) \leq e^{\lambda x_1} \Psi(y) \quad (2.89)$$

auf Z_a^- . Wegen $\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} e^{\lambda x_1} \Psi(y) = 0$ folgt $\beta_- = 0$. \square

Wie bereits oben gezeigt können höchstens die Fälle $\beta_+ = \vartheta$ und $\beta_+ = 1$ auftreten. $\beta_+ = \vartheta$ impliziert $\beta_- = \vartheta$ und ist somit ausgeschlossen. Demnach bleibt nur $\beta_- = 0$ und $\beta_+ = 1$ übrig, was Gleichung (2.9) zeigt.

Wir haben also bis hierhin die Existenz einer Lösung von (2.8)-(2.10) gefunden. Da u als Grenzwert von Funktionen u_a mit $0 < u_a < 1$ gewonnen wurde, folgt $0 \leq u \leq 1$. Mit dem Maximumprinzipargument von Lemma 2.2 folgt $0 < u$, also ist die Ungleichung (2.14) gezeigt. Leider läßt sich auf diesem Weg nicht eine Ungleichung $u < 1$ zeigen, denn in einer Umgebung eines Maximums 1 ist $g(u)$ i. allg. nicht konstant null und besitzt das falsche Vorzeichen zur Anwendung des Maximumprinzips.

Da die Funktionen u_a streng monoton wachsend sind, folgt für die Grenzfunktion u sofort die Ungleichung (2.15), und das Theorem ist bewiesen.

Kapitel 3

Monotonie

In diesem Kapitel wird eine wichtige Eigenschaft von Lösungen unserer Differentialgleichung auf endlichen Zylindern herausgearbeitet, nämlich die Monotonie in x_1 -Richtung. Zugleich erhält man einen Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung. Grundprinzip dieses Kapitels ist die Betrachtung der Differenz zweier Lösungen, wovon eine Lösung in x_1 -Richtung verschoben wird. Die Verwendung parabolischer Maximumprinzipien gestattet dann eine Aussage über die Positivität einer solchen Differenz. Dem Zeitparameter in parabolischen Gleichungen entspricht hier die Verschiebung der einen Lösung.

Die Herleitung der parabolischen Maximumprinzipien nimmt den größten Teil des Kapitels ein. Gezeigt werden bekannte Standardaussagen aus [PW] (Sätze/Lemmata 3.2 – 3.4), bei denen eine Vorzeichenbedingung an den Koeffizienten nullter Ordnung gestellt wird, sowie spezialisierte Varianten aus [BN2] und [GNN], die ohne eine solche Bedingung auskommen, stattdessen aber andere Voraussetzungen wie Kleinheitsbedingungen an das Gebiet machen.

Im einzelnen stellt Satz 3.2 eine Verallgemeinerung des Starken Maximumprinzips von E. Hopf auf parabolische Gleichungen dar, d.h. unter einer Vorzeichenvoraussetzung an die Koeffizienten nullter Ordnung wird das Nichtverschwinden der Normalenableitung an einem nichttrivialen Randextremum gezeigt. Ebenso läßt sich die bekannte Aussage über das Nichtauftreten nichttrivialer innerer Extrema auf parabolische Gleichungen verallgemeinern. Da diese Aussage hier jedoch nicht benötigt wird, verweisen wir auf [PW], Theorem 7 (Seite 174). Um sie zu beweisen, sind die Lemmata 3.3 und 3.4 hilfreich, die in diese Arbeit aufgenommen wurden, da sie später verwendete Beweisprinzipien gut darstellen, insbesondere die Technik der Skalierung eines Halb- oder Viertelellipsoids. Für Lemma 3.4 werden zwei verschiedene Beweise gegeben, der erste entstammt im Prinzip dem Buch [PW]. Bei den Recherchen zu dieser Diplomarbeit ergab sich, daß dieses Lemma sich schneller und eleganter mit der Halbellipsoidmethode, wie sie von Nirenberg verwendet wird, beweisen läßt.

Nach diesen noch sehr bekannten Aussagen werden speziellere Maximumprinzipien aus den Arbeiten [BN2] und [GNN] vorgestellt. Satz 3.5, der ohne die Vorzeichen-

forderung an die Koeffizienten nullter Ordnung auskommt, macht eine Aussage über das Vorzeichen von Lösungen im Inneren eines hinreichend kleinen Gebiets. Der Satz wurde für diese Diplomarbeit auf gemischte Randbedingungen verallgemeinert. Analog dazu stellt Satz 3.6 die Aussage über die Normalenableitung bei Randextrema dar. Der Satz 3.7 dient im Zusammenspiel mit Satz 3.5 zu verschärften Aussagen über das Vorzeichen im Gebietsinneren. Den Abschluß bildet Satz 3.8, der Aussagen in Gebietsecken ermöglicht. Da zum Beweis umfangreiche Gebietstransformationen und Konstruktionen für die Barrierenfunktion erforderlich sind, ist der Beweis recht lang, vielleicht auch ein wenig ermüdend.

Da sich die Aussagen leicht für eine große Klasse quasilinear Gleichungen machen lassen, wird hier nicht die Differentialgleichung des letzten Kapitels zugrundegelegt. Offenbar handelt es sich bei ihr um einen Spezialfall der hier behandelten Gleichungsklasse.

3.1 Monotonie- und Eindeutigkeitsaussage

Sei $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein beschränktes Gebiet mit C^2 -Rand, und sei $b > 0$ eine reelle Konstante. In dem Gebiet

$$Z_b := (-b, b) \times \omega \quad (3.1)$$

betrachten wir die quasilineare Differentialgleichung

$$\Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0 \quad \text{in } Z_b, \quad (3.2)$$

wobei $f = f(x, z, p)$ stetig in der Variablen x , lokal Lipschitzstetig in z, p und monoton wachsend in x_1 für $p_1 \geq 0$ sei. Als Randbedingungen fordern wir

$$u = \Phi \quad \text{auf } \{b, -b\} \times \omega, \quad (3.3)$$

$$u_\nu = 0 \quad \text{auf } (b, -b) \times \partial\omega. \quad (3.4)$$

Dann gilt

Satz 3.1: Sei $u \in C^2(\overline{Z_b})$ Lösung von (3.2) mit

$$\Phi(-b, y) \leq u(x_1, y) \leq \Phi(b, y) \quad \text{für alle } (x_1, y) \in Z_b. \quad (3.5)$$

Zu jedem $x_1 \in (-b, b)$ gebe es ein $y \in \omega$, so daß $u(-b, y) < u(x_1, y)$ ist. Dann ist u eindeutig bestimmt und streng monoton wachsend in x_1 -Richtung.

BEWEIS. Zu $\lambda \in [-b, b]$ setze

$$Z_{-b, \lambda} := (-b, \lambda) \times \omega = Z_b \cap \{x_1 < \lambda\}. \quad (3.6)$$

Wir zeigen, daß für zwei Lösungen $u, \underline{u} \in C^2(\overline{Z_b})$ und $\lambda \in (-b, b)$ auf $Z_{-b, \lambda}$ gilt:

$$w(x) := w(x, \lambda) := v(x) - \underline{u}(x) := u(x_1 + b - \lambda, y) - \underline{u}(x) > 0. \quad (3.7)$$

Setzt man $u = \underline{u}$, so folgt daraus unmittelbar die strenge Monotonie. Ebenfalls folgt für zwei beliebige Lösungen aus Stetigkeitsgründen $u \geq \underline{u}$ und wegen der Vertauschbarkeit von u und \underline{u} die Eindeutigkeit.

Nun zum Beweis von (3.7). Es gilt

$$0 = \Delta w + f(x, v, \nabla v) - f(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) + \underbrace{f(x_1 + b - \lambda, y, v, \nabla v) - f(x, v, \nabla v)}_{=: I(v_{x_1})}. \quad (3.8)$$

Für $v_{x_1} \geq 0$ folgt $I(v_{x_1}) \geq 0$, weil f nach Voraussetzung monoton wachsend in x_1 ist, insbesondere gilt auch $I(0) \geq 0$. Für $v_{x_1} < 0$ ist $f(x, z, p)$ nach Voraussetzung lokal Lipschitzstetig in z und p . Da die beiden Funktionen \underline{u} und v C^2 -Funktionen auf einer kompakten Menge sind, sind die Argumente x , $v(x)$ und $\nabla v(x)$ kompakt und f dort global Lipschitzstetig. Die Lipschitzkonstante $L \geq 0$ hängt dabei natürlich von v ab. Wegen $I(0) \geq 0$ folgt

$$I(v_{x_1}) \geq I(v_{x_1}) - I(0) \geq -L|v_{x_1} - 0| = Lv_{x_1}. \quad (3.9)$$

Setze

$$\beta(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } v_{x_1}(x) \geq 0, \\ L & \text{falls } v_{x_1}(x) < 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Wir haben damit eine Funktion $\beta \in L^\infty(Z_b)$ mit $\beta \geq 0$ gefunden, so daß $I(v_{x_1}) \geq \beta v_{x_1}$ gilt. Damit erhalten wir die Differentialungleichung

$$0 \geq \Delta w + f(x, v, \nabla v) - f(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) + \beta(x)v_{x_1}. \quad (3.11)$$

Diese linearisieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta w + f(x, v, \nabla v) - f(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) + \beta(x)v_{x_1} \\ &= \Delta w + f(x, v, \nabla v) - f(x, v, \nabla \underline{u}) + f(x, v, \nabla \underline{u}) - f(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) + \beta(x)v_{x_1} \\ &= \Delta w + \nabla(v - \underline{u}) \int_0^1 f_p(x, v, \nabla(sv + (1-s)\underline{u})) ds \\ &\quad + (v - \underline{u}) \int_0^1 f_z(x, sv + (1-s)\underline{u}, \nabla \underline{u}) ds + \beta(x)v_{x_1} \\ &= \Delta w + a_j(x)w_j + a(x)w + \beta(x)v_{x_1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Schreibweise der Differenzen als Integrale ist aus folgendem Grund möglich: Da f in den Variablen z und p lokal Lipschitzstetig ist, ist die Funktion $G(s) :=$

$f(x, sv + (1-s)\underline{u}, \nabla \underline{u})$ aus $C^{0,1}([0, 1])$. Gemäß Satz A5.5 aus [Alt], Seite 185 ist $C^{0,1} \cong H^{1,\infty}$. Setze $g(s) := G'(s) \in L^\infty$. G läßt sich durch C^1 -Funktionen bzgl. der $H^{1,1}$ -Norm approximieren, d.h. es gibt eine Funktionenfolge $G_i \in C^1$ mit $G_i \rightarrow G$ in $H^{1,1}$; automatisch gilt $g_i := G'_i \rightarrow g$ in L^1 . Damit folgt:

$$\begin{array}{ccc} G_i(1) - G_i(0) & = & \int_0^1 g_i(s) ds \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(1) - G(0) & & \int_0^1 g(s) ds \end{array} \quad (3.13)$$

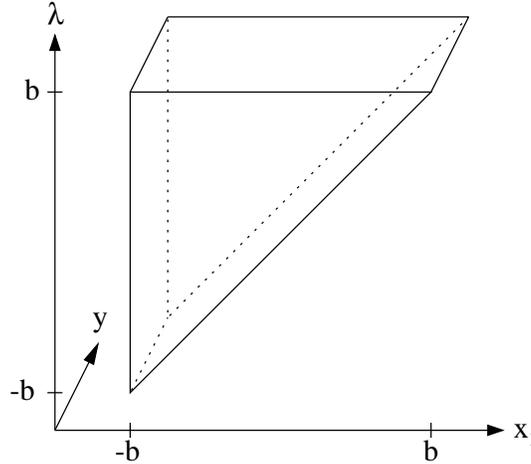
Die andere Umformung wird analog gerechtfertigt.

Setze

$$U := \{(x, \lambda) : -b < \lambda < b, x \in Z_{-b,\lambda}\}, \quad (3.14)$$

$$U_{\tilde{\lambda}} := Z_{-b,\tilde{\lambda}} \times \{\tilde{\lambda}\} = U \cap \{\lambda = \tilde{\lambda}\}. \quad (3.15)$$

Falls ω eindimensional ist, d.h. $n = 2$ gilt, hat U folgendes Aussehen:



Wegen $\partial_\lambda w = -v_{x_1}$ erhalten wir in U die Differentialungleichung

$$0 \geq \Delta w + a_j w_j + aw - \beta \partial_\lambda w. \quad (3.16)$$

Für $(x, \lambda) \in \partial U \cap \{\lambda < b\}$ gilt aufgrund der Randbedingungen (3.3) und (3.4) $w(x, \lambda) \geq 0$ oder $w_\nu(x, \lambda) = 0$. Daher folgt für hinreichend kleine $b + \lambda > 0$ aus Satz 3.5 $w \geq 0$ auf U_λ . Nach Voraussetzung des Satzes gibt es zu $\lambda \in (-b, b)$ ein $y \in \omega$, so daß $w(-b, y, \lambda) = u(-\lambda, y) - \underline{u}(-b, y) > 0$ ist. Daher folgt aus Satz 3.7 $w > 0$ in U_λ .

Sei μ die größte Zahl, für die noch $w \geq 0$ für alle $\lambda \in [-b, \mu]$ gilt. Wie gerade erörtert gilt $\mu > -b$. Wir möchten $\mu = b$ zeigen.

Annahme: $\mu < b$. Dann gibt es Folgen $\lambda_i \searrow \mu$ und $x_i \in Z_{-b, \lambda_i}$ mit $w(x_i, \lambda_i) < 0$. Die x_i können so gewählt werden, daß w auf $\overline{U_{\lambda_i}}$ sein Minimum annimmt und somit $\nabla_x w(x_i, \lambda_i) = 0$ gilt. Durch Übergang zu einer Teilfolge erreicht man, daß die x_i gegen ein $\bar{x} \in \overline{Z_{-b, \mu}}$ konvergieren. Aus Stetigkeitsgründen folgt $w(\bar{x}, \mu) = 0$. Wie oben gibt es zu μ ein $y \in \omega$, so daß $w(-b, y, \mu) > 0$ ist. Aus Satz 3.7 folgt $w > 0$ in U_μ , so daß \bar{x} nicht im Inneren $Z_{-b, \mu}$ liegen kann. Aus Satz 3.6 folgt $w_\nu(\bar{x}, \mu) < 0$, so daß \bar{x} aus dem Dirichletrand stammen muß. Es gilt also:

$$w(\bar{x}, \mu) = 0, \quad \nabla_x w(\bar{x}, \mu) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla_x^2 w(\bar{x}, \mu) \geq 0. \quad (3.17)$$

Fallunterscheidung:

1. $\bar{x} = (-b, \bar{y})$ mit $\bar{y} \in \omega$:

Aus Satz 3.6 folgt $w_{x_1}(\bar{x}, \mu) > 0$, Widerspruch zu $\nabla_x w(\bar{x}, \mu) = 0$.

2. $\bar{x} = (\mu, \bar{y})$ mit $\bar{y} \in \omega$:

Aus Satz 3.6 folgt $w_{x_1}(\bar{x}, \mu) < 0$, Widerspruch zu $\nabla_x w(\bar{x}, \mu) = 0$.

3. $\bar{x} = (x_1, \bar{y})$ mit $\bar{y} \in \partial\omega$ und $x_1 \in \{-b, \mu\}$:

Aus Satz 3.8 folgt $\partial_\nu w(x_1, \bar{x}) > 0$ oder $\partial_\nu^2 w(x_1, \bar{x}) < 0$. Beides steht im Widerspruch zu (3.17).

Da alle drei Fälle zum Widerspruch führen, muß die Annahme falsch sein, und es folgt die Behauptung. \square

3.2 Parabolische Maximumprinzipien

Sei $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet mit $V \subset \{t < T\}$ für ein festes $T \in \mathbb{R}$. Einen Punkt aus dem \mathbb{R}^{n+1} bezeichnen wir mit (x, t) , wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ ist. In diesem Abschnitt verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$$\tilde{V} := \{(x, t) : \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x, t) \cap \{t < T\} \subset V\} \subset \overline{V}, \quad (3.18)$$

$$\Gamma := \overline{\partial V \cap \{t < T\}}, \quad (3.19)$$

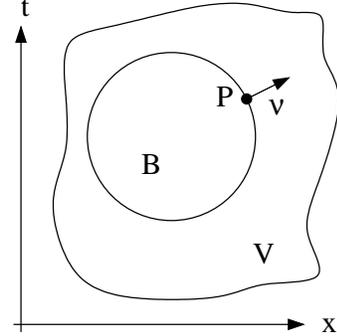
$$V_{t'} := V \cap \{(x, t') \in V\} \quad \text{für beliebige } t' < T, \quad (3.20)$$

$$V_T := \{(x, T) : \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x, T) \cap \{t < T\} \subset V\}. \quad (3.21)$$

Ferner setzen wir voraus, daß die Mengen $V_{t'}$ für alle $t' \leq T$ zusammenhängend sind. Die Funktion $w : \overline{V} \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar in den Variablen x_1, \dots, x_n und einmal stetig differenzierbar in der Variablen t . Sie genüge in V der Differentialungleichung

$$(L - \beta \partial_t)w = a_{ij}w_{x_i x_j} + a_j w_{x_j} + aw - \beta w_t \geq 0. \quad (3.22)$$

Satz 3.2: Die Funktion w genüge in V der Differentialungleichung (3.22). Die Koeffizientenfunktionen seien auf V beschränkt, $(a_{ij})_{ij}$ sei gleichmäßig elliptisch, und es gelte $a \leq 0$. Weiterhin seien $w \leq M$ in V , $M \geq 0$ eine Konstante, B ein offener Ball mit $B \subset V$ und $w < M$ in B . Es gebe einen Punkt $P \in \partial B$ mit $w(P) = M$. Die äußere Normale ν durch P an B sei nicht parallel zur t -Achse. Falls w auch noch in P differenzierbar ist, so gilt



$$w_\nu(P) > 0. \quad (3.23)$$

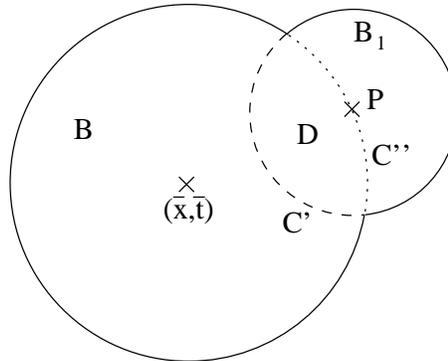
BEWEIS. Seien R der Radius und (\bar{x}, \bar{t}) der Mittelpunkt von B . OBdA sei P der einzige Punkt auf ∂B , an dem w den Wert M annimmt. Ansonsten gehe zu einem kleineren Ball B' über mit $B' \subset B$ und $P \in \partial B'$. Wegen $w < M$ in B folgt dann $w < M$ in $\overline{B'} \setminus \{P\}$. Fahre dann mit B' statt B fort.

Sei $P = (x_P, t_P)$. Nach Voraussetzung ist $x_P \neq \bar{x}$. Sei B_1 ein Ball mit Mittelpunkt P und Radius R_1 , wobei R_1 so klein gewählt ist, daß

$$R_1 < |x_P - \bar{x}|. \quad (3.24)$$

Setze

$$C' := \partial B_1 \cap \overline{B}, \quad C'' := \partial B \cap B_1 \quad \text{und} \quad D := B \cap B_1. \quad (3.25)$$



Wegen $w < M$ auf der kompakten Menge C' gibt es ein $\eta > 0$ mit

$$w \leq M - \eta \quad \text{auf} \quad C'. \quad (3.26)$$

Setze

$$g(x, t) := e^{-\alpha(|x-\bar{x}|^2 + |t-\bar{t}|^2)} - e^{-\alpha R^2}. \quad (3.27)$$

Damit gilt

$$(L - \beta \partial_t)g = 2\alpha e^{-\alpha(|x-\bar{x}|^2+|t-\bar{t}|^2)}[2\alpha a_{ij}(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) - a_{ii} - a_j(x_j - \bar{x}_j) + \beta(t - \bar{t})] + ag. \quad (3.28)$$

Nach Wahl von B_1 gilt für $x \in \overline{B_1}$: $|x - \bar{x}| \geq |x_P - \bar{x}| - R_1 > 0$. Daher kann $\alpha > 0$ so groß gewählt werden, daß

$$(L - \beta \partial_t)g > 0 \quad \text{in } \overline{B_1}. \quad (3.29)$$

Setze

$$v := w + \varepsilon g, \quad (3.30)$$

dann gilt $(L - \beta \partial_t)v > 0$. Wegen $w \leq M - \eta$ auf C' kann $\varepsilon > 0$ so klein gewählt werden, daß $v < M$ auf C' ist. Wegen $g = 0$ auf ∂B folgt $v < M$ auf $C'' \setminus \{P\}$, $v(P) = M$. Die Funktion v nimmt ihr Maximum auf \overline{D} nicht innerhalb von D an, denn sonst müßte an einem solchen Punkt $P' \in D$

$$\underbrace{a_{ij}v_{x_i x_j}(P')}_{\leq 0} + \underbrace{a_j v_{x_j}(P')}_{=0} + \underbrace{av(P')}_{\leq 0} - \beta \underbrace{v_t(P')}_{=0} > 0 \quad (3.31)$$

gelten, was ein Widerspruch wäre. Also nimmt v sein Maximum auf \overline{D} einzig und alleine in P an, und somit gilt

$$v_\nu(P) = w_\nu(P) + \varepsilon g_\nu(P) \geq 0. \quad (3.32)$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$g_\nu(P) = -2\alpha R e^{-\alpha R^2} < 0 \quad (3.33)$$

und somit

$$w_\nu(P) > 0. \quad (3.34)$$

□

Bemerkung: Die Aussage bleibt richtig, falls anstelle von ν ein beliebiger nach außen zeigender Vektor $\tilde{\nu}$ verwendet wird, d.h. ein Vektor $\tilde{\nu}$ mit $\nu \cdot \tilde{\nu} > 0$. Dabei muß jedoch beachtet werden, daß der Differenzvektor von P und dem Mittelpunkt des Balles nicht parallel zur t -Achse liegen darf (Bedingung $x_p \neq \bar{x}$ im Beweis).

Lemma 3.3: *Die Funktion w genüge in V der Differentialungleichung (3.22). Die Koeffizientenfunktionen seien auf V beschränkt, $(a_{ij})_{ij}$ sei gleichmäßig elliptisch, und es gelte $a \leq 0$. Weiterhin seien $w \leq M$ in V , $M \geq 0$ eine Konstante, B ein offener Ball mit $\overline{B} \subset V$, $w < M$ in B , $P \in \partial B$ und $w(P) = M$. Dann liegt die Tangentialebene an B durch P senkrecht zur t -Achse.*

BEWEIS. Seien R der Radius und (\bar{x}, \bar{t}) der Mittelpunkt von B . OBdA sei P der einzige Punkt auf ∂B , an dem w den Wert M annimmt, ansonsten kann B wie im Beweis von Satz 3.2 verkleinert werden.

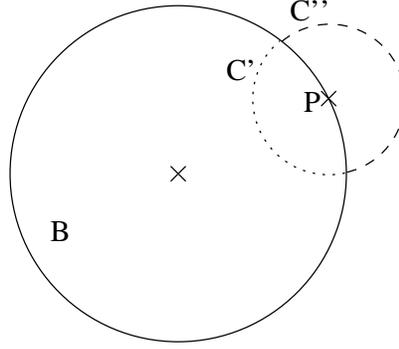
Annahme: $P = (x_P, t_P)$ mit $x_P \neq \bar{x}_1$, d.h. die Tangentialebene an B durch P liegt nicht senkrecht zur t -Achse.

Sei B_1 ein Ball mit Mittelpunkt P und Radius R_1 , wobei R_1 so klein gewählt ist, daß

$$R_1 < |x_P - \bar{x}| \quad \text{und} \quad \overline{B_1} \subset V. \quad (3.35)$$

∂B_1 zerfällt in die beiden Sphärensegmente

$$C' := \partial B_1 \cap \overline{B} \quad \text{und} \quad C'' := \partial B_1 \setminus C'. \quad (3.36)$$



Wegen $w < M$ auf der kompakten Menge C' gibt es ein $\eta > 0$ mit

$$w \leq M - \eta \quad \text{auf} \quad C'. \quad (3.37)$$

Setze

$$g(x, t) := e^{-\alpha(|x-\bar{x}|^2+|t-\bar{t}|^2)} - e^{-\alpha R^2}. \quad (3.38)$$

Damit gilt

$$(L - \beta \partial_t)g = 2\alpha e^{-\alpha(|x-\bar{x}|^2+|t-\bar{t}|^2)} [2\alpha a_{ij}(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) - a_{ii} - a_j(x_j - \bar{x}_j) + \beta(t - \bar{t})] + ag. \quad (3.39)$$

Nach Wahl von B_1 gilt für $x \in \overline{B_1}$: $|x - \bar{x}| \geq |x_P - \bar{x}| - R_1 > 0$. Wie im vorherigen Beweis kann $\alpha > 0$ so groß gewählt werden, daß

$$(L - \beta \partial_t)g > 0 \quad \text{in} \quad \overline{B_1}. \quad (3.40)$$

Mit

$$v := w + \varepsilon g \quad (3.41)$$

gilt $(L - \beta \partial_t)v > 0$. Wegen $w \leq M - \eta$ auf C' kann $\varepsilon > 0$ so klein gewählt werden, daß $v < M$ auf C' . Wegen $g < 0$ und $w \leq M$ auf C'' gilt $v < M$ auf C'' und somit auf ∂B_1 . Wegen $g = 0$ auf ∂B gilt $v(P) = w(P) = M$, also nimmt v sein Maximum an einem inneren Punkt $P' \in B_1$ an. Dies ist ein Widerspruch:

$$\underbrace{a_{ij}v_{x_i x_j}(P')}_{\leq 0} + \underbrace{a_j v_{x_j}(P')}_{=0} + \underbrace{av(P')}_{\leq 0} - \underbrace{\beta v_t(P')}_{=0} > 0. \quad (3.42)$$

Daher ist die Annahme falsch und die Behauptung bewiesen. \square

Lemma 3.4: *Seien V , w , L und M wie in Lemma 3.3. Sei $(x_0, t_0) \in V$. Falls $w(x_0, t_0) < M$ ist, dann gilt $w < M$ auf V_{t_0} .*

BEWEIS. Annahme: Es gibt einen Punkt $(x_1, t_0) \in V_{t_0}$ mit $w(x_1, t_0) = M$.

OBdA sei x_1 so gewählt, daß $w < M$ auf $((x_1, t_0); (x_0, t_0)]$, d.h. daß es auf der Verbindungsstrecke von (x_1, t_0) nach (x_0, t_0) keinen weiteren Punkt gibt, an dem w den Wert M annimmt. Es kann angenommen werden, daß die Verbindungsstrecke vollständig in V_{t_0} liegt, denn es gibt zumindest einen Polygonzug, der die beiden Punkte miteinander verbindet, wovon mindestens eine Teilstrecke die gewünschten Eigenschaften hat. Setze

$$d_0 := \min\{|x_1 - x_0|, \text{dist}([(x_1, t_0); (x_0, t_0)], \partial V)\}, \quad (3.43)$$

und bezeichne

$$d(x) := \sup\{r : w|_{B_r(x, t_0)} < M\} \quad (3.44)$$

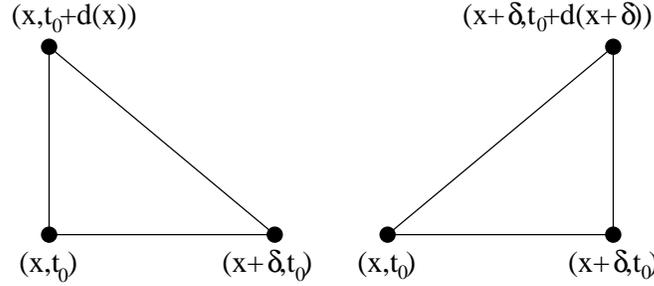
den Abstand des zu x nächstgelegenen Punktes, an dem w den Wert M annimmt. Für $x \in [(x_1, t_0); (x_0, t_0)]$ mit $|x - x_1| < d_0$ gilt wegen $w(x_1, t_0) = M$

$$d(x) \leq |x - x_1|. \quad (3.45)$$

Aus Lemma 3.3 folgt, daß ein solcher Punkt nur über oder unter x bezüglich der t -Achse liegen kann, also $w(x, t_0 + d(x)) = M$ oder $w(x, t_0 - d(x)) = M$. Daher kann man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras d für einen anderen Punkt auf der Verbindungsline nach oben und nach unten wie folgt abschätzen, vgl. dazu auch die Zeichnung.

$$d\left(x + \delta \frac{x_0 - x_1}{|x_0 - x_1|}\right) \leq \sqrt{d(x)^2 + \delta^2} < d(x) + \frac{\delta^2}{2d(x)} \quad (3.46)$$

$$d\left(x + \delta \frac{x_0 - x_1}{|x_0 - x_1|}\right) \geq \sqrt{d(x)^2 - \delta^2} \quad (3.47)$$



Der rechte Teil der ersten Abschätzung ist leicht einzusehen, wenn man ihn quadriert. Für einen Vektor $\sigma \in [0; x_0 - x_1]$ entlang der Verbindungsstrecke und eine beliebige natürliche Zahl $m \geq 1$ gilt damit

$$\begin{aligned}
 d(x + \sigma) - d(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} d\left(x + \frac{j+1}{m}\sigma\right) - d\left(x + \frac{j}{m}\sigma\right) \\
 &\stackrel{(3.46)}{\leq} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\sigma^2}{2m^2 d\left(x + \frac{j}{m}\sigma\right)} \\
 &\stackrel{(3.47)}{\leq} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\sigma^2}{2m^2 \sqrt{d(x)^2 - \frac{j^2}{m^2}\sigma^2}} \\
 &\leq \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\sigma^2}{2m^2 \sqrt{d(x)^2 - \sigma^2}} \\
 &= \frac{\sigma^2}{2m \sqrt{d(x)^2 - \sigma^2}}. \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

Lassen wir m gegen ∞ konvergieren, so folgt, daß d monoton fällt. Wegen (3.45) muß $d \equiv 0$ sein auf $[x_1; d_0 \frac{x_1 - x_0}{|x_1 - x_0|}]$. Insbesondere folgt dort $w \equiv M$, was ein Widerspruch zu Wahl von x_1 ist. \square

Im folgenden sei ein weiterer kürzerer Beweis von Lemma 3.4 angegeben, der Satz 3.2 benutzt, aber dafür auf Lemma 3.3 verzichtet. Die Methode stammt von Berestycki und Nirenberg aus dem Beweis von Satz 3.7.

BEWEIS. (Zweiter Beweis von Lemma 3.4)

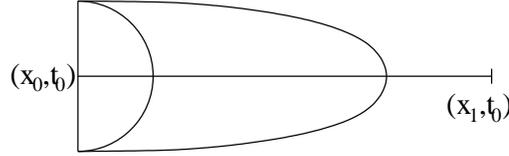
Sei $(x_1, t_0) \in V_{t_0}$ mit der Eigenschaft, daß die Verbindungsstrecke $[(x_1, t_0); (x_0, t_0)]$ in V_{t_0} enthalten ist. Wir möchten $w(x_1, t_0) < M$ zeigen. Dann folgt $w < M$ auf V_{t_0} , denn weil V_{t_0} zusammenhängend ist, läßt sich jeder Punkt aus V_{t_0} über einen polygonalen Streckenzug mit (x_0, t_0) verbinden, und durch iterierte Anwendung folgt die Behauptung.

Sei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, daß $w < M$ in $\overline{B_\varepsilon(x_0, t_0)}$ und $\overline{B_\varepsilon([(x_0, t_0); (x_1, t_0)])} \subset V$.

$$E_\varepsilon := \left\{ (x, t) : \frac{1}{s^2}(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + \dots + (x^n - x_0^n)^2 + (t - t_0)^2 < \varepsilon^2, \right.$$

$$(x - x_0) \cdot (x_1 - x_0) > 0\} \quad (3.49)$$

bezeichne ein Halbellipsoid mit Mittelpunkt (x_0, t_0) .



Nach Wahl von ε gilt $w < M$ auf $\overline{E_1}$. Lasse nun s wachsen, solange $w < M$ auf E_s , maximal jedoch bis ∂E_s an (x_1, t_0) stößt, d.h. $s = |x_1 - x_0|\varepsilon^{-1}$.

Annahme: Es gibt ein $(x_2, t_2) \in \partial E_s$ mit $w(x_2, t_2) = M$. Weil w dann dort ein Maximum annimmt, gilt $\nabla_x w(x_2, t_2) = 0$. Andererseits folgt wegen $x_2 \neq x_0$ aus Satz 3.2 $w_\nu > 0$, was ein Widerspruch ist. Also gilt $w < M$ auf $\overline{E_s} \ni (x_1, t_0)$. \square

Die gleiche Methode läßt sich auch einsetzen, um Lemma 3.4 mit Hilfe von Lemma 3.3 zu beweisen: Falls ein Punkt entlang des Ellipsoid-Randes gefunden werden könnte, an dem w den Wert M annimmt, ließe sich eine Kugel finden, auf deren Rand w den Wert M an einem Punkt annimmt, der nicht ober- oder unterhalb des Mittelpunktes liegt, was im Widerspruch zu Lemma 3.3 stünde.

Satz 3.5: Sei $\Gamma_D \subset \Gamma$ abgeschlossen, $\Gamma_N := \Gamma \setminus \Gamma_D$ genüge einer inneren Kugelbedingung. Zu jedem Punkt aus Γ_N bezeichne ν einen äußeren Einheitsvektor (hinsichtlich einer inneren Kugel), der nicht parallel zur t -Achse sein darf. Die Funktion w genüge in $\tilde{V} = V \cup V_T$ der Differentialungleichung (3.22) sowie den Bedingungen

$$w \leq 0 \quad \text{auf } \Gamma_D, \quad (3.50)$$

$$\partial_\nu w = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N. \quad (3.51)$$

Die Koeffizientenfunktionen a_{ij} , a_j , a und β seien beschränkt, $(a_{ij})_{ij}$ sei gleichmäßig elliptisch, $\beta \geq 0$, an a wird keine Vorzeichenforderung erhoben. Dann gibt es ein nur von den Koeffizientenfunktionen abhängendes $\varepsilon > 0$, so daß gilt: Liegt V in einem Streifen $0 < b + \sigma \cdot x < \varepsilon$ mit $\sigma \in S^{n-1}$, so gilt $w \leq 0$ in \overline{V} .

BEWEIS. Da a_j und a beschränkt sind, gibt es reelle Konstanten $C_0 > 0$ und $C_1 > 0$ mit $a \leq C_0$ und $a_j \sigma_j \geq -C_1$. Sei $\mu > 0$ die Elliptizitätskonstante von a_{ij} , d.h. für alle $(x, t) \in V$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gelte $\sum a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \mu |\xi|^2$. Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, daß

$$\varepsilon < \frac{\mu}{4C_1} \ln \left(1 + \frac{2C_1^2}{\mu C_0} \right). \quad (3.52)$$

Dies ist äquivalent zu

$$C_0 e^{\frac{4C_1 \varepsilon}{\mu}} < C_0 + \frac{2C_1^2}{\mu}. \quad (3.53)$$

Aufgrund der Kleinheitsvoraussetzung an V , nämlich der Bedingung, daß V innerhalb des Streifens $0 < b + \sigma \cdot x < \varepsilon$ liegt, ist die Barrierenfunktion

$$g(x) := e^{\alpha(-b+2\varepsilon)} - e^{\alpha\sigma \cdot x} \quad (3.54)$$

für $\alpha := \frac{2C_1}{\mu} > 0$ positiv in \bar{V} . Man rechnet nach:

$$\begin{aligned} -e^{-\alpha\sigma \cdot x} Lg &\stackrel{(3.22)}{=} (a_{ij}\alpha^2\sigma_i\sigma_j + a_j\alpha\sigma_j) - a(e^{\alpha(-b+2\varepsilon)} - e^{\alpha\sigma \cdot x})e^{-\alpha\sigma \cdot x} \\ &\stackrel{\text{Def. } \mu, C_0, C_1}{\geq} \mu\alpha^2 - C_1\alpha - C_0(e^{\alpha(-b+2\varepsilon)} - e^{\alpha\sigma \cdot x})e^{-\alpha\sigma \cdot x} \\ &\stackrel{\text{Def. } \alpha}{=} \frac{4C_1^2}{\mu} - \frac{2C_1^2}{\mu} - C_0e^{-\alpha(\sigma \cdot x + b) + \frac{4C_1 \varepsilon}{\mu}} + C_0 \\ &\stackrel{\text{Streifenbedingung}}{\geq} \frac{2C_1^2}{\mu} - C_0e^{\frac{4C_1 \varepsilon}{\mu}} + C_0 \\ &\stackrel{(3.53)}{>} 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Setze

$$v := \frac{w}{g}, \quad (3.56)$$

dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq Lw - \beta w_t = L(gv) - \beta(gv)_t \\ &= a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}(gv) + a_j\partial_{x_j}(gv) + agv - \beta gv_t \\ &= a_{ij}(gv_{x_i x_j} + 2g_{x_i}v_{x_j} + g_{x_i x_j}v) + a_j(gv_{x_j} + g_{x_j}v) + agv - \beta gv_t. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Nach Division durch g erhält man

$$0 \leq a_{ij}v_{x_i x_j} + \left(\frac{2a_{ij}g_{x_i}}{g} + a_j \right) v_{x_j} + \frac{Lg}{g}v - \beta v_t. \quad (3.58)$$

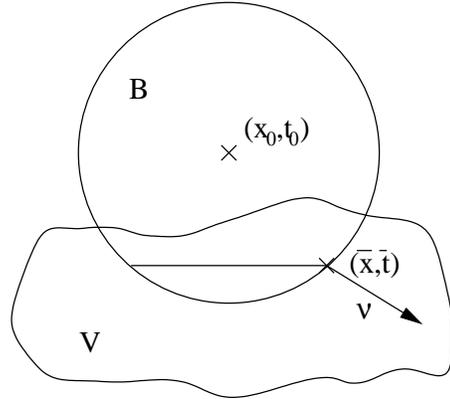
Dies ist eine lineare Differentialungleichung für v . Im Innern, d.h. in V , kann v kein positives Maximum annehmen, denn dann müßte dort $a_{ij}v_{x_i x_j} \leq 0$, $v_{x_j} = 0$ und $v_t = 0$ gelten, was wegen $\frac{Lg}{g} < 0$ im Widerspruch zur Differentialungleichung stehen würde. Ebenfalls kann v auf V_T kein positives Maximum annehmen, denn sonst würde an einem solchen Punkt gelten: $a_{ij}v_{x_i x_j} \leq 0$, $v_{x_j} = 0$, $(Lg/g)v < 0$ und $\beta v_t \geq 0$, was ebenfalls ein Widerspruch zur Differentialungleichung wäre. Auch Punkte des Neumannrandes Γ_N sind für positive Maxima ausgeschlossen, denn Satz 3.2 würde dort $v_\nu > 0$ implizieren. Wegen $v \leq 0$ auf dem Dirichletrand Γ_D folgt $v \leq 0$ in \bar{V} und wegen $g > 0$ auch $w \leq 0$. \square

Satz 3.6: Die Funktion w genüge in $V \cup V_T$ der Differentialungleichung (3.22), die Koeffizientenfunktionen a_{ij} , a_j , a und β seien beschränkt, $(a_{ij})_{ij}$ sei gleichmäßig elliptisch, $\beta \geq 0$, an a wird keine Vorzeichenforderung erhoben. Seien $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $(\bar{x}, \bar{t}) \in \bar{V}$, es gelte $x_0 \neq \bar{x}$. Setze

$$\begin{aligned} R &:= |(x_0, t_0) - (\bar{x}, \bar{t})|, \\ B &:= B_R(x_0, t_0), \\ B_{t_0} &:= B \cap \{t < t_0\}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

B_{t_0} liege in V . In B_{t_0} gelte $w < 0$, außerdem sei $w(\bar{x}, \bar{t}) = 0$. Falls ν ein nach außen gerichteter Vektor an B im Punkt (\bar{x}, \bar{t}) ist, dann gilt

$$w_\nu(\bar{x}, \bar{t}) > 0. \quad (3.60)$$



BEWEIS. OBdA sei $w < 0$ auf $B_{t_0} \setminus \{(\bar{x}, \bar{t})\}$. Weiterhin kann B_{t_0} durch entsprechende Wahl von (x_0, t_0) so weit verkleinert werden, daß es der Kleinheitsvoraussetzung von Satz 3.5 genügt. Die Funktion

$$g(x, t) := e^{-\alpha(|x-x_0|^2 + |t-t_0|^2)} - e^{-\alpha R^2} \quad (3.61)$$

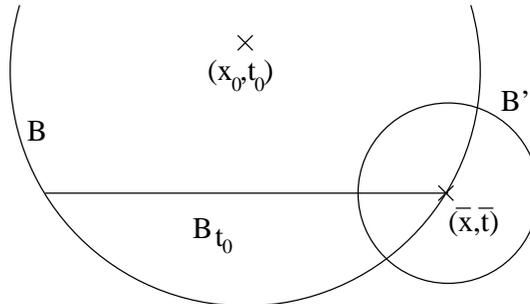
ist positiv in B und nimmt auf ganz ∂B den Wert 0 an. Man rechnet leicht

$$g_\nu(\bar{x}, \bar{t}) < 0 \quad (3.62)$$

nach. Wie im Beweis von Lemma 3.3 kann $\alpha > 0$ so groß gewählt werden, daß

$$Lg > 0 \quad (3.63)$$

in $\bar{B}' \cap \bar{B}$, wobei $B' := B_{|x_0-\bar{x}|/2}(\bar{x}, \bar{t})$ ist.



Auf der kompakten Menge $\partial B' \cap \bar{B}_{t_0}$ gilt $w < -\eta$ für ein geeignetes $\eta > 0$. Daher kann $\varepsilon > 0$ so klein gewählt werden, daß

$$v := w + \varepsilon g \quad (3.64)$$

auf $((\partial B' \cap \overline{B}) \cup (\overline{B'} \cap \partial B)) \cap \{t \leq t_0\}$ nicht größer als 0 wird. Aus Satz 3.5 folgt dann $v \leq 0$ auf $(\overline{B} \cap \overline{B'}) \cap \{t \leq t_0\}$. Demnach muß $v_\nu \geq 0$ sein. Mit (3.62) folgt die Behauptung. \square

Satz 3.7: *Die Funktion w genüge in $V \cup V_T$ der Differentialungleichung (3.22), die Koeffizientenfunktionen a_{ij} , a_j , a und β seien beschränkt, $(a_{ij})_{ij}$ sei gleichmäßig elliptisch, $\beta \geq 0$, an a wird keine Vorzeichenforderung erhoben. Sei $w \leq 0$ in V und $w(x_0, t_0) < 0$ für ein $(x_0, t_0) \in \tilde{V}$. Dann gilt $w < 0$ in V_{t_0} .*

BEWEIS. Annahme: Die Behauptung ist falsch. Dann gibt es einen Punkt $(x_1, t_0) \in \tilde{V}$ mit $w(x_1, t_0) = 0$. Genau wie in Lemma 3.4 können wir annehmen, daß die Verbindungsstrecke $[(x_0, t_0); (x_1, t_0)]$ ganz in V liegt. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $B_\varepsilon([(x_0, t_0); (x_1, t_0)]) \cap \{t < t_0\}$ ganz in V liegt und daß $w < 0$ in $B = B_\varepsilon(x_0, t_0)$ gilt. Sei B' das Ballviertel, das in $\{t < t_0\}$ liegt und das dem Punkt (x_1, t_0) zugewandt ist, d.h.

$$B' := B \cap \{t < t_0\} \cap \{(x - x_0) \cdot (x_1 - x_0) > 0\}. \quad (3.65)$$

Lasse nun B' wie im zweiten Beweis von Lemma 3.4 durch Skalierung in Richtung $x_1 - x_0$ wachsen, bis es einen Punkt (x_2, t_2) auf dem Rand des entstehenden Viertelellipsoids gibt mit $w(x_2, t_2) = 0$. Dies trifft spätestens dann zu, wenn das Viertelellipsoid den Punkt (x_1, t_0) erreicht. Nach Wahl von ε stoßen wir dabei nicht an den Rand von V . Der Punkt (x_2, t_2) muß auf dem gebogenen Teil des Viertelellipsoidrandes liegen, denn in \overline{B} gilt nach Wahl $w < 0$. Im Punkt (x_2, t_2) nimmt w ein Maximum an. Da dieser Punkt im Inneren von V_{t_2} liegt, folgt $\nabla_x w(x_2, t_2) = 0$. Andererseits gilt $\partial_\nu w(x_2, t_2) > 0$ nach Satz 3.6 für einen hinsichtlich des Viertelellipsoids nach außen zeigenden Vektor ν . Dies ist ein Widerspruch, also muß die Annahme falsch sein. \square

Satz 3.8: *Die Funktion w genüge in $V \cup V_T$ der Differentialungleichung (3.22). Die Koeffizienten der Differentialgleichung seien beschränkt, die a_{ij} seien zusätzlich Lipschitzstetig. Sei $w < 0$ in V , $w(\bar{x}, T) = 0$ für ein $(\bar{x}, T) \in \partial V_T$. In einer Umgebung von (\bar{x}, T) bestehe $\partial V \setminus V_T$ aus zwei sich schneidenden Hyperflächen $\{\varrho = 0\}$ und $\{\sigma = 0\}$, wobei $\varrho, \sigma \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ regulär seien. Alle Tangenten an die Schnittmenge $\{\varrho = 0\} \cap \{\sigma = 0\}$ mögen nirgends senkrecht zur t -Achse liegen. Es gelte*

$$a_{ij} \varrho_{x_i} \sigma_{x_j} = 0 \quad \text{auf } \{\varrho = 0\} \cap \{\sigma = 0\}. \quad (3.66)$$

Dann gilt für jeden äußeren Vektor $\nu \in \mathbb{R}^n$ an (\bar{x}, T) (d.h. für jeden Vektor ν mit $\nabla_x \varrho(\bar{x}, T) \cdot \nu > 0, \nabla_x \sigma(\bar{x}, T) \cdot \nu > 0$):

$$\partial_\nu w(\bar{x}, T) > 0 \quad \text{oder} \quad \partial_\nu^2 w(\bar{x}, T) < 0. \quad (3.67)$$

BEWEIS. Der Beweis erfolgt in drei Teilen. Zuerst werden w und V durch Variablentransformationen und Gebietsverkleinerung geeignet zurechtgelegt. Dann wird eine Barrierenfunktion konstruiert, und im dritten Teil schließlich das eigentliche Maximumprinzip angewandt.

Teil 1: Wir nehmen $(\bar{x}, T) = 0$ an. Da die Hyperflächen von der Klasse C^2 sind, die Vektoren $\nabla_x \varrho$ und $\nabla_x \sigma$ auf $\{\varrho = 0\} \cap \{\sigma = 0\}$ in einer Umgebung von 0 linear unabhängig sind und $\{\varrho = 0\}$ und $\{\sigma = 0\}$ nicht senkrecht zur t -Achse liegen, gibt es einen C^2 -Diffeomorphismus der Form

$$(y, t) = (y(x, t), t), \quad (3.68)$$

der V in einer Umgebung transformiert in $\{y_1 < 0\} \cap \{y_n < 0\} \cap \{t < 0\}$. Der Typ der Differentialgleichung bleibt dabei erhalten, ebenso die Bedingung (3.66), die sich jetzt einfacher schreibt als $a_{1n} = 0$ auf $\{y_1 < 0\} \cap \{y_n < 0\}$. Um die Notation zu vereinfachen, bezeichnen wir das neue Gebiet wieder mit V und behalten auch die alten Variablenbezeichnungen x_1, \dots, x_n, t bei.

Aus Satz 3.7 folgt $w < 0$ in V_T . Durch eine weitere Transformation der Form

$$x_1 \rightsquigarrow x_1 + \gamma \sum_{\alpha=2}^n x_\alpha^2, \quad x_n \rightsquigarrow x_n + \gamma \sum_{\alpha=2}^n x_\alpha^2, \quad x_\alpha \rightsquigarrow x_\alpha \quad \text{für } 2 \leq \alpha \leq n-1 \quad (3.69)$$

erreicht man, daß $w < 0$ sogar in $\bar{V} \setminus \{t\text{-Achse}\}$ gilt, wobei das Gebiet V bei $\{x_1 < 0\} \cap \{x_n < 0\} \cap \{t < 0\}$ belassen wird. Bei dieser Transformation bleibt wie oben die Differentialgleichung erhalten, jedoch geht die Eigenschaft (3.66) verloren, da Teile des alten Gebietsrandes nicht mehr auf den neuen Gebietsrand abgebildet werden. Stattdessen gilt immerhin noch

$$\begin{aligned} a_{1n} = a_{n1} = 0 & \quad \text{auf der } t\text{-Achse,} \\ a_{1n} = a_{n1} \geq -C|x|^2 & \quad \text{auf } \{x_1 < 0\} \cap \{x_n < 0\} \end{aligned} \quad (3.70)$$

für eine geeignete Konstante $C > 0$ ¹.

Wir führen nun eine dritte Variablentransformation durch. Setze

$$\begin{aligned} y_1 & := x_1, \\ y_\alpha & := x_\alpha + c_\alpha x_1 + d_\alpha x_n \quad \text{für } 2 \leq \alpha \leq n-1, \\ y_n & := x_n, \end{aligned} \quad (3.71)$$

wobei die Variablen $c_\alpha = c_\alpha(t)$ und $d_\alpha = d_\alpha(t)$ noch bestimmt werden müssen. Für diesen Beweis sei die folgende Summationskonvention vereinbart: Über doppelt

¹Man kann den Satz verallgemeinern, indem man nur $a_{ij} \varrho_{x_i} \sigma_{x_j} = 0$ auf einer C^2 -Kurve K der Form $(\xi(t), t)$, die in $\{x_1 < 0\} \cap \{x_n < 0\}$ liegt, und $a_{ij} \varrho_{x_i} \sigma_{x_j} \geq -C(\text{Abstand zu } K)^2$ auf $\{x_1 < 0\} \cap \{x_n < 0\}$ fordert. Ferner muß gefordert werden, daß $\xi(T) = \bar{x}$ ist. Für weitere Details siehe Lemma 4.3 aus [BN2].

auftretende Indices i, j, k wird von 1 bis n summiert und über Indices β, γ von 2 bis $n - 1$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} &= a_{11}\partial_{x_1}\partial_{x_1} + a_{1\beta}\partial_{x_1}\partial_{x_\beta} + a_{1n}\partial_{x_1}\partial_{x_n} + a_{\beta 1}\partial_{x_\beta}\partial_{x_1} + a_{\beta\gamma}\partial_{x_\beta}\partial_{x_\gamma} \\
&\quad + a_{\beta n}\partial_{x_\beta}\partial_{x_n} + a_{n1}\partial_{x_n}\partial_{x_1} + a_{n\beta}\partial_{x_n}\partial_{x_\beta} + a_{nn}\partial_{x_n}\partial_{x_n} \\
&= a_{11}\partial_{x_1}\partial_{x_1} + a_{nn}\partial_{x_n}\partial_{x_n} + 2a_{1n}\partial_{x_1}\partial_{x_n} + 2a_{1\beta}\partial_{x_1}\partial_{x_\beta} \\
&\quad + 2a_{\beta n}\partial_{x_\beta}\partial_{x_n} + a_{\beta\gamma}\partial_{x_\beta}\partial_{x_\gamma} \\
&= a_{11}\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_k}\right) + a_{nn}\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \\
&\quad + 2a_{1n}\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial y_k}\right) + 2a_{1\beta}\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_\beta}\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \\
&\quad + 2a_{\beta n}\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_\beta}\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial y_k}\right) + a_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_\beta}\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_\gamma}\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \\
&= a_{11}(\partial_{y_1} + c_\gamma\partial_{y_\gamma})(\partial_{y_1} + c_\gamma\partial_{y_\gamma}) + a_{nn}(\partial_{y_n} + d_\gamma\partial_{y_\gamma})(\partial_{y_n} + d_\gamma\partial_{y_\gamma}) \\
&\quad + 2a_{1\beta}(\partial_{y_1} + c_\gamma\partial_{y_\gamma})(\partial_{y_\beta}) + 2a_{\beta n}(\partial_{y_\beta})(\partial_{y_n} + d_\gamma\partial_{y_\gamma}) + a_{\beta\gamma}(\partial_{y_\beta})(\partial_{y_\gamma}) \\
&= a_{11}\partial_{y_1}\partial_{y_1} + a_{nn}\partial_{y_n}\partial_{y_n} \\
&\quad + 2(a_{11}c_\beta + a_{1\beta})\partial_{y_1}\partial_{y_\beta} + 2(a_{nn}d_\beta + a_{\beta n})\partial_{y_\beta}\partial_{y_n} \\
&\quad + (a_{11}c_\beta c_\gamma + a_{nn}d_\beta d_\gamma + 2a_{1\gamma}c_\gamma + 2a_{\gamma n}d_\gamma + a_{\beta\gamma})\partial_{y_\beta}\partial_{y_\gamma} \\
&= b_{ij}\partial_{y_i}\partial_{y_j}. \tag{3.72}
\end{aligned}$$

Wähle

$$c_\beta(t) = -\frac{a_{1\beta}(0, t)}{a_{11}(0, t)} \quad \text{und} \quad d_\beta(t) = -\frac{a_{\beta n}(0, t)}{a_{nn}(0, t)}, \tag{3.73}$$

dann gilt auf der t -Achse

$$b_{1\beta} = b_{\beta 1} = 0 \quad \text{für} \quad 2 \leq \beta \leq n - 1 \tag{3.74}$$

$$b_{\beta n} = b_{n\beta} = 0 \quad \text{für} \quad 2 \leq \beta \leq n - 1. \tag{3.75}$$

Wie oben bezeichnen wir aus Gründen der Übersichtlichkeit die neuen Koordinaten y_1, \dots, y_n im folgenden wieder mit x_1, \dots, x_n . Wir erhalten somit nach allen Transformationen die Eigenschaften

$$V = \{x_1 < 0\} \cap \{x_n < 0\} \cap \{t < 0\}, \tag{3.76}$$

$$w < 0 \quad \text{in} \quad \bar{V} \setminus \{t\text{-Achse}\}, \tag{3.77}$$

$$a_{1n} = a_{n1} = 0 \quad \text{auf der } t\text{-Achse}, \tag{3.78}$$

$$a_{1n} = a_{n1} \geq -C|x|^2 \quad \text{auf} \quad \{x_1 = x_n = 0\}, \tag{3.79}$$

$$a_{1\beta} = a_{\beta 1} = 0 \quad \text{auf der } t\text{-Achse für } 2 \leq \beta \leq n - 1, \tag{3.80}$$

$$a_{\beta n} = a_{n\beta} = 0 \quad \text{auf der } t\text{-Achse für } 2 \leq \beta \leq n - 1. \tag{3.81}$$

Teil 2: Sei $M := L - a$ der Operator L ohne den Term nullter Ordnung, d.h.

$$M = a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + a_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (3.82)$$

Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} \Phi(x) &:= x_1 + k \sum_{\beta=2}^{n-1} x_\beta^2, & \Psi(x) &:= x_n + k \sum_{\beta=2}^{n-1} x_\beta^2, \\ g(x) &:= e^{-\alpha\Phi(x)} - 1, & h(x) &:= e^{-\alpha\Psi(x)} - 1, \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$z := gh,$$

wobei die Konstanten $k > 0$ und $\alpha > 0$ später gewählt werden. Aus z wird später die Barrierenfunktion gebildet. Man rechnet nach, daß z die Eigenschaften

$$z > 0 \quad \text{in } G, \quad (3.84)$$

$$z = 0 \quad \text{auf } \{\Phi = \Psi = 0\}, \quad (3.85)$$

$$\nabla z(0) = 0 \quad \text{und} \quad (3.86)$$

$$z_{ss}(0) > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^n \setminus 0 \quad (3.87)$$

besitzt, wobei

$$G := V \cap \{\Phi < 0\} \cap \{\Psi < 0\} \cap \{t < 0\} \quad (3.88)$$

sei. Es gilt

$$\begin{aligned} Mz &= M(gh) = a_{ij}(gh)_{x_i x_j} + a_j(gh)_{x_j} \\ &= a_{ij}(gh_{x_i x_j} + hg_{x_i x_j} + 2g_{x_i} h_{x_j}) + a_j(gh_{x_j} + hg_{x_j}) \\ &= gMh + hMg + 2a_{ij}g_{x_i} h_{x_j}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Für hinreichend großes $\alpha > 0$ ist

$$\begin{aligned} \frac{e^{\alpha\Phi}}{\alpha^2} Mg &= \frac{e^{\alpha\Phi}}{\alpha^2} (a_{ij}g_{x_i x_j} + a_j g_{x_j}) = \frac{e^{\alpha\Phi}}{\alpha^2} (\alpha^2 a_{ij} \Phi_{x_i} \Phi_{x_j} - \alpha a_{ij} \Phi_{x_i x_j} - \alpha a_j \Phi_{x_j}) e^{-\alpha\Phi} \\ &= a_{ij} \Phi_{x_i} \Phi_{x_j} - \frac{1}{\alpha} (a_{ij} \Phi_{x_i x_j} - a_j \Phi_{x_j}) \\ &\geq \mu |\nabla_x \Phi|^2 - \frac{1}{\alpha} (a_{ij} \Phi_{x_i x_j} - a_j \Phi_{x_j}) \\ &\geq \mu - \frac{1}{\alpha} (a_{ij} \Phi_{x_i x_j} - a_j \Phi_{x_j}) \\ &\geq \frac{\mu}{2} > 0, \end{aligned} \quad (3.90)$$

analog gilt eine Abschätzung $\frac{e^{\alpha\Psi}}{\alpha^2}Mh \geq \frac{\mu}{2} > 0$. Schränkt man das Gebiet durch die Bedingung $k \sum_{\beta} |x_{\beta}| \leq 1$ ein, so gilt auf $\{\Phi = 0\} \cap \{\Psi = 0\}$ unter der Voraussetzung $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{1n} &\geq -C|x|^2 = -C\left(x_1^2 + x_n^2 + \sum x_{\beta}^2\right) = -C\left(2k^2\left(\sum x_{\beta}^2\right)^2 + \sum x_{\beta}^2\right) \\ &= -C\sum x_{\beta}^2\left(2k^2\sum x_{\beta}^2 + 1\right) \geq -C\sum x_{\beta}^2\left(2k^2\left(\sum |x_{\beta}|\right)^2 + k\right) \\ &\geq -Ck\sum x_{\beta}^2\left(\frac{2}{k} + 1\right) \geq -Ck\sum x_{\beta}^2, \end{aligned} \quad (3.91)$$

wobei C eine universelle Konstante ist. Aufgrund der Lipschitzstetigkeit der a_{ij} gilt $a_{1\beta} \geq -C|x|$, so daß wiederum unter der Voraussetzung $k \sum |x_{\beta}| \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} a_{1\beta} &\geq -C|x| \geq -C\left(2k\sum x_{\beta}^2 + \sum |x_{\beta}|\right) \geq -C\left(2k\left(\sum |x_{\beta}|\right)^2 + \sum |x_{\beta}|\right) \\ &\geq -C\sum |x_{\beta}|\left(2k\sum |x_{\beta}| + 1\right) \geq -C\sum |x_{\beta}|, \end{aligned} \quad (3.92)$$

ebenso folgt $a_{\alpha n} \geq -C\sum |x_{\beta}|$. Damit gilt auf $\{\Phi = 0\} \cap \{\Psi = 0\}$ für hinreichend großes $k \geq 1$

$$\begin{aligned} I &:= \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha\Phi}e^{\alpha\Psi}a_{ij}g_{x_i}h_{x_j} = a_{ij}\Phi_{x_i}\Psi_{x_j} \\ &= a_{1n} + 2ka_{1\beta}x_{\beta} + 4k^2a_{\beta\gamma}x_{\beta}x_{\gamma} + 2ka_{n\beta}x_{\beta} \\ &\geq 4k^2\mu\sum x_{\beta}^2 - Ck\sum x_{\alpha}^2 - 4Ck\left(\sum |x_{\beta}|\right)^2 \\ &\geq \sum x_{\alpha}^2(4k^2\mu - Ck) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Beschränkt man sich auf

$$G_{\delta} := G \cap \{|x| < \delta^{-1}\}, \quad (3.94)$$

für ein großes δ , so gilt in $\overline{G_{\delta}}$:

$$I \geq C(\Phi + \Psi). \quad (3.95)$$

Wegen $\Phi, \Psi \leq 0$ in \overline{G} gilt dort $g, h \geq 0$ und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha\Phi}e^{\alpha\Psi}Mz &\stackrel{(3.89)}{=} \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha\Phi}e^{\alpha\Psi}(gMh + hMg + 2a_{ij}g_{x_i}h_{x_j}) \\ &= \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha\Phi}e^{\alpha\Psi}(gMh + hMg) + 2I \\ &\stackrel{(3.90)+(3.95)}{\geq} \frac{\mu}{2}(ge^{\alpha\Phi} + he^{\alpha\Psi}) + 2C(\Phi + \Psi) \\ &= \frac{\mu}{2}(1 - e^{\alpha\Phi} + 1 - e^{\alpha\Psi}) + 2C(\Phi + \Psi). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung $[f(y) - f(x) \leq (y - x) \sup |f'|]$ liefert uns für $\Phi, \Psi < 0$ die Ungleichungen

$$1 - e^{\alpha\Phi} \geq -\alpha e^{\alpha\Phi}\Phi \quad \text{und} \quad 1 - e^{\alpha\Psi} \geq -\alpha e^{\alpha\Psi}\Psi. \quad (3.97)$$

Für $-\frac{1}{\alpha} < \Phi, \Psi \leq 0$ gilt daher

$$1 - e^{\alpha\Phi} \geq \frac{-\alpha}{e}\Phi \quad \text{und} \quad 1 - e^{\alpha\Psi} \geq \frac{-\alpha}{e}\Psi. \quad (3.98)$$

Daher folgt in

$$G_{\alpha,\delta} := \left\{ -\frac{1}{\alpha} < \Phi, \Psi \leq 0 \right\} \cap G_\delta \quad (3.99)$$

für hinreichend großes α aus (3.96) die Abschätzung

$$\frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha\Phi} e^{\alpha\Psi} Mz \geq \left(\frac{\mu\alpha}{2e} - 2C \right) (|\Phi| + |\Psi|) \geq 0, \quad (3.100)$$

also $Mz \geq 0$. Mit Hilfe von z kann man nun die eigentliche Barrierenfunktion \tilde{z} definieren:

$$\tilde{z}(x, t) := z(x) + t\sqrt{z(x)}. \quad (3.101)$$

Sei

$$G' := G \cap \{ \tilde{z} > 0 \} \cap \{ t > -1 \}. \quad (3.102)$$

Dann gilt in G' wegen $t < 0$ und $-t < \sqrt{z}$:

$$\begin{aligned} (L - \beta\partial_t)\tilde{z} &= Mz + \frac{t}{2\sqrt{z}}Mz + az - \frac{t}{4z\sqrt{z}} \underbrace{a_{ij}z_{x_i}z_{x_j}}_{\geq 0} + at\sqrt{z} - \beta\sqrt{z} \\ &\geq \frac{1}{2}Mz + az - a\sqrt{z} \\ &\stackrel{(3.96)}{\geq} \frac{C}{2}\alpha^3(|\Phi| + |\Psi|) - a(z + \sqrt{z}). \end{aligned} \quad (3.103)$$

Wegen $e^s - 1 \leq es$ für $0 \leq s \leq 1$ ist

$$z = (e^{-\alpha\Phi} - 1)(e^{-\alpha\Psi} - 1) \leq e^2\alpha^2\Phi\Psi. \quad (3.104)$$

Somit gilt G' wegen $|\Phi|, |\Psi| < \frac{1}{\alpha}$ für ein hinreichend großes $\alpha > 1$

$$\begin{aligned} (L - \beta\partial_t)\tilde{z} &\stackrel{(3.103)+(3.104)}{\geq} C\alpha^3(|\Phi| + |\Psi|) - C\alpha^2\Phi\Psi - C\alpha\sqrt{\Phi\Psi} \\ &\geq C\alpha^3(|\Phi| + |\Psi|) - C\alpha^2(\Phi^2 + \Psi^2) - C\alpha\sqrt{\Phi^2 + \Psi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq C\alpha^3(|\Phi| + |\Psi|) - C\alpha^2(|\Phi| + |\Psi|)^2 - C\alpha(|\Phi| + |\Psi|) \\
&\geq C\alpha^3(|\Phi| + |\Psi|) - C\alpha(|\Phi| + |\Psi|) - C\alpha(|\Phi| + |\Psi|) \\
&> 0.
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Teil 3: Diese Barrierenfunktion \tilde{z} kann nun für das eigentliche Maximumprinzip genutzt werden. Sie hat folgende Eigenschaften:

- 1) $\tilde{z} = 0$ auf $\{\Phi = 0\} \cup \{\Psi = 0\}$,
- 2) $\partial_\nu \tilde{z}(0) = 0$,
- 3) $\partial_\nu^2 \tilde{z}(0) > 0$,
- 4) $(L - \beta \partial_t) \tilde{z} \geq 0$.

Die Transformationen aus Teil 1 führten zu $w < 0$ in $\overline{V} \setminus \{t\text{-Achse}\}$. G' ist wegen der Bedingung $\tilde{z} > 0$ so geformt, daß w auf $\overline{G'}$ nur im Ursprung den Wert 0 annimmt. Ein Ball B um den Ursprung kann so klein gewählt werden, daß $\tilde{z} = 0$ auf $\overline{B} \cap \partial G' \cap \{t < 0\}$ gilt. Auf der kompakten Menge $\partial G_\alpha \setminus B$ gilt $w < 0$, somit kann ε so klein gewählt werden, daß

$$v := w + \varepsilon \tilde{z} \tag{3.106}$$

dort nicht positiv wird. Auf dem verbleibenden Stück des Randes $\partial G' \cap \overline{B} \cap \{t < 0\}$ gilt $\tilde{z} = 0$ nach Wahl von B . Somit gilt $v \leq 0$ auf $\partial G_\alpha \cap \{t < 0\}$. Wende Satz 3.5 an (das Gebiet konnte durch hinreichend kleine Wahl von B vorher beliebig klein gemacht werden), und man erhält $v \leq 0$ in $\overline{G'}$.

Wegen $v(0) = 0$ nimmt v sein Maximum in 0 an, also gilt für einen äußeren Vektor ν dort notwendigerweise $\partial_\nu v(0) \geq 0$. Falls sogar $\partial_\nu v(0) > 0$ gilt, folgt wegen 2)

$$\partial_\nu w(0) > 0. \tag{3.107}$$

Anderenfalls gilt $\partial_\nu v(0) = 0$ und damit notwendigerweise $\partial_\nu^2 v(0) \leq 0$, da sonst kein Maximum vorliegen könnte. Mit 3) folgt

$$\partial_\nu^2 w(0) = \underbrace{\partial_\nu^2 v(0)}_{\leq 0} - \varepsilon \underbrace{\partial_\nu^2 \tilde{z}}_{> 0} < 0. \tag{3.108}$$

□

Kapitel 4

Eigenwertproblem

4.1 Situation und Aussage

In Kapitel 2 tritt das Problem auf, eine Lösung eines verallgemeinerten Eigenwertproblems zu finden, um daraus eine Vergleichsfunktion zu konstruieren. Eine solche Lösung wird später in Kapitel 6 über die Eindeutigkeit ebenfalls benötigt. Gegeben sei ein beschränktes Gebiet ω mit C^2 -Rand. Dann gilt

Satz 4.1: *Gegeben sei das verallgemeinerte Eigenwertproblem*

$$\begin{aligned} (-\Delta + a(y) + \lambda\beta(y))\Psi &= \lambda^2\Psi && \text{in } \omega, \\ \Psi_\nu &= 0 && \text{auf } \partial\omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit stetigen Funktionen $a, \beta : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Lösung λ bezeichnen wir als „verallgemeinerten Haupteigenwert“. Dann gilt:

- a) Falls $a \equiv 0$ und $\int_{\omega} \beta \, dy > 0$ ist, so gibt es genau einen positiven verallgemeinerten Haupteigenwert λ und keinen verallgemeinerten nichtpositiven Haupteigenwert.
- b) Falls $a \equiv 0$ und $\int_{\omega} \beta \, dy < 0$ ist, so gibt es genau einen negativen verallgemeinerten Haupteigenwert τ und keinen verallgemeinerten nichtnegativen Haupteigenwert¹.
- c) Falls $a \equiv 0$ und $\int_{\omega} \beta \, dy = 0$ ist, so gibt es genau den Haupteigenwert 0.
- d) Falls $a > 0$ ist, so gibt es genau einen positiven verallgemeinerten Haupteigenwert λ und genau einen verallgemeinerten negativen Haupteigenwert τ .

In allen Fällen a) - d) ist die zugehörige Eigenfunktion von der Klasse $C^2(\bar{\omega})$, strikt positiv oder strikt negativ und bis auf Skalierung eindeutig bestimmt.

¹Negative Haupteigenwerte werden hier mit τ bezeichnet, obwohl die Gleichung (4.1) mit λ formuliert ist.

e) Sei $\beta' > \beta$ gegeben, seien λ' und τ' die zu β' gehörenden positiven bzw. negativen Haupteigenwerte, soweit existent. Dann gilt in den Fällen a) und d)

$$\lambda' > \lambda \quad (4.2)$$

und in den Fällen b) und d)

$$\tau' > \tau. \quad (4.3)$$

Die klassische Spektraltheorie ist hier nicht direkt anwendbar, da der „Eigenwert“ λ im Problem zweifach, davon einmal sogar quadriert, auftritt. Es gibt Arbeiten, die Probleme behandeln, in denen λ sogar als Argument einer holomorphen Funktion $f(\lambda)$ auftritt. Da wir das Erforderliche direkt und in Kürze selbst beweisen können, greifen wir nicht darauf zurück. Der Beweis beruht auf einer Reduktion zu einem klassischen Eigenwertproblem. Viele bekannte Resultate für das klassische Eigenwertproblem lassen sich mühelos auch auf das verallgemeinerte Eigenwertproblem übertragen.

Manche der in den Beweisen verwendeten Argumente sind [BN1] entnommen, ansonsten wurde dieses Kapitel neu erarbeitet.

4.2 Reduktion auf ein klassisches Eigenwertproblem

Zu $q \in C^0(\bar{\omega})$ sei $\lambda_1(q)$ der kleinste Eigenwert des *klassischen Eigenwertproblems*

$$\begin{aligned} (-\Delta + a(y) + q(y))\Psi &= \lambda_1(q)\Psi && \text{in } \omega, \\ \Psi_\nu &= 0 && \text{auf } \partial\omega. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Existenz eines solchen Eigenwerts und der zugehörigen Eigenfunktionen wird im Abschnitt 4.3 behandelt. Setze

$$V := \{\varphi \in H^{1,2}(\omega) : \|\varphi\|_{L^2(\omega)} = 1\}, \quad (4.5)$$

dann ist $\lambda_1(q)$ charakterisiert durch

$$\lambda_1(q) = \min_{\varphi \in V} \int_{\omega} |D\varphi|^2 + (a(y) + q(y))\varphi^2 dy. \quad (4.6)$$

$\lambda_1(q)$ hängt bzgl. der L_∞ -Norm stetig von q ab. Daher ist

$$\varrho_1(\lambda) := \lambda_1(\lambda\beta) \quad (4.7)$$

stetig in λ . Schreibt man das klassische und das verallgemeinerte Eigenwertproblem untereinander,

$$\begin{aligned} (-\Delta + a(y))\Psi &= (\varrho_1(\lambda) - \lambda\beta(y))\Psi \\ (-\Delta + a(y))\Psi &= (\lambda^2 - \lambda\beta(y))\Psi, \end{aligned} \quad (4.8)$$

so erkennt man, daß beide Probleme äquivalent sind, falls gilt:

$$\lambda^2 = \varrho_1(\lambda). \quad (4.9)$$

Genau ist damit gemeint: Falls λ eine Lösung des verallgemeinerten Eigenwertproblems ist, so ist $\varrho_1(\lambda) := \lambda^2$ eine Lösung des klassischen Eigenwertproblems. Falls $\varrho_1(\lambda)$ eine Lösung des klassischen Eigenwertproblems zu einem beliebigen $\lambda \in \mathbb{R}$ ist und zusätzlich $\varrho_1(\lambda) = \lambda^2$ gilt, so ist λ eine Lösung des verallgemeinerten Eigenwertproblems.

Bemerkenswert ist, daß die zugehörigen Eigenfunktionen bei beiden Problemen die gleichen sind, insofern übertragen sich sofort die bekannten Eigenschaften über Einfachheit und strikte Positivität/Negativität des Haupteigenwerts.

Im weiteren werden wir also nur noch die Gleichung (4.9) untersuchen.

Lemma 4.2: *Es gelte $a \geq 0$. Dann ist die Funktion*

$$R(\lambda) := \frac{\varrho_1(\lambda)}{\lambda} \quad (4.10)$$

für $\lambda \neq 0$ monoton fallend.

BEWEIS. Für $\lambda' \geq \lambda$, $\lambda\lambda' > 0$ und $\varphi \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda'} \int_{\omega} [|D\varphi|^2 + a(y)\varphi^2 + \lambda'\beta(y)v^2] dy - \frac{1}{\lambda} \int_{\omega} [|D\varphi|^2 + a(y)\varphi^2 + \lambda\beta(y)v^2] dy \\ = \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right) \int_{\omega} |D\varphi|^2 + a(y)\varphi^2 dy \leq 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die Monotonie überträgt sich auf $R(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\varrho_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \min_{\varphi \in V} \int_{\omega} |D\varphi|^2 + a(y)\varphi^2 + \lambda\beta(y)v^2 dy$. \square

Lemma 4.3: *Falls $a \equiv 0$ ist, so gilt $\lim_{\lambda \rightarrow 0} R(\lambda) = \int \beta dy$.*

BEWEIS. Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ sei Ψ_λ die positive Eigenfunktion mit $\max \Psi_\lambda = 1$ des klassischen Eigenwertproblems

$$(-\Delta + \lambda\beta(y))\Psi_\lambda = \varrho_1(\lambda)\Psi_\lambda. \quad (4.12)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\varrho_1(\lambda) \int_{\omega} \Psi_{\lambda} dy &= \int_{\omega} (-\Delta \Psi_{\lambda}) dy + \lambda \int_{\omega} \beta \Psi_{\lambda} dy \\
&= \int_{\partial \omega} \nabla \Psi_{\lambda} \cdot \nu dy + \lambda \int_{\omega} \beta \Psi_{\lambda} dy = \lambda \int_{\omega} \beta \Psi_{\lambda} dy \quad (4.13)
\end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\varrho_1(\lambda)}{\lambda} \int_{\omega} \Psi_{\lambda} dy = \int_{\omega} \beta \Psi_{\lambda} dy. \quad (4.14)$$

$\Psi_0 \equiv 1$ ist Eigenfunktion von $-\Delta$. Weil $\Psi_{\lambda} \rightarrow \Psi_0 \equiv 1$ in $L_2(\omega)$ konvergiert für $\lambda \rightarrow 0$, folgt

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\varrho_1(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \beta(y) dy = \int_{\omega} \beta(y) dy. \quad (4.15)$$

□

Lemma 4.4: Falls $a > 0$ ist, so gilt $\varrho_1(0) > 0$.

BEWEIS. $\varrho_1(0)$ ist nach Definition der kleinste Eigenwert von

$$(-\Delta + a(y))\Psi = \lambda\Psi. \quad (4.16)$$

Multipliziere diese Gleichung mit Ψ und integriere über ω auf:

$$\int_{\omega} -(\Delta \Psi)\Psi + a(y)\Psi^2 dy = \lambda \int_{\omega} \Psi^2 dy. \quad (4.17)$$

Integriere den Term $\int_{\omega} (-\Delta \Psi)\Psi dy$ partiell. Nach Division durch $\int_{\omega} \Psi^2 dy > 0$ folgt wegen $\int_{\omega} a\Psi^2 dy > 0$:

$$\lambda = \frac{\int_{\omega} |\nabla \Psi|^2 + a(y)\Psi^2 dy}{\int_{\omega} \Psi^2 dy} \geq \frac{\int_{\omega} a(y)\Psi^2 dy}{\int_{\omega} \Psi^2 dy} > 0. \quad (4.18)$$

□

Nun kann Satz 4.1 bewiesen werden.

BEWEIS. a) Gemäß Lemma 4.3 ist die Funktion $R(\lambda)$ auf \mathbb{R} stetig und in $\lambda = 0$ positiv. Da nach Lemma 4.2 $R(\lambda)$ monoton fallend ist, nimmt diese Funktion auf \mathbb{R}_0^- nur positive Werte an, so daß es dort keinen Schnittpunkt mit der Geraden $f(\lambda) = \lambda$ geben kann. Auf der positiven Achse gibt es nach dem Zwischenwertsatz einen Schnittpunkt (vgl. dazu auch die Abbildung). Offenbar ist dieser eindeutig.

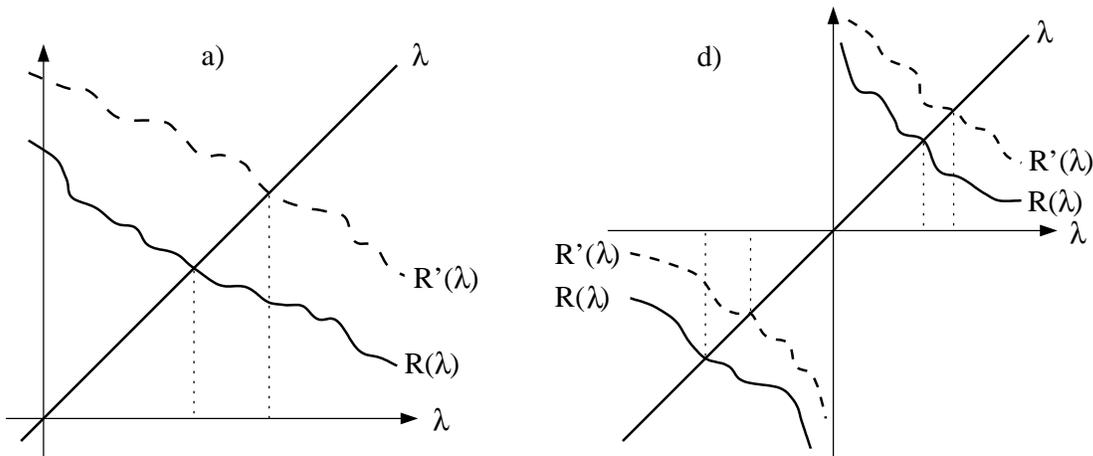
b) Dieser Fall wird genauso wie a) bewiesen.

- c) Gemäß Lemma 4.3 gilt $R(0) = 0$. Aus Lemma 4.2 folgt, daß $R \geq 0$ auf $(-\infty, 0]$ und $R \leq 0$ auf $[0, \infty)$ ist. Somit gibt es genau die Lösung $\lambda = 0$.
 d) Lemma 4.4 zeigt $\varrho_1(0) > 0$. Somit gilt

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\varrho_1(\lambda)}{\lambda} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda \nearrow 0} \frac{\varrho_1(\lambda)}{\lambda} = -\infty. \quad (4.19)$$

Da die Funktion für $\lambda \neq 0$ stetig und gemäß Lemma 4.2 monoton fallend ist, gibt es offenbar genau einen positiven und genau einen negativen Schnittpunkt.

- e) Vom klassischen Eigenwertproblem wissen wir, daß $\lambda_1(q) < \lambda_1(q')$ gilt falls $q < q'$ ist. Für $\lambda > 0$ gilt also $R(\lambda) = \frac{\lambda_1(\lambda\beta)}{\lambda} < \frac{\lambda_1(\lambda\beta')}{\lambda} =: R'(\lambda)$. Daraus folgt in den Fällen a) und d) unmittelbar $\lambda < \lambda'$. Analog gilt für $\lambda < 0$ die Relation $\lambda_1(\lambda\beta) > \lambda_1(\lambda\beta')$ und somit $R(\lambda) < R'(\lambda)$. Daraus folgt in den Fällen b) und d) sofort $\tau < \tau'$.



□

4.3 Klassisches Eigenwertproblem

Satz 4.5: Sei $q \in C^0(\bar{\omega})$. Zum Eigenwertproblem

$$(-\Delta + q(x))\Psi = \lambda\Psi \quad \text{in } \omega \quad (4.20)$$

$$\Psi_\nu = 0 \quad \text{auf } \partial\omega \quad (4.21)$$

gibt es einen kleinsten Eigenwert λ_q und dazu genau eine Eigenfunktion $\Psi_q \in C^2(\bar{\omega})$ mit $\max \Psi = 1$. Es gilt:

- a) Ψ_q ist strikt positiv auf $\bar{\omega}$,
 b) $\lambda_q \geq 0$ falls $\int_{\omega} q \, dy \geq 0$,

- c) $\lambda_q > 0$ falls $\int_{\omega} q \, dy > 0$,
- d) $\Psi_{tq} \rightarrow \Psi_0$ in $L^2(\omega)$ für $t \rightarrow 0$,
- e) $\lambda_q < \lambda_{q'}$ falls $q < q'$.

Zum Beweis wird die folgende Existenzaussage² aus der Funktionalanalysis verwendet:

Lemma 4.6: Sei H ein Hilbertraum mit $\dim H = \infty$. Darauf seien K eine vollstetige, symmetrische, positiv definite Bilinearform³ und B eine beschränkte, symmetrische, bzgl. $|\cdot|^2$ und K koerzive Bilinearform, d.h.

$$\exists C_1 > 0 \quad \exists C_2 > 0 \quad \forall \varphi \in H : \quad B(\varphi) \geq C_1|\varphi|^2 - C_2K(\varphi). \quad (4.22)$$

Dann gibt es ein kleinstes $\lambda \in \mathbb{R}$ und eine dazugehörige Lösung $u \in H$ mit

$$B(\psi, \varphi) = \lambda K(\psi, \varphi) \quad \forall \varphi \in H. \quad (4.23)$$

Nun zum Beweis von Satz 4.5:

BEWEIS. Setze $H := H^{1,2}(\omega)$ und

$$K(\psi, \varphi) := \int_{\omega} \psi \varphi \, dy \quad (4.24)$$

$$B(\psi, \varphi) := \int_{\omega} \nabla \psi \nabla \varphi + q \psi \varphi \, dy. \quad (4.25)$$

Trivialerweise ist K symmetrisch und positiv definit sowie B beschränkt und symmetrisch. Die Vollstetigkeit von K wird durch den Satz von Rellich⁴ garantiert. Die Koerzivität von B sieht man folgendermaßen:

$$B(\varphi) = \int |\nabla \varphi|^2 + q \varphi^2 \, dy \geq \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2 - \|q \varphi^2\|_{L^1} \quad (4.26)$$

$$\geq \|\varphi\|_{H^{1,2}}^2 - \|\varphi\|_{L^2}^2 - \|q\|_{L^\infty} \|\varphi^2\|_{L^1} \quad (4.27)$$

$$\geq \|\varphi\|_{H^{1,2}}^2 - (1 + \|q\|_{L^\infty}) \|\varphi\|_{L^2}^2. \quad (4.28)$$

Somit sind die Voraussetzungen von Lemma 4.6 erfüllt, und es existieren ein kleinstes λ und ein $\Psi_q \in H^{1,2}(\omega)$, die das Eigenwertproblem lösen. Gemäß dem Regularitätssatz⁵ folgt $\Psi_q \in C^2(\bar{\omega})$. Wegen $B(\Psi_q, \varphi) = \lambda K(\Psi_q, \varphi)$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$ folgt mittels partieller Integration

²Siehe [Hil1], Kapitel II, §3, Satz 1 (Seite 64).

³Die Existenz eines solchen K impliziert, daß H separabel ist.

⁴Siehe [Hil1], Kapitel III, §4 (Seite 114).

⁵Siehe [Hil2], Theorem der Vorlesung vom 16.5.1997.

$$-\Delta\Psi + q\Psi_q = \lambda\Psi_q \quad \text{in } \omega. \quad (4.29)$$

Testet man mit $\varphi \in C^\infty(\bar{\omega})$, so ergibt sich bei der partiellen Integration der zusätzliche Randterm $\int_{\partial\omega} (\Psi_q)_\nu \varphi \, ds(y)$. Wegen (4.29) fallen die anderen Terme weg, so daß dieses Randintegral null ist, also $(\Psi_q)_\nu = 0$ auf $\partial\omega$ gilt. Wegen $\Psi_q \not\equiv 0$ kann man durch Skalierung noch $\max \Psi_q = 1$ erreichen.

Zu a): Mit Ψ_q ist auch $|\Psi_q|$ Eigenfunktion zum Eigenwert λ , denn es gilt $|\Psi_q| \in H^{1,2}(\omega)$ und

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \nabla|\Psi_q| \nabla\varphi \, dy + \int_{\omega} g\Psi_q\varphi \, dy \\ &= \int_{\omega^+} \nabla\Psi_q \nabla\varphi \, dy + \int_{\omega^+} g\Psi_q\varphi \, dy - \int_{\omega^-} \nabla\Psi_q \nabla\varphi \, dy - \int_{\omega^-} g\Psi_q\varphi \, dy \\ &= \lambda \int_{\omega^+} \Psi_q\varphi \, dy - \lambda \int_{\omega^-} \Psi_q\varphi \, dy = \lambda \int_{\omega} |\Psi_q|\varphi \, dy, \end{aligned} \quad (4.30)$$

wobei $\omega^+ := \{x \in \omega : u(x) \geq 0\}$ und $\omega^- := \omega \setminus \omega^+$. Aus dem Regularitätssatz folgt wie oben $|\Psi_q| \in C^2(\bar{\omega})$. Somit sind $\Psi_q^+ := \frac{|\Psi_q| + \Psi_q}{2}$ und $\Psi_q^- := \frac{|\Psi_q| - \Psi_q}{2}$ Eigenfunktionen von der Klasse C^2 zum Eigenwert λ . Setze

$$\tilde{q} := q - \min(0, \min_{x \in \bar{\omega}} q(x)) \geq 0 \quad (4.31)$$

$$\tilde{\lambda} := \lambda_q - \min(0, \min_{x \in \bar{\omega}} q(x)) \geq \lambda_q. \quad (4.32)$$

Damit gilt $(-\Delta + \tilde{q})\Psi_q^\pm = \tilde{\lambda}\Psi_q^\pm$. Somit ist das Hopfsche Maximumprinzip⁶ anwendbar, so daß gilt: Falls Ψ_q^\pm in ω oder auf $\partial\omega$ ein nichtpositives Minimum annimmt, dann ist Ψ_q^\pm konstant. Wegen $\max \Psi_q = 1$, $\Psi_q^\pm \geq 0$ und $\Psi_q = \Psi_q^+ - \Psi_q^- \not\equiv 0$ folgt, daß Ψ_q^+ strikt positiv und Ψ_q^- konstant null ist, also ist $\Psi_q = \Psi_q^+$ strikt positiv.

Zu b) und c): Teste mit $\varphi := \Psi_q$ in (4.23). Mit Hilfe von a) folgt

$$\lambda_q = \frac{B(\Psi_q, \Psi_q)}{K(\Psi_q, \Psi_q)} = \frac{\int |\nabla\Psi_q|^2 + q\Psi_q^2 \, dy}{\int \Psi_q^2 \, dy} \geq \frac{C^2 \int q \, dy}{\int \Psi_q^2 \, dy} > 0. \quad (4.33)$$

Zu d): Teste die schwache Formulierung des Eigenwertproblems zu Ψ_{tq} mit Ψ_{tq} und integriere partiell:

$$\int |\nabla\Psi_{tq}|^2 \, dy = \int (\lambda_{tq} - q)\Psi_{tq}^2 \, dy. \quad (4.34)$$

Mit der Bezeichnung $|\cdot|_1 := \|\nabla \cdot\|_{L^2(\omega)}$ folgt

⁶Siehe [PW], Kapitel 2, Theorem 6 (Seite 64), sowie Theorem 8 (Seite 67).

$$|\Psi_{tq} - \Psi_0|_1 = |\Psi_{tq}|_1 \leq \|\lambda_{tq} - tq\|_{L^\infty} \|\Psi_{tq}^2\|_{L^1}. \quad (4.35)$$

Wegen $\max |\Psi_{tq}| \leq 1$ ist $\|\Psi_{tq}^2\|_{L^1} \leq |\omega|$. Weil λ_{tq} wie bereits vorher festgestellt stetig in t ist (Bemerkung nach Gleichung (4.6)) und wegen $\lambda_0 = 0$ ist $\|\lambda_{tq} - tq\|_{L^\infty}$ stetig in t und nimmt für $t = 0$ den Wert 0 an. Weil Ψ_{tq} an einer Stelle $x_0 \in \bar{\omega}$ den Wert 1 annimmt und weil $\Psi_0 \equiv 1$ ist, gilt eine Poincaré-Ungleichung⁷ für $\Psi_{tq} - \Psi_0$, so daß gilt:

$$\|\Psi_{tq} - \Psi_0\|_{L^2} \leq C |\Psi_{tq} - \Psi_0|_1 \stackrel{(4.35)}{\leq} C \|\lambda_{tq} - tq\|_{L^\infty} \|\Psi_{tq}^2\|_{L^1} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0. \quad (4.36)$$

Zu e): Setze

$$\lambda_q^\varphi := \int_\omega |\nabla \varphi|^2 + q(y) \varphi^2 dy. \quad (4.37)$$

Dann sind λ_q und $\lambda_{q'}$ charakterisiert durch

$$\lambda_q = \min_{\varphi \in V} \lambda_q^\varphi \quad \text{und} \quad \lambda_{q'} = \min_{\varphi \in V} \lambda_{q'}^\varphi. \quad (4.38)$$

Es existieren Minimierer $\psi, \psi' \in V$, also

$$\lambda_{q'} - \lambda_q = \lambda_{q'}^{\psi'} - \lambda_q^\psi \geq \lambda_{q'}^{\psi'} - \lambda_q^{\psi'} = \int_\omega (q' - q) \psi'^2 dy > 0. \quad (4.39)$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

⁷Siehe [Alt], Satz 6.15 (Seite 223).

Kapitel 5

Elliptische Abschätzungen

An vielen Stellen dieser Diplomarbeit werden Aussagen über die Regularität von Lösungen partieller Differentialgleichungen benötigt, so z.B. als a priori-Abschätzung für die Kontinuitätsmethode. Es gibt verschiedene Ansätze, die verschiedene Voraussetzungen an die Glattheit der Koeffizienten und des Gebietsrandes machen, und dementsprechend auch unterschiedliche Ergebnisse erzielen. In der vorliegenden Arbeit besteht die Hauptrestriktion in der Nichtglattheit des Gebietsrandes, denn die hier auftretenden Gebiete der Form $(-b, b) \times \omega$ sind selbst für beliebig glattberandetes ω lediglich von der Klasse $C^{0,1}$. Die dieser Diplomarbeit zugrundeliegenden Artikel behandeln dieses Problem nicht. Nach längerem Suchen stellte sich schließlich heraus, daß die sogenannten L^p -Abschätzungen in Kombination mit einer Spiegelungstechnik geeignet sind. Mehr zu dieser Spiegelungstechnik und der Anwendung auf das konkrete Problem findet sich in Abschnitt 5.5.

In Abschnitt 5.1 werden zunächst zwei Hilfsmittel diskutiert, nämlich zum einen eine Abschätzung, die es erlaubt, unerwünschte Normen zu verstecken, und zum anderen die Beschreibung von Randwerten von Sobolewfunktionen mittels „fractional order spaces“, bevor in den Abschnitten 5.2 - 5.4 die klassischen L^p -Abschätzungen hergeleitet werden, beginnend bei einfachen Gebietsformen für Gleichungen mit konstanten Koeffizienten nur der höchsten Ordnung, bis hin zu Satz 5.6, den man als Hauptresultat für glatte Gebiete bezeichnen kann. Der letzte Abschnitt 5.5 verallgemeinert dies für die in dieser Arbeit auftretenden Differentialgleichungen dann mit Hilfe einer Spiegelungstechnik auf nichtglatte Gebiete.

Bei den in diesem Kapitel durchgeführten Abschätzungen tritt eine Vielzahl von Konstanten auf, deren exakte Größe nicht wesentlich ist, lediglich deren Abhängigkeit von anderen gegebenen Größen wie Normen der Differentialgleichungskoeffizienten etc. Da eine exakte Angabe der Konstanten weder dem Verständnis noch der Übersichtlichkeit dienen würde, werden solche Konstanten pauschal mit C bezeichnet. Dies gilt sogar dann, wenn wie z.B. in Gleichung (5.41) die Konstante C mehrfach in derselben Gleichung mit unterschiedlicher Bedeutung auftritt. Der Leser wird unmittelbar einsehen, daß die Konstanten nur von den in der Behauptung genannten Größen abhängen.

5.1 Hilfsmittel

Bei den Abschätzungen in diesem Kapitel werden wir die folgende Interpolationsungleichung benötigen:

Lemma 5.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2 -Rand. Dann gibt es zu $p \geq 1$ und $\varepsilon > 0$ eine Konstante C , die nur von p , n , ε und Ω abhängt, so daß für alle Funktionen $u \in H^{2,p}(\Omega)$ gilt:*

$$\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{H^{2,p}(\Omega)} + C \|u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (5.1)$$

Die Aussage dieses Satzes erhält man leicht für $p = 2$ mittels partieller Integration. Die Aussage für beliebiges p beweisen wir jedoch anders mit einer Methode von Nirenberg. Dieser beweist die Ungleichung¹ zwar ebenfalls nur für den Fall $p = 2$, der Beweis läßt sich jedoch verallgemeinern:

BEWEIS. Es genügt, die Aussage nur für Funktionen $u \in C^2(\overline{\Omega})$ zu beweisen, da diese Funktionen dicht in $H^{2,p}(\Omega)$ liegen und die Aussage des Satzes durch einfache Approximation folgt.

Der Beweis erfolgt in drei Schritten: zuerst wird die Ungleichung für den eindimensionalen Fall $n = 1$ bewiesen, dann wird sie auf achsenparallele Würfel im \mathbb{R}^n ausgedehnt, und schließlich werden allgemeine Gebiete behandelt.

Zunächst sei also $n = 1$, d.h. Ω ein endliches Intervall. Zu $\tilde{\varepsilon} > 0$, das später gewählt wird, unterteile Ω in Teilintervalle, deren Länge mindestens $\frac{1}{4}\tilde{\varepsilon}^{1/p}$ beträgt, maximal jedoch $\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{1/p}$. Dazu kann $\tilde{\varepsilon}$ ggf. verkleinert werden, falls Ω zu klein ist, was für die Aussage nicht relevant ist, da dann eine schärfere Abschätzung bewiesen wird. Sei nun $I = (a, b)$ ein solches Intervall². Mit $\alpha := \frac{b-a}{4}$ gilt dann folgende Relation, die wir später benötigen werden:

$$8^p \alpha^p \leq \tilde{\varepsilon} \leq 16^p \alpha^p. \quad (5.2)$$

Das Intervall I unterteilen wir weiter in vier gleichlange Teilintervalle der Länge α , das linke bezeichnen wir mit $I_L := (a, a+\alpha)$ und das rechte mit $I_R := (b-\alpha, b)$. Seien $x_L \in I_L$ und $x_R \in I_R$. Dann gibt es dem Mittelwertsatz gemäß ein $\xi \in (x_L, x_R)$, so daß gilt:

$$u'(\xi) = \frac{u(x_R) - u(x_L)}{x_R - x_L}. \quad (5.3)$$

Damit gilt für beliebiges $y \in I$:

¹Siehe [Nir], Lemma 6 (Seite 655), Beweis auf den Seiten 671-673.

²Ob I offen, halboffen oder abgeschlossen ist, ist hier nicht relevant; wir nehmen hier ein offenes Intervall an. Die Argumentation für die anderen beiden Fälle ist identisch.

$$\begin{aligned}
|u'(y)| &= |u'(\xi) + (u'(y) - u'(\xi))| \leq |u'(\xi)| + \left| \int_{\xi}^y u''(\zeta) d\zeta \right| \\
&\leq \frac{|u(x_R)| + |u(x_L)|}{2\alpha} + \int_I |u''(\zeta)| d\zeta.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Integriere diese Ungleichung in den Variablen x_L und x_R über I_L bzw. I_R :

$$\int_{I_L} \int_{I_R} |u'(y)| dx_R dx_L \leq \int_{I_L} \int_{I_R} \frac{|u(x_R)| + |u(x_L)|}{2\alpha} dx_R dx_L + \int_{I_L} \int_{I_R} \int_I |u''(\zeta)| d\zeta dx_R dx_L, \tag{5.5}$$

also

$$\begin{aligned}
\alpha^2 |u'(y)| &\leq \frac{1}{2} \int_{I_R} |u(x_R)| dx_R + \frac{1}{2} \int_{I_L} |u(x_L)| dx_L + \alpha^2 \int_I |u''(\zeta)| d\zeta \\
&\leq \frac{1}{2} \int_I |u(\zeta)| d\zeta + \alpha^2 \int_I |u''(\zeta)| d\zeta.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Dividiere dies durch α^2 , erhebe es zur p -ten Potenz und schätze mittels Hölderungleichung ab:

$$\begin{aligned}
|u'(y)|^p &\leq \left(\frac{1}{2\alpha^2} \int_I |u(\zeta)| d\zeta + \int_I |u''(\zeta)| d\zeta \right)^p \\
&\leq \frac{1}{\alpha^{2p}} \left(\int_I |u(\zeta)| d\zeta \right)^p + 2^p \left(\int_I |u''(\zeta)| d\zeta \right)^p \\
&\leq \frac{1}{\alpha^{2p}} \int_I |u(\zeta)|^p d\zeta \left(\int_I 1^{\frac{p}{p-1}} d\zeta \right)^{p \frac{p-1}{p}} + 2^p \int_I |u''(\zeta)|^p d\zeta \left(\int_I 1^{\frac{p}{p-1}} d\zeta \right)^{p \frac{p-1}{p}} \\
&= \frac{2^{2p-2}}{\alpha^{p+1}} \int_I |u(\zeta)|^p d\zeta + 2^{3p-2} \alpha^{p-1} \int_I |u''(\zeta)|^p d\zeta.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Integriere diese Ungleichung in der Variablen y über I :

$$\int_I |u'(y)|^p dy \leq \frac{2^{2p}}{\alpha^p} \int_I |u(\zeta)|^p d\zeta + 2^{3p} \alpha^p \int_I |u''(\zeta)|^p d\zeta. \tag{5.8}$$

Nutze nun die Relation (5.2):

$$\int_I |u'(y)|^p dy \leq \frac{2^{6p}}{\tilde{\varepsilon}} \int_I |u(\zeta)|^p d\zeta + \tilde{\varepsilon} \int_I |u''(\zeta)|^p d\zeta. \quad (5.9)$$

Summiert man über alle Teilintervalle I von Ω , so folgt mit $C := 2^{6p}\tilde{\varepsilon}^{-1}$:

$$\int_{\Omega} |u'(y)|^p dy \leq C \int_{\Omega} |u(\zeta)|^p d\zeta + \tilde{\varepsilon} \int_{\Omega} |u''(\zeta)|^p d\zeta. \quad (5.10)$$

Das Ergebnis für den eindimensionalen Fall läßt sich leicht für Würfel $\Omega = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ verallgemeinern: Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und für jedes $x_j \in (a_j, b_j)$ mit $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ gilt gemäß (5.10):

$$\int_{a_i}^{b_i} |u_{x_i}(x_1, \dots, x_n)|^p dx_i \leq \tilde{\varepsilon} \int_{a_i}^{b_i} |u_{x_i x_i}(x_1, \dots, x_n)|^p dx_i + C \int_{a_i}^{b_i} |u(x_1, \dots, x_n)|^p dx_i. \quad (5.11)$$

Integriere diese Ungleichung in den Variablen $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ über das $n-1$ -dimensionale Gebiet $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_{i-1}, b_{i-1}) \times (a_{i+1}, b_{i+1}) \times \dots \times (a_n, b_n)$:

$$\int_{\Omega} |u_{x_i}(x)|^p dx \leq \tilde{\varepsilon} \int_{\Omega} |u_{x_i x_i}(x)|^p dx + C \int_{\Omega} |u(x)|^p dx. \quad (5.12)$$

Summiere über $i = 1, \dots, n$ auf. Wenn man dann noch $\sum_i \int |u_{x_i x_i}|^p$ über $\|u\|_{H^{2,p}}^p$ abschätzt und einen $\|u\|_{L^p}$ -Term addiert, folgt für Würfelgebiete Ω :

$$\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}^p \leq \tilde{\varepsilon} \|u\|_{H^{2,p}(\Omega)}^p + C \|u\|_{L^p(\Omega)}^p. \quad (5.13)$$

Mit diesem Ergebnis können wir uns beliebigen beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^2 -Rand zuwenden.

Die Randglattheit ermöglicht es, zu jedem $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U_x \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U_x$ und einen C^2 -Diffeomorphismus $T_x : \overline{U_x} \cap \overline{\Omega} \mapsto \overline{V_x}$ zu finden, wobei $V_x \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist. Wir können U_x und V_x in der Form verkleinern, daß V_x ein achsenparalleler Würfel ist. Zu jedem $x \in \Omega$ sei weiterhin $U_x \subset \Omega$ ein achsenparalleler Würfel, ebenfalls mit $x \in U_x$. Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, gibt es eine endliche Menge $I \subset \overline{\Omega}$ mit $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{x \in I} U_x$. Da die endlich vielen Diffeomorphismen T_x und T_x^{-1} für $x \in I \cap \partial\Omega$ gleichmäßig beschränkt sind, gibt es eine Konstante $k > 0$, die nur von Ω und I abhängt, so daß für $i = 0, 1, 2$ gilt:

$$\frac{1}{k^p} \|u\|_{H^{i,p}(U_x)}^p \leq \|u \circ T^{-1}\|_{H^{i,p}(V_x)}^p \leq k^p \|u\|_{H^{i,p}(U_x)}^p. \quad (5.14)$$

Also transformiert sich die oben bewiesene Abschätzung auf Würfelgebieten zu

$$\|u\|_{H^{1,p}(U_x)}^p \leq k^{2p} \tilde{\varepsilon} \|u\|_{H^{2,p}(U_x)}^p + k^{2p} C \|u\|_{L^p(U_x)}^p. \quad (5.15)$$

Sei nun $K \geq 1$ eine Oberschranke für die Zahl der Umgebungen U_x , $x \in I$, die sich in einzelnen Punkten aus $\bar{\Omega}$ überlappen. K ist durch $|I| < \infty$ majorisiert, i. allg. wird K jedoch wesentlich kleiner sein. Es folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}^p &\leq \sum_{x \in I} \|u\|_{H^{1,p}(U_x)}^p \leq \sum_{x \in I} (k^{2p} \tilde{\varepsilon} \|u\|_{H^{2,p}(U_x)}^p + k^{2p} C \|u\|_{L^p(U_x)}^p) \\ &\leq \left(\sum_{x \in I} (k^2 \tilde{\varepsilon}^{1/p} \|u\|_{H^{2,p}(U_x)} + k^2 C \|u\|_{L^p(U_x)}) \right)^p \\ &\leq \left(K (k^2 \tilde{\varepsilon}^{1/p} \|u\|_{H^{2,p}(\Omega)} + k^2 C \|u\|_{L^p(\Omega)}) \right)^p. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Mit der Wahl $\tilde{\varepsilon} := (\frac{\varepsilon}{Kk^2})^p$ folgt die Behauptung. \square

Hinweis: Mittels Induktion läßt sich der Satz leicht erweitern zu

$$\|u\|_{H^{i,p}(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{H^{j,p}(\Omega)} + C \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad (5.17)$$

für ganzzahlige Konstanten $j > i > 0$. Ebenso lassen sich anstelle der vollen Normen $\|\cdot\|_{H^{i,p}}$ auch Seminormen $\|D^i \cdot\|_{L^p}$ verwenden. Eine andere Beweismöglichkeit ergibt sich durch die Nutzung des Ehrling-Lemmas (siehe [Alt]).

Als weiteres Hilfsmittel müssen zur Formulierung einer Randwertaufgabe die Randwerte von Funktionen aus Sobolevräumen charakterisiert werden. Hierzu eignen sich am besten die sog. „fractional order spaces“, das sind Sobolevräume $H^{m,p}$ mit nichtganzzahligem m . Die Einführung dieser Räume ist aufwendig und würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, sie ist aber für unsere Zwecke auch nicht erforderlich³. Hier genügt es zu wissen, daß für hinreichend glatte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Randwerte von Funktionen aus $H^{m,p}(\Omega)$ gerade den Funktionen aus $H^{m-1/p,p}(\partial\Omega)$ entsprechen. Auf $H^{m-1/p,p}(\partial\Omega)$ ist eine Norm gegeben durch

$$\|\Phi\|_{H^{m-1/p,p}(\partial\Omega)} := \inf\{\|\phi\|_{H^{m,p}(\Omega)} : \phi \in H^{m,p}(\Omega) \text{ mit } \phi|_{\partial\Omega} = \Phi\}. \quad (5.18)$$

Die Bedingung $\phi|_{\partial\Omega} = \Phi$ kann nicht als normale Gleichheit fast überall aufgefaßt werden, da $\partial\Omega$ Nullmenge in \mathbb{R}^n ist und somit keine Einschränkung an ϕ gemacht würde. Vielmehr gibt es eine stetige surjektive Abbildung $R : H^{m,p}(\Omega) \mapsto H^{m-1/p,p}(\partial\Omega)$, die für C^∞ -Funktionen genau der Restriktion auf den Rand $\partial\Omega$ entspricht⁴, und mit $\phi|_{\partial\Omega} = \Phi$ ist lediglich $R\phi = \Phi$ gemeint.

5.2 Konstante Koeffizienten

Mit diesen Vorbereitungen können wir uns jetzt den L^p -Abschätzungen zuwenden. Zunächst betrachten wir den Fall eines elliptischen linearen Operators L , der nur Terme zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten enthält, d. h.

³Eine Übersicht über verschiedene Varianten der „fractional order spaces“ findet sich in [Ad], Kapitel VII.

⁴Siehe [Ad], 7.52-7.53 (Seiten 215-216).

$$L := a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (5.19)$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Für $H^{2,p}$ -Funktionen ($1 < p < \infty$) lassen sich dann auf folgendem Weg die untenstehenden L^p -Abschätzungen herleiten:

1. Für den Laplaceoperator $\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ läßt sich die Funktion u als Faltung von Δu mit der Fundamentallösung von $\Delta v = 0$ darstellen. Die Calderon-Zygmund-Ungleichung gibt uns dann die Möglichkeit, $\|D^2 u\|_{L^p}$ über $\|\Delta u\|_{L^p}$ abzuschätzen.
2. Eine lineare Abbildung transformiert Δ in den Operator L aus Gleichung (5.19).
3. Die Randwerte werden über spezielle Integraldarstellungen erfaßt⁵ und entsprechend abgeschätzt⁶.

L^p -Abschätzungen in Verbindung mit Dirichletrandwerten werden auch von Gilbarg und Trudinger [GT] (Kapitel 9) betrachtet. Die Behandlung allgemeiner Randwerte, auch der hier benötigten homogenen Neumannrandwerte, ist jedoch wesentlich aufwendiger. Da [ADN] genau die benötigten Abschätzungen bereitstellt, werden wir sie hier zitieren. Zunächst aber zu der inneren Abschätzung, die wir vollständig beweisen.

Satz 5.2: Sei $L = a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j}$ mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und $|a_{ij}| \leq k$. Die Matrix $(a_{ij})_{ij}$ sei positiv definit, d.h. es gebe ein $\lambda > 0$, so daß $a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist. Dann gibt es zu $1 < p < \infty$ eine nur von n , p , λ und k abhängenden Konstante C , so daß für alle Funktionen $u \in H^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger gilt:

$$\|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.20)$$

BEWEIS. Im Fall $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Im Fall $n \geq 2$ sei zunächst $L = \Delta$. Sei

$$\Gamma(x - y) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x - y| & \text{für } n = 2 \\ \frac{1}{n(2-n)\omega_n} |x - y|^{2-n} & \text{für } n \geq 2 \end{cases} \quad (5.21)$$

die Fundamentallösung der Laplacegleichung $\Delta v = 0$. Hierbei bezeichnet $\omega_n := |B_1(0)|$ das Volumen des Einheitsballes im \mathbb{R}^n . Gemäß der Greenschen Darstellungsformel⁷ läßt sich u darstellen als Faltung von Δu mit Γ :

⁵Siehe [ADN], Theorem 4.1 (Seite 653).

⁶Siehe [ADN], Theorem 3.4 (Seite 651).

⁷Siehe [GT], Formel (2.17) (Seite 18).

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y-x) \Delta u(y) dy. \quad (5.22)$$

Da nach Voraussetzung $\Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ist, sind die Voraussetzungen der Calderon-Zygmund-Ungleichung⁸ erfüllt, und es folgt sofort die Behauptung.

Falls L nicht der Laplaceoperator Δ ist, so kann eine lineare Abbildung gefunden werden, die ihn zu Δ transformiert⁹, denn die Koeffizienten von L sind konstant. So erhält man die Behauptung auch für den allgemeinen Operator L , wobei durch die Transformation zusätzlich der kleinste und der größte Eigenwert der Matrix a_{ij} in die Konstante C eingehen, d.h. C ist auch von λ und k abhängig. \square

Eine ähnliche Abschätzung gilt für Funktionen auf einer Hemisphäre, die auf dem geraden Randstück Neumannrandbedingungen genügen¹⁰:

Satz 5.3: Die Funktion $u \in H^{2,p}(\mathbb{R}_+^n)$ mit $1 < p < \infty$ genüge in $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}^n \cap \{x_n > 0\}$ der Differentialgleichung $Lu = f$, wobei L wie in Satz 5.2 definiert ist. Weiterhin sei vorausgesetzt, daß $u(x)$ für $|x| \geq 1$ verschwindet. Auf $\{x_n = 0\}$ gelte $Bu = \Phi$, $B = b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b$ mit $b_j, b \in \mathbb{R}$, $|b_j, b| \leq k$, $b_n \neq 0$ und $\sum_j b_j^2 = 1$. Dann gibt es eine nur von n, p, λ und k abhängende Konstante C , so daß gilt:

$$\|u\|_{H^{2,p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} + \|\Phi\|_{H^{1-1/p,p}(\partial\mathbb{R}_+^n)}). \quad (5.23)$$

Dieser Satz wird hier nicht bewiesen; er entspricht Satz 14.1 aus [ADN] (Seite 701).

5.3 Variable Koeffizienten

Nachdem im vorherigen Abschnitt die L^p -Abschätzungen für Gleichungen hergeleitet wurden, die nur aus Termen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten bestehen, werden wir diese jetzt auf Gleichungen mit variablen Koeffizienten und Termen niedriger Ordnung verallgemeinern. Dies geschieht durch eine Abschätzung der Differenz zu Gleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Satz 5.4: Die Funktion $u \in H^{2,p}(B_R^+)$ mit $1 < p < \infty$ genüge in der Hemisphäre $B_R^+ := B_R^+(0) := B_R(0) \cap \{x_n > 0\}$, $R > 0$, der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} Lu &:= a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + a_j(x)u_{x_j} + a(x)u = F && \text{in } B_R^+ \\ Bu &:= b_j(x)u_{x_j} + b(x)u = \Phi && \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \quad (5.24)$$

wobei $\|a_{ij}\|_{C^0(\overline{B_R^+})} \leq k$ ist und die Matrix $(a_{ij}(x))_{ij}$ gleichmäßig elliptisch, d.h. es gibt ein $\lambda > 0$, so daß $a_{ij}\xi_i \xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist. Weiterhin seien $\|a_j, a, b\|_{L^\infty(B_R^+)}$

⁸Siehe [GT], Theorem 9.9 (Seite 230).

⁹Siehe [GT], Seite 88.

¹⁰In [ADN] werden wesentlich allgemeinere Randbedingungen behandelt, für die die Gültigkeit einer „complementing condition“ gefordert wird. Diese ist im hier genannten Spezialfall erfüllt.

$\leq k$, $\|b_j\|_{C^{0,1}(\overline{B_R^+})} \leq k$, $\sum_j b_j(x)^2 = 1$, $b_n(x) \neq 0$ und $F \in L^p(B_R^+)$. Dann gibt es Konstanten C und $r < R$, die nur von n , p , λ , k und dem Stetigkeitsmodul der a_{ij} abhängen, so daß gilt: Verschwindet u außerhalb der Hemisphäre B_r^+ , so gilt

$$\|u\|_{H^{2,p}(B_r^+)} \leq C(\|F\|_{L^p(B_r^+)} + \|\Phi\|_{H^{1-1/p,p}(\Gamma)} + \|u\|_{L^p(B_r^+)}). \quad (5.25)$$

Hierbei bezeichnet

$$\Gamma := \partial B_R^+ \cap \{x^n = 0\} \quad (5.26)$$

den geraden Rand der Hemisphäre B_R^+ .

BEWEIS. Sei L' der Teil von L mit den Termen zweiter Ordnung, und sei L'' der Teil mit den Termen niedrigerer Ordnung, ebenso seien B' und B'' definiert, d.h.

$$\begin{aligned} L'(x) &:= a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} & \text{und} & & L''(x) &:= a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + a(x), \\ B'(x) &:= b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} & \text{und} & & B''(x) &:= b(x). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Dann lassen sich die Gleichungen $Lu = F$ und $Bu = \Phi$ schreiben als

$$\begin{aligned} L'(0)u(x) &= F(x) + (L'(0) - L'(x))u(x) - L''(x)u(x) &=: f(x) \\ B'(0)u(x) &= \Phi(x) + (B'(0) - B'(x))u(x) - B''(x)u(x) &=: \phi(x). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Weiter unten werden wir Satz 5.3 auf die Differentialgleichung $L'(0)u = f$ mit der Randbedingung $B(0)u = \phi$ anwenden. Daher müssen zunächst $\|f\|_{L^p}$ und $\|\phi\|_{L^p}$ untersucht werden:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p} &\leq \|F\|_{L^p} + \|(L'(0) - L'(x))u\|_{L^p} + \|L''(x)u\|_{L^p} \\ &= \|F\|_{L^p} + \|(a_{ij}(0) - a_{ij}(x))u_{x_i x_j}\|_{L^p} + \|a_j(x)u_{x_j} + a(x)u\|_{L^p} \\ &\leq \|F\|_{L^p} + \max_{i,j} \|a_{ij}(0) - a_{ij}(x)\|_{L^\infty} \|u\|_{H^{2,p}} + (n+1)k \|u\|_{H^{1,p}}, \quad (5.29) \\ \|\phi\|_{H^{1-1/p,p}(\Gamma)} &\leq \|\Phi(x)\|_{H^{1-1/p,p}(\Gamma)} + \|(B'(0) - B'(x))u - B''(x)u\|_{H^{1-1/p,p}(\Gamma)} \\ &\leq \|\Phi(x)\|_{H^{1-1/p,p}(\Gamma)} + \|(B'(0) - B'(x))u - B''(x)u\|_{H^{1,p}(B_r^+)} \\ &= \|\Phi(x)\|_{H^{1-1/p,p}(\Gamma)} + \|(b_j(0) - b_j(x))u_{x_j}\|_{H^{1,p}(B_r^+)} + \|b(x)u\|_{H^{1,p}(B_r^+)} \\ &\leq \|\Phi(x)\|_{H^{1-1/p,p}(\Gamma)} + nkr \|u\|_{H^{2,p}(B_r^+)} + k \|u\|_{H^{1,p}(B_r^+)}. \quad (5.30) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist korrekt, da die Koeffizienten b_j nach Voraussetzung Lipschitzstetig mit der Konstanten k sind¹¹. Mit diesen Ergebnissen kann Satz 5.3 auf die Differentialgleichung (5.28) angewendet werden:

¹¹In [ADN] wird an dieser Stelle C^1 vorausgesetzt, was offenbar nicht erforderlich ist.

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{2,p}(B_r^+)} &\leq C(\|f\|_{L^p(B_r^+)} + \|\phi\|_{H^{1-1/p,p}(\Gamma)}) \\
&\leq C(\|F\|_{L^p} + \|\Phi(x)\|_{H^{1-1/p,p}(\Gamma)} + (n+2)k\|u\|_{H^{1,p}}) \\
&\quad + (\max_{i,j} \|a_{ij}(0) - a_{ij}(x)\|_{L^\infty} + nkr)\|u\|_{H^{2,p}(B_r^+)}. \quad (5.31)
\end{aligned}$$

Wähle r so klein, daß

$$C(\max_{i,j} \|a_{ij}(0) - a_{ij}(x)\|_{L^\infty} + nkr) \leq \frac{1}{2} \quad (5.32)$$

ist. Dann kann (5.31) weiter abgeschätzt werden:

$$\|u\|_{H^{2,p}(B_r^+)} \leq 2C(\|F\|_{L^p} + \|\Phi(x)\|_{H^{1-1/p,p}(\Gamma)} + (n+2)k\|u\|_{H^{1,p}}). \quad (5.33)$$

Die Interpolationsabschätzung Lemma 5.1 garantiert nun eine Abschätzung der Art

$$2C(n+2)k\|u\|_{H^{1,p}} \leq \frac{1}{2}\|u\|_{H^{2,p}(B_r^+)} + C\|u\|_{L^p(B_r^+)}, \quad (5.34)$$

so daß die Behauptung folgt. \square

Satz 5.5: Sei $1 < p < \infty$. Die Funktion $u \in H^{2,p}(B_R(x_0))$ genüge der Differentialgleichung $Lu = F$, wobei L und F wie in Satz 5.4 definiert sind. Dann gibt es Konstanten C und $r < R$, die nur von n, p, λ, k und dem Stetigkeitsmodul der a_{ij} abhängen, so daß gilt: Verschwindet u außerhalb von $B_r(x_0)$, so gilt

$$\|u\|_{H^{2,p}(B_r(x_0))} \leq C(\|F\|_{L^p(B_r(x_0))} + \|u\|_{L^p(B_r(x_0))}). \quad (5.35)$$

BEWEIS. Diese Abschätzung wird genauso bewiesen wie die vorherige, wobei die Randterme nicht auftreten und Satz 5.2 anstelle von 5.3 verwendet wird. \square

5.4 Glatte Gebiete

Satz 5.6: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2 -Rand. Die Funktion $u \in H^{2,p}(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$ genüge der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
Lu &:= a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + a_j(x)u_{x_j} + a(x)u = F && \text{in } \Omega \\
Bu &:= b_j(x)u_{x_j} + b(x)u = \Phi && \text{auf } \partial\Omega,
\end{aligned} \quad (5.36)$$

wobei $\|a_{ij}\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq k$ sei und $(a_{ij})_{ij}$ gleichmäßig elliptisch mit der Elliptizitätskonstanten $\lambda > 0$. Weiterhin seien $\|a_j, a, b\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k$, $\|b_j\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})} \leq k$, $F \in L^p(\Omega)$ und $\sum_j b_j(x)^2 = 1$ vorausgesetzt. Außerdem liege der Vektor $(b_j(x))_j$ nicht parallel zu $\partial\Omega$ im Punkt x . Dann gibt es eine Konstante C , die nur von n, p, λ, k, Ω und dem Stetigkeitsmodul der a_{ij} abhängt, so daß gilt:

$$\|u\|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq C(\|F\|_{L^p(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^{1-1/p,p}(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}). \quad (5.37)$$

BEWEIS. Da Ω nach Voraussetzung einen C^2 -Rand besitzt, gibt es zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ eine offene Menge $\tilde{U}_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in \tilde{U}_{x_0}$, eine positive Konstante r_{x_0} und einen C^2 -Diffeomorphismus $T_{x_0} : \overline{U_{x_0}} \rightarrow \overline{B_{r_{x_0}}^+}$, wobei $U_{x_0} := \tilde{U}_{x_0} \cap \Omega$ sei. Der Diffeomorphismus T_{x_0} bilde das in $\overline{U_{x_0}}$ enthaltene Randstück von $\partial\Omega$ diffeomorph auf den geraden Rand der Hemisphäre ab, d.h. $T_{x_0} : \overline{U_{x_0}} \cap \partial\Omega \xrightarrow{\cong} \overline{B_{r_{x_0}}^+} \cap \{x_n = 0\}$, weiterhin sei $T_{x_0}(x_0) = 0$. T_{x_0} transformiert die Differentialoperatoren L und B in

$$\begin{aligned} L^{x_0} &:= a_{ij}^{x_0}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + a_j^{x_0}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + a^{x_0}(x) && \text{in } B_{r_{x_0}}^+, \\ B^{x_0} &:= b_j^{x_0}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + b^{x_0}(x) && \text{auf } \partial B_{r_{x_0}}^+ \cap \{x_n = 0\} \end{aligned} \quad (5.38)$$

mit

$$\begin{aligned} a_{ij}^{x_0}(x) &:= a_{kl}(T_{x_0}(x)) [T_{x_0}^i]_{x_k}(x) [T_{x_0}^j]_{x_l}(x) \\ a_j^{x_0}(x) &:= a_k(T_{x_0}(x)) [T_{x_0}^j]_{x_k}(x) + a_{kl}(x) [T_{x_0}^j]_{x_k x_l}(x) \\ a^{x_0}(x) &:= a(T_{x_0}(x)) \\ b_j^{x_0}(x) &:= b_k(T_{x_0}(x)) [T_{x_0}^j]_{x_k}(x) \\ b^{x_0}(x) &:= b(T_{x_0}(x)). \end{aligned} \quad (5.39)$$

U_{x_0} und r_{x_0} können soweit verkleinert werden, daß r_{x_0} der Kleinheitsvoraussetzung von Satz 5.4 für die Differentialoperatoren L^{x_0} und B^{x_0} genügt, ebenso der Nicht-Parallelitätsvoraussetzung an die Koeffizienten $b_j^{x_0}$.

Weiterhin sei zu jedem $x_0 \in \Omega$ ein Ball $B_{r_{x_0}}(x_0) \subset \Omega$ gewählt, wobei auch hier r_{x_0} der Kleinheitsvoraussetzung von Satz 5.5 genügt, diesmal bezüglich der ursprünglichen Differentialoperatoren L und B , da im Inneren des Gebietes keine Transformation notwendig ist. Zur Vereinfachung der Notation seien dennoch $T_{x_0} := Id$ und $U_{x_0} := \tilde{U}_{x_0} := B_{r_{x_0}}(x_0)$ vereinbart.

Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung von $(\tilde{U}_{x_0})_{x_0 \in \bar{\Omega}}$, d.h. eine endliche Teilmenge $I \subset \bar{\Omega}$, so daß gilt:

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup_{x_0 \in I} \tilde{U}_{x_0}. \quad (5.40)$$

Zu dieser Überdeckung sei $\sum_{\sigma=1}^M \omega_\sigma(x) = 1$ für alle $x \in \bar{\Omega}$ eine Partition der Eins aus Funktionen $\omega_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, wobei der Träger eines jeden ω_σ in einem $\tilde{U}_{x_0(\sigma)}$ enthalten ist. Betrachte ein festes ω_σ und setze $\tilde{L} := L^{x_0(\sigma)}$ und $\tilde{B} := B^{x_0(\sigma)}$. Die Abbildung $T := T_{x_0(\sigma)}$ transformiert ω_σ in $\omega := \omega_\sigma \circ T$ und u in $v := u \circ T$. Mit der Schreibweise $V_{x_0} := T(U_{x_0})$ gilt dann für $l = 0, 1, 2$ eine Abschätzung

$$\|\omega_\sigma u\|_{H^{l,p}(U_{x_0(\sigma)})} \leq C \|\omega v\|_{H^{l,p}(V_{x_0(\sigma)})} \leq C \|v\|_{H^{l,p}(V_{x_0(\sigma)})} \leq C \|u\|_{H^{l,p}(U_{x_0(\sigma)})}. \quad (5.41)$$

ωv erfüllt die Voraussetzungen von Satz 5.4 bzw. Satz 5.5, also gilt

$$\begin{aligned} \|\omega v\|_{H^{2,p}(V_{x_0(\sigma)})} &\leq C(\|\tilde{L}(\omega v)\|_{L^p(V_{x_0(\sigma)})} + \|\tilde{B}(\omega v)\|_{H^{1-1/p,p}(\partial V_{x_0(\sigma)} \cap \{x_n=0\})} \\ &\quad + \|\omega v\|_{L^p(V_{x_0(\sigma)})}), \end{aligned} \quad (5.42)$$

wobei der Randterm nur für $x_0(\sigma) \in \partial\Omega$ auftritt. Wegen $\tilde{L}v = \tilde{F} := F \circ T$ gilt gemäß der Produktregel für die Differentiation und (5.41) eine Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\tilde{L}(\omega v)\|_{L^p(V_{x_0(\sigma)})} &= \|\omega \tilde{L}v + 2a_{ij}^{x_0} \omega_{x_i} v_{x_j} + a_{ij}^{x_0} \omega_{x_i x_j} v + a_j^{x_0} \omega_{x_j} v\|_{L^p(V_{x_0(\sigma)})} \\ &\leq C(\|F\|_{L^p(U_{x_0(\sigma)})} + \|u\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})}). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Wegen

$$\|\tilde{B}(\omega v)\|_{H^{1-1/p,p}(\partial V_{x_0(\sigma)} \cap \{x_n=0\})} \leq C\|B(\omega_\sigma u)\|_{H^{1-1/p,p}(\partial\Omega \cap U_{x_0(\sigma)})} \quad (5.44)$$

folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\omega_\sigma u\|_{H^{2,p}(U_{x_0(\sigma)})} &\stackrel{(5.41)}{\leq} C\|\omega v\|_{H^{2,p}(V_{x_0(\sigma)})} \\ &\stackrel{(5.42)}{\leq} C(\|\tilde{L}(\omega v)\|_{L^p(V_{x_0(\sigma)})} + \|\tilde{B}(\omega v)\|_{H^{1-1/p,p}(\partial V_{x_0(\sigma)} \cap \{x_n=0\})} \\ &\quad + \|\omega v\|_{L^p(V_{x_0(\sigma)})}) \\ &\stackrel{(5.43)+(5.44)}{\leq} C(\|F\|_{L^p(U_{x_0(\sigma)})} + \|u\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})} \\ &\quad + \|B(\omega_\sigma u)\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} + \|\omega v\|_{L^p(V_{x_0(\sigma)})}) \\ &\stackrel{(5.41)}{\leq} C(\|F\|_{L^p(U_{x_0(\sigma)})} + \|u\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})} \\ &\quad + \|B(\omega_\sigma u)\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)}). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Nun muß also noch der Term $\|B(\omega_\sigma u)\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)}$ untersucht werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\|B(\omega_\sigma u)\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} \\ &= \|(b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b)(\omega_\sigma u)\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} \\ &\leq \|\omega_\sigma B u\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} + \|u b_j(\omega_\sigma)_{x_j}\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} \\ &= \|\omega_\sigma \Phi\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} + \|u b_j(\omega_\sigma)_{x_j}\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Hier tritt das Problem auf, daß Φ und b_j nur auf $\partial\Omega$ definiert sind und wir die Randnorm daher nicht direkt über die Gebietsnorm abschätzen können. Aber zu Φ können wir eine auf ganz Ω definierte Funktion $\hat{\Phi} \in H^{1,p}(\Omega)$ finden, die auf $\partial\Omega$ mit

Φ übereinstimmt, und für die immerhin $\|\hat{\Phi}\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})} \leq 2\|\Phi\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)}$ gilt. Aufgrund der Glattheit des Gebietsrandes $\partial\Omega$ gilt ähnliches für die Koeffizientenfunktionen b_j : Es gibt Funktionen $\hat{b}_j \in H^{1,\infty}(\Omega) \cong C^{0,1}(\bar{\Omega})$ mit $\|\hat{b}_j\|_{H^{1,\infty}(U_{x_0(\sigma)})} \leq 2\|b_j\|_{H^{1,\infty}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)}$. Also folgt

$$\begin{aligned}
& \|B(\omega_\sigma u)\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} \\
& \stackrel{(5.46)}{\leq} \|\omega_\sigma \Phi\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} + \|u b_j(\omega_\sigma)_{x_j}\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} \\
& = \|\omega_\sigma \hat{\Phi}\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} + \|u \hat{b}_j(\omega_\sigma)_{x_j}\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} \\
& \leq \|\omega_\sigma \hat{\Phi}\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})} + \|u \hat{b}_j(\omega_\sigma)_{x_j}\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})} \\
& \leq \|\omega_\sigma\|_{H^{1,\infty}(U_{x_0(\sigma)})} (\|\hat{\Phi}\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})} + \|u \hat{b}_j\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})}) \\
& \leq C(\|\hat{\Phi}\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})} + \|u\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})} \|\hat{b}_j\|_{H^{1,\infty}(U_{x_0(\sigma)})}) \\
& \leq C(\|\Phi\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} + \|u\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})} \|b_j\|_{H^{1,\infty}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)}) \\
& \leq C(\|\Phi\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} + \|u\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})}). \tag{5.47}
\end{aligned}$$

Nun folgt insgesamt

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{2,p}(\Omega)} & = \left\| \sum_\sigma \omega_\sigma u \right\|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq \sum_\sigma \|\omega_\sigma u\|_{H^{2,p}(U_{x_0(\sigma)})} \\
& \stackrel{(5.45)}{\leq} \sum_\sigma C(\|F\|_{L^p(U_{x_0(\sigma)})} + \|u\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})} \\
& \quad + \|B(\omega_\sigma u)\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)}) \\
& \stackrel{(5.47)}{\leq} \sum_\sigma C(\|F\|_{L^p(U_{x_0(\sigma)})} + \|u\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})} \\
& \quad + \|\Phi\|_{H^{1-1/p,p}(U_{x_0(\sigma)} \cap \partial\Omega)} + \|u\|_{H^{1,p}(U_{x_0(\sigma)})}) \\
& \leq C(\|F\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^{1-1/p,p}(\partial\Omega)}). \tag{5.48}
\end{aligned}$$

Mit Lemma 5.1 läßt sich der noch der Term $\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}$ zu $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ reduzieren, und es folgt die Behauptung. \square

5.5 Nichtglatte Gebiete

Im letzten Abschnitt wurde vorausgesetzt, daß der Rand des Gebiets glatt ist, damit er von einem Diffeomorphismus auf ein Hyperebenenstück glattgebogen werden kann. Unter bestimmten Voraussetzungen lassen sich die Abschätzungen jedoch auch auf nichtglatte Gebiete verallgemeinern, und zwar mit Hilfe von Spiegelungstechniken. Gegeben sei folgende Situation:

Das Gebiet

$$\Omega := (\alpha, \delta) \times \omega \quad (5.49)$$

ist das cartesische Produkt eines endlichen Intervalls (α, δ) mit $\alpha < \delta$ und eines beschränkten Gebiets $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit $C^{2,\kappa}$ -Rand. Offenbar ist Ω ohne weiteres nicht glatt genug für die Abschätzungen des letzten Abschnitts, denn der Rand ist lediglich von der Güte $C^{0,1}$. Auf $\overline{\Omega}$ ist eine Funktion u gegeben, die einer Differentialgleichung mit Randbedingungen der folgenden Art genügt:

$$\Delta u - a_j(x)u_{x_j} = F(x, u(x)) \quad \text{in } \Omega, \quad (5.50)$$

$$u_\nu = 0 \quad \text{auf } (\alpha, \delta) \times \partial\omega. \quad (5.51)$$

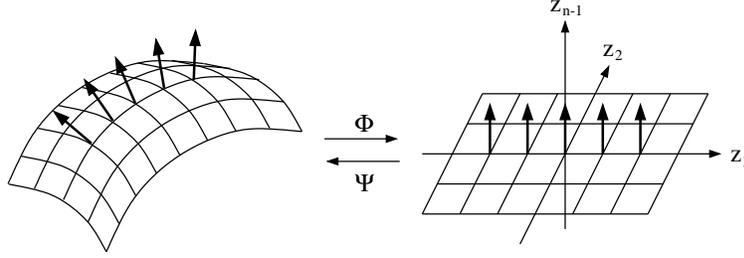
Auf Ω wird dann eine $H^{2,p}$ -Abschätzung für u wie in den vorherigen Abschnitten benötigt. Da die Abschätzung des vorherigen Abschnitts nur für glatte Gebiete gilt, wird die Funktion u über den Rand von Ω hinaus mittels einer Spiegelung fortgesetzt, in der Hoffnung, daß die gespiegelte Funktion auf dem erweiterten glatten Gebiet selbst glatt ist und einer glatten Differentialgleichung genügt. Dabei gibt es zwei grundlegende Möglichkeiten: a) Fortsetzung mittels einer ungeraden Spiegelung über den Dirichletrand $\{\alpha, \delta\} \times \omega$ hinaus, und b) Fortsetzung mittels einer geraden Spiegelung über den Neumannrand $(\alpha, \delta) \times \partial\omega$ hinaus.

Die Technik a) kann freilich nur funktionieren, wenn u auf den Spiegelachsenrandstücken konstant ist, was in unserer Anwendung jedoch kein Problem ist: Entweder ist die Funktion dort konstant 0 oder 1, oder sie ist schon auf einem etwas größeren Gebietsstück gegeben, so daß sich eine Spiegelung ganz erübrigt. Für den linken Rand $\{\alpha\} \times \omega$ und $u = 0$ dort hat die Spiegelung dann folgende Form:

$$u(x_1, y) := -u(2\alpha - x_1, y) \quad \text{für } (x_1, y) \in \overline{(2\alpha - \delta, \alpha) \times \omega}. \quad (5.52)$$

Die Spiegelung am rechten Rand mit $u = 1$ erfolgt analog. Bei dieser ungeraden Spiegelung bleibt die Differentialgleichung erhalten, lediglich das Vorzeichen des Koeffizienten a_1 ändert sich. Dies führt zu einer Unstetigkeit in diesem Koeffizienten, die für die L^p -Abschätzungen jedoch nicht von Bedeutung ist. Insofern erhält man mit dieser Methode $H^{2,p}$ -Abschätzungen, jedoch keine Schauderabschätzungen. Diese sind aber sowieso nicht zu erwarten, denn die ungerade Spiegelung ist lediglich eine C^1 -Fortsetzung, so daß die Funktion u über die Spiegelungskante hinweg i. allg. nicht zweimal stetig differenzierbar sein wird, zumindest solange $u_{x_1 x_1}$ dort nicht verschwindet.

Daher verwerfen wir die Technik a) und widmen uns der Möglichkeit b), nämlich der Spiegelung am (i. allg.) gebogenen Neumannrand. Der gebogene Rand muß zunächst auf ein Hyperflächenstück geradegebogen werden. Dazu genügt es, wenn wir die x_1 -Koordinate zunächst außen vor lassen.



Da das Gebiet ω einen $C^{2,\kappa}$ -Rand besitzt, gibt es zu jedem Punkt $y^0 = (y_1^0, \dots, y_{n-1}^0)$ eine Umgebung $U(y^0)$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit $0 \in V$ und einen $C^{2,\kappa}$ -Diffeomorphismus

$$\psi : V \cap \{z_{n-1} = 0\} \longrightarrow U \cap \partial\omega. \quad (5.53)$$

Die Koordinaten aus V bezeichnen wir mit z_1, \dots, z_{n-1} . Wir erweitern ψ zu einer Funktion $\Psi : V \rightarrow U$ vermöge

$$\Psi(z_1, \dots, z_{n-1}) := \psi(z_1, \dots, z_{n-2}, 0) + z_{n-1}\nu(\psi(z_1, \dots, z_{n-2}, 0)). \quad (5.54)$$

Nach eventueller Verkleinerung von U und V ist Ψ ein $C^{2,\kappa}$ -Diffeomorphismus. Diese Konstruktion ist in der Differentialgeometrie unter dem Namen „Fermi-Koordinaten“ bekannt¹². Würde man stattdessen gleich von einer abstrakten Funktion Ψ ausgehen, die U diffeomorph nach V abbildet, so erhielten wir keine Orthogonalitätsbeziehungen, die jedoch unbedingt erforderlich sind, wie wir später sehen werden. Sei $\Phi := \Psi^{-1}$ die Inverse von Ψ . Wir betrachten nun die Differentialgleichung unter der Transformation Φ . Sei $v(z) := u(\Psi(z))$ die transformierte Funktion. Dann gilt

$$\Delta_y u(y) = \Delta_y (v \circ \Phi)(y) = v_{z_i z_j}(z) \Phi_{y_k}^i(y) \Phi_{y_k}^j(y) + v_{z_j}(z) \Delta_y \Phi^j(y). \quad (5.55)$$

Die Randbedingungen transformieren sich erwartungsgemäß:

$$\begin{aligned} u_{\nu(y)}(y) &= \nabla_y (v \circ \Phi)(y) \nu(y) = \nabla_z v(z) \nabla_y \Phi(y) \nu(y) \\ &= \nabla_z v(z) \nabla_y \Phi(y) \nabla_z \Psi(z) e_{n-1} = \nabla_z v(z) e_{n-1} = v_{\nu(z)}(z), \end{aligned} \quad (5.56)$$

d.h. Normalenableitungen gehen wieder in Normalenableitungen über.

Wir untersuchen das Aussehen der Matrix $g^{ij}(y) := \Phi_{y_k}^i(y) \Phi_{y_k}^j(y)$, und zwar durch Betrachtung ihrer Inversen $g_{ij}(z) := \Psi_{z_i}^k(z) \Psi_{z_j}^k(z)$. Dies ist tatsächlich die Inverse, denn

¹²Genaugenommen verwendet man anstelle von $z_{n-1}\nu$ eine Geodätische, die in $\Psi(z_1, \dots, z_{n-2}, 0)$ startet und am Startpunkt in Normalenrichtung verläuft. Für unsere Zwecke genügt die einfache Variante jedoch vollkommen.

$$\begin{aligned}
(\Phi \circ \Psi)(z) = z &\Rightarrow \delta_{ij} = \partial_{z_i}(\Phi^j(\Psi(z))) = \Phi_{y_k}^j \Psi_{z_i}^k \\
(\Psi \circ \Phi)(y) = y &\Rightarrow \delta_{ij} = \partial_{y_i}(\Psi^j(\Phi(y))) = \Psi_{z_k}^j \Phi_{y_i}^k \\
\Phi_{y_l}^i \Phi_{y_l}^j \Psi_{z_j}^m \Psi_{z_k}^m &= \Phi_{y_l}^i \Psi_{z_k}^m \delta_{lm} = \Phi_{y_l}^i \Psi_{z_k}^l = \delta_{ik}.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Weil $\Psi_{z_j}(z_1, \dots, z_{n-2}, 0)$ tangentiell zu $\partial\omega$ im Punkt $\Psi(z_1, \dots, z_{n-2}, 0)$ für alle $j \in \{1, \dots, n-2\}$ ist und $\Psi_{z_{n-1}}(z_1, \dots, z_{n-2}, 0) = \nu(\Psi(z_1, \dots, z_{n-2}, 0))$ senkrecht dazu liegt, gilt

$$\Psi_{z_j}(z_1, \dots, z_{n-2}, 0) \cdot \Psi_{z_{n-1}}(z_1, \dots, z_{n-2}, 0) = 0, \tag{5.58}$$

also

$$\begin{aligned}
g_{j,n-1}(z) &= \Psi_{z_j}(z_1, \dots, z_{n-1}) \cdot \Psi_{z_{n-1}}(z_1, \dots, z_{n-1}) \\
&= (\Psi_{z_j}(z_1, \dots, z_{n-2}, 0) + z_{n-1} \partial_{z_j} \nu(\Psi(z_1, \dots, z_{n-2}, 0))) \\
&\quad \cdot \Psi_{z_{n-1}}(z_1, \dots, z_{n-1}) \\
&= \underbrace{\Psi_{z_j}(z_1, \dots, z_{n-2}, 0) \cdot \Psi_{z_{n-1}}(z_1, \dots, z_{n-1})}_{=0} \\
&\quad + z_{n-1} \frac{1}{2} \partial_{z_j} \underbrace{\nu^2(\Psi(z_1, \dots, z_{n-2}, 0))}_{=1} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Da die Matrix symmetrisch ist, ergibt sich die Gestalt

$$g_{ij}(z) = \Psi_{z_i}^k(z) \Psi_{z_j}^k(z) = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.60}$$

Damit hat auch ihre Inverse $g^{ij} = \nabla\Phi^i \cdot \nabla\Phi^j$ diese Gestalt. Dies erlaubt uns die Herleitung von L^p -Abschätzungen:

Satz 5.7: Die Funktion $u \in H^{2,p}(\Omega)$ genüge der Differentialgleichung (5.50). Für die Koeffizienten gelte $\|a_j\|_{L^\infty} \leq k$. Dann gibt es zu $p \in (1, \infty)$ eine Konstante C , die nur von n, p, k und Ω abhängt, so daß für die Funktion u gilt:

$$\|u\|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq C(\|F\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{H^{1-1/p,p}(\{\alpha\} \times \omega)} + \|u\|_{H^{1-1/p,p}(\{\delta\} \times \omega)}). \tag{5.61}$$

BEWEIS. Dieser Satz wird ähnlich bewiesen wie Satz 5.6, unterschiedlich ist lediglich die Behandlung des Randes. In Satz 5.6 wurde zu jedem Punkt aus dem Inneren des Gebiets eine ganz im Inneren liegende Umgebung gefunden und dort eine innere lokale Abschätzung verwendet, ebenso wurde zu jedem Randpunkt das Gebiet lokal

glattgebogen und mit einer Randabschätzung abgeschätzt. Ein Kompaktheitsargument lieferte dann die Abschätzung für das ganze Gebiet. Für diesen Satz dagegen wird folgendermaßen verfahren:

Für jeden inneren Punkt des Gebiets finden wir wie gehabt eine lokale Abschätzung, ebenso wird für jeden Punkt aus dem glatten Rand $\{\alpha, \delta\} \times \omega$ eine lokale Randabschätzung durchgeführt, was problemlos ist, wenn man die Umgebung so klein wählt, daß man von den Ecken im Gebietsrand wegbleibt. Neu ist die Behandlung der Punkte aus $[\alpha, \delta] \times \partial\omega$. Zu jedem solchen Punkt kann das Gebiet ω wie oben beschrieben lokal glattgebogen werden, die x_1 -Koordinate bleibt ohne Transformation bestehen. Wie man den Transformationsgleichungen (5.55) und (5.56) entnimmt, genügt die glattgebogene Funktion v dann einer Differentialgleichung

$$v_{x_1 x_1} + g^{ij} v_{z_i z_j} + a_1 v_{x_1} + \tilde{a}_j v_{z_j} = \tilde{F}((x_1, z), v) \quad (5.62)$$

mit der Randbedingung $v_\nu = v_{z_{n-1}} = 0$. Mittels der Vorschrift

$$v(x_1, z_1, \dots, z_{n-2}, z_{n-1}) := v(x_1, z_1, \dots, z_{n-2}, -z_{n-1}) \quad (5.63)$$

wird v gespiegelt. Dabei ändern sich die Vorzeichen der Ableitungen $v_{z_{n-1}}$, $v_{x_1 z_{n-1}}$, $v_{z_1 z_{n-1}}$, \dots , $v_{z_{n-2} z_{n-1}}$. Die Koeffizienten der Terme zweiter Ordnung der Differentialgleichung bleiben erhalten, denn die Matrix $(g^{ij})_{ij}$ hat wie vorher festgestellt an den Stellen, wo die Ableitungen das Vorzeichen wechseln, eine Null stehen. Das heißt, daß die gespiegelte Funktion der Differentialgleichung (5.62) genügt, deren Koeffizienten zweiter Ordnung stetig sind. Daher lassen sich auch hier lokale L^p -Abschätzungen finden, und zwar innere, falls der Ursprungspunkt aus $(\alpha, \delta) \times \partial\omega$ stammt, und Randabschätzungen, falls der Punkt aus $\{\alpha, \delta\} \times \partial\omega$ stammt (den ursprünglichen Gebietsecken), wobei dann der verbleibende Rand der (gerade) Dirichletrand ist, denn der Neumannrand wurde soeben durch Spiegelung unschädlich gemacht. Da die Integralnormen der Funktion auf dem Spiegelgebiet gleich den Integralnormen auf dem ursprünglichen Gebiet sind, folgt am Ende mittels des Kompaktheitsarguments die gewünschte L^p -Abschätzung auf Ω . \square

Mit dieser Methode lassen sich auch Schauderabschätzungen durchführen, solange man weiß, daß alle Koeffizienten der Differentialgleichung Hölderstetig sind.

Satz 5.8: *Die Funktion u genüge der Differentialgleichung (5.50). Die Koeffizienten und die Funktion F seien von der Klasse $C^{0,\kappa}$, außerdem gelte $a_j = 0$ für $j \neq 1$. Dann ist $u \in C^{2,\kappa}(\bar{\Omega})$.*

BEWEIS. Anstelle der L^p -Abschätzungen werden Schauderabschätzungen verwendet, ansonsten wird genauso wie in Satz 5.7 verfahren. Hierbei muß jedoch garantiert werden, daß die Koeffizienten nach der Spiegelung noch Hölderstetig sind. Konkret wird als innere Abschätzung Satz 6.2 oder Korollar 6.3 aus [GT] und als Randabschätzung Korollar 6.7 verwendet werden.

Im Fall $n = 2$ tritt das Problem der Randglattheit nicht auf, da ω ein Intervall ist und keine Spiegelung erforderlich ist. Im Fall $n = 3$ bedienen wir uns eines Resultats aus

der Differentialgeometrie. Schreibt man die Transformation des Laplaceoperators beim Glattbiegen mittels der Christoffelsymbole auf, so ergibt sich gemäß [Ham] (Seite 4), daß $\Delta_y u$ übergeht in

$$g^{ij}v_{z_i z_j} - g^{ij}\Gamma_{ij}^k v_{z_k}. \quad (5.64)$$

$\partial\omega$ ist dann als eindimensionale Mannigfaltigkeit lokal eine Kurve, durch die wir eine Geodätische laufen lassen und so unsere Funktion ψ erhalten. Zu dieser Geodätischen bilden wir wie in Gleichung (5.54) die Fermikoordinaten. Gemäß einem Resultat aus [GKM] (Seiten 113-114) verschwinden dann die Christoffelsymbole entlang der Geodätischen: $\Gamma_{ij}^k \circ \psi = 0$. Damit fallen die Terme erster Ordnung, die durch den Laplaceoperator entstehen, auf dem Gebietsrand weg. Da die Differentialgleichung nach Voraussetzung ebenfalls keine Terme erster Ordnung in y - bzw. z -Richtung enthält, entstehen hier auch keine Unstetigkeiten. Die Terme zweiter Ordnung wurden bereits vorher als stetig erkannt; für die Hölderstetigkeit gilt das gleiche. Somit erhält man nach der Spiegelung eine Funktion, die einer Differentialgleichung mit hölderstetigen Koeffizienten genügt, so daß die Anwendung der lokalen Schauderabschätzungen möglich ist. Wie 5.7 wird durch ein Kompaktheitsargument die Schauderabschätzung auf dem ganzen ungespiegelten Gebiet ermöglicht.

Im Fall $n \geq 4$ verschwinden die Christoffelsymbole i. allg. nicht, so daß mit Unstetigkeiten gerechnet werden muß, die die Durchführung der Schauderabschätzungen verhindern. An dieser Stelle liegt die Lücke der Diplomarbeit, die trotz vieler Bemühungen und Forschungen in verschiedene Richtungen leider nicht geschlossen werden konnte. \square

Kapitel 6

Eindeutigkeit

Unter etwas schärferen Regularitätsvoraussetzungen an die Koeffizienten der Differentialgleichung kann nicht nur die Existenz, sondern auch die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt werden. Für endliche Zylinder wurde dies bereits im Zusammenhang mit der Monotonie gezeigt (Satz 3.1), hier wird mit einer ganz anderen Methode die Eindeutigkeit für den unendlichen Zylinder behandelt. Eine leichte Schlußfolgerung wird dann die strenge Monotonie von Lösungen sein (Satz 6.8). Da dieses Kapitel als Ergänzung und nicht als Teil der eigentlichen Diplomarbeit zu verstehen ist, wird auf aufwendige Vorarbeiten hinsichtlich der asymptotischen Darstellbarkeit von Lösungsfunktionen verzichtet und stattdessen auf die entsprechenden Literaturstellen verwiesen.

Das Hauptresultat dieses Kapitels ist

Satz 6.1: Sei $u \in C^2(\overline{Z_\infty})$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u - \beta(y)u_{x_1} + f(y, u) = 0 \quad \text{in } Z_\infty, \quad (6.1)$$

$$u_\nu = 0 \quad \text{auf } \partial Z_\infty. \quad (6.2)$$

Die Funktion β sei die Summe einer gegebenen Funktion α und einer freien Konstanten c :

$$\beta(y) = c + \alpha(y). \quad (6.3)$$

Sei $\alpha \in C^0(\overline{\omega})$ und $f = f(y, s)$ stetig in der Variablen y und von der Klasse $C^{1,\delta}$ in der Variablen s . Es gelte

$$f(y, r) \equiv 0 \quad \text{für } 0 \leq r \leq r_1 > 0, \quad (6.4)$$

$$f(y, 1) = 0 \quad \text{für } y \in \overline{\omega}, \quad (6.5)$$

$$b(y) := -f_s(y, 1) > 0 \quad \text{für } y \in \overline{\omega}. \quad (6.6)$$

Weiterhin gelte

$$0 < u < 1, \quad (6.7)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} u(x_1, y) = 0, \quad (6.8)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} u(x_1, y) = 1. \quad (6.9)$$

Dann sind die Konstante c und die Funktion u bis auf Translation in x_1 -Richtung eindeutig bestimmt.

6.1 Asymptotische Darstellung

Seien (u, c) und (u', c') Lösungen mit $c' \geq c$. Seien

$$\begin{aligned} \beta(y) &:= c + \alpha(y), \\ \beta'(y) &:= c' + \alpha(y). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Aus dem Kapitel 4 über das verallgemeinerte Eigenwertproblem wissen wir, daß es zu (u, c) und (u', c') jeweils genau einen positiven verallgemeinerten Haupteigenwert λ und λ' mit den zugehörigen Eigenfunktionen $\Phi > 0$ und $\Phi' > 0$ und jeweils genau einen negativen verallgemeinerten Haupteigenwert τ und τ' mit den zugehörigen Eigenfunktionen $\Psi > 0$ und $\Psi' > 0$ gibt, so daß gilt:

$$\begin{aligned} -\Delta_y \Phi &= (\lambda^2 - \lambda\beta)\Phi && \text{in } \omega, \\ -\Delta_y \Phi' &= (\lambda'^2 - \lambda'\beta')\Phi' && \text{in } \omega, \\ (-\Delta_y + b(y))\Psi &= (\tau^2 - \tau\beta)\Psi && \text{in } \omega, \\ (-\Delta_y + b(y))\Psi' &= (\tau'^2 - \tau'\beta')\Psi' && \text{in } \omega, \\ \Phi_\nu = \Phi'_\nu = \Psi_\nu = \Psi'_\nu &= 0 && \text{auf } \partial\omega. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Aus Proposition 4.3 und den anderen Resultaten der Kapitel 2 und 4 von [BN1] folgt, daß u und u' die folgenden asymptotischen Darstellungen nahe $x_1 = \pm\infty$ haben:

$$\begin{aligned} u(x_1, y) &= \alpha e^{\lambda x_1} \Phi(y) + r(x_1, y) e^{\lambda x_1} && \text{für } x_1 \rightarrow -\infty, \\ u(x_1, y) &= 1 - \gamma e^{\tau x_1} \Psi(y) + R(x_1, y) e^{\tau x_1} && \text{für } x_1 \rightarrow +\infty, \\ u'(x_1, y) &= \alpha' e^{\lambda' x_1} \Phi'(y) + r'(x_1, y) e^{\lambda' x_1} && \text{für } x_1 \rightarrow -\infty, \\ u'(x_1, y) &= 1 - \gamma' e^{\tau' x_1} \Psi'(y) + R'(x_1, y) e^{\tau' x_1} && \text{für } x_1 \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (6.12)$$

wobei α, α', γ und γ' positive Konstanten sind. Die Funktionen r, r', R und R' konvergieren gleichmäßig in y gegen 0 für $x_1 \rightarrow +\infty$ bzw. $-\infty$. Über die verallgemeinerten Eigenwerte wissen wir

$$\tau \leq \tau' < 0 < \lambda \leq \lambda', \quad (6.13)$$

im Fall $c' > c$ gilt sogar

$$\tau < \tau' < 0 < \lambda < \lambda'. \quad (6.14)$$

6.2 Verschiebungssatz

Satz 6.2: Seien (u, c) und (u', c') Lösungen im Sinn von Satz 6.1. Zu $s \in \mathbb{R}$ sei

$$u^s(x_1, y) := u(x_1 + s, y) \quad (6.15)$$

die um s nach links verschobene Funktion u . Dann gibt es ein $s_0 \in \mathbb{R}$, so daß für alle $s \geq s_0$ gilt:

$$u^s - u' > 0. \quad (6.16)$$

OBdA nehmen wir $c' \geq c$ an. Zunächst beweisen wir drei Lemmata.

Lemma 6.3: Es gibt Konstanten s_0 und C_0 , so daß für alle $s \geq s_0$ und $x_1 \leq C_0 - s$ gilt: $u^s - u' > 0$.

BEWEIS. Mit Hilfe der asymptotischen Darstellungen von u^s und u' sieht man

$$\begin{aligned} & u^s(x_1, y) - u'(x_1, y) \\ &= \underbrace{[(\alpha\Phi(y) + r(x_1 + s, y)) e^{\lambda s} - e^{(\lambda' - \lambda)x_1} (\alpha'\Phi'(y) - r'(x_1, y))] e^{\lambda x_1}}_{\substack{\geq C_3 > 0 \text{ für } x_1 \leq C_4 - s \\ \geq 2C_1 \text{ für } x_1 \leq C_4 - s, s \geq s_0}} \quad \underbrace{e^{(\lambda' - \lambda)x_1} (\alpha'\Phi'(y) - r'(x_1, y))}_{\leq C_1 > 0 \text{ für } x_1 \leq C_2} \quad (6.17) \\ & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{> 0 \text{ für } x_1 \leq C_0 - s, s \geq s_0} \end{aligned}$$

□

Lemma 6.4: Es gibt Konstanten s_0 und C_5 , so daß für alle $s \geq s_0$ und $x_1 \leq C_5$ gilt: $u^s - u' > 0$.

BEWEIS. Seien s_0 und C_0 die Konstanten aus Lemma 6.3. Setze

$$m := \min_{x_1 \geq C_0 - s_0, y \in \bar{\omega}} u^{s_0}(x_1, y) > 0. \quad (6.18)$$

Dieses Minimum existiert wegen $u^{s_0}(x_1, y) \rightarrow 1$ für $x_1 \rightarrow \infty$ und $0 < u^{s_0} < 1$. Zu $y \in \bar{\omega}$ wähle $C_5(y) \leq C_0 - s_0$ so, daß

$$\min_{x_1 \geq C_5(y)} u^{s_0}(x_1, y) = m \quad \text{und} \quad u^{s_0}(C_5(y), y) = m \quad (6.19)$$

ist. Dies ist möglich wegen $u^{s_0}(x_1, y) \rightarrow 0$ für $x_1 \rightarrow -\infty$. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, daß $C_5(y)$ stetig gewählt werden kann. Aus Lemma 6.3 wissen wir bereits

$$u^s(x_1, y) - u'(x_1, y) > 0 \quad \text{für } x_1 < C_5(y) - s + s_0 \text{ und } s \geq s_0. \quad (6.20)$$

Die Ungleichung muß also noch für das Intervall $[C_5(y) - s + s_0, C_5(y)]$ bewiesen werden. Für ein x_1 aus diesem Intervall gilt wegen $x_1 + s - s_0 \geq C_5(y)$ und (6.19)

$$u^s(x_1) = u^{s_0+(s-s_0)}(x_1) = u^{s_0}(x_1 + s - s_0) \geq m. \quad (6.21)$$

Wir verschieben u^{s_0} um $C_5(y) - x_1$ nach links. Lemma 6.3 impliziert

$$\begin{aligned} 0 &< u^{s_0+C_5(y)-x_1}(x_1, y) - u'(x_1, y) = u^{s_0}(C_5(y), y) - u'(x_1, y) \\ &= m - u'(x_1, y) \leq u^s(x_1, y) - u'(x_1, y). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Wir haben nun gezeigt: $u^s(x_1, y) - u'(x_1, y) > 0$ für $x_1 \leq C_5(y)$, $s \geq s_0$. Setze $C_5 := \min_{y \in \bar{\omega}} C_5(y)$, dann folgt die Behauptung. \square

Lemma 6.5: *Es gibt Konstanten s_1 und C_6 , so daß für alle $s \geq s_1$ und $x_1 \geq C_6$ gilt: $u^s - u' > 0$.*

BEWEIS. Analog zum Beweis von Lemma 6.3 gilt

$$\begin{aligned} &u^s(x_1, y) - u'(x_1, y) \\ &= \underbrace{[(-\gamma\Psi(y) + R(x_1 + s, y)) e^{\tau s} + e^{(\tau'-\tau)x_1}(\gamma'\Psi'(y) - R'(x_1, y))]}_{\substack{\geq -C_9 < 0 \text{ für } x_1 \geq C_{10}, s \geq 0 \\ \geq -C_7/2 \text{ für } x_1 \geq C_{10}, s \geq s_1}}] e^{\tau x_1}}_{> 0 \text{ für } x_1 \geq C_6, s \geq s_1}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

\square

Nun kann der Satz bewiesen werden:

BEWEIS. Lemma 6.4 und Lemma 6.5 zeigen: $u^s - u' > 0$ für $s \geq s_2$, $x_1 \leq C_5$ oder $x_1 \geq C_6$. Auf $[C_5, C_6]$ nimmt u' sein Maximum $M < 1$ an. Durch hinreichend weites Verschieben von u nach links, d.h. hinreichend große Wahl von s , kann wegen $u \rightarrow 1$ für $x_1 \rightarrow \infty$ die Ungleichung $u^s|_{[C_5, C_6]} > M$ erreicht werden. Also gilt dann $u^s - u' > 0$. \square

6.3 Verschiebung

Gemäß dem Verschiebungssatz 6.2 können wir durch hinreichend weite Verschiebung von u nach links, d.h. hinreichend große Wahl von s , erreichen, daß $u^s - u' \geq 0$ ist. Verschiebe nun u soweit wie möglich zurück, d.h. wähle

$$s := \inf\{r \in \mathbb{R} : u^r - u' \geq 0\}. \quad (6.24)$$

Von nun an sei mit s stets dieses fest gewählte s gemeint.

Satz 6.6: *Es gibt einen Punkt $(x_1^0, y^0) \in \overline{Z_\infty}$, so daß die Funktion*

$$z := u^s - u' \quad (6.25)$$

dort verschwindet, d.h. $z(x_1^0, y^0) = 0$.

BEWEIS. Wir nehmen an, daß die Aussage falsch ist, also $z > 0$ in $\overline{Z_\infty}$ gilt. Betrachte die asymptotischen Darstellungen von z für $x_1 \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} z(x_1, y) &= e^{\lambda x_1} \underbrace{(\alpha e^{\lambda s} \Phi(y))}_{=:A} - \underbrace{\alpha' e^{(\lambda' - \lambda)x_1} \Phi'(y)}_{=:B} \\ &\quad + r(x_1 + s, y) e^{\lambda s} - r'(x_1, y) e^{(\lambda' - \lambda)x_1} \quad \text{für } x_1 \rightarrow -\infty, \\ z(x_1, y) &= e^{\tau' x_1} \underbrace{(-\gamma e^{(\tau - \tau')x_1} e^{\tau s} \Psi(y))}_{=:C} + \underbrace{\gamma' \Psi'(y)}_{=:D} \\ &\quad + R(x_1 + s, y) e^{(\tau - \tau')x_1} e^{\tau s} - R'(x_1, y) \quad \text{für } x_1 \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Die Summanden mit den Resttermen konvergieren für $x_1 \rightarrow \pm\infty$ gegen null. Falls $c' > c$ ist, so gilt $\lambda' > \lambda > 0 > \tau' > \tau$ und die Terme B und C konvergieren gegen 0. Die verbleibenden Terme A und D sind strikt positiv, so daß man sieht, daß eine etwas kleinere Wahl des Parameters s nicht die Nichtnegativität von z für betragsmäßig hinreichend große x_1 gefährdet. Da nach Annahme $z > 0$ in $\overline{Z_\infty}$ ist, wäre s somit nicht minimal, d.h. der Fall $c' > c$ kann nicht auftreten.

Betrachten wir also nun den Fall $c' = c$, d.h. $\lambda' = \lambda$, $\tau' = \tau$, $\Phi' = \Phi$ und $\Psi' = \Psi$. A, B, C und D sind dann unabhängig von x_1 . Weil Φ und Ψ strikt positiv sind, können $A + B$ und $C + D$ nur entweder strikt negativ, strikt positiv oder konstant null sein. $A + B$ und $C + D$ sind aber keinesfalls negativ, denn sonst könnte nicht $z > 0$ gelten. Falls beide Terme strikt positiv wären, so wäre mit dem Argument von oben s nicht minimal. Somit folgt, daß mindestens einer der beiden Terme verschwindet, d.h.

$$\alpha e^{\lambda s} = \alpha' \quad \text{oder} \quad \gamma e^{\tau s} = \gamma'. \quad (6.27)$$

OBdA führen wir nur den Fall $\gamma e^{\tau s} = \gamma'$ zum Widerspruch — der andere wird analog behandelt.

$z = u^s - u'$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\Delta z - \beta(y) z_{x_1} - b(y) z = f(y, u') - b(y)(1 - u') - f(y, u^s) + b(y)(1 - u^s), \quad (6.28)$$

denn u^s und u' erfüllen die Differentialgleichung (6.1), und durch Subtraktion dieser Gleichungen voneinander und beidseitigem Hinzufügen der rechten Seite von (6.28) erhält man (6.28). Da f eine $C^{1,\delta}$ -Funktion im zweiten Argument ist, läßt sich f um 1 in eine Taylorreihe entwickeln und das Lagrangesche Restglied mit der Hölderbedingung abschätzen. So erkennt man, daß die rechte Seite von der Größenordnung $O(e^{(1+\delta)\tau x_1})$ ist für $x_1 \rightarrow \infty$. In den Kapiteln 2 und 4 von [BN1] wird die asymptotische Darstellung

$$z(x_1, y) = \varrho e^{\tau x_1} \Psi(y) + O(e^{\bar{\tau} x_1}) \quad \text{für } x_1 \rightarrow \infty \quad (6.29)$$

mit Konstanten $\varrho \geq 0$ und $\bar{\tau} < \tau$ gezeigt. Wir linearisieren den rechten Teil der Differentialgleichung (6.28):

$$\begin{aligned} & f(y, u') - b(y)(1 - u') - f(y, u^s) + b(y)(1 - u^s) \\ &= f(y, tu' + (1-t)u^s) - b(y)(1 - (tu' + (1-t)u^s)) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [f(y, tu' + (1-t)u^s) - b(y)(1 - (tu' + (1-t)u^s))] dt \\ &= -z \int_0^1 f_u(y, tu' + (1-t)u^s) + b(y) dt \\ &= -z d(x_1, y). \end{aligned} \quad (6.30)$$

z erfüllt also eine lineare Differentialgleichung

$$\Delta z - \beta(y) z_{x_1} + (d(x_1, y) - b(y)) z = 0. \quad (6.31)$$

Wende Lemma 4.3 aus [BN1] an: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $E > 0$, so daß für $x_1 \geq 0$ gilt:

$$E e^{(\tau-\varepsilon)x_1} \Psi(y) \leq z(x_1, y). \quad (6.32)$$

Für $\varepsilon < \tau - \bar{\tau}$ sieht man, daß $\varrho > 0$ in (6.29) sein muß. Andererseits erkennt man $\varrho = 0$ aus (6.26), denn es gilt ja $\gamma e^{\tau s} = \gamma'$ und damit auch $C + D = 0$. Dies ist ein Widerspruch, also muß die Annahme falsch sein. Damit ist bewiesen, daß z an einer Stelle aus $\overline{Z_\infty}$ den Wert 0 annimmt. \square

6.4 Maximumprinzip für $u^s - u'$

Satz 6.7: *Die Funktion*

$$z := u^s - u' \quad (6.33)$$

sei auf $\overline{Z_\infty}$ nichtnegativ und nehme an mindestens einer Stelle den Wert 0 an. Sie genüge in Z_∞ der Differentialungleichung

$$\Delta z - \bar{\beta}(y)z_{x_1} + f(y, u^s) - f(y, u') \leq 0, \quad (6.34)$$

und auf dem Rand ∂Z_∞ gelte $z_\nu = 0$. Dann gilt $z \equiv 0$.

BEWEIS. Wir linearisieren die Differentialungleichung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta z - \bar{\beta}(y)z_{x_1} + f(y, u^s) - f(y, u') \\ &= \Delta z - \bar{\beta}(y)z_{x_1} + f(y, tu^s + (1-t)u') \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \Delta z - \bar{\beta}(y)z_{x_1} + \int_0^1 \frac{\partial f(y, tu^s + (1-t)u')}{\partial t} dt \\ &= \Delta z - \bar{\beta}(y)z_{x_1} + z \int_0^1 f'(y, tu^s + (1-t)u') dt \\ &= \Delta z - \bar{\beta}(y)z_{x_1} + z\bar{f}(x_1, y). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Zu einem Punkt $(x_1^0, y^0) \in \overline{Z_\infty}$ betrachte die Vergleichsfunktion

$$w(x_1, y) := 2 - e^{A(x_1 - x_1^0)}. \quad (6.36)$$

In einer Umgebung von (x_1^0, y^0) (geschnitten mit $\overline{Z_\infty}$) gilt dann $w > 0$ und für ein hinreichend großes $A > 0$:

$$\Delta w - \bar{\beta}(y)w_{x_1} + \bar{f}(x_1, y)w = 2\bar{f}(x_1, y) - (A^2 - A\bar{\beta}(y) + \bar{f}(x_1, y))e^{A(x_1 - x_1^0)} \leq 0. \quad (6.37)$$

Das Maximumprinzip¹ zeigt: z kann in der Umgebung kein nichtpositives Minimum annehmen, es sei denn z ist konstant. (Das Maximumprinzip gilt zunächst nur im Innern. Falls jedoch z nichtkonstant ist und ein Randminimum 0 aufweist, so müßte $\frac{z}{w}$ dort eine nicht verschwindende Normalenableitung haben. Die Normale liegt senkrecht zur x_1 -Achse, so daß $w_\nu = 0$ und $z_\nu \neq 0$ folgen würde. Das ist jedoch aufgrund der Neumannrandbedingung an z ausgeschlossen.) Also ist die Menge $M := \{(x_1, y) \in \overline{Z_\infty} : z(x_1, y) = 0\}$ relativ offen in $\overline{Z_\infty}$. Da z stetig ist, ist sie auch relativ abgeschlossen in $\overline{Z_\infty}$, so daß entweder $M = \overline{Z_\infty}$ oder $M = \emptyset$ gilt. Das letzte ist jedoch ausgeschlossen, da z nach Voraussetzung an einer Stelle den Wert 0 annimmt. Also folgt $z \equiv 0$. \square

6.5 Eindeutigkeit der Lösung

Mit Hilfe der Resultate der vorangegangenen Abschnitte dieses Kapitels ist es nun nicht schwer, die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen, i.e. $c = c'$ und $u = u'$ bis auf Translation in x_1 -Richtung. u^s bzw. u' erfüllen die Differentialgleichungen

¹Siehe [PW], Theorem 10 (Seite 73).

$$\begin{aligned}\Delta u^s - (c + \alpha(y))u_{x_1}^s + f(y, u^s) &= 0, \\ \Delta u' - (c' + \alpha(y))u'_{x_1} + f(y, u') &= 0.\end{aligned}\tag{6.38}$$

Also erfüllt

$$z := u^s - u' \tag{6.39}$$

die Differentialungleichung

$$(\Delta - \beta' \partial_{x_1})z + f(y, u^s) - f(y, u') = (c - c')u_{x_1}^s \leq 0. \tag{6.40}$$

Der Verschiebungssatz 6.2 zeigt, daß wir ein s finden können, so daß z positiv ist. Verkleinere s nun soweit, bis z an mindestens einer Stelle den Wert 0 annimmt. Das Maximumprinzip Satz 6.7 zeigt $z \equiv 0$, also $u^s = u'$, womit die Gleichheit der Funktionen u und u' bis auf Translation gezeigt ist. Die Differentialungleichung (6.40) reduziert sich nun zu

$$(c - c')u_{x_1}^s = 0. \tag{6.41}$$

Da u^s für $x_1 \rightarrow \infty$ gegen 1 und für $x_1 \rightarrow -\infty$ gegen 0 konvergiert, ist $u_{x_1}^s \not\equiv 0$. Also folgt $c = c'$. Damit ist Satz 6.1 bewiesen.

6.6 Strenge Monotonie

Mit den Resultaten dieses Kapitels läßt sich leicht eine weitere Eigenschaft von Lösungen folgern, nämlich die strenge Monotonie in x_1 -Richtung. Wegen $0 < u \leq 1$ gemäß den bekannten Maximumprinzipien folgte sofort die Eigenschaft $0 < u < 1$. Dies wurde allerdings bereits als Voraussetzung für die asymptotischen Darstellungen angenommen, so daß diese Folgerung keinen Sinn ergeben würde.

Satz 6.8: *Sei u eine Lösung im Sinn von Satz 6.1. Dann ist u streng monoton wachsend in x_1 -Richtung.*

BEWEIS. Wir nehmen an, daß die Aussage falsch sei. Dann gibt es Werte $y \in \bar{\omega}$ und $x_1^1 < x_1^2$ mit $u(x_1^2, y) = u(x_1^1, y)$. Gemäß Satz 6.2 gibt es ein $s_0 \in \mathbb{R}$, so daß $z := u^s - u$ positiv für alle $s > s_0$ ist. Wähle s_0 minimal, d.h.

$$s_0 = \inf\{\bar{s} : u^s - u > 0 \text{ für alle } s > \bar{s}\}. \tag{6.42}$$

Nach Annahme gilt $s_0 \geq x_1^2 - x_1^1 > 0$. Gemäß Satz 6.6 gibt es einen Punkt, an dem $z = u^{s_0} - u$ verschwindet, und gemäß Satz 6.7 folgt $z \equiv 0$. Damit ist u s_0 -periodisch in x_1 -Richtung, was einen Widerspruch zu den Randbedingungen (6.8) und (6.9) ergibt. \square

Literaturverzeichnis

- [Ad] R. A. ADAMS: Sobolev spaces. Academic Press (1975)
- [ADN] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I. *Comm. Pure Appl. Math.* **12**, pp. 623-727 (1959)
- [Alt] H. W. ALT: *Lineare Funktionalanalysis*. 3. Auflage, Springer (1999)
- [Bgr] M. S. BERGER: *Nonlinearity and functional analysis*. Academic Press, New York, San Francisco, London (1977)
- [BL] H. BERESTYCKI, B. LARROUTUROU: A semilinear elliptic equation in a strip arising in a two-dimensional flame propagation model. *J. für Reine und Angewandte Mathematik* **396**, pp. 14-40 (1989)
- [BLL] H. BERESTYCKI, B. LARROUTUROU, P. L. LIONS: Multi-dimensional travelling-wave solutions of a flame propagation model. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **111** (1), pp. 33-49 (1990)
- [BN1] H. BERESTYCKI, L. NIRENBERG: Some qualitative properties of solutions of semilinear elliptic equations in cylindrical domains. *Analysis, et cetera*, Academic Press, Boston, pp. 115-164 (1990)
- [BN2] H. BERESTYCKI, L. NIRENBERG: Monotonicity, symmetry and antisymmetry of solutions of semilinear elliptic equations. *J. Geom. and Phys.* **5** (2), pp. 237-275 (1988)
- [GNN] B. GIDAS, W.-M. NI, L. NIRENBERG: Symmetry and related properties via the maximum principle. *Communications in Mathematical Physics* **68**, pp. 209-243 (1979)
- [GT] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER: *Elliptic partial differential equations of second order*. 2nd edition. Springer (1983)
- [GKM] D. GROMOLL, W. KLINGENBERG, W. MEYER: *Riemannsche Geometrie im Großen*. Springer, *Lecture Notes in Mathematics* (1968)

- [Ham] R. S. HAMILTON: Harmonic maps of manifolds with boundary. Springer, Lecture Notes in Mathematics (1975)
- [Hil1] S. HILDEBRANDT: Vorlesung über partielle Differentialgleichungen. Bonn, akademisches Jahr 1986-87
- [Hil2] S. HILDEBRANDT: Vorlesung über partielle Differentialgleichungen. Bonn, Sommersemester 1997
- [Nir] L. NIRENBERG: Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **8**, pp. 649-675 (1955)
- [PW] M. H. PROTTER, H. F. WEINBERGER: Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall (1967)
- [Wal] W. WALTER: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 5. Auflage, Springer (1993)