INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN

Diplomarbeit

Algebraische Mehrgittermethoden für Systeme partieller Differentialgleichungen

Daniel Oeltz

Aufgabensteller: Prof. Dr. Michael Griebel

Bonn, April 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Viele in der Physik, den Ingenieurwissenschaften oder der Chemie beobachteten Phänomene werden durch ein mathematisches Modell in Form von partiellen Differentialgleichungen beschrieben. Auf kostspielige oder in der Realität nur schwer durchführbare Experimente kann häufig verzichtet werden, wenn die Lösung der diese Experimente beschreibenden partiellen Differentialgleichung bekannt ist. Die Angabe einer analytischen Lösung dieser partiellen Differentialgleichung, also der Funktion, die diese Gleichung erfüllt, ist in den meisten Fällen allerdings nicht explizit möglich. Stattdessen ist der Einsatz leistungsfähiger Rechner notwendig, um möglichst gute Näherungen der gesuchten Lösung zu berechnen. Hierzu wird die entsprechende Differentialgleichung mit finiten Differenzen, finiten Elementen oder finiten Volumen diskretisiert, was zu einem großen, dünnbesetzten linearen Gleichungssytem führt.
Ein wichtiger Schritt zur Bestimmung einer Näherunglösung der entsprechenden partiellen Differentialgleichung ist somit die schnelle Lösung des entstandenen linearen Gleichungssystems. Da das Gleichungssystem nur dünn besetzt und die Zahl der Unbekannten in der Regel groß ist, ist die direkte Lösung mittels Gauß-Elimination bzw. LR-Faktorisierung zu Rechenzeit und Speicherplatz intensiv. Es bietet sich also die Verwendung iterativer Löser an. Hierbei haben sich klassische iterative Lösungsverfahren als ungeeignet herausgestellt, da die Konvergenzrate dieser Methoden nicht unabhängig von der Problemgröße ist. Soll der Fehler einer Näherungslösung der partiellen Differentialgleichung verkleinert werden, indem die Diskretisierung verfeinert wird, so sind zur Lösung des ensprechenden linearen Gleichungssystems mehr Iterationsschritte nötig als vor der Verfeinerung der Diskretisierung. Dieser Nachteil klassischer Iterationsverfahren machte die Entwicklung neuer iterativer Methoden für diese Problemklasse notwendig.
Ein erster Schritt in diese Richtung waren die geometrischen Mehrgitterverfahren. Bei diesen Verfahren wird eine besondere Eigenschaft klassischer Iterationsverfahren wie des Gauß-Seidel oder Jacobi-Verfahrens ausgenutzt: Obwohl die Fehlerreduktion als solches von der Problemgröße abhängig ist, wird der Fehler in den ersten Iterationsschritten stark geglättet. Das bedeutet, dass der Fehler auf einem gröberen Gitter einer nicht so feinen Diskretisierung gut approximiert werden kann. Das Residuum wird mittels einer Restriktion auf ein solches gröberes Gitter transportiert, dort als rechte Seite für das entsprechende Problem verwendet und die Lösung in den ursprünglichen feineren Raum mit einer geeigneten Interpolation zurücktransformiert und als Korrektur des ursprünglichen Fehlers verwendet. Dieses Vorgehen kann natürlich rekursiv auf verschieden großen Gittern angewandt werden, bis ein Problem entsteht, das klein genug ist, um direkt mittels Gauss-Elimination gelöst zu werden. Bei geeigneter Wahl der benötigten Komponenten, also den verschiedenen Grobgitteroperatoren, der Interpolations- und Restriktionsoperatoren zwischen den jeweiligen Gittern und eines geeigneten klassischen Iterationsverfahrens, erhält man so bei strukturierten Gittern in Modellproblemen ein Verfahren, das O(n) Rechenschritte pro Iteration und O(1) Iterationen benötigt um den Fehler um einen vorher festgelegten Faktor zu verkleinern. Solche Verfahren werden des-

halb auch als optimal bezeichnet.
Die Wahl der Komponenten ist dabei von wesentlicher Bedeutung für die Güte der Konvergenz dee Methode. Eine schlechte Wahl dieser Komponenten führt zu schlechteren Konvergenzergebnissen oder sogar zum kompletten Zusammenbruch der Konvergenz. Hierin liegt auch der Nachteil geometrischer Mehrgittermethoden. Die Wahl der richtigen Komponenten ist gerade für komplizierte Geometrien und unstrukturierte Gitter sowie für Probleme mit stark springenden Koeffizientenfunktionen äußerst problematisch.
Ein erster Schritt, dieses Problem zu bewältigen, war die Einführung einer matrixabhängigen Interpolation, bei der die Interpolation vom Programm zu fest vorgegebenen Gittern selbständig berechnet wird. Von da an ist es nur noch ein kleiner Schritt zu den algebraischen Mehrgittermethoden, die zusätzlich noch die Grobgitter, die Interpolations- und Restriktionsoperatoren sowie die Grobgitteroperatoren selbständig aus Informationen des zu lösenden linearen Gleichungssystems berechnen.
Da allein algebraische Informationen aus der Problemmatrix benutzt werden, ist es damit sogar möglich, diese Verfahren auch für lineare Gleichungssystem, die nicht aus der Diskretisierung einer partiellen Differentialgleichung stammen, zu verwenden. Für eine Vielzahl von Problemen, wie etwa für Diffusionsprobleme mit variierenden Koeffizienten, bei denen die Anwendung geometrischer Mehrgittermethoden schwierig ist, liefern die algebraischen Methoden gute Resultate. Besonders Gleichungssysteme, die zu M-Matrizen führen, können mit algebraischen Mehrgittermethoden effizient gelöst werden.
Allerdings ist die Entwicklung dieser Verfahren damit keinesfalls beendet. Es existieren weiterhin Probleme, bei denen herkömmliche algebraische Mehrgittermethoden keine zufriedenstellenden Ergebnisse liefern. Dazu zählen sowohl indefinite und unsymmetrische Probleme als auch Probleme, die aus der Diskretisierung von Systemen partieller Differentialgleichungen stammen. Doch gerade Systeme partieller Differentialgleichungen spielen in der Praxis eine bedeutende Rolle. So werden bei der Simulation eines Windkanals im Computer die Navier-Stokes-Gleichungen oder bei der Simulation von Crash-Tests Gleichungen aus der Elastizitätstheorie gelöst.
In dieser Arbeit soll deshalb ein algebraisches Mehrgitterverfahren für solche Systeme entwickelt und getestet werden. Da Gleichungen aus der linearen Elastizitätstheorie eine breite Anwendung finden und für viele Probleme gelöst werden müssen, liegt das Augenmerk vor allem auf der Lösung der aus dieser Problemklasse stammenden linearen Gleichungssysteme.

Kapitel zwei behandelt die grundsätzliche Funktionsweise von Mehrgitterverfahren. Es wird in diesem Zusammenhang nochmals auf den Unterschied zwischen geometrischen und algebraischen Mehrgittermethoden (AMG) eingegangen. Dabei soll eine erste Vorstellung vom Begriff des algebraisch glatten Fehlers und vom Prinzip des klassischen Iterationsverfahrens als Glätter im Mehrgitterzyklus vermittelt werden. Da das klassische AMG nach Ruge und Stüben die Grundlage für das in dieser Arbeit vorgestellte algebraische Mehrgitter bildet, wird dieses Verfahren kurz vorgestellt
Die Betrachtung des Falles von zwei Gittern führt dabei zu dem Variations-

Prinzip des 2-Gitter-Zyklus, woraus die Konvergenz im Fall von 2 Gitter folgt, wenn das verwendete klassische Iterationsverfahren konvergiert. Am Ende des Kapitels ist noch eine Interpretation des algebraischen Mehrgitterverfahrens im Fall von zwei Gittern als gestörter Schurkomplementansatz angegeben.

Nachdem zu Beginn des dritten Kapitels kurz auf die Probleme in der Anwendung klassischer algebraischer Mehrgittermethoden auf die Diskretisierung partieller Differentialgleichungen eingegangen wurde, werden zwei verschiedene Ansätze vorgestellt, die zu der Lösung dieser Probleme führen sollen. Dabei wird bei einem der beiden Ansätze, der die Grundlage des in dieser Arbeit vorgestellten AMG bildet, die Matrix in geeigneter Weise partitioniert, so dass die zu gleichen Gitterpunkten der zugrundeliegenden Diskretisierung gehörigen Unbekannten in einer gemeinsamen Gruppe zusammengefaßt sind. Diese Vorgehensweise führt zu einer natürlichen Blockung der Matrix, so dass die Berechnung der Mehrgitterkomponenten auf die einzelnen Blöcke übertragen werden muß. Vor der Diskussion, in welcher Form dies geschehen kann, wird die Konvergenz des Ansatzes im Fall von zwei Gittern für eine bestimmte Problemklasse bewiesen.
Danach wird auf die Frage nach der Übertragung des klassischen AMG nach Ruge und Stüben auf die Block-Struktur eingegangen. Hierbei spielt für die Grobgitterwahl des klassischen Verfahrens der Begriff der *starken Kopplung* eine wichtige Rolle, der für die Anwendung in dem vorgestellten Ansatz auf die Matrix-Blöcke übertragen wird.
Zum Abschluß des Kapitels werden noch unterschiedliche Interpolationen vorgestellt. Diese Interpolationen sind erneut Übertragungen von klassischen AMG-Interpolationen auf die Blockstruktur der Matrix.

Erste numerische Resultate des behandelten AMG sind in Kapitel vier wiedergegeben. Dabei werden die unterschiedlichen Interpolationen und starken Kopplungen an Diskretisierungen von einfachen Systemen partieller Differentialgleichungen miteinander verglichen. Die betrachteten Systeme sind Verallgemeinerungen von skalaren Diffusionsproblemen mit variablen Koeffizienten, für die das klassische AMG nach Ruge und Stüben bereits ausführlich untersucht wurde, auf den Systemfall. Dadurch ist es nicht verwunderlich, dass das in dieser Arbeit beschriebene AMG ähnliche Resultate wie das Ruge und Stüben AMG für die entsprechenden skalaren Fälle liefert. Insgesamt erweist sich das AMG für zwei Interpolationen und eine Vergröberung in allen Fällen als ein robuster und stabiler Löser.

In Kapitel fünf werden die beiden Interpolationen und die Vergröberung, die in Kapitel vier die besten Resultate geliefert haben, an Beispielen aus der Elastizitätstheorie genauer untersucht. Nach einer kurzen Einführung in die lineare Elastizitätstheorie wird gezeigt, dass die Elemente des Nullraums der zur schwachen Formulierung gehörigen Bilinearform, kurz *rigid boby modes* genannt, algebraisch glatt im Sinne der Definition aus Kapitel zwei sind. Da die Interpolationsgenauigkeit der Interpolation algebraisch glatter Fehler für die Konvergenz des AMG von Bedeutung ist, wird daher untersucht, wie gut die

Interpolationsoperatoren des AMG die *rigid body modes* interpolieren. Es stellt sich heraus, dass die Direkte Interpolation, die als Grundlage der beiden verwendeten Interpolationen dient, bei geeigneter Grobgitterwahl die *rigid body modes* exakt interpoliert.
Nach diesen theoretischen Überlegungen werden zunächst klassische Dirichletprobleme der Elastizitätstheorie betrachtet.
Obwohl das Verfahren für eine Interpolation besonders gute Resultate liefert, stellt sich die Methode für beide Interpolationen als stabil gegenüber der Problemgröße und Veränderungen der Poissonzahl heraus. Auch für zwei weitere klassische Probleme der Elastizitätstheorie, nämlich Sprünge im Elastizitätsmodul und gestreckte Gitter (large aspect ratios), liefert das AMG zufriedenstellende Konvergenzresultate.
Die bis dahin betrachteten Probleme waren allesamt reine Dirichletprobleme. In der Praxis sind solche Probleme von geringerer Bedeutung. Deshalb werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels Probleme der Elastizitätstheorie betrachtet, bei denen an Teilen des Randes gar keine Randbedingungen gesetzt sind. Es stellt sich dabei heraus, das die Konvergenzresultate in solchen Fällen schlechter werden, da die *rigid body modes* an solchen Punkten auf Grund der Vergröberung nicht exakt interpoliert werden.
Eine separate Vergröberung der Randpunkte und der Einsatz des Block-SOR-Verfahrens als Glätter mit dem Relaxationsparameter $\omega = 1.5$ verbessern die Konvergenzresultate, so dass auch diese Probleme effizient gelöst werden können.
Am Ende des Kapitels sind noch einige Konvergenzresultate für Probleme auf komplizierten Geometrien angegeben. Auch für solche Fälle stellt sich das vorgestellte AMG als effizienter Löser heraus.

2 Das AMG und seine Komponenten

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für algebraische Mehrgitterverfahren vorgestellt. Hierbei wird im ersten Abschnitt allgemein die Funktionsweise von Mehrgitterverfahren erklärt, bevor im nächsten Abschnitt das für diese Arbeit als Grundlage dienende AMG nach Ruge und Stüben vorgestellt wird.
Der dritte Abschnitt dient der mathematischen Analyse des algebraische Zweigitterverfahren für positiv definite Probleme, bei der sich herausstellt, dass der Grobgitterkorrekturschritt als Korrektur um die beste Approximation des Fehlers im Bildraum der Interpolation aufgefasst werden kann.

2.1 Funktionsweise algebraischer Mehrgittermethoden

Um die Funktionsweise von Mehrgittermethoden zu verdeutlichen, betrachte man das folgende Problem:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\Gamma_D, \Gamma_N \subset \mathbb{R}^2$ disjunkt, so dass $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$. Sei $f \in C^0(\Omega)$, $g_1 \in C^0(\Gamma_D)$, $g_2 \in C^0(\Gamma_N)$. Gesucht ist $u \in C^2(\Omega)$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f \text{ in } \Omega \\ u &= g_1 \text{ auf } \Gamma_D \\ \partial_n u &= g_2 \text{ auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

Die Diskretisierung dieses Problems auf einem Gitter Ω_h mit finiten Differenzen, finiten Elementen oder finiten Volumen der charakteristischen Größe h führt dann zu einem linearen Gleichungssystem:

$$A_h \cdot x = b. \tag{1}$$

Dabei ist $A_h = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dünnbesetzt, positiv definit und symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^n$. Solche Gleichungssysteme löst man typischerweise mit iterativen Verfahren. Diese Verfahren besitzen den Vorteil, dass nur die dünnbesetzte Matrix A_h abgespeichert werden muss und $O(n)$ Rechenoperationen für einen Iterationsschritt ausgeführt werden müssen. Ist die Konvergenzrate des verwendeten Verfahrens von der Problemgröße $n = 1/h^2$ unabhängig, so benötigt man zur Lösung $O(n)$ Rechenoperationen und $O(n)$ Speicherplatz, weshalb solche Methoden auch als optimal bezeichnet werden.
Die Konvergenzrate klassischer Iterationsverfahren, zum Beispiel des Gauss-Seidel-Verfahrens, ist im allgemeinen aber nicht unabhängig von der Problemgröße n: Obwohl die ersten Schritte des Gauss-Seidel-Verfahrens den Fehler stark verkleinern, wird die asymptotische Konvergenzrate mit wachsender Problemgröße schlechter, die Anzahl der benötigten Iterationsschritte wächst also mit der Problemgröße an.
Dafür beobachtet man bei diesem Problem eine andere Eigenschaft: Stark oszillierende Fehleranteile werden durch das Gauss-Seidel-Verfahren in den ersten Iterationsschritten stark verkleinert, so dass der verbleibende Fehleranteil *glatt* ist und somit auf einem gröberen Gitter Ω_H (zum Beispiel mit $H = 2 \cdot h$) gut dargestellt werden kann. In Abbildung 1 wird diese Glättungseigenschaft

des Gauss-Seidel-Verfahrens deutlich. Dazu wurde das obige Problem mit Nullrandbedingungen und der Fünfpunkteformel der finiten Differenzen auf einem uniformen Gitter des Einheitsquadrates diskretisiert. Dargestellt sind in der Abbildung 1 ein der Fehler eines zufällig gewählten Startwertes (links) und der resultierende Fehler nach Anwendung einer Gauss-Seidel-Iteration. Während der Startfehler noch stark oszilliert, ist der nach einem Iterationsschritt verbliebene

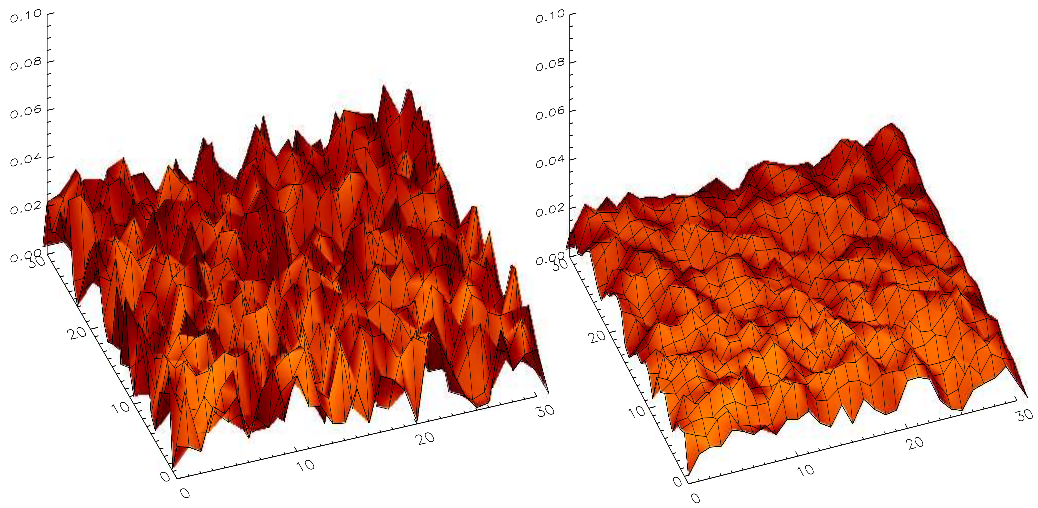


Abbildung 1: Glättungseigenschaft des Gauss-Seidel-Verfahrens. Links: Fehler des Startwertes vor dem Gauss-Seidel-Schritt, rechts: der vebliebene Fehler nach einem Schritt des Gauss-Seidel-Verfahrens.

Mehrgittermethoden (vgl. [11]) nutzen gerade diese Eigenschaft der klassischen Iterationsverfahren aus:
Nach ν_1 Iterationsschritten eines herkömmlichen Iterationsverfahrens, was im Mehrgitterkontext auch als Vorglättung bezeichnet wird, erhält man einen Fehler e, dessen oszillierende Komponenten sehr klein sind. Dann wird mit Hilfe eines Restriktionsoperators R, $R : \Omega_h \mapsto \Omega_H$, vom feinen auf ein geeignetes grobes Gitter und unter Verwendung eines Interpolationsoperators I, $I : \Omega_H \mapsto \Omega_h$, von diesem groben auf das feine Gitter eine neue Gleichung für das gröbere Gitter aufgestellt: Gesucht ist nun $\hat{e}$, so dass gilt:

$$RA_h I \cdot \hat{e} \quad = \quad I^T(b - A_h x). \quad \text{(Defektgleichung)} \tag{2}$$

Diese Gleichung wird auch Defektgleichung genannt, da sie den Defekt der genäherten Lösung auf dem groben Gitter beschreibt. Dieser berechnete Grobgitterfehler wird durch den Interpolationsoperator auf das feinere Gitter übertragen und von der angenäherten Lösung x abgezogen:

$$\hat{x} \quad = \quad x - I\hat{e}. \quad \text{(Grobgitterkorrektur)} \tag{3}$$

Der so erhaltene neue Fehler wird dann mit ν_2 Iterationsschritten des herkömmlichen Iterationsverfahrens (Nachglättung) weiter verkleinert.

Iterativ kann dieses Verfahren so lange fortgesetzt werden, bis die Näherungslösung eine geforderte Abbruchbedingung erfüllt, die eine Abschätzung für den Fehler der genäherten Lösung darstellt.
Obwohl die Matrix des Gleichungssystems (2) eine kleinere Dimension als das Ausgangssystem besitzt, ist die Defektgleichung im allgemeinen immer noch zu groß, um direkt gelöst zu werden. Stattdessen wird die gleiche Vorgehensweise auf die Defektgleichung angewendet. Rekursiv entsteht so eine Folge von Gleichungssystemen, bis eine Grobgittergleichung entsteht, die klein genug ist, um direkt gelöst werden zu können.
Die Anzahl der Iterationsschritte des beschriebenen Mehrgitterverfahrens zur Lösung der auf jedem Grobgitter existierenden Defektgleichung spielt dabei für die Konvergenz des gesamten Verfahrens eine wesentliche Rolle. Häufig wird nur eine Mehrgitteriteration für die Lösung der Grobgittergleichungen verwendet, ein Schritt des daraus resultierenden Gesamtverfahrens wird dann V-Zyklus genannt. Eine weitere Möglichkeit ist der sogenannte W-Zyklus, der entsteht, wenn auf jedem Level zwei Mehrgitteriterationen angewendet werden. In Abbildung 2.1 sind der V- und W-Zyklus im Fall von drei Gittern abgebildet.
Für k Gitter ist in dem folgenden Kasten der Algorithmus eines V-Zyklus beschrieben. Dabei bezeichnen R_i, I_i, $0 \leq i < k-1$ die Restriktion des i-ten Gitters auf das $(i+1)$-te Gitter bzw. die Interpolation vom $(i+1)$-te Gitter auf das i-te Gitter. $\mathcal{S}$ bezeichne den entsprechenden Glätter (zum Beispiel das Gauss-Seidel-Verfahren), der verwendet wird.

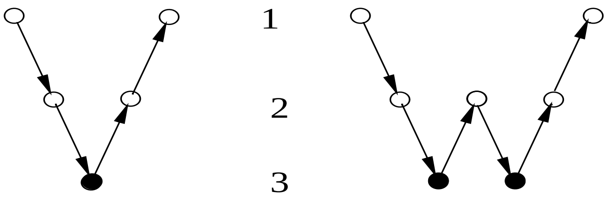


Abbildung 2: Links: V-Zyklus auf 3 Gittern. Rechts: W-Zyklus auf 3 Gittern

Werden die einzelnen Komponenten geeignet gewählt, so erhält man ein sehr effizientes Verfahren: Die hochfrequenten Anteile werden durch den Glätter, die niederfrequenten Anteile durch die Grobgitterkorrektur verringert. Insbesondere konvergiert das Verfahren mit Raten, die von der Problemgröße unabhängig sind.
Bei geometrischen Mehrgittermethoden müssen die Grobgitter und die Interpolations- bzw. Restriktionsoperatoren dem Verfahren als Eingabe übergeben werden. Bei komplizierten Geometrien und unstrukturierten Gittern, also gerade die für die Anwendung interessanten Fälle, ist die Bestimmung der entsprechenden Komponenten meist sehr aufwendig. Zusätzlich ist es in diesen Fällen oftmals unklar, wie die Komponeten gewählt werden müssen, um möglichst gute Konvergenzergebnisse zu erhalten, so dass geometrische Mehrgittermethoden in der Anwendung häufig sehr schlechte Konvergenzresultate liefern.

Der Mehrgitterzyklus

1. Setze $i = 0$, $b_0 = b$, $A_0 = A$.
2. Ist $i = k - 1$, so löse das Gleichungssystem $A_i x_i = b_i$ direkt, setze $i = i - 1$ und gehe zu 6.
3. Ist $i > 0$ wähle als Startwert $x_i^0 = 0$.
4. Glätte den Fehler e_i^0 des Startwertes x_i^0 mit ν_1 Glättungsschritten und erhalte eine neue angenäherte Lösung x_i^1:
$$e_i^1 = \mathcal{S}^{\nu_1} e_i^0 \qquad \text{(Vorglättung)}$$
5. Ist $i < k-1$, so setze $A_{i+1} = R_i A_i I_i$, $b_{i+1} = R_i(b_i - A_i x_1^i)$, $i = i+1$ und gehe dann zu 2. Für $i = k - 1$ setze $i = i - 1$ und fahre mit fort.
6. Korrigiere x_i^1 um die Prolongation des berechneten Fehlers:
$$x_i^2 = x_i^1 - I_i x_{i+1} \qquad \text{(Grobgitterkorrektur)} \tag{4}$$
7. Glätte den Fehler der genäherten Lösung x_i^2 mit ν_2 Glättungsschritten und bezeichne die neue angenäherte Lösung mit x_i:
$$e_i = \mathcal{S}^{\nu_2} e_i^2 \qquad \text{(Nachglättung)}$$
Ist $i > 0$ Setze $i = i - 1$ und gehe zu 6. Ansonsten: Ende des Mehrgitterschrittes.

Aus diesem Grund wurden algebraische Mehrgitterverfahren entwickelt, die im Gegensatz zu den geometrischen Methoden die Grobgitter und die dazugehörigen Interpolations- bzw. Restriktionsoperatoren nicht als Eingabe benötigen, sondern selbstständig aus Matrixinformationen berechnen. Im folgenden Abschnitt soll ein klassisches algebraisches Mehrgitter beschrieben werden, dass die Grundlage für das in dieser Arbeit vorgestellte Block-AMG bildet. Hierbei handelt es sich im wesentlichen um das klassische AMG nach Ruge und Stüben, das erstmals in [15] vorgestellt wurde. Obwohl noch einige andere Ansätze existieren ([5], [1]), wird dieses algebraische Mehrgitter aus zwei Gründen in dieser Arbeit verwendet: Zum einen verwendet das Verfahren tatsächlich nur Matrixinformationen und nicht etwa Informationen aus den Elementmatrizen wie dies in [5] beschrieben wird. Zum anderen ist das Verfahren weitverbreitet, wurde für eine Vielzahl von Problemen getestet und hat dabei gute Resultate geliefert. So kann diese Methode sowohl zur Lösung einer Vielzahl von skalaren elliptischen Problemen verwendet werden, wie in [15], [14], [9] und [14] ausführlich behandelt wurde, als auch bei der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen ([10])

oder bei dem Plazierproblem des Chipentwurfs ([13]).

2.2 Das klassische AMG nach Ruge und Stüben

Wie bei den meisten algebraischen Verfahren verwendet diese Methode die Transposition des Interpolationsoperators als Restriktionsoperator als die, $R = I^T$. Wenn A_h die Matrix des feineren Gitters bezeichnet, so hat der Grobgitteroperator A_H damit die folgende Gestalt:

$$A_H \quad = \quad I^T A_h I \tag{5}$$

Dieser Ansatz wird als Galerkin-Verfahren bezeichnet und hat den Vorteil, dass bei injektiver Interpolation der dadurch entstehende Grobgitteroperator vollen Rang hat und A_H positiv definit ist, wenn A_h positiv definit ist. Im nächsten Abschnitt wird außerdem noch gezeigt werden, dass bei dieser Wahl des Grobgitteroperators ein Korrekturschritt beim Zweigitterverfahren als Variationsproblem interpretiert werden kann und damit die Konvergenz gewährleistet ist, sofern der Glätter für das Ursprungsproblem konvergiert.
Gesucht ist also eine Lösung des linearen Gleichungssystems (1). Als Glätter im AMG nach Ruge und Stüben wird das Gauss-Seidel-Verfahren verwendet. Wenn e^k den Fehler vor dem $k+1$-ten Iterationsschritt des Gauss-Seidel-Verfahrens bezeichnet, so gilt für e^{k+1} :

$$e_i^{k+1} \quad = \quad -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j<i} a_{ij} e_j^{k+1} \; + \; \sum_{j>i} a_{ij} e_j^k \right) .$$

Nun verändert sich der Fehler nach einigen Iterationsschritten nur noch recht wenig, das bedeutet $e^{k+1} \approx e^k$, so dass dann näherungsweise

$$e_i^{k+1} \quad = \quad -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j \neq i} a_{ij} \; e_j^{k+1} \tag{6}$$

gilt. Es bezeichne $N = \{1, ...n\}$ die Indexmenge des linearen Gleichungssystems, C die Menge aller Grobgitterpunkte und $F := N \setminus C$ die Menge aller Fein- ohne Grobgitterpunkte, die der einfachheit halber auch Feingitterpunkte genannt werden. Sei $N_i = \{j \neq i \mid a_{ij} \neq 0\}$ die Menge aller Nachbarpunkte von i, $C_i = N_i \cap C$ die Menge aller mit i benachbarten Grobgitterpunkte und $F_i = N_i \cap F$ die Menge aller mit i benachbarten Feingitterpunkte. Mit diesen Bezeichnungen und Gleichung (6) gilt für einen glatten Fehler e:

$$e_i \quad = \quad -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j \in C_i} a_{ij} \; e_j \; + \; \sum_{j \in F_i} a_{ij} \; e_j \right) . \tag{7}$$

Würde die zweite Summe verschwinden, dann wäre (7) eine gute Interpolationsvorschrift für die Feingitterpunkte. Diese Annahme wird in der Praxis wohl kaum erfüllt werden, so dass diese Interpolation keine guten Resultate liefert.

Im klassischen AMG nach Ruge und Stüben werden deshalb in der zweiten Summe alle e_j, $j \in F_i$, durch eine Mittelung über alle e_k, $k \in C_i$ ersetzt:

$$e_j \quad \approx \quad \frac{a_{ji} e_i + \sum_{k \in C_i} a_{jk} e_j}{a_{ji} + \sum_{k \in C_i} a_{jk}}.$$

Einsetzen dieser Mittelung in (7) und auflösen nach der gesuchten Größe liefert dann die folgende Interpolationsvorschrift:

$$(Ie)_i \quad = \quad \begin{cases} e_i & \text{für } i \in C \\ -\frac{\sum_{j \in C_i} (a_{ij} + c_{ij}) e_j}{a_{ii} + c_{ii}} & \text{für } i \in F \end{cases} \tag{8}$$

$$\text{mit } c_{ij} \quad := \quad \sum_{k \notin C_i} \frac{a_{ik} a_{kj}}{a_{ki} + \sum_{l \in C_i} a_{kl}}. \tag{9}$$

An dieser Stelle sei auf [6] verwiesen, wo gezeigt wird, dass bei dieser Interpolationsvorschrift die Summe der Interpolationsgewichte eines Feingitterpunktes i zu eins wird, wenn $\sum_j a_{ij} = 0$ gilt. Dies ist eine für die Konvergenz des Verfahrens wichtige Eigenschaft, auf die später nochmal eingegangen wird.
Betrachtet man nochmals die Gleichung (7), wird deutlich, dass die j-te Komponente eines geglätteten Fehlers auf die Komponente i einen großen Einfluss hat, wenn a_{ij} im Verhältnis zu den anderen Einträgen der i-ten Zeile a_{ik} groß ist. Zu jedem Feingitterpunkt $i \in F$ sollten demnach genug Grobgitterpunkte $j \in C_i$ vorhanden sein, deren Eintrag a_{ij} relativ groß ist. Mit anderen Worten sollte das Grobgitter so gewählt werden, dass die zweite Summe in (7) für alle Feingitterpunkte möglichst klein wird. Diese Beobachtung motiviert den folgenden für die Grobgitterwahl wichtigen Begriff der *starken Kopplung* zwischen zwei Unbekannten:

Definition 2.1 *Sei $0 \leq \alpha \leq 1$ fest. Ein Punkt j ist mit einem Punkt i stark gekoppelt, wenn gilt:*

$$|a_{ij}| \geq \alpha \cdot \max_{k \in N_i} |a_{ik}|. \tag{10}$$

Die Menge aller mit i stark gekoppelten Punkte wird mit S_i bezeichnet,
$S_i = \{j \in N_i \mid |a_{ij}| \geq \alpha \cdot \max_{k \in N_i} |a_{ik}|\}$. $S_i^T = \{j \in N \mid i \in S_j\}$ ist die Menge aller Punkte, mit denen i stark gekoppelt ist. Definiere außerdem für die Indexmenge $I \subset \{1, ..., n\}$ und $1 \leq i \leq n$:

$$d(i, I) \quad := \quad \frac{1}{\max_{k \in N_i} |a_{ik}|} \sum_{j \in I} |a_{ij}|. \tag{11}$$

Diese Funktion kann als ein Maß für die Gesamt-Stärke der Kopplung der Punkte der Menge I mit dem Punkt i angesehen werden. Mit dieser Funktion läßt sich die Bedingung (10) auch schreiben als:

$$d(i, \{j\}) \quad \geq \quad \alpha.$$

Die Grobgitter sollten nun bestenfalls so gewählt werden, dass für die Feingitterpunkte F die zweite Summe in (7) sowie die Zahl der Kopplungen zwischen

den Grobgitterpunkten C möglichst klein sind. Dabei darf der Vergröberungsalgorithmus nur $O(n)$ Rechenschritte und Speicherplatz benötigen, weshalb die exakte Erfüllung dieser beiden Punkte unmöglich ist. Man greift deshalb auf Algorithmen zurück, die nur annähernd diese Bedingungen erfüllen. Der in dem Verfahren nach Ruge und Stüben verwendete Vergröberungsalgorithmus wird dabei in zwei Phasen aufgeteilt.
In der ersten Phase, auch Setup-Phase 1 genannt, die in dem folgenden Kasten dargestellt ist, werden zunächst die Punkte als Grobgitterpunkte gewählt, die mit möglichst vielen anderen Punkten gekoppelt sind. Dabei ist die Bedingung (12) rein heuristisch und soll sicherstellen, dass von den Punkten, die zur Auswahl stehen, die Punkte mit starken Kopplungen zu bereits bestehenden Feingitterpunkten in der Wahl bevorzugt werden. Hier gibt es auch andere Bedingungen wie zum Beispiel in [16] oder [13].
Nach der Setup-Phase 1 ist allerdings noch nicht sichergestellt, dass jeder Feingitterpunkt überhaupt starke Kopplungen zu Grobgitterpunkten besitzt. Dieses Problem wird in der Setup-Phase 2 gelöst, die in dem nächsten Kasten beschrieben ist, in der die endgültige Grobgitterwahl stattfindet. Dabei werden die Grobgitterpunkte so gewählt, dass jeder Feingitterpunkt starke Kopplungen zu Grobgitterpunkten besitzt oder aber stark mit Feingitterpunkten gekoppelt ist, die wiederum mit Grobgitterpunkten stark gekoppelt sind. In vielen Fällen reicht die Setup-Phase 1 schon aus, so dass der Mehraufwand für die Setup-Phase 2 gespart werden kann.
Nach der Grobgitterwahl mittels der Setup-Phasen 1 und 2 können dann die Interpolation und über den Galerkin-Ansatz der Grobgitteroperator berechnet werden.

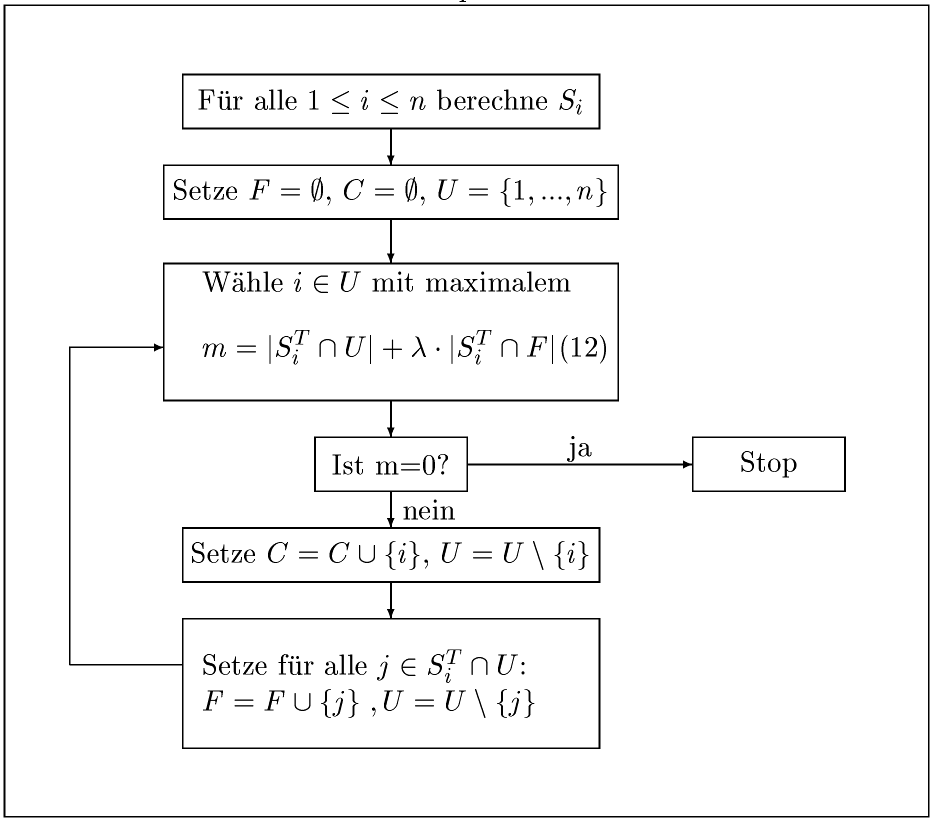
2.3 Grundlegende Definitionen und das Variationsprinzip des 2-Level Zyklus

In der gesamten Arbeit wird die zum lösenden Gleichungssystem gehörige Matrix A_h stets als positiv definit und symmetrisch vorausgesetzt. Die Darstellung dieses Abschnittes ist größtenteils [16] entnommen.
Sei $N = \{1, ...n\}$ die Indexmenge der Unbekannten, die so numeriert sind, dass die Matrix A_h folgendermaßen partitioniert ist:

$$A_h = \begin{pmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Dabei stehen in A_{FF} nur die Kopplungen von Feingitterpunkten zu Feingitterpunkten und in A_{FC} die Kopplungen von Fein- zu Grobgitterpunkten. Der Interpolationsoperator $I : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, $I = \begin{pmatrix} I_{FC} \\ I_{CC} \end{pmatrix}$, sei dementsprechend aufgeteilt in die Interpolation $I_{FC} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{n-m}$, $m = |C|$, von den Grob- zu den Feingitterpunkten, und der Interpolation $I_{CC} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ von Grob- zu Grobgitterpunkten. Wie im klassischen AMG nach Ruge und Stüben wird im folgenden in der Interpolationsvorschrift für die Grobgitterpunkte die Identität verwendet, was mit der obigen Notation $I_{CC} = Id$ bedeutet. Für viele

Die Setup-Phase 1



Anwendungen, wie auch die in dieser Arbeit untersuchten Beispiele, ist diese Festsetzung sinnvoll. Für indefinite Probleme hingegen, in denen ein distributiver Glätter verwendet werden soll, könnte es, wie für geometrische Mehrgittermethoden in [3] vorgeschlagen, notwendig sein, mit Hilfe sogenannter *ghost unknowns* die Interpolation für die Grobgitterpunkte auf eine andere Weise zu definieren. Wie im vorherigen Abschnitt bezeichne $A_H := I^T A_h I$ den durch den Galerkin-Ansatz (5) gewonnenen Grobgitteroperator. Seien $(u,v)_{A_h} := u^T A_h v$ und $||u||_{A_h} := (u,u)_{A_h}^{\frac{1}{2}}$ das zu A_h gehörige Skalarprodukt und die entsprechende Energienorm. Wie in [16] gezeigt wurde, gilt:

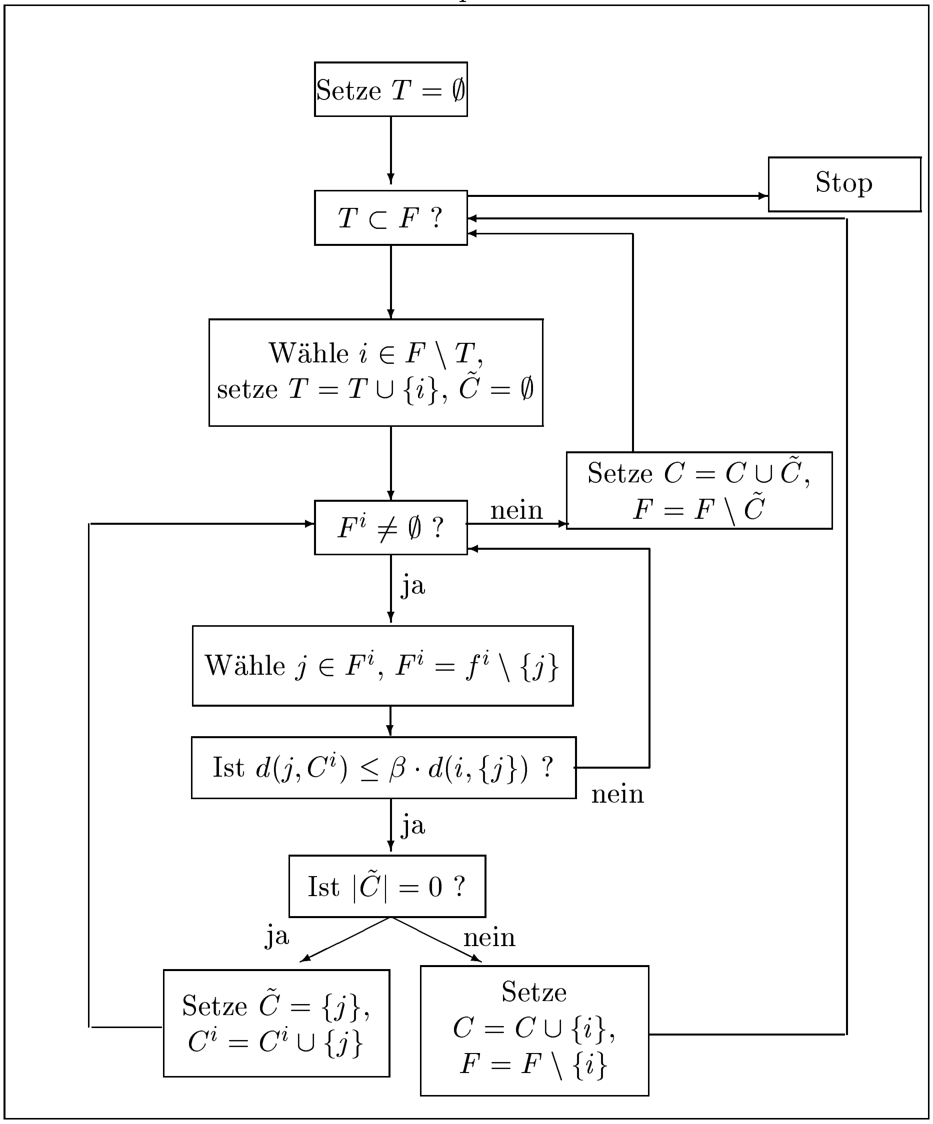
Bemerkung 2.1 *Der im Fall von zwei Gittern durch (4) definierte Korrekturoperator ist gegeben durch:*

$$C \quad := \quad Id - I A_H^{-1} I^T A_h. \tag{14}$$

Der Fehler e vor dem Grobgitterkorrekturschritt (4) wird also durch die Grobgitterkorrektur in den neuen Fehler $\hat{e} = Ce$ überführt. Für den gesamten Zweigitterzyklus mit ν_1 Vor- und ν_2 Nachglättungsschritten gilt damit:

$$e \quad \mapsto \quad S^{\nu_2} C S^{\nu_1} e. \tag{15}$$

Die Setup-Phase 2



Durch (15) ist somit die Fehlerreduktion eines Schrittes des Zweigitterverfahrens beschrieben. Deshalb ist sowohl für die Konvergenztheorie als auch für die Konstruktion von Grobgittern und Interpolationen eine nähere Untersuchung des Grobgitterkorrekturoperators C unerläßlich. In [16] wird gezeigt, dass ein Grobgitterkorrekturschritt der Lösung eines Variationsproblems entspricht:

Lemma 2.1 *Ist I ein Interpolationsoperator mit vollem Rang, dann ist der Korrekturoperator C ein Orthogonalprojektor bezüglich $(\cdot,\cdot)_{A_h}$, insbesondere gilt:*

$$\forall e \in \mathbb{R}^n : \quad ||Ce||_{A_h} \quad = \quad \min_{\tilde{e} \in \mathbb{R}^m} ||e - I\tilde{e}||_{A_h}. \tag{16}$$

Beweis: *Siehe [16].*

□

Durch (16) wird die Bedeutung des Zusammenspiels zwischen dem Glätter S und dem Interpolationsoperator I deutlich:
Nach ν_1 Vorglättungsschritten und der Anwendung des Korrekturoperators gilt für den neuen Fehler $\hat{e}$:

$$||\hat{e}||_{A_h} = \min_{\tilde{e} \in \mathbb{R}^m} ||S^{\nu_1} e - I\tilde{e}||_{A_h}.$$

Nach der Anwendung des Korrekturoperators und ν_2 Nachglättungsschritten gilt für den neuen Fehler $\hat{e}$:

$$||\hat{e}||_{A_h} = \min_{\tilde{e} \in \mathbb{R}^m} ||S^{\nu_2}(e - I\tilde{e})||_{A_h}$$

Kann also das Bild von S^{ν_1} gut durch das Bild von I approximiert werden, so wird das Verfahren schnell konvergieren. Werden die Interpolation und der Glätter derart konstruiert, dass $im(S^{\nu_1}) \subset im(I)$ oder $im(Id - I) \subset ker(S^{\nu_2})$ gilt, so wird das 2-Gitter-Verfahren zu einem direkten Löser (vgl. [16], 2.3). In der Praxis ist die Verwendung solcher Glätter und Interpolationen allerdings schlichtweg zu teuer.
Abschließend sei bemerkt, dass für den Beweis des Lemmas die Gestalt des Grobgitteroperators, der durch den Galerkin-Ansatz gewonnen wurde, besonders wichtig ist. Man erhält somit eine Rechtfertigung für diese Wahl des Grobgitteroperators, die sogar die Konvergenz des gesamten Zweigitterverfahrens sichert, sofern der Glätter als klassisches Iterationsverfahren konvergiert.

3 AMG für Systeme partieller Differentialgleichungen

Auch wenn herkömmliche algebraische Mehrgitterverfahren für eine Vielzahl linerarer Gleichungssyteme gute Konvergenzresultate liefern, so sind die Ergebnisse dieser Verfahren bei Systemen partieller Differentialgleichungen keineswegs zufriedenstellend. Zu Beginn dieses Kapitels werden deshalb zunächst die Gründe für das Scheitern klassischer algebraischer Mehrgittermethoden bei Systemen partieller Differentialgleichungen an einem einfachen Beispiel (dem gekoppelten Vektorlaplace) aufgezeigt. Danach werden zwei verschiedene Ansätze vorgestellt, wie klassische algebraische Mehrgittermethoden auf solche Systemfälle übertragen werden können. Einer der beiden Ansätze (das Block-AMG), der den Schwerpunkt dieser Arbeit bildet, wird genauer untersucht. Dabei kann die Konvergenz für das vorgestellt Block-AMG bei geeigneter Grobgitterwahl und Interpolation für den Zwei-Gitter-Fall und eine bestimmte Klasse von Matrizen bewiesen werden. Es stellt sich sogar heraus, dass der Konvergenzbeweis für das klassische AMG, wie er in [16] oder [4] geführt wurde, nur ein Spezialfall des vorgestellten Block-AMG ist.
Dadurch motiviert werden sowohl verschiedene Definitionen des Begriffs der *starken Kopplung* für diesen Ansatz und damit die Möglichkeit der Anwendung bestehender Vergröberungsalgorithmen klassischer AMG angegeben, als auch unterschiedliche Interpolationen vorgestellt.

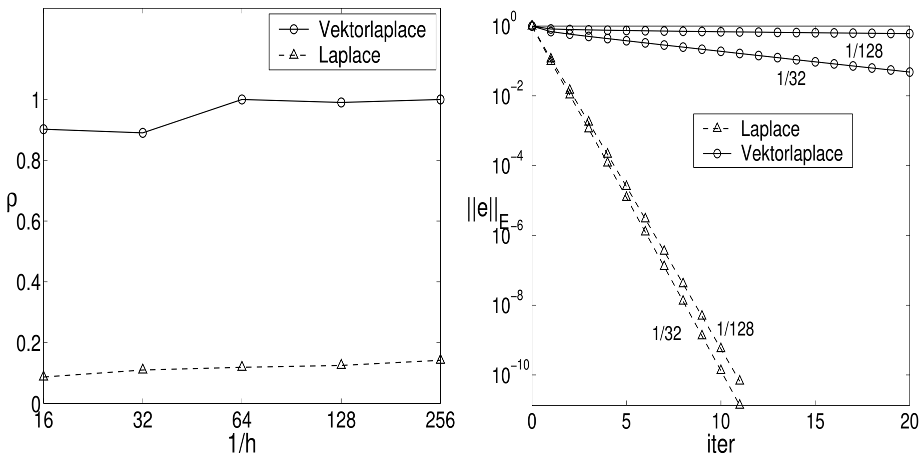


Abbildung 3: Konvergenzraten des klassischen AMG nach Ruge und Stüben für den Laplace und den gekoppelten Vektor-Laplace in Abhängigkeit der Problemgröße und die Konvergenzhistorie für beide Probleme ($h = 1/32$ und $h = 1/128$).

3.1 Klassische AMG bei Systemen partieller Differentialgleichungen

Es wurde bereits festgestellt, dass klassische algebraische Mehrgittermethoden für eine breite Palette skalarer elliptischer Probleme robuste Löser darstellen, die allerdings bei Systemen partieller Differentialgleichungen keine akzeptablen Ergebnisse mehr liefern. Hierzu betrachtet man die auf dem Einheitsquadrat mit Dirichletrandbedingungen und der Fünfpunkteformel der finiten Differenzen diskretisierte Poissongleichung

$$\begin{aligned} \triangle u &= 0 \text{ in } \Omega = [0,1]^2 \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

und die analoge Diskretisierung des über eine Matrix A gekoppelten Vektorlaplace im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \triangle u &= 0 \text{ in } \Omega = [0,1]^2 \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

In Abbildung 3 sind dazu die Konvergenzraten für verschieden feine Gitter und die Konvergenzhistorie des Verfahrens für $h = 1/32$ und $h = 1/128$ angegeben.

Im Gegensatz zu dem skalaren Problem, bei dem das AMG mit einer Fehlerreduktion um die 0.1 unabhängig von der Maschenweite sehr schnell konvergiert, ist die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens für den gekoppelten Vektorlaplace so langsam, dass kein Unterschied mehr zu klassischen Iterationsverfahren wie etwa dem Gauss-Seidel-Verfahren besteht. Bei einer Maschenweite von $h = 1/128$ ist das Verfahren sogar gar nicht mehr anwendbar, da bei der

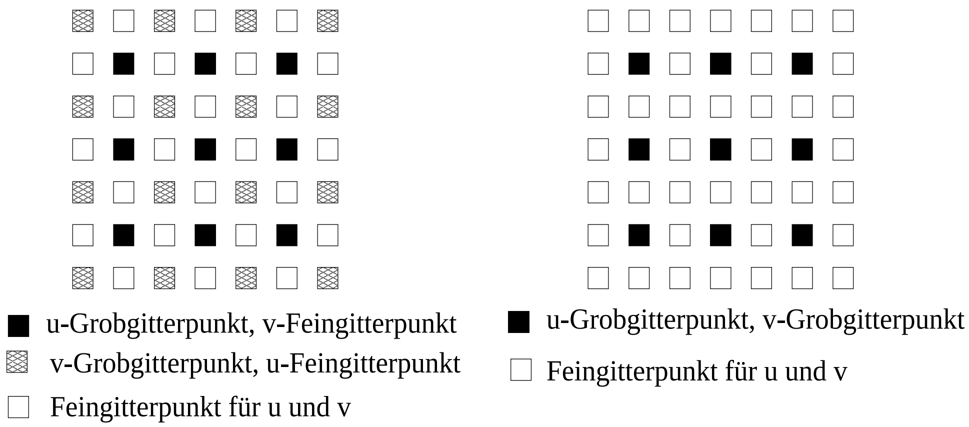


Abbildung 4: Zwei mögliche Grobgitter bei einem System mit zwei physikalischen Größen u und v.

Berechnung der Interpolationsoperatoren im Nenner der Gewichte Nullen auftreten. Für diesen gravierenden Unterschied in den Konvergenzraten zwischen diesen beiden Problemen gibt es im wesentlichen drei Gründe, die im folgenden etwas näher betrachtet werden sollen.

3.1.1 Grobgitterwahl

Bei skalaren Problemen ist jede Unbekannte auf natürliche Weise mit einem geometrischen Punkt der dem Gleichungssystem zugrundeliegenden Diskretisierung identifizierbar. Bei der Grobgitterwahl, also der Auswahl der Unbekannten, entstehen somit kanonisch gröbere geometrische Gitter, die im Ausgangsgitter enthalten sind. Betrachtet man nun die Diskretisierung von Systemen partieller Differentialgleichungen bei der alle physikalischen Größen auf einem gemeinsamen Gitter diskretisiert sind, so ist diese Identifikation von Unbekannten zu geometrischen Punkten für das AMG nicht mehr ohne weiteres möglich. Ein vom AMG durch die Auswahl der Unbekannten konstruiertes Grobgitter kann nun für jede physikalische Größe zu einem anderen Grobgitter führen, was die Konvergenzrate verschlechtert. In Abbildung 4 ist dies im Fall eines Systems mit zwei Komponenten u und v dargestellt. Das linke Bild zeigt eine Vergröberung, wie sie bei der Anwendung der klassischen Verfahren entstehen kann. Dabei sind die zu der Komponente u gehörigen Grobgitterpunkte Feingitterpunkte von v und umgekehrt sind die Grobgitterpunkte von v Feingitterpunkte von u. Die rechte Abbildung zeigt dagegen eine Vergröberung, bei der das Grobgitter für beide Komponenten übereinstimmt.
Ein algebraisches Mehrgitter für Systeme partieller Differentialgleichungen sollte für Probleme, deren verschiedenen Größen auf dem gleichen Ausgangsgitter diskretisiert sind, auch die gleichen Grobgitter, wie in der rechten Abbildung zu sehen war, für diese Größen generieren und den im linken Bild dargestellten Fall ausschließen.

3.1.2 Der Glätter

Ein weiterer wichtiger Aspekt für die Konvergenz algebraischer Mehrgittermethoden ist die Wahl des richtigen Glätters in dem Mehrgitterzyklus. Bei klassischen algebraischen Mehrgitterverfahren werden üblicherweise das Gauss-Seidel- oder das Jacobi-Verfahren als Glätter eingesetzt. Im Fall von M-Matrizen, die bei der Diskretisierung von skalaren Problemen sehr häufig vorkommen, ist das Gauss-Seidel-Verfahren ein sehr effizienter Glätter (vgl. [16]). Die Diskretisierung von Systemen partieller Differentialgleichungen führt in den meisten Fällen nicht mehr zu M-Matrizen. Man erhält somit Gleichungssysteme, bei denen die in klassischen Mehrgittermethoden eingesetzten Glätter den Fehler nicht wirklich glätten und das Verfahren damit langsamer konvergiert.
Um dies zu verdeutlichen, wurde der Vektorlaplace durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1.8 \\ -1.8 & 2 \end{pmatrix}$$

gekoppelt und mit der Fünfpunkteformel der finiten Differenzen diskretisiert. In Abbildung 5 sind der Startfehler und der nach einem Iterationsschritt des Gauss-Seidel-Verfahrens verbliebene Fehler in der ersten Komponente dargestellt. Zum Vergleich ist außerdem noch der nach einem Schritt des Block-Gauss-Seidel-Verfahrens resultierende Fehler in der ersten Komponente abgebildet, wobei die Einträge von den zwei Komponenten u_1 und u_2 an dem gleichen Gitterpunkt zu einem Block zusammengefasst wurden.
Bei Verwendung des punktweisen Gauss-Seidel-Verfahrens ist der resultierende Fehler im Vergleich zum Ausgangsfehler nicht sichtbar geglättet worden. Das blockweise Gauss-Seidel-Verfahren hingegen liefert eine ähnliche Glättung in der ersten Komponente wie die punktweise Gauss-Seidel-Iteration bei dem Poissonproblem (vgl. Abbildung 1). Die Verwendung des Gauss-Seidel-Verfahrens als Glätter im klassischen AMG bei diesem Problem wird also schlechtere Resultate liefern.

3.1.3 Die Interpolation algebraisch glatter Fehler

Wie in Abschnitt 2.3 bereits diskutiert wurde, ist die Güte der Interpolation algebraisch glatter Fehler für die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens von entscheidender Bedeutung. Wie in Abschnitt 5.1 noch untersucht werden wird, spielen dabei die Funktionen, die im Nullraum des Operators liegen, eine wichtige Rolle. Es stellt sich heraus, dass diese Funktionen *algebraisch glatt* sind und somit besonders gut durch die Grobgitterkorrektur approximiert werden müssen, damit das Verfahren insgesamt zu guten Konvergenzergebnissen führt. Bei dem Poissonproblem spannen die konstanten, skalarwertigen Funktionen den Nullraum des Operators auf. Die Interpolationsvorschriften klassischer AMG-Methoden sind deshalb so gewählt, dass diese konstanten Funktionen exakt interpoliert werden. Doch schon im Beispiel des gekoppelten Vektorlaplace werden im allgemeinen die konstanten vektorwertigen Funktionen, die im Nullraum des Operators liegen, von den herkömmlichen Interpolationen nicht mehr exakt interpoliert. Bei komplizierteren Systemen sind zusätzlich noch nichtkonstante Funktionen besonders *algebraisch glatt*, wie etwa bestimmte Rotationen in

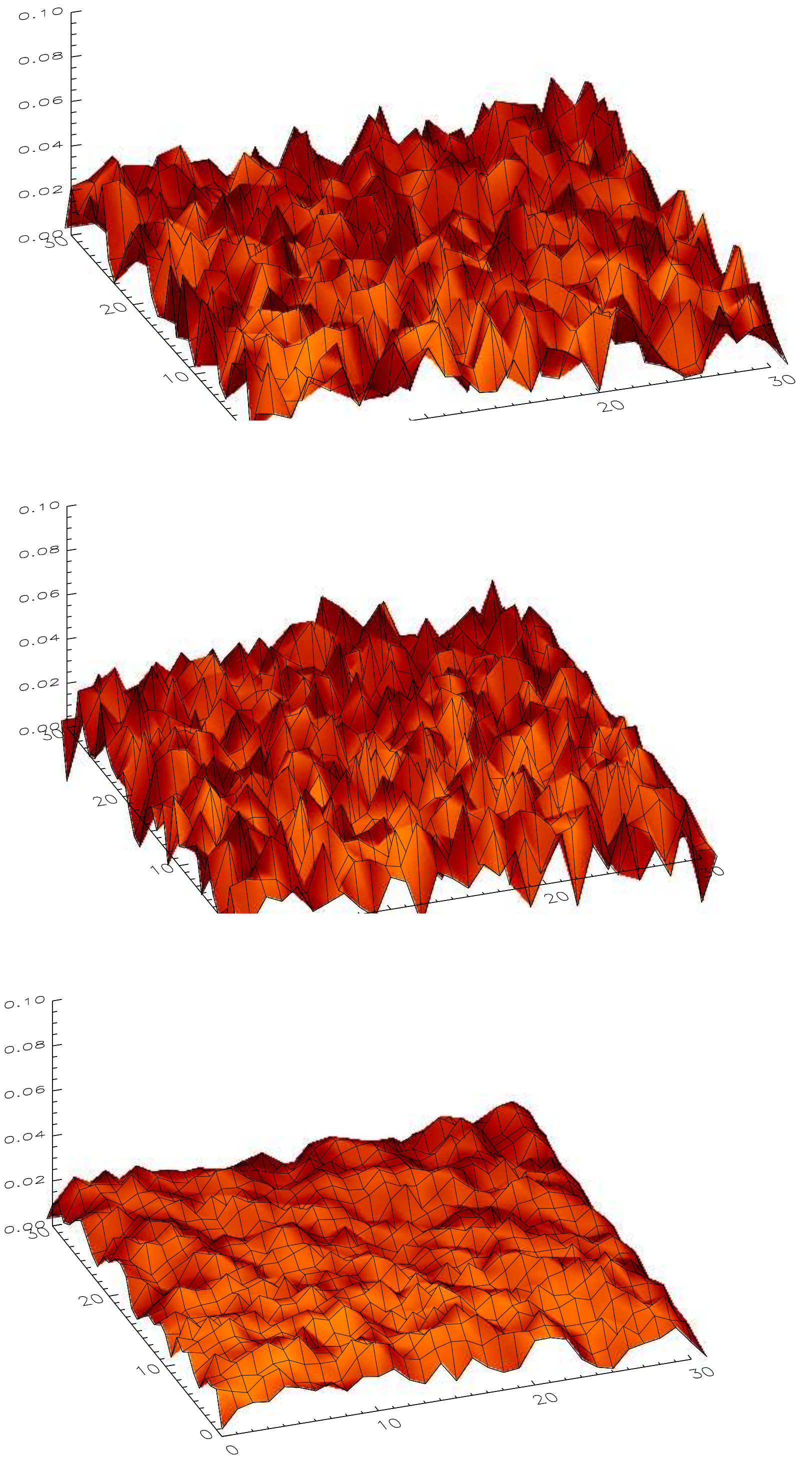


Abbildung 5: Glättungseigenschaft des Gauss-Seidel- und Block-Gauss-Seidel-Verfahrens für den gekoppelten Vektorlaplace. Oben: Fehler des Zufallsstartwertes. Mitte: resultierender Fehler nach einem Gauss-Seidel-Schritt. Unten: Fehler nach einem Block-Gauss-Seidel-Schritt.

der linearen Elastizitätstheorie, die annähernd exakt interpoliert werden sollten, was mit den herkömmlichen Interpolationen nicht gewährleistet ist. Für Systeme partieller Differentialgleichungen müssen demnach andere Interpolationsvorschriften gefunden und verwendet werden.

3.2 Zwei verschiedene Ansätze

Nach der Erklärung für das Scheitern klassischer algebraischer Mehrgittermethoden sollen nun zwei Ansätze vorgestellt werden, die bei den diskutierten Problemen Abhilfe schaffen sollen.
Hierbei ist es offensichtlich, dass zur Lösung dieser Probleme mehr Informationen benötigt werden, als allein durch das Gleichungssystem gegeben sind. Für die Anwendung des ersten Ansatzes ist die Kenntnis über die Zugehörigkeit einer Unbekannten zu der entsprechenden physikalischen Größe notwendig, für den zweiten Ansatz muss zusätzlich noch bekannt sein, welche Unbekannten zu einem gemeinsamen Gitterpunkt in der Diskretisierung gehören. Diese Informationen sind üblicherweise automatisch mit der Diskretisierung gegeben, so dass diese aus den beiden Ansätzen gewonnenen AMG-Methoden durchaus noch als *algebraisch* bezeichnet werden können.

3.2.1 Der Ansatz der Unbekannten

In der ersten Methode, die als *unknown approach* in [14], [1] und [7] vorgestellt wurde, wird die Matrix A_h derart partitioniert, dass in jedem Diagonalblock die Unbekannten liegen, die zu einer gemeinsamen physikalischen Größe gehören. Bei d physikalischen Größen hat $A_h \in \mathbb{R}^{d \cdot n}$ damit folgende Gestalt:

$$A_h = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & A_{dd} \end{pmatrix},$$

wobei $A_{ij} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Als Glätter wird üblicherweise das skalare Gauss-Seidel-Verfahren verwendet. Nun werden die gleichen Vergröberungsalgorithmen und Interpolationsvorschriften wie im skalaren Fall auf die zu A_h gehörige Blockdiagonalmatrix D_h angewendet. Nur für die Berechnung des Grobgitteroperators wird die ursprüngliche Matrix A_h mit der berechneten Interpolation verwendet. Wenn I_j die Interpolation zum Diagonalblock A_{jj} bezeichnet, ist damit A_H gegeben durch:

$$A_H = \begin{pmatrix} I_1^T A_{11} I_1 & I_1^T A_{12} I_2 & \cdots & I_{11}^T A_{1d} I_d \\ I_2^T A_{21} I_1 & I_2^T A_{22} I_2 & \cdots & I_2^T A_{2d} I_d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ I_d^T A_{d1} I_1 & I_d^T A_{d2} I_2 & \cdots & I_p^T A_{dd} I_d \end{pmatrix}.$$

Dieses Verfahren kann dann sinnvoll angewendet werden, wenn die Einträge in den Nebendiagonalblöcken relativ klein im Vergleich zu den Einträgen in

den Diagonalblöcken sind. Betrachtet man das Beispiel des gekopplten Vektorlaplace aus dem vorherigen Abschnitt, und verwendet in diesem Ansatz für die Interpolation I_j eine herkömmliche Interpolationsvorschrift, die konstante Funktionen exakt interpoliert, so werden in diesem Fall auch die konstanten vektorwertigen Funktionen exakt interpoliert.
Diese Methode liefert daher für einige Beispiele in [14], [1] und [7] recht gute Resultate . Allerdings ist damit der Nachteil, dass für die unterschiedlichen physikalischen Größen unterschiedliche Gitter entstehen können, was zu einer Verschlechterung der Konvergenz führen kann, nicht behoben. Insbesondere ist bei diesem Ansatz auch nicht gewährleistet, dass auch nichtkonstante Funktionen exakt interpoliert werden können.
Ein weiterer Schwachpunkt dieser Methode ist die Forderung, jeder Unbekannten des linearen Gleichungssystems eine einzelne Gleichung zuzuordnen. In einigen Fällen, zum Beispiel bei den Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen, ist eine solche Zuordnung allerdings nicht möglich.
Um diese Probleme beheben zu können, wählt man einen anderen, in [14] und [4] beschriebenen Ansatz,der auch die Grundlage der in dieser Arbeit dargestellten Methode bildet und im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

3.2.2 Der Punkt-Ansatz

Es wird angenommen, dass alle physikalischen Größen auf einem gemeinsamen Gitter diskretisiert sind. Für Probleme, bei denen sogenannte *staggered grids* verwendet werden, wie zum Beispiel typischerweise bei den Navier-Stokes-Gleichungen, kann die nachfolgend beschriebene Methode nicht ohne weiteres angewendet werden.
Wie in [14] und [4] vorgestellt, wird die Matrix A_h diesmal so partitioniert, dass Unbekannte, die zu einem gemeinsamen geometrischen Punkt gehören, in einem Block liegen. Bei n geometrischen Punkten und d physikalischen Größen hat die Matrix $A_h \in \mathbb{R}^{(d \cdot n)\times(d \cdot n)}$ damit folgende Gestalt:

$$A_h = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

mit $A_{ij} \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Mit dieser Block-Matrix kann nun analog zu den Block-Verfahren klassischer Iterationsverfahren ein Block-AMG, in [14] auch als *point approach* bezeichnet, konstruiert werden. Als Lösung für das Problem der fehlenden Glättungseigenschaft herkömmlicher Glätter im Systemfall werden dabei die zu den Glättern analogen Block-Verfahren verwendet. In dem in dieser Arbeit vorgestellten AMG werden beispielsweise das Block-Gauss-Seidel und das Block-SOR-Verfahren als Glätter verwendet.
In Abbildung 5 wird der Unterschied zwischen der Glättung des Gauss-Seidel-Verfahrens und des Block-Gauss-Seidel Verfahrens deutlich. Das Ausgangsproblem ist dabei ein gekoppelter zweidimensionaler Vektor-Laplace, der auf dem Einheitsquadrat für jede Funktion mit dem Fünfpunktestern der finiten Differenzen und Nullrandbedingungen diskretisiert wurde. Während der Fehler in

der ersten Komponente nach einem Schritt des Gauss-Seidel-Verfahrens ähnlich wie der Startfehler stark oszilliert, ist der durch einen Block-Gauss-Seidel-Schritt resultierende Fehler ähnlich geglättet worden, wie Im Falle des Poissonproblems und der Verwendung des Gauss-Seidel-Verfahrens in Abbildung 1.
Bei der Grobgitterwahl werden nun nicht mehr nur einzelne Unbekannte, sondern alle Unbekannten, die zu dem gleichen Block gehören, ausgewählt. Damit werden für alle physikalischen Größen dieselben Grobgitter erzeugt und das oben beschriebene Problem des Auftretens von physikalisch unsinnigen Grobgittern ist ausgeschlossen.
Schließlich müssen noch Interpolationen aus herkömmlichen AMG-Verfahren auf diese Matrixblöcke übertragen werden. Hierzu gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, die in dem Abschnitt 3.5 näher betrachtet werden. Wird dabei als Grundlage eine Interpolation verwendet, die konstante Funktionen exakt interpoliert, so werden bei diesem Ansatz auch konstante vektorwertige Funktionen exakt interpoliert. In dem Abschnitt 5.2 wird gezeigt, dass bei bestimmten Grobgittern sogar einige nichtkonstante Funktionen exakt interpoliert werden. Diese Methode löst also die eingangs beschriebenen Probleme. Es bleibt allerdings noch zu klären, in welcher Weise die Grobgitterwahl und die Interpolationen auf die Blöcke übertragen werden müssen. Der folgende Abschnitt, der die Konvergenz bei geeigneter Grobgitterwahl und Interpolation im Fall von zwei Gittern für dieses Block-AMG zeigt, soll bei der Beantwortung dieser Frage behilflich sein.

3.3 Konvergenz für das algebraische Zweigitter-Block-Verfahren

In Abschnitt 2 wurde bereits gezeigt, dass ein algebraisches Zweigitter-Verfahren dann konvergiert, wenn der Glätter konvergiert. Eine Aussage über die Konvergenzrate konnte allerdings nicht gemacht werden. In diesem Abschnitt wird nun eine Schranke für die Konvergenzrate des algebraischen Block-Verfahrens des vorigen Abschnitts 3.2.2 im Zwei-Level Fall für eine bestimmte Klasse von Matrizen und eine einfache Interpolation angegeben. Die Notation ist im wesentlichen aus [16] entnommen.

Im folgenden sei $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n}$ eine Blockmatrix mit $A_{ij} \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $D = (D_{ij})_{i,j=1}^{n}$ die zu A gehörige Block-Diagonal-Matrix. Bei diesem Verfahren ist es im Gegensatz zu den algebraischen Mehrgittermethoden im skalaren Fall nicht mehr sinnvoll, von einer Unbekannten als Punkt zu sprechen. Mit der Bezeichnung *Punkt i* seien hier immer alle Unbekannten, die zum Block A_{ii} gehören, bezeichnet. Ist $x \in \mathbb{R}^{d\cdot n}$, so wird auch x in Blockschreibweise geschrieben: $x = (x_i)_{i=1}^{n}$ mit $x_i \in \mathbb{R}^{d}$.
Definiere nun die folgenden problemangepaßten Skalarprodukte:

$$
\begin{aligned}
(u,v)_E &:= u^T v \text{ , das heisst } (\cdot,\cdot)_E \text{ ist das euklidische Skalarprodukt} && (17)\\
(u,v)_0 &:= u^T D v && (18)\\
(u,v)_1 &:= u^T A v && (19)\\
(u,v)_2 &:= u^T A^T D^{-1} A v && (20)
\end{aligned}
$$

$||.||_0$, $||.||_1$, $||.||_2$, $||.||_E$ seien die zugehörigen Normen. Das $||\cdot||_0$ und $||\cdot||_2$ tatsächlich eine Norm bilden, wenn A positiv definit ist, ist dabei leicht zu sehen: D ist dann ebenfalls positiv definit und somit auch D^{-1}. $P_i \subset C$ sei die Menge der Punkte, die den Punkt i interpolieren. Insbesondere gilt mit der Annahme an I_{CC} aus Abschnitt 2.3 $P_i = \{i\}$ für $i \in C$.

Lemma 3.1 *Seien $B_1, B_2 > 0$, dann gilt:*

$$(B_1 e, e)_E \leq c \cdot (B_2 e, e) \Leftrightarrow \rho(B_2^{-1} B_1) \leq c$$

Der Beweis dieser Behauptung ist in [16] angegeben.

Um eine obere Schranke für die Konvergenzrate des Zweigitterverfahrens angeben zu können, wird eine mathematische Formulierung der Glättungseigenschaft und damit auch des algebraisch glatten Fehlers benötigt, wozu die folgende Definition dient:

Definition 3.1 *Ein Glättungsoperator S besitzt die* Glättungseigenschaft *für eine Matrix A, wenn für ein festes $\sigma > 0$ gilt:*

$$||Se||_1^2 \leq ||e||_1^2 - \sigma ||e||_2^2 \; \forall e \in \mathbb{R}^{d \cdot n}. \tag{21}$$

Diese Definition der Glättungseigenschaft lässt eine einfache mathematische Interpretation des Begriffes des algebraisch glatten Fehlers zu: Ein Fehler e heisst demnach *algebraisch glatt*, wenn $||e||_2^2 \ll ||e||_1^2$ gilt, was bedeutet, wenn der Fehler mit einem weiteren Iterationsschritt nicht mehr stark verkleinert werden kann.

Da in dem hier vorgestellten algebraischen Mehrgitter das Block-Gauss-Seidel-Verfahren verwendet wird, ist es das erste Ziel, die Glättungseigenschaft für das Block-Gauss-Seidel-Verfahren zu zeigen. Hierzu betrachtet man die für eine bestimmte Klasse von Iterationsverfahren äquivalente Umformulierung der Glättungseigenschaft:

Lemma 3.2 *Sei $A > 0$ und $S = I - Q^{-1}A$ mit regulärem Q. Dann ist die Glättungseigenschaft $||Se||_1^2 \leq ||e||_1^2 - \sigma ||e||_2^2$ äquivalent zu:*

$$\sigma Q^T D^{-1} Q \leq Q + Q^T - A$$

Beweis: Durch nachrechnen zeigt man:

$$||Se||_1^2 \;=\; ||e||_1^2 - ((Q + Q^T - A) Q^{-1} A e, Q^{-1} A e)_E.$$

Deshalb muß für σ in der Glättungseigenschaft

$$\sigma ||e||_2^2 \leq ((Q + Q^T - A) Q^{-1} A e, Q^{-1} A e)_E$$

gelten. Das wiederum ist äquivalent zu

$$\sigma (D^{-1} Q e, Q e)_E \leq ((Q + Q^T - A) e, e)_E,$$

womit die Behauptung folgt.

$\square$

Mit diesem Resultat kann die Glättungseigenschaft für das Block-Gauss-Seidel-Verfahren gezeigt werden:

Satz 3.1 *[Glättungseigenschaft des Block-Gauß-Seidel-Verfahrens] Sei $S = I - Q^{-1}A$, wobei Q die untere Block-Dreiecksmatrix der Matrix A ist (S ist also die Fehlerreduktion des Block-Gauß-Seidel-Verfahrens), $|||.|||$ die durch die fest gewählte Vektornorm $||.||$ induzierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{d\times d}$, $w \in \mathbb{R}^n$,*
$w_i > 0 \, \forall \, 1 \leq i \leq n$.
Dann erfüllt S die Glättungseigenschaft mit $\sigma \leq \frac{1}{\gamma_-\gamma_+}$. Dabei sind γ_-, γ_+ wie folgt definiert:

$$\gamma_- = \max_{1\leq i\leq n} \left\{ \frac{1}{w_i} \sum_{j\leq i} w_j |||A_{ii}^{-1}A_{ij}||| \right\}, \tag{22}$$

$$\gamma_+ = max_{1\leq i\leq n} \left\{ \frac{1}{w_i} \sum_{j\geq i} |||A_{ii}^{-1}A_{ij}||| \right\}. \tag{23}$$

Beweis: Das Block-Gauß-Seidel-Verfahren erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 3.2, wobei Q die untere Block-Dreiecks-Matrix ist. Da $Q + Q^T - A = D$ gilt, reicht es deshalb aus zu zeigen:

$$Q + Q^T - A = D \Rightarrow \sigma(Q^T D^{-1} Q e, e) \leq (De, e).$$

Nach Lemma 3.3 ist dies äquivalent zu:

$$\sigma \leq \frac{1}{\rho(D^{-1}Q^T D^{-1} Q)}.$$

Wenn $\sigma \leq \frac{1}{|||D^{-1}Q^T||| \, |||D^{-1}Q|||}$ mit einer beliebigen Operatornorm $|||.|||$ gilt, so ist die vorangegangene Bedingung erfüllt. Definiere als Vektornorm auf $\mathbb{R}^{d\cdot n}$:

$$||x||_w := \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{w_i} ||x_i|| \text{wobei } ||.|| \text{ obige Vektornorm ist.}$$

Mit der zu $||.||_w$ gehörigen Operatornorm folgt die Behauptung.

$\square$

Dieses Ergebnis ist eine Verallgemeinerung der Glättungseigenschaft des skalaren Gauss-Seidel-Verfahrens, die zum Beispiel in [16] zu finden ist. Es gilt $\gamma_- \leq max_i \left\{ 1 + \frac{1}{w_i} |||A_{ii}^{-1}||| \, ||| \sum_{j<i} w_j A_{ij} ||| \right\}$ und analog für γ_+. Setzt man $w_i = 1 \;\; \forall \, 1 \leq i \leq n$ und wählt $||.|| := ||.||_{L_2}$, so erhält man die gleiche Aussage wie in [4, 3.4].
Im allgemeinen ist diese Abschätzung aber schlechter als die Abschätzung in dem obigen Theorem.
Das Ziel ist die Bestimmung einer oberen Schranke von $||SC||_1$, wobei C der Grobgitterkorrekturoperator aus Abschnitt 2.3 ist. Hierzu wird in einem ersten Schritt die Glättungseigenschaft benutzt, so dass man für einen Fehler e

$$||SC \cdot e||_1^2 \quad \leq \quad ||C \cdot e||_1^2 - \sigma ||C \cdot e||_2^2$$

erhält. Existiert nun eine Konstante $\tau > 0$, so dass

$$||C \cdot e||_1^2 \quad \leq \quad \tau ||C \cdot e||_2^2 \tag{24}$$

gilt, erhält man damit

$$||SC||_1 \quad \leq \quad \left(1 - \frac{\sigma}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

und $(1 - \frac{\sigma}{\tau})^{\frac{1}{2}}$ ist eine obere Abschätzung für die Konvergenzrate des Zweigitterverfahrens. Die Herleitung eines solchen $\tau > 0$ so dass (24) erfüllt ist, ist nahezu analog zu dem entsprechenden Beweis im skalaren Fall ($d = 1$) wie er in [16] oder [4] wiedergegeben ist. Der Unterschied liegt darin, dass nun Matrixblöcke anstelle gewöhnlicher Zahlen in den entsprechenden Gleichungen auftreten. Diese Schwierigkeit wird dadurch umgangen, dass eine zu allen Blöcken einer Zeile geeignete gemeinsame Basis von Eigenvektoren gefunden werden muss. Wir führen deshalb zunächst die folgenden Bezeichnungen ein:

Definition 3.2 *Seien $A_1, ..., A_n \in \mathbb{R}^d$. Dann bezeichnet für festes $\lambda \in \mathbb{R}$ $V_\lambda(A_i)$ den Eigenraum zum Wert λ, das bedeutet:*

$$x \in V_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad A_i \cdot x = \lambda \cdot x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Außerdem sei $V_{(\lambda_1,...,\lambda_n)}(A_1, ..., A_n) := \bigcap_{i=1}^n V_{\lambda_i}(A_i)$.

Lemma 3.3 *Sei $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ symmetrisch mit $A_{ij} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $S_i := \sum_j A_{ij}$. Es gilt dann:*

$$||e||_1^2 = (Ae, e)_E = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(e_i - e_j)^T(-A_{ij})(e_i - e_j) + \sum_i e_i^T S_i e_i \tag{26}$$

Beweis: Da A symmetrisch ist und somit $A_{ij}^T = A_{ji}$ gilt, folgt der Beweis durch einfaches nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} e_i^T A_{ij} e_j &= \sum_{i,j} e_i^T A_{ij} e_j - \frac{1}{2}\sum_i e_i^T S_i e_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j} e_j^T A_{ij}^T e_j + \sum_i e_i^T S_i e_i \\
&= \sum_{i,j} e_i^T A_{ij} e_j + \frac{1}{2}\left(-\sum_{i,j} e_i^T A_{ij} e_i - \sum_{i,j} e_j^T A_{ij} e_j\right) + \sum_i e_i^T S_i e_i \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j}(-e_i^T A_{ij} e_i - e_j^T A_{ij} e_j + 2e_i^T A_{ij} e_j)\right) + \sum_i e_i^T S_i e_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}(e_i - e_j)^T(-A_{ij})(e_i - e_j) + \sum_i e_i^T S_i e_i
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.4 *Sei A symmetrisch mit $A_{ij} < 0$ für $i \neq j$ und $S_i = \sum_j A_{ij} \geq 0$, dann gilt:*

$$||e||_1^2 \quad \geq \quad \sum_{i \in F} \left(\sum_{k \in P_i} (e_i - e_k)^T (-A_{ik})(e_i - e_k) \right) + \sum_{i \in F} e_i^T S_i e_i \qquad (27)$$

Beweis: Mit Lemma 3.3 gilt:

$$\begin{aligned}
||e||_1^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (e_i - e_j)^T (-A_{ij})(e_i - e_j) + \sum_i e_i^T S_i e_i \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{i,j} (e_i - e_j)^T (-A_{ij})(e_i - e_j) + \sum_{i \in F} e_i^T S_i e_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \in F} \left(\sum_{j \in P_i} (e_i - e_j)^T (-A_{ij})(e_i - e_j) + \sum_{j \in N_i \setminus P_i} (e_i - e_j)^T (-A_{ij})(e_i - e_j) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} \sum_{j \in N_i} (e_i - e_j)^T (-A_{ij})(e_i - e_j) + \sum_{i \in F} e_i^T S_i e_i \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{i \in F} \sum_{j \in P_i} (e_i - e_j)^T (-A_{ij})(e_i - e_j) + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} \sum_{j \in N_i} (e_i - e_j)^T (-A_{ji})(e_i - e_j) + \sum_{i \in F} e_i^T S_i e_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \in F} \sum_{j \in P_i} (e_i - e_j)^T (-A_{ij})(e_i - e_j) + \frac{1}{2} \sum_{j \in F} \sum_{i \in C} (e_i - e_j)^T (-A_{ji})(e_i - e_j) + \sum_{i \in F} e_i^T S_i e_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \in F} \sum_{j \in P_i} (e_i - e_j)^T (-A_{ij})(e_i - e_j) + \frac{1}{2} \sum_{j \in F} \sum_{i \in N_j} (e_i - e_j)^T (-A_{ji})(e_i - e_j) + \sum_{i \in F} e_i^T S_i e_i \\
&\geq \sum_{i \in F} \sum_{j \in P_i} (e_i - e_j)^T (-A_{ij})(e_i - e_j) + \sum_{i \in F} e_i^T S_i e_i
\end{aligned}$$

□

Satz 3.2 *Seien $A_i \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $i = 1, ..., m$, paarweise kommutierende symmetrische Matrizen, dann gilt:*

$$\mathbb{R}^d = \bigoplus_{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^m} V_{(\lambda_1, ..., \lambda_m)}(A_1, ..., A_m).$$

Das bedeutet, dass eine Basis des $\mathbb{R}^d$ existiert, in der alle A_i diagonalgestalt haben.

Der Beweis dieser Behauptung gehört in die lineare Algebra und ist zum Beispiel in [8] zu finden.

Lemma 3.5 *Seien $A, W_i \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $i = 1, ..., m$, symmetrisch, $A > 0$, $W_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m W_i = Id$ und paarweise kommutierend, d.h. $W_i A = A W_i \; \forall i \in \{1, .., m\}$ und $W_i W_j = W_j W_i \; \forall i, j \in \{1, ..., m\}$, dann gilt mit $W_i = W_i^{\frac{1}{2}} W_i^{\frac{1}{2}}$:*

$$\left(\sum_i W_i e_i \right)^T A \left(\sum_i W_i e_i \right) \leq d \sum_i \left(W_i^{\frac{1}{2}} e_i \right)^T A \left(W_i^{\frac{1}{2}} e_i \right).$$

Beweis: Da A symmetrisch und positiv definit ist, ist $f(x) := x^T Ax$ konvex. Außerdem erfüllen A und W_i die Bedingungen des vorigen Satzes, d.h. es gibt eine Basis $\{f_1, ..., f_d\}$ und $\lambda_{1i}, ..., \lambda_{di}, i = 1, ..., m$, und $\lambda_1, ..., \lambda_d$, so daß:

$$\begin{aligned} Af_i &= \lambda_i f_i \;\forall\, 1 \leq i \leq d \\ W_i f_k &= \lambda_{ki} f_k \text{ für alle } 1 \leq i \leq m,\, 1 \leq k \leq d \\ f_j^T f_i &= \delta_{ij} \;\forall\, 1 \leq i \leq d. \end{aligned}$$

Da $\sum_i W_i = Id$ gilt außerdem: $\sum_j \lambda_{ij} = 1$. Sei $e_i = \sum_{k=1}^d \mu_{ki} f_k$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_i W_i e_i\right)^T A \left(\sum_i W_i e_i\right) = \\ &\left(\sum_i W_i \left(\sum_k \mu_{ki f_k}\right)\right)^T A \left(\sum_i W_i \left(\sum_k \mu_{ki f_k}\right)\right) \\ &= \left(\sum_i \sum_k \lambda_{ki}\mu_{ki} f_k\right)^T A \left(\sum_i \sum_k \lambda_{ki}\mu_{ki} f_k\right) \\ &= d^2 \left(\sum_i \sum_k \frac{\lambda_{ki}}{d}\mu_{ki} f_k\right)^T A \left(\sum_i \sum_k \frac{\lambda_{ki}}{d}\mu_{ki} f_k\right). \end{aligned}$$

Da $\sum_i \lambda_{ki} = 1$ gilt $\sum_i \sum_k \frac{\lambda_{ki}}{d} = 1$. Aus der Konvexität von $x^T Ax$ und der A-Orthogonalität der f_i folgt:

$$\begin{aligned} &d^2 \left(\sum_i \sum_k \frac{\lambda_{ki}}{d}\mu_{ki} f_k\right)^T A \left(\sum_i \sum_k \frac{\lambda_{ki}}{d}\mu_{ki} f_k\right) \\ &\quad \leq d^2 \sum_i \sum_k \frac{\lambda_k i}{d} (\mu_{ki} f_k)^T A (\mu_{ki} f_k) \\ &\quad \leq \; d \sum_i \left(\sum_k \lambda_{ki}^{\frac{1}{2}} \mu_{ki} f_k\right)^T A \left(\sum_k \lambda_{ki}^{\frac{1}{2}} \mu_{ki} f_k\right) \\ &\quad = d \sum_i (W_i^{\frac{1}{2}} e_i)^T A (W_i^{\frac{1}{2}} e_i). \end{aligned}$$

□

Das in diesem Abschnitt betrachtete algebraische Zweigitter-Verfahren verwendet die folgende sogenannte Direkte Interpolation, die in [16] für den skalaren Fall vorgestellt wurde und nun auf die Matrixblöcke übertragen wird:

Definition 3.3 (Direkte Interpolation) *Für $i \in F$ definiere die folgende Interpolation:*

$$e_i = \sum_{k \in P_i} W_{ik} e_k \;\textit{mit}\; W_{il} := -A_{ii}^{-1} \left(\sum_{j \in N_i} A_{ij}\right) \left(\sum_{j \in P_i} A_{ij}\right)^{-1} A_{il}.$$

Theorem 3.1 *Sei A symmetrisch, positiv definit, $S_i = \sum_j A_{ij} \geq 0$, $A_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$. Die Blöcke jeder Zeile von A sollen paarweise miteinander kommutieren: $A_{ij}A_{ik} = A_{ik}A_{ij}$. Sei $\tau \geq 1$ fest vorgegeben und die Vergröberung so, dass*

$$\sum_{j \in C \cap N_i} -A_{ij} \geq \frac{1}{\tau} \sum_j -A_{ij}. \tag{28}$$

Dann gilt für die Direkte Interpolation:

$$||e_F - I_{FC} e_C||_{0,F}^2 \leq d \cdot \tau ||e||_1^2. \tag{29}$$

Beweis:

$$||e_F - I_{FC} e_C||_{0,F}^2$$

$$= \sum_{i \in F} \left(e_i - \sum_{k \in P_i} W_{ik} e_k \right)^T A_{ii} \left(e_i - \sum_{k \in P_i} W_{ik} e_k \right)$$

$$= \sum_{i \in F} \left(\sum_{k \in P_i} W_{ik}(e_i - e_k) + \left(Id - \sum_{k \in C \cap N_i} W_{ik} \right) e_i \right)^T A_{ii} \left(\sum_{k \in P_i} W_{ik}(e_i - e_k) + \right.$$

$$\left. \left(Id - \sum_{k \in C \cap N_i} W_{ik} \right) e_i \right)$$

Die W_{ik}, $(Id - \sum_{k \in C \cap N_i} W_{ik})$ erfüllen die Bedingung von Lemma 3.5. Daher gilt:

$$\begin{aligned} &||e_F - I_{FC} e_C||_{0,F}^2 \\ &\leq d \cdot \sum_{i \in F} \left(\sum_{k \in P_i} (e_i - e_k)^T W_{ik}^{\frac{1}{2}T} A_{ii} W_{ik}^{\frac{1}{2}} (e_i - e_k) + \right. \\ &\left. e_i^T \left(Id - \sum_{k \in P_i} W_{ik} \right)^{\frac{1}{2}T} A_{ii} \left(Id - \sum_{k \in P_i} W_{ik} \right)^{\frac{1}{2}} e_i \right) \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.4 bleibt noch zu zeigen:

$$\left(W_{ik}^{\frac{1}{2}} \right)^T A_{ii} \left(W_{ik}^{\frac{1}{2}} \right) \leq \tau \cdot (-A_{ik}), \tag{30}$$

$$\left(Id - \sum_{k \in P_i} W_{ik} \right)^{\frac{1}{2}T} A_{ii} \left(Id - \sum_{k \in P_i} W_{ik} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \tau \cdot S_i. \tag{31}$$

Da nach Voraussetzung die Blöcke einer Zeile paarweise miteinander kommutieren, kommutieren auch die $W_{ik}^{\frac{1}{2}}$ und A_{ii} untereinander. Für (30) gilt mit der Bedingung (28) somit:

$$\begin{aligned} \left(W_{ik}^{\frac{1}{2}} \right)^T A_{ii} \left(W_{ik}^{\frac{1}{2}} \right) &= A_{ii} W_{ik} \\ &\leq \tau \cdot -A_{ik}. \end{aligned}$$

Die Gültigkeit von (31) folgt aus

$$A_{ii} \cdot \left(Id - \sum_{k \in P_i} W_{ik} \right) \quad = \quad S_i$$

und der Kommutativität von A_{ii} und $\left(Id - \sum_{k \in P_i} W_{ik}\right)^{\frac{1}{2}}$.

□

Wie am Anfang dieses Abschnittes erklärt, gilt das folgende Theorem:

Theorem 3.2 *Sei $A > 0$ und S besitze die Glättungseigenschaft aus 3.1. Außerdem sei die Grobgitterwahl und die Interpolation derart, dass gilt:*

$$\exists\, \tau > 0: \quad ||Ce||_1^2 \leq \tau ||Ce||_2^2 \quad \forall e \in \mathbb{R}^{d \cdot n} \tag{32}$$

Dann ist $\tau \geq \sigma$ und $||SC||_1 \leq (1 - \frac{\sigma}{\tau})^{\frac{1}{2}}$.

Mit dem folgenden Theorem, das eine zur Erfüllung von (32) hinreichende Bedingung angibt, erhält man mit den vorangegangenen Betrachtungen eine obere Abschätzung der Konvergenzrate des Zweigitter-Block-Verfahrens bei Verwendung der Direkten Interpolation.

Theorem 3.3 (Konvergenz für das Zweigitterverfahren) *Wenn für die Grobgitterwahl und die Interpolation I_{FC} gilt:*

$$||e_F - I_{FC} e_C||_{0,F}^2 \leq \tau ||e||_1^2 \quad \forall e \in \mathbb{R}^{d \cdot n}, \tag{33}$$

dann ist mit diesem τ die Bedingung aus Theorem 3.2 erfüllt.

Der Beweis dieser Behauptung ist für den skalaren Fall in [16] angegebenund kann ohne Probleme ebenso auf den Block-Fall übertragen werden.

Insgesamt ist also gezeigt worden, dass das Zweigitter-Block-Verfahren mit einem Vorglättungsschritt für die oben beschriebene Klasse von Matrizen mit mindestens der Rate $(1 - \frac{\sigma}{\tau})^{\frac{1}{2}}$ konvergiert. Nun wird in einem Mehrgitterzyklus normalerweise mindestens ein Nachglättungsschritt verwendet. Das Verfahren wird also noch effizienter, wenn gezeigt werden kann, dass ein Fehler, der durch die Anwendung des Grobgitterkorrekturoperators entsteht, danach gut verkleinert und wieder geglättet werden kann.
Dazu betrachtet man erneut die Glättungseigenschaft aus Definition 3.1. Gilt für einen Fehler e mit möglichst großem $c \in \mathbb{R}_+$

$$||e||_2 \quad \geq \quad c||e||_1,$$

so gilt zusammen mit der Glättungseigenschaft:

$$||Se||_1^2 \quad \leq \quad (1 - \frac{\sigma}{c})||e||_1.$$

Der verbleibende Fehler nach einem Grobgitterkorrekturschritt kann damit umso besser durch einen Nachglättungsschritt verkleinert werden, je kleiner c gewählt werden kann. Die Wahl von c hängt dabei erneut von der Güte der Interpolation ab, wie das folgende, in [4] bewiesene, Theorem zeigt:

Theorem 3.4 ([4]) *Sei $c > 0$ fest. Wenn es für alle $e \in \mathbb{R}^{d \cdot n}$ ein $e_C \in \mathbb{R}^m$ gibt, so dass*

$$c \cdot ||e_F - I_{FC}e_C||_{0,F}^2 \quad \leq \quad ||e_F - I_{FC}e_C||_{1,F}^2 \tag{34}$$

gilt, so ist $||e||_2 \geq c||e||_1$.

Nach dieser Konvergenzuntersuchung für den Fall von zwei Gittern, sollen mit Hilfe der in diesem Abschnitt erarbeiteten Bedingungen an die Grobgitterwahl und Interpolation in den nächsten beiden Abschnitten Algorithmen zur Grobgitterwahl und Interpolationsvorschriften entwickelt werden. Hierzu werden die vorhandenen Komponenten des klassischen AMG nach Ruge und Stüben und einige weitere Entwicklungen aus [16] auf das Block-AMG in geeigneter Weise übertragen. Ein wichtiger Begriff, um den bestehenden und im ersten Abschnitt bereits erklärten Vergröberungsalgorithmus verwenden zu können, ist dabei die Definition der *starken Kopplung* zwischen den Blöcken der Block-Matrix. Im nächsten Abschnitt werden hierzu zwei verschiedene Methoden vorgestellt.

3.4 Starke Kopplungen und Grobgitterwahl

Im vorigen Abschnitt wurde die Konvergenz im Fall von zwei Gittern gezeigt. Ein wesentlicher Einfluß auf die Konvergenzrate hatte dabei der Parameter τ in (28). Desto größer τ ist, umso besser ist die Konvergenz des Verfahrens. Bei der Konstruktion des groben Gitters sollte also berücksichtigt werden, dass die Bedingung (28) mit möglichst kleinem τ erfüllt wird. Da der Vergröberungsalgorithmus nur $O(n)$ Rechenschritte benötigen und das nächst gröbere Level nicht zu groß sein darf damit der entstehende Mehrgitterzyklus insgesamt immer noch linearen Aufwand hat, wird die Bedingung nicht wirklich eingehalten werden können. Für gute Konvergenzresultate in den Anwendungen ist die exakte Erfüllung der Bedingung (28) auch nicht unbedingt notwendig, da schließlich nur geglättete Fehler betrachtet werden und die Bedingung (33) somit nur für alle geglätteten Fehler $e \in \mathbb{R}^{d \cdot n}$ erfüllt sein muss.
Da die Bedingung (28) der Bedingung an das Grobgitter im skalaren Fall (vgl. [16]) stark ähnelt, ist es daher naheliegend, Vergröberungsalgorithmen bisheriger algebraischer Mehrgittermethoden, die bei skalaren Problemen gute Resultate liefern, so zu modifizieren, dass sie auf den Fall von Block-Matrizen angewendet werden können.
Wie im ersten Abschnitt bereits beschrieben und begründet, liegt dem hier vorgestellten Block-AMG im wesentlichen der Algorithmus von Ruge und Stüben zugrunde. Um den entsprechenden Vergröberungsalgorithmus dieser AMG-Methode auch im Block-AMG verwenden zu können, müssen der Begriff der *starken Kopplung* und die Funktion $d(\cdot,\cdot)$ aus (11) auf Blöcke übertragen

werden. In diesem Abschnitt sollen zwei verschiedene Möglichkeiten der Übertragung dieser beiden Begriffe auf Matrixblöcke vorgestellt werden.

Im skalaren Fall wird der Begriff der *starken Kopplung* durch Vergleiche zwischen der Größe von Zeileneinträgen der Matrix gewonnen. So ist in [10] bei einer Matrix mit negativen Außerdiagonaleinträgen ein Punkt i mit einem Punkt j *stark gekoppelt*, wenn mit einem vorher fetsgesetzten $\alpha > 0$

$$-a_{ij} \quad \geq \quad \alpha \cdot \max_{k \neq i} -a_{ik}$$

gilt. Bei Blöcken ist eine solche Definition nicht ohne weiteres mögliches, da $>$ auf $\mathbb{R}^{d \times d}$ nur eine Halbordnung ist, d.h. wenn A und B beide negativ definit sind, so muß nicht notwendigerweise $A > B$ oder $B > A$ gelten. Selbst wenn alle Blockeinträge A_{ij} einer Zeile i durch $>$ geordnet wären, wäre der Vergleich über diese Relation schlichtweg zu teuer. Es müssen also andere Methoden gefunden werden, um den Einfluß eines Punktes j auf die Interpolationsgüte des Punktes i zu messen.

3.4.1 Die blockweisen Kopplungen

Ein naheliegender Ansatz, um zwei Matrizen A und B zu vergleichen, ist der Vergleich des Spektrums der beiden Matrizen. Die Berechnung des Spektrums einer Matrix ist aufwendig. Da viele Blöcke untersucht werden müssen, wäre somit der gesamte Aufwand zu groß, um diese Methode tatsächlich zu verwenden. Deshalb ist es naheliegend, statt dem wirklichen Spektrum Abschätzungen für die betraglich größten oder kleinsten Eigenwerte zu betrachten.
Eine einfache Möglichkeit, den betragsmäßig größten Eigenwert nach oben abzuschätzen, ist die Berechnung einer zu jedem Block gehörenden, vorher festgelegten Operatornorm. Um starke Kopplungen über die Operatornormen der Blockeinträge zu definieren, betrachtet man daher ein aus dem Ursprungsproblem abgeleitetes neues Problem:

Definition 3.4 *Zu der Blockmatrix $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ und einer zur Vektornorm $||\cdot||$ gehörigen Operatornorm $|||\cdot|||$ auf $\mathbb{R}^d$ definiere die folgende Matrix:*

$$|A| = (a_{ij})_{i,j=1}^n = (|||A_{ij}|||)_{i,j=1}^n.$$

Damit läßt sich analog zu dem klassischen AMG der Begriff der *starken Kopplungen* definieren:

Definition 3.5 (Norm-Kopplung) *Sei $0 \leq \alpha \leq 1$ fest. Sei $||\cdot||$ eine feste Vektornorm und $|A| = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $1 \leq i,j \leq n$, wie in Definition 3.4. Dann ist i mit j* stark gekoppelt, *falls gilt:*

$$a_{ij} \quad \geq \quad \alpha \max_{1 \leq k \leq n} a_{ik}. \tag{35}$$

Es ergibt sich hiermit auch direkt eine Definition für die in der Setup-Phase 2 benötigten Funktion $d(\cdot,\cdot)$. Sei $I \subset \{1,...,n\}$ die Indexmenge der einzelnen Matrixblöcke und $1 \leq i \leq n$, dann definiere:

$$d(i,I) \quad := \quad \frac{1}{\max_{k\neq i}\{a_{ik}\}} \sum_{j\in I} a_{ij}.$$

Wie in dem Abschnitt über das AMG nach Ruge und Stüben bereits beschrieben, bezeichnet S_i die Menge aller mit *i stark gekoppelten* Punkten. Auch wenn diese Kopplung bei den in dieser Arbeit vorgestellten Problemen gute Resultate liefert, können Fälle auftreten, in denen diese Definition zu schlechten Ergebnissen führt.
Ein Problem besteht dann, wenn einige Blockeinträge in den Zeilen schlecht konditioniert sind. Es entstehen dann unter Umständen Grobgitter Ω_H, so dass für einige $i \in \Omega_h \setminus \Omega_H$ ein $x \in \mathbb{R}^d$ und $k \in N_i \subset \Omega_H$ existieren mit:

$$x^T A_{ij} x \quad \ll \quad x^T A_{ik} x \text{ für alle } j \in S_i.$$

Die näherungsweise Erfüllung der Bedingung (28) wäre bei einer diese Definition verwendenden Vergröberung nur mit sehr großem τ möglich. In solchen Fällen müssen bei der Definition der starken Kopplung auch die kleinsten Eigenwerte berücksichtigt werden. Dazu wird zunächst analog zu der Definition 3.4 eine neue Matrix definiert:

Definition 3.6 *Seien $1 \leq i,j \leq n$, $0 < \alpha < 1$ und eine Operatornorm $|||\cdot|||$ im $\mathbb{R}^{d\times d}$ fest vorgegeben. Dann ist die Matrix $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})_{i,j=1}^n$ definiert durch:*

$$\hat{a}_{ij} = \min_{||x||=1} ||A_{ij}x||.$$

Ähnlich zu der vorherigen Definition der starken Kopplung ergibt sich damit zunächst:

Definition 3.7 (Min-Kopplung) *Sei $0 \leq \alpha \leq 1$ und $1 \leq i,j \leq n$, $\hat{a}_{ij}$ wie in Definition 3.6, dann ist i mit j* stark gekoppelt, *wenn gilt:*

$$\hat{a}_{ij} \quad \geq \quad \alpha \max_{1\leq k\leq n} \hat{a}_{ik}. \tag{36}$$

Ist $I \subset \{1,...,n\}$ und $1 \leq i \leq n$, so ist $d(i,I)$ gegeben durch:

$$d(i,I) \quad := \quad \frac{1}{\max_{k\neq i}\{\hat{a}_{ik}\}} \sum_{j\in I} \hat{a}_{ij}.$$

Um das Auftreten des oben beschriebenen Falles auszuschließen, werden nun in der Definition der starken Kopplung Abschätzungen für den größten und kleinsten Eigenwert miteinander verglichen:

Definition 3.8 (Min-Max-Kopplung) *Seien $1 \leq i,j \leq n$, $0 \leq \alpha \leq 1$ und eine Norm $||\cdot||$ im $\mathbb{R}^d$ fest vorgegeben. Sei I die Indexmenge wie aus den obigen*

Definitionen. Es seien $\hat{a}_{ij}$ und a_{ij} wie in den Definitionen 3.6 und 3.4. Dann ist i mit j stark gekoppelt, falls gilt:

$$\hat{a}_{ij} \quad \geq \quad \alpha \max_{1 \leq k \leq n} a_{ik},$$

und $d(\cdot,\cdot)$ ist definiert durch:

$$d(i,I) \quad := \quad \frac{1}{\max_{k \neq i}\{a_{ik}\}} \sum_{j \in I} \hat{a}_{ij}.$$

Das größte Problem bei der Verwendung der Min-Max-Kopplung besteht in der Wahl des Parameters α. Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Definitionen ist es bei ungeeigneter Wahl dieses Parameters nicht gewährleistet, dass die untersuchte Unbekannte überhaupt mit einem anderen Punkt *stark gekoppelt* ist. Am deutlichsten wird diese Problematik sichtbar, wenn man den Fall betrachtet, dass alle Block-Einträge einer Zeile singulär sind. Dann existieren unabhängig von der Wahl des Parameters α keine Kopplungen zu anderen Punkten, obwohl es trotzdem relativ große Außerdiagonaleinträge geben kann. Eine weitere Schwierigkeit besteht in der Wahl der für das Problem am besten geeigneten Operatornorm. Eine gute Wahl ist sicher die zur euklidischen Norm gehörige Operatornorm, da diese Norm für symmetrische Matrizen dem betragsmäßig größtem Eigenwert entspricht und nicht nur eine obere Schranke für diesen Eigenwert darstellt. Doch diese Operatornorm auszurechnen ist im allgemeinen sehr kostspielig, so dass hier zwischen den Kosten und dem Nutzen gegenüber anderen, leichter zu berechnenden Operatornormen, abgewogen werden muß.
Es hat sich in dieser Arbeit herausgestellt, dass die sehr leicht zu berechnenden Zeilen- und Spaltensummen-Normen zufriedenstellende Ergebnisse liefern und in den betrachteten Beispielen keine signifikanten Unterschiede im Vergleich zu der euklidischen Norm aufweisen. In den vorgestellten Experimenten wurde deshalb immer die Zeilensummennorm verwendet.

3.4.2 Die punktweisen Kopplungen

In diesem Abschnitt wird eine andere Möglichkeit vorgestellt, wie der Begriff der *starken Kopplung* definiert werden kann. Dabei wird wie bei den klassischen algebraischen Mehrgittermethoden jede Unbekannte wieder als einzelner Punkt behandelt, für den definiert wird, wann er mit einem anderen Punkt stark gekoppelt ist. Mit dieser Definition kann dann auch entschieden werden, wann ein Block mit einem anderen Block stark gekoppelt ist: Sind genügend vorher festgelegte Punkte des Blockes A_{ii} mit Punkten des Blockes A_{ij} *stark gekoppelt*, so ist i mit j *stark gekoppelt.*

Bei der ersten Definition der *starken Kopplung* dieses Typs werden nur punktweise Kopplungen zwischen Unbekannten, die zu der gleichen physikalischen Größe gehören, beachtet. Diese Methode besitzt damit große Ähnlichkeit zu dem Begriff der starken Kopplung des in Abschnitt 3.2.1 vorgestellten Ansatzes über die Unbekannten, bei dem Kopplungen zwischen unterschiedlichen physikalischen Größen bei der Grobgitterwahl vernachlässigt werden.

Definition 3.9 (Klassische-Punkt-Kopplung) *Sei* $0 \leq \alpha \leq 1$, $1 \leq i \leq n$ *fest. Dann ist* i *mit* j stark gekoppelt, *wenn gilt:*

$$\exists\, 1 \leq k \leq d: \ |\,(A_{ij})_{kk}\,| \quad \geq \quad \alpha \cdot \max_{m \neq i} |\,(A_{im})_{kk}\,|$$

Die Funktion $d(\cdot,\cdot)$ *ist nun definiert als:*

$$d(i,I) \quad = \quad \max_{1 \leq j \leq d} \frac{1}{\max_{k \neq i} |(A_{ik})_{jj}|} \sum_{k \in I} |(A_{ik})_{jj}|.$$

Diese Definition ist nur dann sinnvoll, wenn die Kopplungen zwischen den unterschiedlichen physikalischen Größen relativ klein sind. Die folgende Definition behebt diesen Nachteil und ist eine Verallgemeinerung der Klassischen-Punkt-Kopplung:

Definition 3.10 (Punkt-Kopplung) *Sei* $0 \leq \alpha \leq 1$, $1 \leq i \leq n$ *fest. Dann ist* i *mit* j stark gekoppelt, *wenn gilt:*

$$\begin{aligned} \exists\, 1 \leq k,l \leq d: \ |\,(A_{ij})_{kl}\,| \quad &\geq \quad \alpha \cdot \max_{m \neq i} \max_{1 \leq \delta \leq d} |\,(A_{im})_{k\delta}\,|, \\ d(i,I) \quad &= \quad \max_{1 \leq k,l \leq d} \frac{1}{\max_{m \neq i} |(A_{im})_{kl}|} \sum_{j \in I} |(A_{ij})_{kl}|. \end{aligned}$$

Mit den vorgestellten Kopplungsbegriffen lässt sich nun der in Abschnitt 2.2 vorgestellte Vergröberungsalgorithmus auf die Blöcke anwenden. Dabei werden nun alle zu einem Block gehörigen Unbekannten als Grobgitterpunkte ausgewählt.
Die letzte fehlende Komponente für das vorgestellte Block-AMG ist damit nur noch die Interpolation. Dieses Thema wird im nun folgenden Abschnitt behandelt.

3.5 Die verschiedenen Interpolationen des Block-Verfahrens

In diesem Abschnitt werden einige Interpolationen für das Block-Verfahren vorgestellt. Obwohl die in den herkömmlichen algebraischen Mehrgitterverfahren verwendeten Interpolationen, wie in dem Abschnitt 3.1.3 bereits diskutiert wurde, für Systeme partieller Differentialgleichungen nicht geeignet sind, können diese Interpolationen ähnlich wie auch der Begriff der starken Kopplung auf den Block-Fall übertragen werden. Dabei interpolieren die Übertragungen der Interpolationen, die bei den klassischen Methoden konstante skalare Funktionen exakt interpoliert haben, im Block-Fall nun auch tatsächlich konstante vektorwertige Funktionen.
Um herkömmliche Interpolationen auf Block-Matrizen zu übertragen, gibt es wie bei dem Begriff der *starken Kopplung*, zwei unterschiedliche Möglichkeiten. Zunächst wird die Methode vorgestellt, die im folgenden als Block-Interpolation bezeichnet wird. Dabei werden die Interpolationsvorschriften herkömmlicher Interpolationen einfach mit den Matrixblöcken anstelle der skalarwertigen Matrixeinträge aufgestellt. Der darauffolgende Abschnitt beschreibt die Punkt-Interpolationen. Hierbei werden zu der Definition der Interpolationen nicht

mehr die ganzen Blöcke herangezogen, sondern nur noch die Diagonalen der Blöcke. Diese Art der Interpolation ist damit ähnlich zu den Interpolationen in dem Ansatz über die Unbekannten, der in Abschnitt 3.2.1 vorgestellt wurde.

3.5.1 Die Block-Interpolationen

Wie durch das Variationsprinzip und den Konvergenzbeweis des Zweigitterzyklus zu sehen war, ist das Zusammenspiel zwischen dem verwendeten Glätter und der Interpolation von großer Bedeutung für die Konvergenzresultate des Verfahrens. Um gute Konvergenzergebnisse zu erhalten, sollten dabei Fehlerkomponenten, die der Glätter kaum mehr verändert, möglichst exakt interpoliert werden. Zur Konstruktion geeigneter Interpolationen wird daher zuallererst die Struktur algebraisch glatter Fehler untersucht.
Nach Satz 3.1 ist die Fehlerkorrektur des Gauss-Seidel-Verfahrens besonders klein, wenn für den Fehler e gilt:

$$||e||_2^2 \ll ||e||_1^2 \Leftrightarrow (D^{-1}r, r)_E \ll (e, r)_E \quad r := Ae.$$

Ein Fehler ist also dann algebraisch glatt, wenn das Residuum in der mit D^{-1} skalierten euklidischen Norm *klein* im Vergleich zu der Energienorm des Fehlers ist. Analog zum skalaren Fall (7) gilt also annähernd für einen solchen glatten Fehler:

$$r = 0 \tag{37}$$

$$e_i = -A_{ii}^{-1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} A_{ij} e_j \tag{38}$$

$$e_i = -A_{ii}^{-1} \left(\sum_{j \in C_i} A_{ij} e_j + \sum_{j \in F_i} A_{ij} e_j \right). \tag{39}$$

Setzt man den zweiten Summanden gleich Null, so erhält man die erste Interpolationsformel:

Definition 3.11 (Simple Interpolation)

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{j \in P_i} W_{ij} e_j \quad \forall i \in F, \\ W_{ij} &= -A_{ii}^{-1} A_{ij}. \end{aligned}$$

Dies ist die einfachste in dieser Arbeit vorgestellte Interpolation. Da der zweite Summand in der Regel nicht verschwindet, liefert diese Interpolation in der Praxis keine von der Problemgröße unabhängigen Konvergenzresultate. Das wird besonders deutlich, wenn man nochmals das Beispiel des gekoppelten Vektorlaplace betrachtet. Diskretisiert man das Problem mit bilinearen finiten Elementen und betrachtet diese Interpolationsvorschrift für ein typisches AMG-Grobgitter, so ist es offensichtlich, dass die konstanten vektorwertigen

Funktionen nicht exakt interpoliert werden. Diese Eigenschaft ist aber für gute Konvergenzresultate bei diesem Problem von Bedeutung. Um die geforderte Interpolationsgenauigkeit zu erreichen, müssen die Interpolationsgewichte W_{ik} mit einer geeigneten Matrix skaliert werden. Das führt zu der im Abschnitt über die Konvergenz bereits erwähnten *Direkten Interpolation*, deren skalare Definition in [16] das erste Mal vorgestellt wurde.

Definition 3.12 (Direkte Interpolation) *Für $i \in F$ definiere:*

$$e_i = \sum_{k \in P_i} W_{ik} e_k \; mit \, W_{il} := A_{ii}^{-1} \left(\sum_{j \in N_i} A_{ij} \right) \left(\sum_{k \in P_i} A_{ik} \right)^{-1} A_{il}.$$

Tatsächlich interpoliert diese Interpolation im Falle des mit bilinearen finiten Elementen oder der Fünfpunkteformel der finiten Differenzen diskretisierten gekoppelten Vektorlaplace konstante vektorwertige Funktionen im Inneren des Gebietes exakt.
Wie in Theorem 3.1 gefordert, sollte jeder Feingitterpunkt mit den Grobgitterpunkten zu einem konstanten Teil seiner gesamten Kopplung verbunden sein. Dies ist durch den Vergröberungsalgorithmus nicht sichergestellt und die genaue Einhaltung dieser rein theoretischen Bedingung würde zu einer geringen Vergröberungsrate führen und somit den Rechen- und Speicheraufwand erhöhen. Um trotzdem annähernd die Bedingung aus Theorem 3.1 zu erfüllen, wendet man die Direkte Interpolation für jedes $i \in F$ auf ein verändertes Gleichungssystem an, so dass auch die starken Kopplungen des Feingitterpunktes zu anderen Feingitterpunkten berücksichtigt werden. Dazu werden die mit $i \in F$ stark gekoppelten Feingitterpunkte j durch die folgende Approximation in der zu i gehörenden Feingittergleichung (39) ersetzt:

$$\forall\, j \in F_i^s \;\text{ ersetze } e_j \text{ in der Gleichung für i durch } -A_{jj}^{-1} \sum_{k \in N_j} A_{jk} e_k. \tag{40}$$

Damit entsteht eine neue Gleichung für den Punkt i:

$$\hat{A}_{ii} e_i + \sum_{j \in \hat{N}_i} \hat{A}_{ij} \;=\; 0, \;\; \hat{N}_i := \{j \neq i \mid \hat{A}_{ij} \neq 0\}, \tag{41}$$

wobei $\hat{A}_{ij}$ die neuen Koeffizienten, die sich durch Einsetzen von (40) in die ursprüngliche Gleichung (39) ergeben, bezeichnen. Wendet man nun auf diese neue Gleichung die *Direkte Interpolation* an, ergibt sich in Analogie zu der in [16] für den skalaren Fall beschriebenen Interpolation die *Transformierte-Standard-Interpolation* für den Block-Fall:

Definition 3.13 (Transformierte-Standard-Interpolation) *Für alle $i \in F$ sei $\hat{P}_i := \{j \in C \mid j \in P_i \vee \exists\, k \in F_i^S : j \in P_k\}$. Definiere:*

$$e_i = \sum_{k \in \hat{P}_i} W_{ik} e_k \; mit \, W_{il} := \hat{A}_{ii}^{-1} \left(\sum_{j \in \hat{N}_i} \hat{A}_{ij} \right) \left(\sum_{k \in \hat{P}_i} \hat{A}_{ik} \right)^{-1} \hat{A}_{il}$$

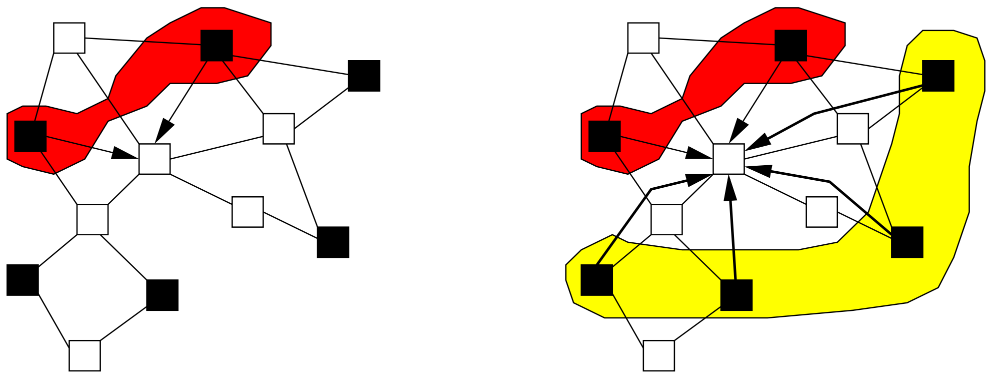


Abbildung 6: Interpolationspunkte für einen Feingitterpunkt bei der Direkten Interpolation (links) und der Transformierten-Standard-Interpolation (rechts). Die Grobgitterpunkte sind dabei schwarz, die Feingitterpunkte weiß und die starken Kopplungen durch Linien dargestellt.

Bei dieser Interpolationsvorschrift werden die Feingitterpunkte in der Regel von mehr Gobgitterpunkten interpoliert als das bei der Direkten Interpolation der Fall ist. In Abbildung 6 ist dazu der Graph der starken Kopplungen zwischen den Grob- und Feingitterpunkten dargestellt. Die Menge P_i der Interpolationspunkte ist dabei durch $C \cap S_i$ bestimmt. Während der zu interpolierende Feingitterpunkt bei der Direkten Interpolation nur durch zwei Grobgitterpunkte, die den Punkt nicht gleichmäßig umgeben, interpoliert wird, so interpolieren bei der Transformierten-Standard-Interpolation sechs Grobgitterpunkte den entsprechenden Feingitterpunkt, wodurch im allgemeinen die Interpolationsgenauigkeit steigt.

Die vorgestellte blockweise Methode läßt sich auch auf andere Interpolationen des klassischen AMG übertragen. So erhält man für die in Abschnitt 2.2 vorgestellte Interpolation nach Ruge und Stüben die *Standard Interpolation*:

Definition 3.14 (Standard Interpolation) *Das ist die klassische AMG Interpolation, die z.B. in [10] und [13] verwendet wurde:*

$$\begin{aligned}
e_i &= \sum_{j \in P_i} W_{ij} e_j \ \ \forall i \in F, \\
W_{ij} &= -(A_{ii} + C_{ii})^{-1}(A_{ij} + C_{ij}) \ \forall j \in P_i, \\
C_{ij} &= \sum_{k \notin C_i} \left(A_{ki} + \sum_{l \in C_i} A_{kl} \right)^{-1} A_{ik} A_{kj}.
\end{aligned}$$

3.5.2 Die Punkt-Interpolationen

Die Interpolationen des vorherigen Abschnitts arbeiten alle mit den Blöcken der Matrix A. Die Interpolationsvorschriften für die Unbekannten innerhalb eines

Blocks sind also voneinander abhängig, sofern die Matrixblöcke nicht Diagonalmatrizen sind. Bei den vorgestellten Interpolationsvorschriften mussten dabei Matrixblöcke addiert und teilweise invertiert werden. Benutzt man anstelle der vollen Blöcke nur die zugehörigen Diagonalen, wird der Rechenaufwand reduziert.
Dabei ist diese Art der Interpolation dem Prinzip der Interpolation in dem Ansatz über die Unbekannten, wie in 3.2.1 beschrieben, ähnlich.
Sinnvoll ist dieser Ansatz in den Fällen, bei denen entweder die Kopplungen zwischen den verschiedenen physikalischen Größen nicht sehr stark sind, oder das Block-Gauss-Seidel Verfahren die unterschiedlichen Größen nahezu entkoppelt, wie dies trivialerweise bei dem gekoppelten Vektorlaplace der Fall ist. Die Interpolationen des vorherigen Abschnittes lassen sich leicht analog auf diesen punktweisen Ansatz übertragen. Es werden daher nur nochmal kurz die zwei wichtigsten Interpolationen vorgestellt.
Die erste Interpolation ist dabei wieder von der klassischen Interpolation des AMG nach Ruge und Stüben abgeleitet:

Definition 3.15 (Punkt-Standard-Interpolation) . *Für $i \in F$ definiere:*

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{j \in P_i} W_{ij} e_j \quad \forall i \in F, \\ (W_{ij})_{kl} &= -\delta_{kl} \cdot ((A_{ii})_{kl} + (C_{ii})_{kl})^{-1}((A_{ij})_{kl} + (C_{ij})_{kl}) \; \forall j \in P_i, \\ (C_{ij})_{kl} &= \sum_{m \notin C_i} \left((A_{mi})_{kl} + \sum_{n \in C_i} (A_{mn})_{kl} \right)^{-1} (A_{im})_{kl} (A_{mj})_{kl}. \end{aligned}$$

Die folgende Interpolation ist die Anwendung der Transformierten-Standard-Interpolation auf die zu den Matrixblöcken gehörigen Diagonalmatrizen:

Definition 3.16 (Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation) *Für alle $i \in F$ sei $\hat{P}_i := \{j \in C \mid j \in P_i \; \exists \, k \in F_i^S : j \in P_k\}$. Definiere:*

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{k \in \hat{P}_i} W_{ik} e_k, \\ (W_{il})_{mn} &:= \delta_{mn} \cdot (\hat{A}_{ii})^{-1}_{mn} \left(\sum_{j \in \hat{N}_i} (\hat{A}_{ij})_{mn} \right) \left(\sum_{k \in \hat{P}_i} (\hat{A}_{ik})_{mn} \right)^{-1} (\hat{A}_{il})_{mn}. \end{aligned}$$

3.6 Abschneiden des Interpolationsoperators

Vor allem bei den Transformierten Interpolationen (3.13, 3.16) füllen sich die Grobgitteroperatoren stark auf, da Feingitterpunkte nicht mehr nur durch direkt benachbarte Grobgitterpunkte interpoliert werden. Umso dichter allerdings die Grobgitteroperatoren besetzt sind, umso mehr Rechenoperationen und Speicheraufwand benötigt das Verfahren. Um dies zu vermeiden, werden Nicht-Null

Einträge im Interpolationsoperator, die sehr klein im Vergleich zu anderen Einträgen sind, gelöscht. Die verbleibenden Einträge in einer Zeile werden dann durch eine Matrix derart skaliert, dass die ursprüngliche Zeilensumme erhalten bleibt.

Obwohl mit dieser Methode nicht direkt die Anzahl der Nicht-Null-Einträge gesteuert werden kann, hat sich diese Vorgehensweise in der Praxis, wie etwa bei [16], bewährt, zumal das gleiche Vorgehen bei dem Grobgitteroperator nicht angewendet werden kann, da dabei wichtige Eigenschaften des Grobgitteroperators wie die Regularität und Elliptizität verloren gehen können. Zusätzlich besitzt das Abschneiden des Interpolationsoperators gegenüber dem Abschneiden des Grobgitteroperators eine weitere nützliche Eigenschaft: Durch das Abschneiden des Interpolationsoperators wird bereits die Berechnung des Grobgitteroperators kostengünstiger.

Die einzige Schwierigkeit dieser Verfahrensweise ist ähnlich wie bei der Grobgitterwahl der Vergleich zwischen den unterschiedlichen Matrixblöcken einer Zeile des Interpolationsoperators.

Hierzu können wieder ähnliche Methoden, wie in dem Abschnitt 3.4 vorgestellt, verwendet werden.

Es hat sich allerdings für die vorgestellten Beispiele herausgestellt, dass ein Vergleich der Matrixblöcke über deren Zeilensummennorm bei dem Abschneiden des Interpolationsoperators zufriedenstellende Ergebnisse liefert. In den numerischen Experimenten wird aus diesem Grund im folgenden als Operatornorm die Zeilensummennorm verwendet. Allgemein lässt sich das Abschneiden folgendermaßen beschreiben:

Sei $0 \leq \alpha_{tr} < 1$ fest vorgegeben, $|||\cdot|||$ eine Operatornorm, dann wird der Blockeintrag j einer Zeile i der Interpolation gelöscht, wenn gilt:

$$|||A_{ij}||| \quad < \quad \alpha_{tr} \max_{k \in N_i} |||A_{ik}|||.$$

4 Einige einfache Systeme

Nach der Vorstellung der verschiedenen Interpolationen und *starken Kopplungen* für das Block-AMG werden in diesem Kapitel Ergebnisse des Block-AMG mit den einzelnen Interpolationen und Kopplungen für einige einfache Beispiele vorgestellt. Die betrachteten Probleme sind Übertragungen von skalaren Modellproblemen, für die das AMG nach Ruge und Stüben, wie in [9] gezeigt, gute Resultate liefert, auf Systeme mit zwei unbekannten Funtionen.
Mit Hilfe der Ergebnisse dieses Kapitels wird eine Auswahl von zwei Interpolationen und einer Kopplung getroffen, mit denen das Block-AMG in dem darauffolgenden Kapitel an Beispielen aus der linearen Elastizitätstheorie näher untersucht wird. Zusätzlich soll an den vorgestellten Problemen nochmals die Analogie zu dem herkömmlichen AMG verdeutlicht werden. Es stellt sich sogar heraus, dass die Resultate des klassischen AMG nach Ruge und Stüben bei den entsprechenden skalaren Beispielen den Ergebnissen des Block-AMG bei den zweidimensionalen Problemen sehr ähnlich sind.

4.1 Vorbemerkungen

Bei allen hier aufgeführten Tests wurde ein einfacher V-Zyklus verwendet. Folgende Einstellungen sind bei allen Experimenten, sofern nicht anders erwähnt, gleich:

- $\alpha = 0.25$ bei der Definition der starken Kopplung.
- Als Operatornorm wurde die Zeilensummennorm verwendet.
- Das gröbste Gitter besteht aus nur einem Punkt.
- Es wurde als Vor-und Nachglätter jeweils ein Schritt des Block-Gauss-Seidel Verfahrens angewendet, bei dem zuerst die Grob- und dann die Feingitterpunkte relaxiert wurden.
- Beim Abschneiden der transformierten Interpolationen wurde der Parameter $\alpha_{tr} = 0.2$ verwendet.

Für die Interpolationen und Kopplungen werden folgende Abkürzungen verwendet:

Transformierte-Standard-Interpolation	TSI
Punktweise-Transformierte-Standard-Interpolation	PTSI
Standard-Interpolation	STI
Punkt-Standard-Interpolation	PSTI
Norm-Kopplung	NORM
Min-Kopplung	MIN
Min-Max-Kopplung	MINMAX
Klassische-Punkt-Kopplung	CLPO

Als Startwert des Mehrgitterzyklus wurde ein Zufallsstartvektor x_0 mit $||x_0||_E = 1$ benutzt. Die Mehrgitteriteration wurde gestoppt, wenn das Residuum in der euklidischen Norm kleiner als 10^{-12} war. Bezeichnet e_i den Fehler nach dem i-ten Iterationsschritt, so ist die Fehlerreduktion des i-ten Iterationsschritts gegeben durch: $\rho_i = \frac{||e_i||_E}{||e_{i-1}||_2}$. Als ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens wird in den Ergebnissen die asymptotische Fehlerreduktion ρ angegeben. Dabei ist ρ das geometrische Mittel der letzten 10 Fehlerreduktionen bevor das Abbruchkriterium nach dem k-ten Schritt erreicht wird:

$$\rho = \sqrt[10]{\frac{||e_k||_E}{||e_{k-10}||_E}}.$$

Zusätzlich zur asymptotischen Konvergenz ist für die Beurteilung des Verfahrens auch noch der benötigte Speicherplatz und der Rechenaufwand eines Mehrgitterschrittes von Bedeutung. Hierfür werden zwei Größen angegeben: Die Gesamt-Operator-Komplexität $c(A)$ und die Gesamt-Gitter-Komplexität $c(G)$:

$$c(A) = \frac{\sum_{0\leq i\leq k} n_z^i}{n_z^0} \tag{42}$$

$$c(G) = \frac{\sum_{0\leq i\leq k} n_u^i}{n_u^0}, \tag{43}$$

wobei k die Anzahl aller Gitter, n_z^i die Zahl der von Null verschiedenen Blockeinträge und n_u^i die Zahl der Unbekannten auf dem i-ten Gitter bezeichnen. Diese Zahlen liefern nur einen ungefähren Wert für den Speicherbedarf und Rechenaufwand, insbesondere werden dabei die Interpolationsoperatoren außer acht gelassen. Trotzdem vermitteln diese Angaben ein recht gutes Bild für den gesamten Rechenaufwand eines Mehrgitterschritts und für den Speicherbedarf der gesamten Gitterhierarchie.
Da die bei der Vergröberung entstehenden Grobgitter für die Konvergenz des entsprechenden Mehrgitterverfahrens von Bedeutung sind und einen interessanten Einblick in die Funktionsweise des algebraischen Mehrgitters geben, werden solche Grobgitter bzw. Gitterhierarchien in einigen Fällen dargestellt. Die Größe der Punkte in einer solchen Abbildung symbolisieren dabei das gröbste Gitter, zu dem der entsprechende Punkt noch gehört, während auftretende Linien zwischen den Punkten die starke Kopplungen markieren.

4.2 Der Vektor-Laplace

In diesem Abschnitt wird das folgende Problem untersucht:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Gesucht ist $f: \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ so dass gilt:

$$\begin{aligned} -A \cdot \vec{\triangle} \cdot f &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ f &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dabei ist $\vec{\triangle}$ der Vektor-Laplace:

$$\vec{\triangle} f = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f_1 + \partial_{yy} f_1 \\ \partial_{xx} f_2 + \partial_{yy} f_2 \end{pmatrix}.$$

Das in diesem Abschnitt betrachtete Problem wird mit dem üblichen Fünfpunktestern der finiten Differenzen auf dem Einheitsquadrat $\Omega = [0,1]^2$ in jeder Komponente diskretisiert:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}.$$

Die Matrix A ist gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bei diesem Beispiel sind ähnliche Konvergenzergebnisse zu erwarten, wie durch das AMG nach Ruge und Stüben für die Diskretisierung der Poissongleichung erzielt werden. Abbildung 7, in der die asymptotische Fehlerreduktion ρ für verschiedene Problemgrößen bei Verwendung der unterschiedlichen Kopplungen und Interpolationen dargestellt ist, belegt diese Annahme:
Die Konvergenzresultate bei Verwendung der Norm-, Min- und Min-Max-Kopplung sind mit $\rho < 0.22$ ähnlich zu den Resultaten herkömmlicher AMG-Methoden für die Poissongleichung. Insbesondere die Min-Max-Kopplung konvergiert mit $\rho < 0.025$ für alle Problemgrößen unabhängig von der gewählten Interpolation außergewöhnlich schnell.
Probleme bereitet dagegen die Verwendung der Klassischen-Punkt-Kopplung. Für die Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation und die Transformierte-Standard-Interpolation können bei dieser Vergröberung für Gitterweiten $h > 1/128$ keine Interpolationsoperatoren berechnet werden, da singuläre Matrizen entstehen, die nicht invertiert werden können. Bei der Punkt-Standard-Interpolation und der Standard-Interpolation in Verbindung mit der Klassischen-Punkt-Kopplung sind die Konvergenzresultate nicht unabhängig von der Problemgröße. So konvergiert das Verfahren bei einer Maschenweite $h = 1/512$ mit $\rho = 0.483$ weniger als halb so schnell als bei der Gitterweite $h = 1/256$, wo die asymptotische Fehlerreduktion $\rho = 0.185$ beträgt.

Der Grund dafür wird durch den Vergleich der entstandenen Gitterhierarchien für $h = 1/32$ bei Vergröberung mit der Klassischen-Punkt-Kopplung und der Min-Max-Kopplung, die die besten Konvergenzresultate liefert, in Abbildung 8 deutlich.
Die Gobgitterwahl mit der Min-Max-Kopplung führt zu einer Grobgitterhierarchie, die einer geometrischen Vergröberung des Ausgangsproblems wie bei geometrischen Mehrgitterverfahren entspricht, die durch die Klassische-Punkt-Kopplung gewonnenen Grobgitter weichen von diesem Idealfall ab. Bereits auf dem zweiten Grobgitter wird das Ursprungsproblem durch die Klassische-Punkt-Kopplung nicht mehr richtig aufgelöst: Es existieren Punkte, die mehr als fünf stark gekoppelte Nachbarpunkte besitzen und das Grobgitterproblem damit nicht mehr als das Ausgangsproblem auf einem gröberen Gitter angesehen werden kann. Die weiteren Grobgitter der beiden Kopplungen unterscheiden sich dementsprechend voneinander.

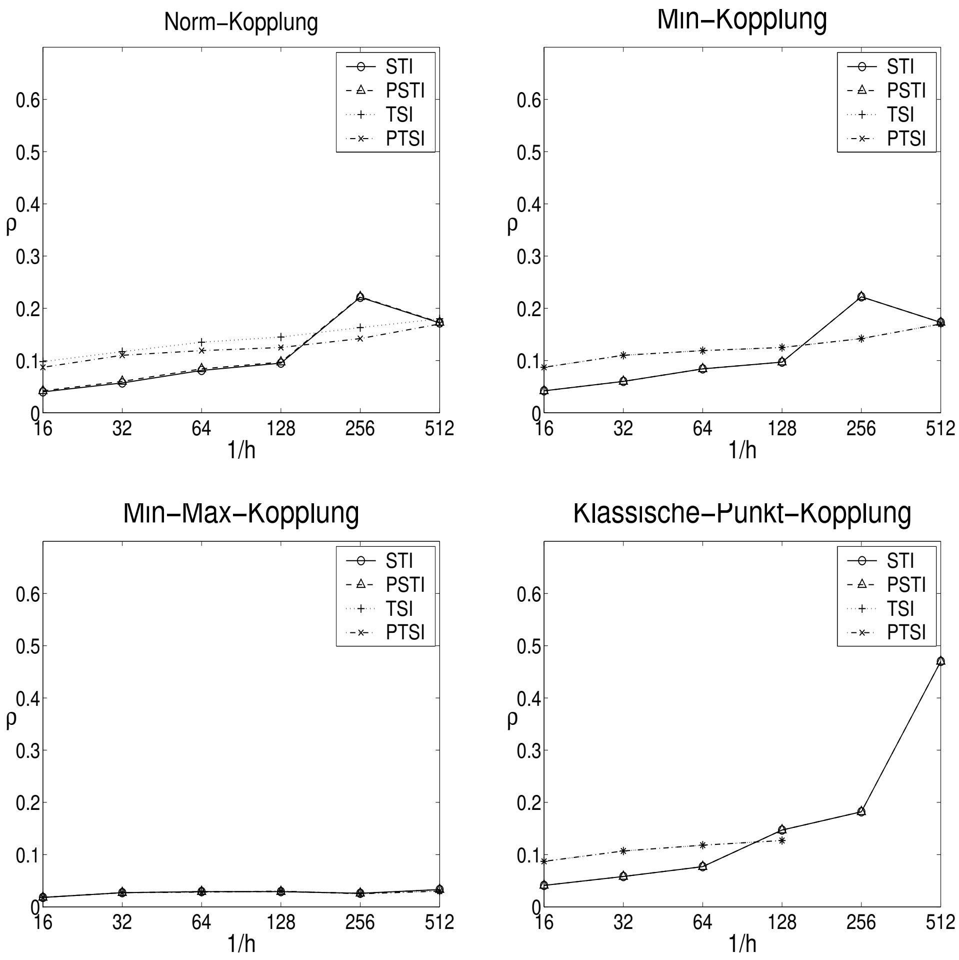
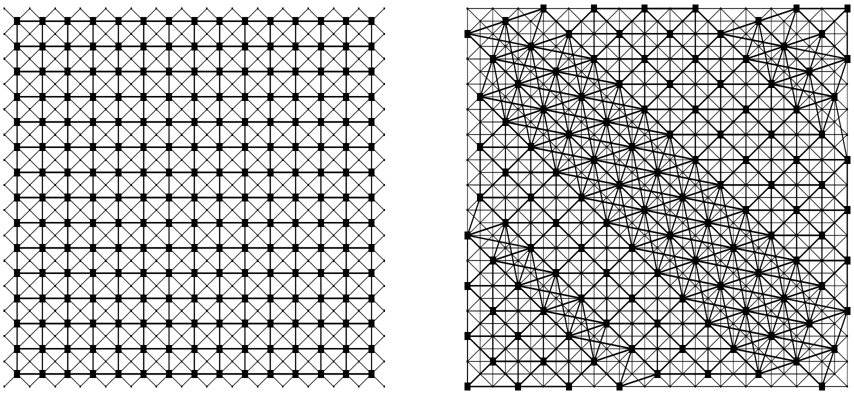


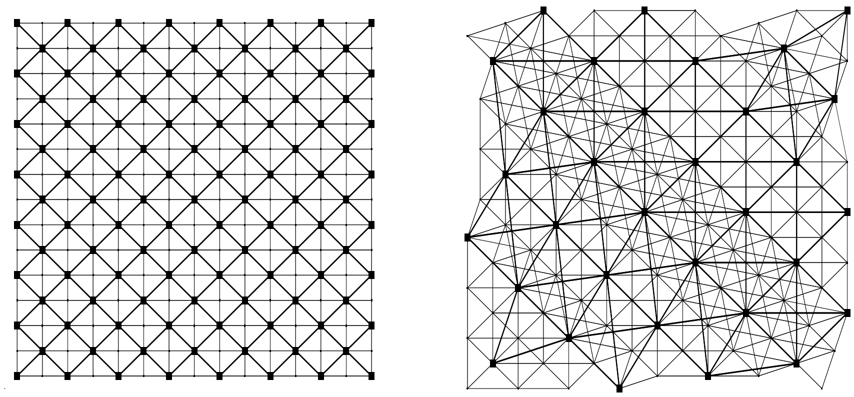
Abbildung 7: Asymptotische Fehlerreduktionen für den Vektorlaplace bei verschiedenen Kopplungen und Interpolationen.

Wie im Abschnitt über die Interpolationen erwähnt, wurden die Interpolationsoperatoren der transformierten Interpolationen mit $\alpha_{tr} = 0.2$ abgeschnitten. In Abbildung 9 sind dazu die Gesamt-Operator-Komplexitäten $c(A)$ und die Konvergenzraten der Transformierten-Standard-Interpolation bei Vergröberung mittels der Norm-Kopplung mit und ohne das Abschneiden des Interpolationsoperators für verschiedene Gittergrößen dargestellt. Vor allem für sehr kleine Gitterweiten wird der Unterschied deutlich: Während das Verfahren ohne das Abschneiden der Interpolationsoperatoren für $h = 1/256$ eine Gesamt-Operator-Komplexität $c(A) = 2.927$ besitzt, liefert das Verfahren mit dem Abschneiden einen wesentlich geringeren Wert von $c(A) = 2.213$. Die Gesamt-Gitter-Komplexität ist dagegen bei beiden Verfahren gleich, da das Abschneiden kaum Auswirkungen auf die Struktur der zu den Grobgitteroperatoren gehörigen Graphen der *starken Kopplungen* und damit auf die Vergröberung hat. Dementsprechend liefern beide Verfahren nahezu die gleichen Konvergenzresultate wie in der rechten Grafik in Abbildung 9 zu sehen ist.

Erstes und zweites Grobgitter mit starken Kopplungen



Zweites und drittes Grobgitter mit starken Kopplungen



Gesamte Gitterhierarchie

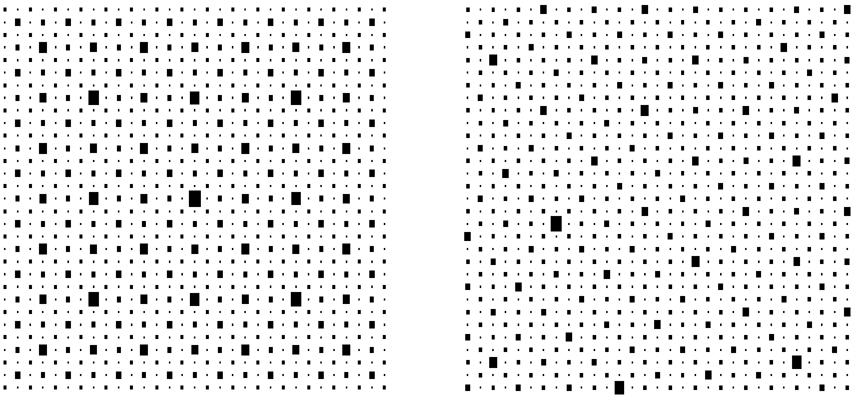


Abbildung 8: Komplette Gitterhierarchie und verschiedene Grobgitter mit starken Kopplungen für den Vektor-Laplace, $h = \frac{1}{32}$, bei Verwendung der Punkt-Transformierten-Standard-Interpolation mit 8 Grobgittern bei Vergröberung mit der Min-Max-Kopplung (linke Spalte) und 6 Grobgittern bei Verwendung der Klassischen-Punkt-Kopplung (rechte Spalte).

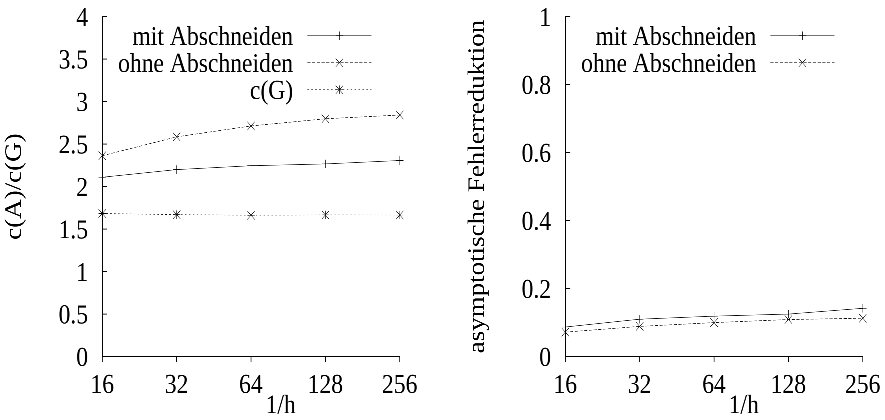


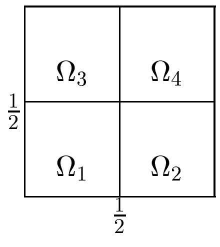
Abbildung 9: Komplexitäten und Konvergenzraten für den Vektor-Laplace mit und ohne Abschneiden des Interpolationsoperators für die Transformierte-Standard-Interpolation und Vergröberung mittels Norm-Kopplung

4.3 Ein Diffusionsproblem mit Sprüngen in den Koeffizienten

Einer der Vorteile algebraischer Verfahren gegenüber den geometrischen Methoden liegt in der Anwendbarkeit auf Probleme mit variierenden Koeefizienten. Als ein erstes Beispiel für ein Problem mit nicht konstanten Koeffizienten wird daher in Analogie zu [9] in diesem Abschnitt ein Diffusionsproblem mit Sprüngen in den Koeffizienten betrachtet.
Gesucht sei dazu nun $f : [0,1]^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, so dass

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2) \cdot \vec{\triangle} f &= 0 \ \text{ in } [0,1]^2 \\ f &= 0 \ \text{ auf dem Rand.} \end{aligned}$$

In dem hier betrachteten Fall soll $A(x_1, x_2)$ eine auf dem Einheitsquadrat stückweise konstante Funktion sein. Dazu sei das Gebiet $\Omega := [0,1]^2$ folgendermaßen aufgeteilt:



Dann ist $A(\cdot,\cdot)$ jeweils auf Ω_1, Ω_3 und Ω_2, Ω_4 konstant mit

$$A\,|_{\Omega_1} = A\,|_{\Omega_4} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$A\,|_{\Omega_2} = A\,|_{\Omega_3} \equiv 10^n \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das Gebiet Ω ist derart zerlegt, dass die Sprungstellen genau auf dem Gitter liegen. Bei einer Diskretisierung mit bilinearen Finiten Elementen ergibt sich damit für jede Komponente der gesuchten Funktion der folgende Neun-Punkte-Stern:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -d_1 & -\frac{d_1+d_2}{2} & -d_2 \\ -\frac{d_2+d_3}{2} & 2\cdot(d_1+d_2+d_3+d_4) & -\frac{d_2+d_4}{2} \\ -d_3 & -\frac{d_3+d_4}{2} & -d_4 \end{bmatrix},$$

wobei d_1, d_2, d_3 und d_4 die Werte von $A(\cdot,\cdot)$ im jeweiligen Träger der entsprechenden Basisfunktion sind.
Wie auch bei der Anwendung von herkömmlichen AMG-Methoden auf das skalare Diffussionsproblem mit springenden Diffusionskoeffizienten, ist zwar insgesamt eine Verschlechterung der Konvergenzergebnisse zu erwarten, das Verfahren sollte allerdings bei geeigneter Grobgitterwahl und Interpolation weiterhin stabil und robust sein.
Betrachtet man in der Abbildung 11 die asymptotische Fehlerreduktion in

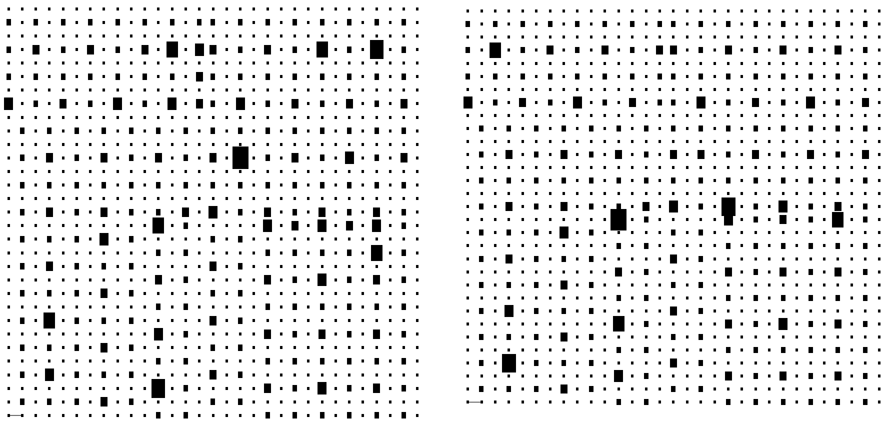


Abbildung 10: Gitterhierarchien für das Diffusionsproblem mit springenden Koeffizienten ($h = \frac{1}{32}$) bei Verwendung der Norm-Kopplung und der Transformierten-Standard-Interpolation für $n = 1$ (links) und $n = 3$ (rechts).

Abhängigkeit der unterschiedliche Problemgrößen für $n = 1$ und $n = 3$ wird diese Annahme bekräftigt.
Die besten Resultate liefert die Norm-Kopplung in Verbindung mit der Transformierten-Standard-Interpolation mit einer Fehlerreduktion $\rho \leq 0.287$ für $n = 1$, $n = 3$ und alle Problemgrößen. In Tabelle 1 sind entsprechende Konvergenzraten für $0 \leq n \leq 4$ und unterschiedliche Gitterweiten angegeben. Es ist deutlich zu sehen, dass das Block-AMG robust gegenüber einem wachsen der Sprünge ist.
Auch bei einer Vergröberung mit der Min-Kopplung und Anwendung der Transformierten-Standard-Interpolation weist das Verfahren mit $\rho < 0.350$ für alle Probleme eine h-Asymptotik und Robustheit gegenüber der Größe des

Sprungs auf.
Die größten Schwierigkeiten hingegen bereitet die Vergröberung mit der Min-Max-Kopplung für $n = 1$. Für dieses Problem können keine Interpolationsoperatoren berechnet werden, da Matrizen, die für die Interpolationen invertiert werden müssen, singulär sind. Für $n = 3$ konnten zwar bei dieser Vergröberung die Standard- und Punkt-Standard-Interpolation berechnet werden, die Konvergenzergebnisse werden allerdings mit wachsender Problemgröße schlechter, so dass bei $h = 1/512$ schon eine asymptotische Fehlerreduktion $\rho = 0.97$ erreicht wird. Ähnliche Resultate gelten auch für die Vergröberung mit der Klassischen-Punkt-Kopplung, bei der einige Operatoren aus demselben Grund nicht ausgerechnet werden konnten.
Insgesamt führen die transformierten Interpolationen, sofern die Interpolationsoperatoren berechnet werden können, zu besseren Resultaten als die Punkt-Standard- und Standard-Interpolation. Für diesen Sachverhalt gibt es eine ein-

h	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
1/16	0.098	0.124	0.115	0.143	0.104
1/32	0.117	0.100	0.103	0.132	0.103
1/64	0.135	0.162	0.133	0.138	0.134
1/128	0.145	0.264	0.163	0.201	0.165
1/256	0.163	0.239	0.186	0.228	0.197
1/512	0.180	0.287	0.240	0.240	0.244

Tabelle 1: Verschiedene Konvergenzraten der Transformierten-Standard-Interpolation und Vegröberung mit der Norm-Kopplung für verschiedene Werte von n

fache Erklärung: Die entstehenden Grobgitter sind nicht exakt an die Sprünge im Gebiet angepasst.
In Abbildung 10 ist dazu eine mit der Norm-Kopplung berechnete Gitterhierarchie dargestellt. Obwohl die Sprungstellen in der Gitterhierarchie zu erkennen sind, so ist die Vergröberung nicht so optimal wie in dem entsprechenden skalaren Fall. Da die transformierten Interpolationen im Gegensatz zu den anderen beiden Interpolationen nicht nur durch direkt benachbarte Grobgitterpunkte interpoliert werden, liefern diese Interpolationen trotz der nicht so guten Grobgitterwahl bessere Resultate.

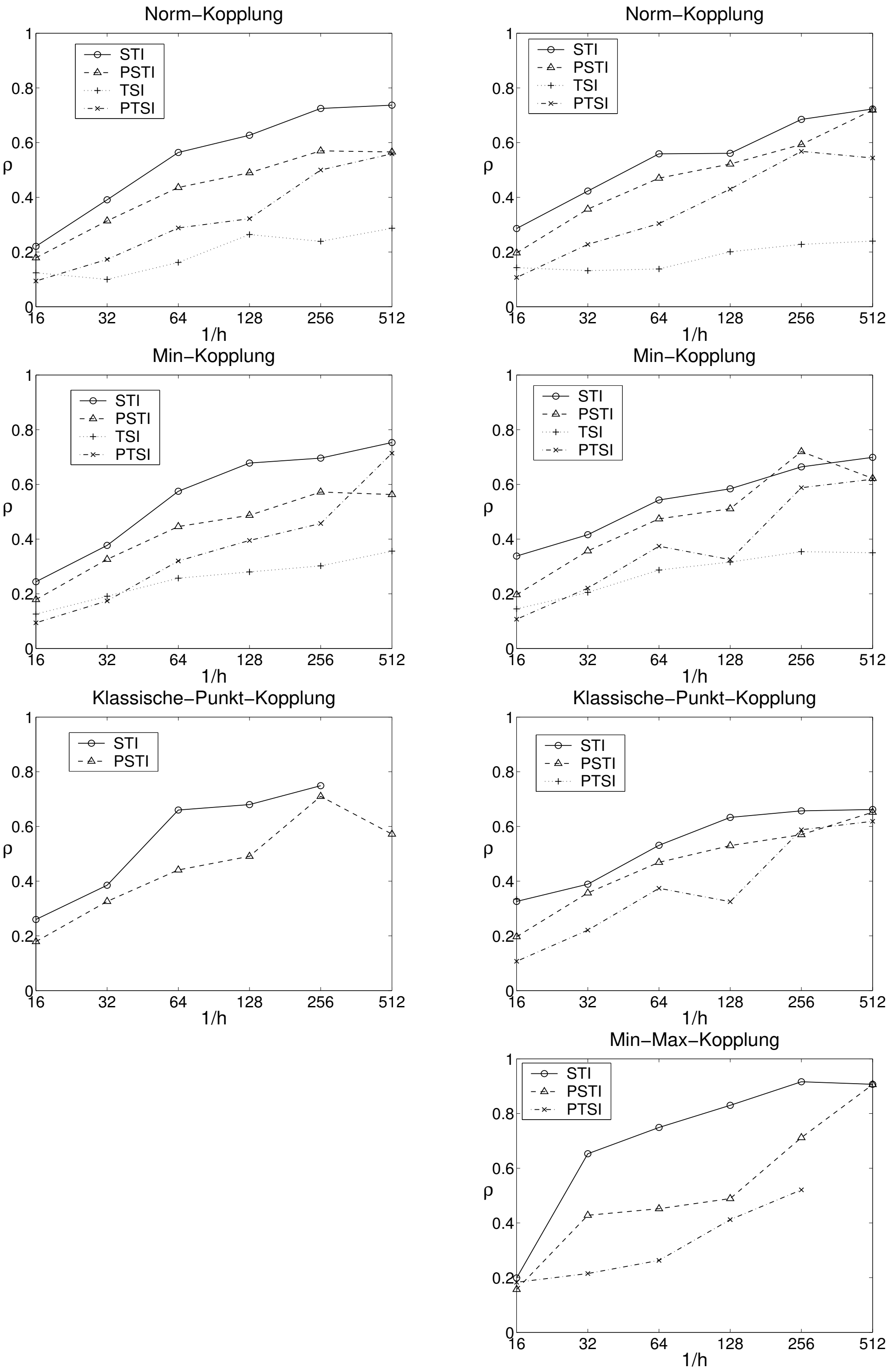


Abbildung 11: Fehlerreduktion für das Diffusionproblem mit springenden Koeffizienten und unterschiedlichen Problemgrößen für $n = 1$ (linke Spalte) und $n = 3$ (rechte Spalte)

4.4 Gekoppelte anisotrope Diffusionsprobleme

Zum Abschluß dieses Kapitels soll noch ein für skalare AMG-Methoden typisches Problem betrachtet werden: Ein gekoppeltes anisotropes Diffusionsproblem. Seien dazu $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ und $\varepsilon \geq 0$ fest vorgegeben. Gesucht ist $u: [0,1]^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ so, dass gilt:

$$\begin{aligned}
a_{11} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_1 + a_{12} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_2 + a_{11} \cdot \epsilon \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u_1 + a_{12} \cdot \epsilon \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u_2 &= 0 \quad \text{in } (0,1)^2 \\
a_{21} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_1 + a_{22} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_2 + a_{21} \cdot \epsilon \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u_1 + a_{22} \cdot \epsilon \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u_2 &= 0 \quad \text{in } (0,1)^2.
\end{aligned}$$

Das Problem wurde mit dem folgenden Fünfpunktestern der finiten Differenzen in jeder Komponente diskretisiert:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -\varepsilon & \\ -1 & 2+2\varepsilon & -1 \\ & -\varepsilon & \end{bmatrix}.$$

Wie in den vorherigen Problemen wird A gesetzt auf:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nach den vorangegangenen Ergebnissen ist zu erwarten, dass sich das Block-AMG erneut ähnlich wie das klassische AMG im entsprechenden skalaren Fall in [9] verhält, und damit mit kleiner werdendem ε immer mehr zu einem direkten Löser entartet.
In Abbildung 12 sind die asymptotischen Fehlerreduktionen des Block-AMG mit den verschiedenen Interpolationen und Kopplungen bezüglich unterschiedlicher Gitterweiten für $\varepsilon = 10^{-1}$ und $\varepsilon = 10^{-3}$ dargestellt.
Für den Fall $\varepsilon = 10^{-1}$ liefert einzig die Vergröberung mit der Norm-Kopplung zusammen mit der Transformierten-Standard-Interpolation unabhängig von der gewählten Maschenweite mit $\rho \leq 0.165$ zufriedenstellende Resultate. Für $h \leq 1/256$ bei Verwendung der Klassischen-Punkt-Kopplung werden mit den beiden transformierten Interpolationen zwar ähnliche Ergebnisse geliefert ($\rho \leq 0.160$), allerdings konnten bei der kleinsten Gitterweite $h = 1/512$ die Interpolationsoperatoren nicht aufgestellt werden.
Im Gegensatz dazu konvergiert das Block-AMG für alle Interpolationen zusammen mit der Norm- oder Min-Kopplung mit $\rho \leq 0.100$ im Fall $\varepsilon = 10^{-3}$ sehr schnell. Obwohl diesmal die Punkt-Standard- und Standard-Interpolation gemeinsam mit der Klassischen-Punkt-Kopplung zufriedenstellende Ergebnisse liefern ($\rho \leq 0.156$), können die beiden transformierten Interpolationen für kein Problem mit $h \leq 1/64$ berechnet werden.
Der Grund dafür, dass bei geringer Anisotropie im allgemeinen für $\varepsilon = 10^{-1}$ die Ergebnisse schlechter sind als bei $\varepsilon = 10^{-3}$, ist in Abbildung 13 zu sehen. Dort sind die gesamte Gitterhierarchie und das erste und zweite Grobgitter mit den starken Kopplungen bei einer Gitterweite von $h = 1/32$ und Verwendung der Norm-Kopplung zusammen mit der Transformierten-Standard-Interpolation für

$\varepsilon = 10^{-1}$ und $\varepsilon = 10^{-3}$ dargestellt. Bei schwacher Anisotropie ($\varepsilon = 10^{-1}$) ist das Problem bereits auf dem ersten Grobgitter nicht mehr entkoppelt, während für $\varepsilon = 10^{-3}$ die Grobgitter entlang der Anisotropie, unabhängig von der gewählten Kopplung, semi-vergröbert werden. Mit kleiner werdendem ε entartet so das Block-AMG in Analogie zu skalaren AMG-Methoden immer mehr zu einem direkten Löser.

Nachdem in diesem Abschnitt gezeigt wurde, dass das Block-AMG bei richtiger Wahl der Interpolation und des Kopplungsbegriffes für die einfachen Übertragungen von skalaren Problemen auf gekoppelte Systeme recht gute Resultate liefert, die vergleichbar mit den Resultaten herkömmlicher Verfahren für den entsprechenden skalaren Fall sind, sollen nun Probleme aus der linearen Elastizitätstheorie untersucht werden.
Da bis auf die Norm-Kopplung die Resultate bei Verwendung der anderen Kopplungsbegriffe sehr stark abhängig von dem betrachteten Problem waren und die beiden transformierten Interpolationen die besten Resultate geliefert haben, werden in dem nächsten Kapitel nur noch die Resultate für diese Interpolationen zusammen mit der Norm-Kopplung angegeben.

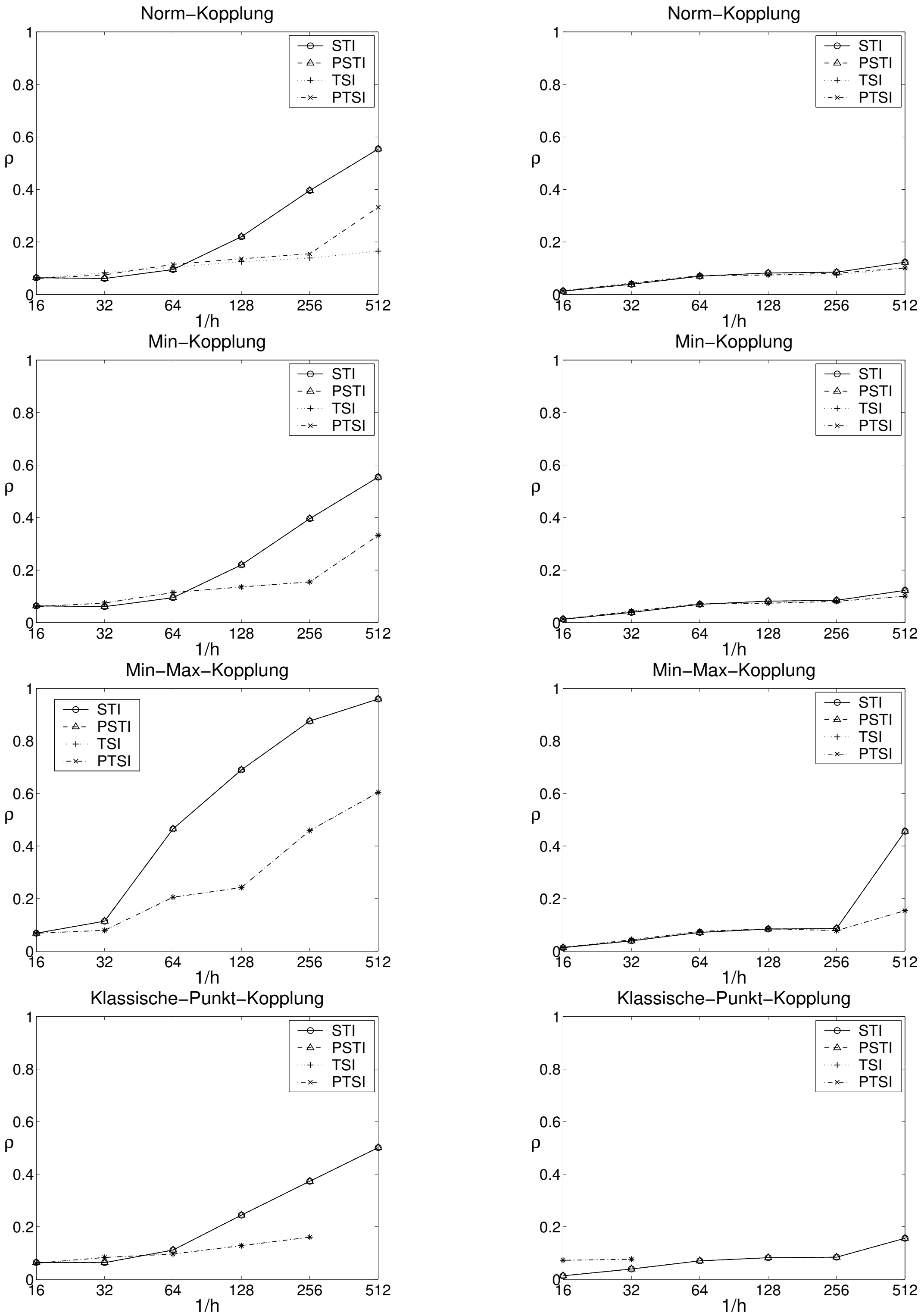
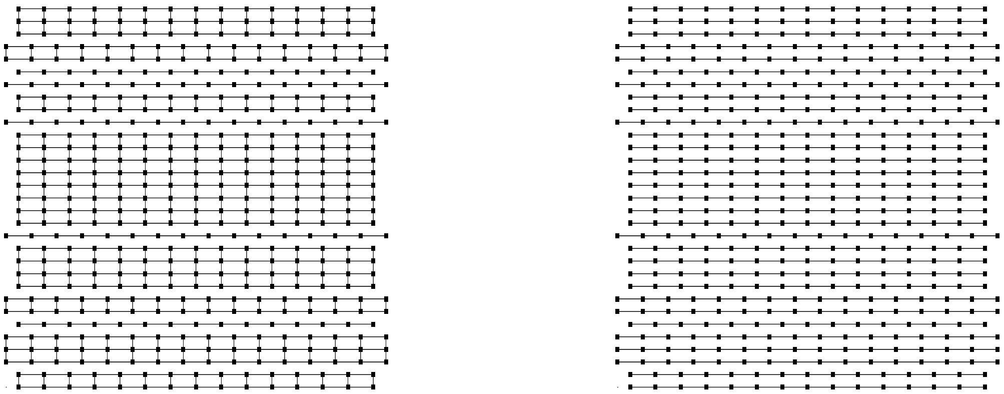
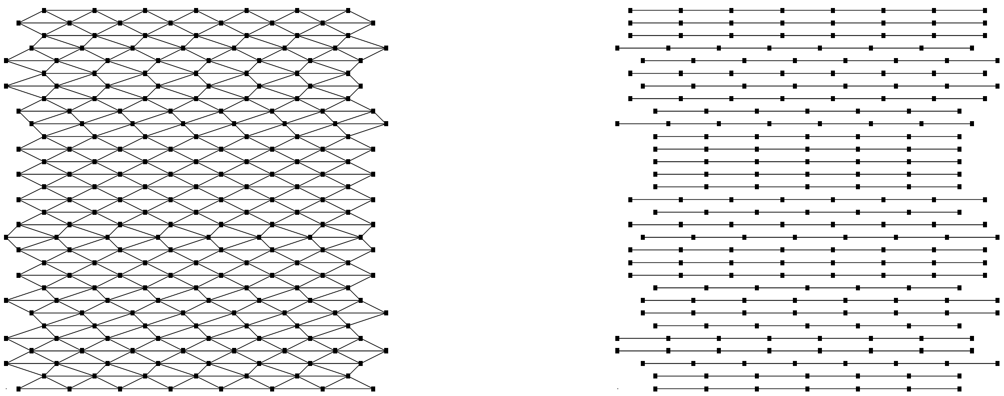


Abbildung 12: Fehlerreduktionen für das anisotrope Diffusionsproblem für unterschiedliche Maschenweiten, $\varepsilon = 10^{-1}$ (linke Spalte) und $\varepsilon = 10^{-3}$ (rechte Spalte).

Erstes Grobgitter mit starken Kopplungen



Zweites Grobgitter mit starken Kopplungen



Gesamte Gitterhierarchie

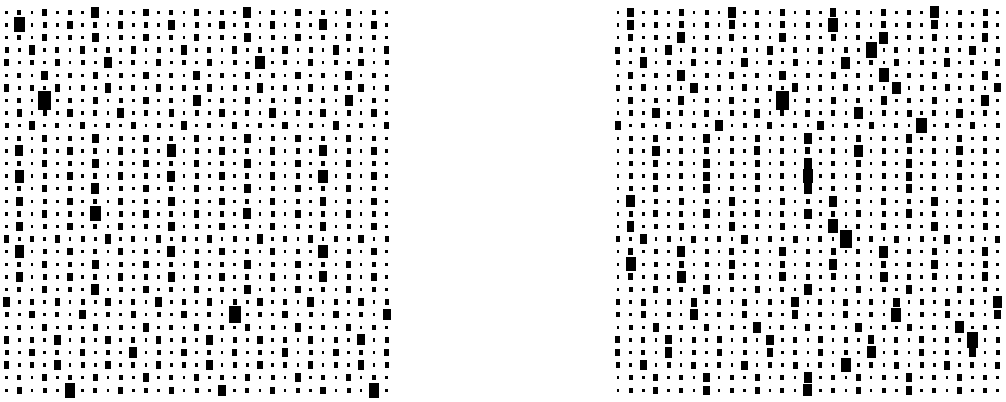


Abbildung 13: Gitterhierarchien des Block-AMG unter Verwendung der Norm-Kopplung und der Transformierten-Standard-Interpolation für das anisotrope Diffusionsproblem mit Gitterweite $h = \frac{1}{32}$ und den Werten $\varepsilon = 10^{-1}$ (links) und $\varepsilon = 10^{-3}$ (rechts)

5 Anwendungen in der Elastizitätstheorie

In diesem Kapitel wird das Block-AMG mit den beiden transformierten Interpolationen sowie der Vergröberung mittels Norm-Kopplung auf Probleme der linearen Elastizitätstheorie angewendet. Nach einer kurzen Einleitung in die lineare Elastizitätstheorie, die sich an der Einführung in [2] orientiert und die dortige Notation verwendet, werden im ersten Abschnitt die Elemente des zum Operator der schwachen Formulierung gehörigen Nullraums als algebraisch glatt identifiziert.
Der zweite Abschnitt behandelt deshalb die Frage nach der Interpolationsgüte dieser Elemente, die auch *rigid body modes* genannt werden. Dabei wird sich herausstellen, dass die *rigid body modes* für zwei Standardvergröberungen in zwei und drei Dimensionen durch die Direkte Interpolation im Inneren des Gebietes exakt interpoliert werden.
Im dritten Abschnitt werden schließlich die ersten Konvergenzergebnisse für Modellprobleme der Elastiziätstheorie mit Dirichletrand angegeben. Es werden sowohl die Stabilität als auch die Robustheit des Verfahrens betrachtet, wozu Konvergenzergebnisse für verschiedene Gitterweiten, Poissonzahlen, Sprünge im Elastizitätsmodul und gestreckte Gitter bei der Diskretisierung angegeben werden. Nachdem sich das Verfahren in diesem Abschnitt als stabiler und robuster Löser für die behandelten Probleme herausgestellt hat, werden im vierten Abschnitt Probleme mit freien Rändern untersucht. Obwohl sich die Ergebnisse verschlechtern, können durch Einsatz des Block-SOR-Verfahrens als Glätter anstelle des Block-Gauss-Seidel-Verfahrens und einer separaten Randvergröberung die Ergebnisse entscheidend verbessert werden, so dass auch in solchen Fällen zufriedenstellende Resultate erzielt werden können.
Zum Abschluß des Kapitels werden im fünften Abschnitt Resultate des Block-AMG für Probleme mit komplizierten Geometrien und unstrukturierten Gittern vorgestellt.

5.1 Einführung in die lineare Elastizitätstheorie

In der linearen Elastizitätstheorie ist die Verschiebung u eines Körpers, der durch das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschrieben wird, unter der Einwirkung einer äußeren Volumenkraft f und einer Flächenkraft g gesucht. Sei also $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gegeben, $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ der Teil des Randes, auf den die Flächenkräfte wirken und $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ der Teil des Randes, an dem der Körper fest eingespannt ist. Die Gleichung für die Verschiebung u der Deformation ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mu\triangle u + (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\, u &= f \text{ in } \Omega && (44)\\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_0 && (45)\\ \sigma(u)\cdot n &= g \text{ auf } \Gamma_1. && (46) \end{aligned}$$

Dabei ist $\sigma(u)$ definiert als:

$$\sigma(u) = C\varepsilon(u),$$

wobei der Verzerrungstensor $\varepsilon(u) := (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^3$ durch $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ gegeben ist und mit $\theta := \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ C$ durch

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \theta \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

bestimmt wird. Die beiden Lame-Konstanten $\lambda > 0$, $\mu > 0$ und die Poisson-Zahl $0 < \nu < \frac{1}{2}$ sowie das Elastizitätsmodul $E > 0$ sind nicht unabhängig voneinander, sondern durch die folgenden Gleichungen miteinander gekoppelt:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \qquad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2+2\nu}.$$

Definiert man für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A : B \quad := \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ij},$$

so erhält man die folgende schwache Formulierung des Problems (44):
Gesucht ist $u \in H^1_\Gamma := \{v \in H^1(\Omega)^3 \mid v(x) = 0\ \forall x \in \Gamma_0\}$ so, dass:

$$\int_\Omega \varepsilon(u) : C\varepsilon(u) dx \quad = \quad (f,v)_0 - \int_{\Gamma_1} g \cdot v\ dx \text{ für alle } v \in H^1_\Gamma. \tag{47}$$

Es ist nicht immer notwendig, das volle dreidimensionale Problem zu betrachten. In einigen Fällen reicht es aus, zu einem zwei- oder sogar eindimensionalen Modell überzugehen. Hier gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, die in [2] auch formal aus dem Modell hergeleitet werden.

- Auf den Körper wirken nur äußere Kräfte ein, die in der $x_1 - x_2$-Ebene liegen. Ist der Körper in x_3-Richtung dünn und in dieser Richtung frei beweglich, entsteht ein ebener Spannungszustand:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3) \quad &= \quad \sigma_{ij}(x_1,x_2), \text{ für } i,j = 1,2 \\ \sigma_{i3} = \sigma_{3i} \quad &= \quad 0, \text{ für } i = 1,2,3. \end{aligned}$$

  Damit ergibt sich das folgende reduzierte Problem:

$$\begin{aligned} \frac{2-2\nu}{1-2\nu}\partial_{11}u_1 + \partial_{22}u_1 + \frac{1}{1-2\nu}\partial_{12}u_2 \quad &= \quad f_1 \\ \partial_{11}u_2 + \frac{2-2\nu}{1-2\nu}\partial_{22}u_2 + \frac{1}{1-2\nu}\partial_{12}u_1 \quad &= \quad f_2. \end{aligned}$$

- Wenn die Randbedingungen an den Rändern so gesetzt werden, dass keine Deformation in x_3-Richtung möglich ist, so entsteht ein ebener Verzerrungszustand:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon_{ij}(x_1, x_2), \text{ für } i, j = 1, 2 \\ \varepsilon_{i3} = \varepsilon_{3i} &= 0, \text{ für } i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

  und das neue zweidimensionale System hat damit folgende Gestalt:

$$\partial_{11} u_1 + \frac{1-\nu}{2} \partial_{22} u_1 + \frac{1+\nu}{2} \partial_{12} u_2 = f_1 \tag{48}$$

$$\frac{1-\nu}{2} \partial_{11} u_2 + \partial_{22} u_2 + \frac{1+\nu}{2} u_1 = f_2. \tag{49}$$

  Ähnlich wie für das dreidimensionale Elastizitätsproblem lautet damit die schwache Formulierung des Problems: Gesucht ist $u \in H^1_\Gamma := \{v \in H^1(\Omega)^2 \mid v(x) = 0 \; \forall x \in \Gamma_0\}$ so, dass gilt:

$$\int_\Omega \varepsilon(u) : C\varepsilon(u) dx = (f, v)_0 - \int_{\Gamma_1} g \cdot v \; dx \text{ für alle } v \in H^1_\Gamma. \tag{50}$$

  Dabei ist $C(\varepsilon)$ analog zum dreidimensionalen Fall bestimmt durch:

$$\begin{bmatrix} (C\varepsilon)_{11} \\ (C\varepsilon)_{22} \\ (C\varepsilon)_{12} \end{bmatrix} = \theta \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}.$$

Im folgenden sei $a(\cdot, \cdot)$ immer definiert durch $a(u, v) = \int_\Omega \varepsilon(u) : C\varepsilon(v) dx$. Für $\hat{\Omega} \subset \Omega$ definiere $a(u, v) \mid_{\hat{\Omega}} := \int_{\hat{\Omega}} \varepsilon(u) : C\varepsilon(u) dx$.

Für die Güte der Konvergenz algebraischer Mehrgittermethoden ist die Güte der Interpolation algebraisch glatter Fehler, wie in Theorem 3.3 zu sehen war, von Bedeutung. Es stellt sich heraus, dass die Elemente des zum Operator gehörigen Nullraums, auch *rigid body modes* genannt, dabei eine wichtige Rolle spielen. Dazu betrachtet man nochmals die Definition des algebraisch glatten Fehlers. Ein Fehler e heißt algebraisch glatt, wenn gilt:

$$||e||_2^2 \ll ||e||_1^2.$$

Schreibt man diese Bedingung um, so erhält man:

$$(D^{-1} r, r)_E \ll (e, r)_E,$$

wobei $r = Ae$ das Residuum bezeichnet. Ist der rechte Term der Ungleichung schon sehr klein, so ergibt sich näherungsweise:

$$r \approx 0.$$

Für $1 \leq i \leq n$ gilt damit:

$$\sum_{j \in N_i} A_{ij} e_j \approx 0. \tag{51}$$

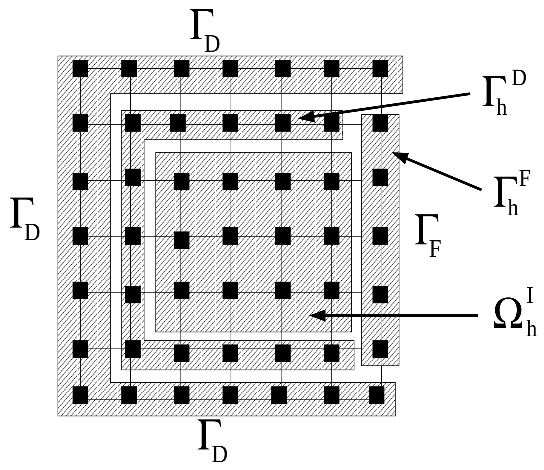


Abbildung 14: Aufteilung der Gitterpunkte

Umgekehrt lässt sich auch argumentieren, dass Fehler, für die (51) gilt, algebraisch glatt sind. Im folgenden soll gezeigt werden, dass die Elemente des Nullraums der zur schwachen Formulierung gehörigen Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ die Bedingung (51) erfüllen und somit algebraisch glatt sind.

Dazu werden zunächst einige Notationen eingeführt. Es wird vorausgesetzt, das das betrachtete Problem (47) auf dem Gebiet Ω mit bilinearen Finiten Elementen auf einem Gitter Ω_h diskretisiert ist. Die einzelnen Gitterpunkte seien dabei, wie in Abbildung 14 für den zweidimensionalen Fall dargestellt, aufgeteilt in die Punkte im Inneren des Gebietes, Ω_h^I, Punkte, die direkt am Dirichletrand liegen, Γ_h^D, und die Punkte auf dem Neumannrand, Γ_h^F. Außerdem wird angenommen, dass Unbekannte, die zu den nodalen Basisfunktionen von Punkten auf dem Dirichletrand gehören, in dem linearen Gleichungssystem eliminiert wurden. Die Basisfunktion des Finite Element Raumes zu dem Knoten k, $k \in \Omega_h^i \cup \Gamma_h^f \cup \Gamma_h^D$ und der Komponente i, $1 \leq i \leq d$ wird durch φ_k^i bezeichnet.

Es bezeichne $\mathcal{N}(a)$ den zu der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ gehörigen Nullraum, d.h. es gilt:

$$v \in \mathcal{N}(a) \quad \Leftrightarrow \quad a(v,w) = 0 \; \forall w.$$

Dabei gilt für die Elemente des Nullraums in 3 Dimensionen:

Bemerkung 5.1 *Für den Nullraum $\mathcal{N}(a)$ des Operators $a(\cdot,\cdot)$ des dreidimensionalen Problems (47) gilt:*

$$v \in \mathcal{N}(a) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a, b \in \mathbb{R}^3 : \; v(x) = a \wedge x + b,$$

wobei $\wedge$ das gewöhnliche Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

In [2] wird gezeigt, das C für $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$ positiv definit ist. Es reicht daher für den Beweis dieser Bemerkung zu zeigen, dass für $v \in H^1(\Omega)^3$ gilt:

$$\varepsilon(v) = 0 \text{ in } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \exists a, b \in \mathbb{R}^3 : \; v(x) = a \wedge x + b.$$

Der Beweis dieser Aussage findet sich in [2]. Für das zweidimensionale Problem gilt analog, dass für ein Element des Nullraums die symmetrischen Ableitungen ε_{ij} verschwinden müssen.
Da die *rigid body modes* affin lineare Abbildungen sind, gibt es zu jeder solchen Funktion $r \in \mathcal{N}(a)$ eine entsprechende Funktion $\hat{r}$ im Raum der Finiten Elemente, die im Inneren des Gebietes mit der Funktion r übereinstimmt. Dabei ist die Basisdarstellung von $\hat{r}$ in dem Finite Element Raum gegeben durch: $e = (e_k)_{k=1}^n$, $e_k \in \mathrm{I\!R}^d$, so dass

$$\hat{r}(x) = \sum_{1\leq k\leq n} \sum_{1\leq i\leq d} (e_k)_i \varphi_k^i(x) \text{ für alle } x \in int(\Omega_h), \tag{52}$$

wobei im Fall der hier betrachteten bilinearen nodalen Basis die einzelnen Koeffizienten durch die Funktionswerte von $r(\cdot)$ an den entsprechenden Gitterpunkten definiert ist. Konkret bedeutet dies für e_k:

$$(e_k)_i = r_i(x_k) \text{ für alle } 1 \leq i \leq 3.$$

Für eine solche Approximation $\hat{r}$ von $r \in \mathcal{N}(a)$ aus (52) gilt damit an allen inneren Knoten i:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in N_i} A_{ij} e_j &= \sum_{j\in N_i} (a(\varphi_i^k, \sum_{1\leq k\leq d} e_{j\,k}\varphi_j^k))_{k=1}^d \\
&= (a(\varphi_i^k, v))_{k=1}^d \\
&= 0, \quad \text{da } v \in ker(a(\cdot,\cdot)).
\end{aligned}$$

Die Approximation der *rigid body modes* im Raum der finiten Elemente ist also algebraisch glatt. Besonders deutlich ist dieses Resultat zu beobachten, wenn bei dem Gauss-Seidel-Verfahren ein Startwert derart gewählt wird, dass der zugehörige Fehler gerade im Raum der *rigid body modes* liegt. Dies ist in Abbildung 15 der Fall. Dort sind zwei verschiedene Startfehler, die zum Nullraum des Operators gehören, und die nach einem Iterationsschritt des Block-Gauss-Seidel-Verfahrens verbliebenen Fehler auf dem Einheitsquadrat dargestellt. Die Fehler nach einer Block-Gauss-Seidel-Iteration unterscheiden sich dabei kaum von den Fehlern des Startwertes und sind somit *algebraisch glatt*.
Für die Güte der Konvergenz des Block-AMG ist die es demnach von Bedeutung, dass die *rigid body modes* möglichst gut durch die verwendete Interpolation interpoliert werden. Im nächsten Abschnitt wird daher zunächst gezeigt, dass im Fall von bilinearen finiten Elementen die Direkte Interpolation, die die Grundlage der beiden transformierten Interpolationen bildet, für zwei standardvergröberte Gitter die *rigid body modes* im Inneren des Gebietes exakt interpoliert.

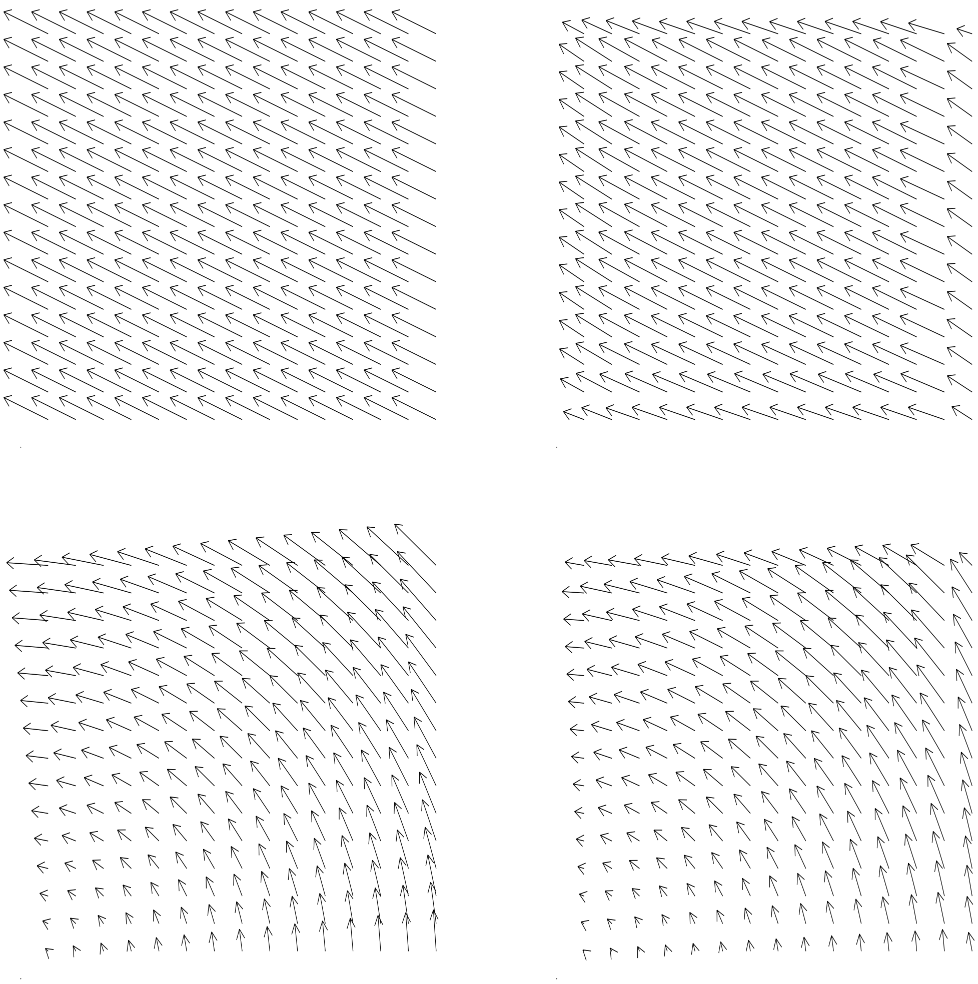


Abbildung 15: Algebraisch glatte Startfehler (linke Spalte) und die nach einem Block-Gauss-Seidel-Schritt resultierenden Fehler (rechte Spalte) für die konstante Funktion $r(x,y) = (-0.1, 0.05) \in \mathcal{N}(a)$ und die Rotation $r(x,y) = 0.1 \cdot (-y, x) \in \mathcal{N}(a)$

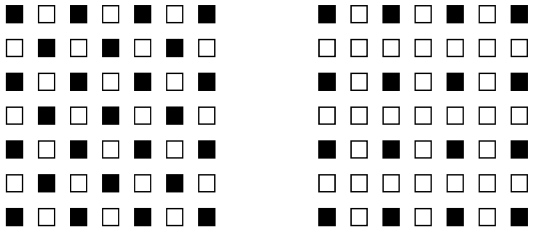


Abbildung 16: Zwei bei den AMG-Vergröberungen häufig entstehende Grobgitter. Die ausgefüllten Rechtecke sind dabei die Grobgitterpunkte.

5.2 Interpolation der rigid body modes

Das folgende Lemma ist eine Folgerung aus der Bemerkung 5.1 und gibt eine Basis des Raums der *rigid body modes* an. Die geforderte Interpolationseigenschaft wird dann für diese Basis gezeigt. Da die Interpolationen des algebraischen Mehrgitterverfahrens linear sind, folgt damit die Behauptung.

Lemma 5.1 *Für $d = 2$ wird der Raum der* rigid body modes *erzeugt von:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Für $d = 3$ bilden die folgenden Funktionen eine Basis von $\mathcal{N}(a)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Lemma 5.2 *Sei $f \in C^1(\Omega)$ und $Q : \hat{\Omega} \mapsto \Omega$, $Q \in \mathrm{IR}^{3\times 3}$ symmetrisch. Dann gilt:*

$$\varepsilon(f \circ Q)(x) \quad = \quad Q \cdot \varepsilon(f)(Qx) \;\; \forall x \in \hat{\Omega}. \tag{53}$$

Beweis: Komponentenweise rechnet man mit Hilfe der Kettenregel nach:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}(f \circ Q)(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (u \circ Q)_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (u \circ Q)_j}{\partial x_i}\right)(x) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(Qx) \cdot Q_{ij} \;+\; \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(Qx) \cdot Q_{ji}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(Qx) \;+\; \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(Qx)\right) \cdot Q_{ij}\right) \\
&= \sum_j \varepsilon_{ij}(f)(Qx) \cdot Q_{ij}
\end{aligned}$$

□

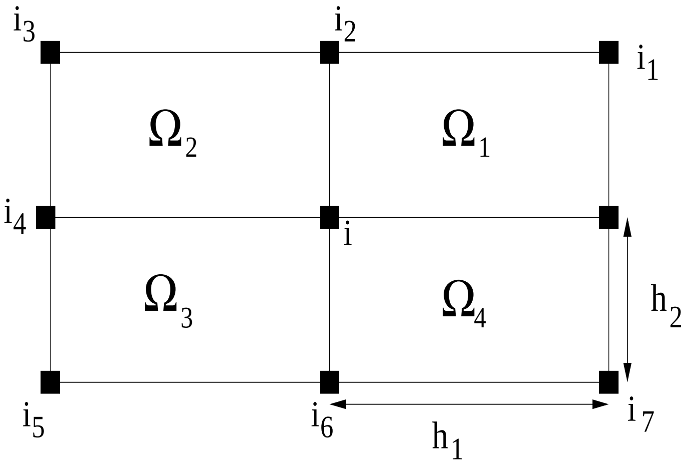


Abbildung 17: Feingitterpunkt i mit benachbarten Gitterpunkten.

Satz 5.1 *Sei n=2,3, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $u : Q(\Omega) \mapsto \mathbb{R}^n$ $\hat{u} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$, $\hat{u} = u \circ Q$, dann gilt:*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varepsilon(\hat{u}) : \mathcal{C}\varepsilon(\hat{v}) d\Omega &= \int_\Omega (Q(\varepsilon(u)) : \mathcal{C}Q\varepsilon(v))\,(Qx) d\Omega & (54) \\ &= \int_{Q(\Omega)} Q(\varepsilon(u)) : \mathcal{C}Q\varepsilon(v) \cdot |det(Q)| d\Omega. & (55) \end{aligned}$$

Beweis: Gleichung (54) folgt aus dem vorherigen Lemma und der Anwendung der Kettenregel. (55) ist eine Anwendung des Transformationssatzes.

□

Mit Hilfe dieser Resultate wird nun der Beweis der exakten Interpolation der *rigid body modes* im Falle eines standardvergröberten Gitters in zwei Dimensionen geführt. Der dreidimensionale Fall ist unübersichtlicher, kann aber analog behandelt werden, so dass der Beweis in drei Dimensionen im Anhang nur kurz skizziert wird.
Sei der Punkt $i \in \Omega_h^i$ wie in der Abbildung 16 gegeben und seien $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$, φ_{i_j}, $j = 1, ..., 8$ die zu den Punkten i_j gehörigen nodalen Basisfunktionen. Zunächst wird die Behauptung für die konstanten Funktionen gezeigt:

Lemma 5.3 *Die Direkte Interpolation I interpoliert konstante Funktionen an allen inneren Knoten exakt.*

Beweis: Sei $r(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}^2$. Dann besitzt $\hat{r}$ aus (52) die folgende Darstellung:

$$\hat{r} = \sum_{1\le k\le n} \sum_{1\le i\le 2} c_i \varphi_k^i(x)$$

Damit bleibt für die Direkte Interpolation I und $i \in F$ mit $e = (c)_{k=1}^n$ zu zeigen:

$$(I_{FC}e_C)_i \quad = \quad c.$$

Es gilt aber:

$$\begin{aligned}
(I_{FC}e_C)_i &= -A_{ii}^{-1}\left(\sum_{k\in N_i} A_{ik}\right)\left(\sum_{k\in P_i} A_{ik}\right)^{-1}\left(\sum_{k\in P_i} A_{ik}e_k\right) \\
&= -A_{ii}^{-1}\left(\sum_{k\in N_i} A_{ik}\right)\left(\sum_{k\in P_i} A_{ik}\right)^{-1}\left(\sum_{k\in P_i} A_{ik}\right)c \\
&= -A_{ii}^{-1}\left(\sum_{k\in N_i} A_{ik}\right)c
\end{aligned}$$

Da an inneren Knoten $\sum_j A_{ij} = 0$ gilt, ist $\sum_{j\in N_i} A_{ij} = -A_{ii}$ und es folgt die Behauptung.

□

Es bleibt noch exemplarisch zu zeigen, dass die Rotation

$$r(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

im Feingitterpunkt i exakt interpoliert wird. Diese Bedingung wird zunächst für das linke Gitter der Abbildung 16 gezeigt, womit das folgende Theorem bewiesen wäre:

Theorem 5.1 *Das Gitter sei wie das linke Gitter in Abbildung 16 vergröbert, was mit der Notation aus Abbildung 17 bedeutet, das i_2, i_4, i_6, i_8 Grobgitterpunkte sind. Dann gilt für den Feingitterpunkt $i = (x_1, x_2)$ und $e = (e_k)_{k=1}^n$, $e_k \in \mathbb{R}^{d\times d}$, mit $r(x) = \sum_{1\leq k\leq n}\sum_{1\leq i\leq d} e_{ki}\varphi_k^i(x)$ für alle $x \in int(\Omega_h)$:*

$$(I_{FC}e_C)_i \quad = \quad e_i \tag{56}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(I_{FC}e_C)_i \quad = \quad & -A_{ii}^{-1}\left(\sum_{k\in N_i} A_{ik}\right)\left(\sum_{k\in P_i} A_{ik}\right)^{-1}\left(A_{ii_2}\begin{pmatrix} x_2+h_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. A_{ii_4}\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1+h_1 \end{pmatrix} + A_{ii_6}\begin{pmatrix} x_2-h_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} + A_{ii_8}\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1-h_1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Da Konstanten exakt interpoliert werden, gilt:

$$\begin{aligned}
(I_{FC}e_C)_i \quad = \quad & \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} - A_{ii}^{-1}\left(\sum_{k\in N_i} A_{ik}\right)\left(\sum_{k\in P_i} A_{ik}\right)^{-1}\left(A_{ii_2}\begin{pmatrix} h_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right. \\
+ \quad & \left. A_{ii_4}\begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \end{pmatrix} A_{ii_6}\begin{pmatrix} -h_2 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{ii_8}\begin{pmatrix} 0 \\ -h_1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Die Behauptung ist demnach genau dann erfüllt, wenn die Summe in der Klammer Null ergibt. Für die Klammer gilt aber:

$$
\begin{aligned}
& A_{ii_2}\begin{pmatrix} h_2 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{ii_4}\begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \end{pmatrix} + A_{ii_6}\begin{pmatrix} -h_2 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{ii_8}\begin{pmatrix} 0 \\ -h_1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} a(\varphi_0^1, \varphi_{i_2}^1)h_2 \\ a(\varphi_0^2, \varphi_{i_2}^1)h_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a(\varphi_0^1, \varphi_{i_4}^2)h_1 \\ a(\varphi_0^2, \varphi_{i_2}^1)h_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(\varphi_0^1, \varphi_{i_6}^1)h_2 \\ a(\varphi_0^2, \varphi_{i_6}^1 h_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(\varphi_0^1, \varphi_{i_8}^2)h_1 \\ a(\varphi_0^2, \varphi_{i_8}^2 h_1) \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} (a(\varphi_0^1, \varphi_{i_2}^1) - a(\varphi_0^1, \varphi_{i_6}^1))h_2 \\ (a(\varphi_0^2, \varphi_{i_2}^1) - a(\varphi_0^2, \varphi_{i_6}^1))h_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (a(\varphi_0^1, \varphi_{i_4}^2) - a(\varphi_0^1, \varphi_{i_8}^2))h_2 \\ (a(\varphi_0^2, \varphi_{i_4}^2) - a(\varphi_0^2, \varphi_{i_8}^2))h_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Mit nachfolgendem Lemma folgt die Behauptung.

□

Lemma 5.4 *Es gilt mit den Bezeichnungen aus dem obigen Bild:*

$$
\begin{aligned}
a(\varphi_0^1, \varphi_{i_2}^1) &= a(\varphi_0^1, \varphi_{i_6}^1) && (57) \\
a(\varphi_0^2, \varphi_{i_2}^1) &= a(\varphi_0^2, \varphi_{i_6}^1) && (58) \\
a(\varphi_0^1, \varphi_{i_4}^2) &= a(\varphi_0^1, \varphi_{i_8}^2) && (59) \\
a(\varphi_0^2, \varphi_{i_4}^2) &= a(\varphi_0^2, \varphi_{i_8}^2) && (60)
\end{aligned}
$$

Beweis: Der Beweis erfolgt exemplarisch für den Fall (57). Die anderen Fälle können analog gezeigt werden. O.B.d.A. : $(x, y) = 0$

Es gilt: $\varphi_0^1 \mid_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \varphi_0^1 \circ Q \mid_{\Omega_3 \cup \Omega_4}$, $\varphi_6^1 \mid_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \varphi_0^2 \circ Q \mid_{\Omega_3 \cup \Omega_4}$ mit $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Drehung um 180°). Mit Satz (5.1) und $det(Q) = 1$ gilt :

$$
\begin{aligned}
a(\varphi_0^1, \varphi_{i_6}^1) &= \int_{\Omega_3 \cup \Omega_4} \varepsilon(\varphi_0^1) : \mathcal{C}\varepsilon(\varphi_{i_6}^1) d(\Omega_3 \cup \Omega_4) \\
&= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} Q\varepsilon(\varphi_0^1) : \mathcal{C}Q\varepsilon(\varphi_0^2) d(\Omega_1 \cup \Omega_2) \\
&= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \varepsilon(\varphi_0^1) : \mathcal{C}\varepsilon(\varphi_0^2) d(\Omega_1 \cup \Omega_2) \\
&= a(\varphi_0^1, \varphi_{i_2}^1)
\end{aligned}
$$

Die gleiche Aussage gilt für die rechte Vergröberung in der Abbildung 16:

Theorem 5.2 *Sei die Menge der Interpolationspunkte des Punktes i gegeben durch:* $P_i = \{i_1, i_3, i_5, i_7\}$, $P_i = \{i_2, i_6\}$ *oder* $P_i = \{i_4, i_8\}$ *(*i_j *wie in der Abbildung 17). Dann werden die rigid body modes exakt interpoliert.*

Beweis: Das die konstanten Funktionen an inneren Punkten exakt interpoliert werden, wurde bereits gezeigt. Für die Rotation folgt die Behauptung wie im Beweis des vorherigen Theorems 5.1.

□

Für den Beweis der exakten Interpolation der *rigid body modes* wurden zwei grundlegende Voraussetzungen gebraucht:

- Damit konstante Funktionen exakt interpoliert werden, muß gelten:
$$\sum_j A_{ij} \quad = \quad 0.$$
- Im Beweis der exakten Interpolation wurde benötigt, dass die Grobgitterpunkte punktsymmetrisch zu dem entsprechenden Feingitterpunkt angeordnet sind.

An mit Gitterpunkten auf dem Dirichletrand benachbarten Knoten $i \in \Gamma_h^D$ sind diese beiden Bedingungen nicht erfüllt. In der Praxis interpolieren die verwendeten Interpolationen an solchen Punkten die *rigid body modes* tatsächlich nicht exakt. Auf diese Tatsache wird noch einmal im Abschnitt 5.4 zurückgekommen.
Auf der anderen Seite sind diese beiden Bedingungen auch bei anderen, unregelmäßigeren Vergröberungen erfüllt, so dass in diesen Fällen die *rigid body modes* exakt interpoliert werden.
Abschließend sei bemerkt, dass die Eigenschaft der exakten Interpolation nur für die Direkte Interpolation bewiesen wurde. Da die Transformierte- und Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation allerdings von der Direkten Interpolation abstammen und für eine höhere Interpolationsgenauigkeit sorgen, ist dieses Resultat auch für diese beiden Interpolationen zu erwarten. Tatsächlich hat sich in numerischen Experimenten diese Vermutung bewahrheitet.

5.3 Numerische Ergebnisse

Da die beiden transformierten Interpolationen zusammen mit der Norm-Kopplung für die einfachen Systeme in Abschnitt 4 die besten Resultate geliefert haben und dies auch für die in diesem Abschnitt gemachten Experimente der Elastizitätstheorie gilt, werden mit Ausnahme des folgenden Unterabschnitts, in dem auch nochmal zusätzlich die Min-Kopplung verwendet wurde, nur noch die Ergebnisse für diese Interpolationen und Kopplung vorgestellt. Sämtliche Diskretisierungen wurden mit dem frei verfügbaren finite Element Programm *Tochnog* erstellt. Dabei wurden isoparametrische bilineare Elemente mit Lobato-Integration verwendet.

5.3.1 Stabilität und Robustheit des Verfahrens

In diesem Abschnitt werden das lineare Elastizitätsproblem (47) in drei Dimensionen auf dem Einheitswürfel $\Omega = [0,1]^3$ und (50) in zwei Dimensionen auf dem Einheitsquadrat betrachtet. Hierbei seien zunächst an allen Rändern Dirichletrandbedingungen gesetzt, was bedeutet, das alle Ränder sind fest eingespannt.
Für den zweidimensionalen Fall sind in Abbildung 19 die asymptotischen Fehlerreduktionen bei Verwendung der Min- und Norm-Kopplung für unterschiedliche

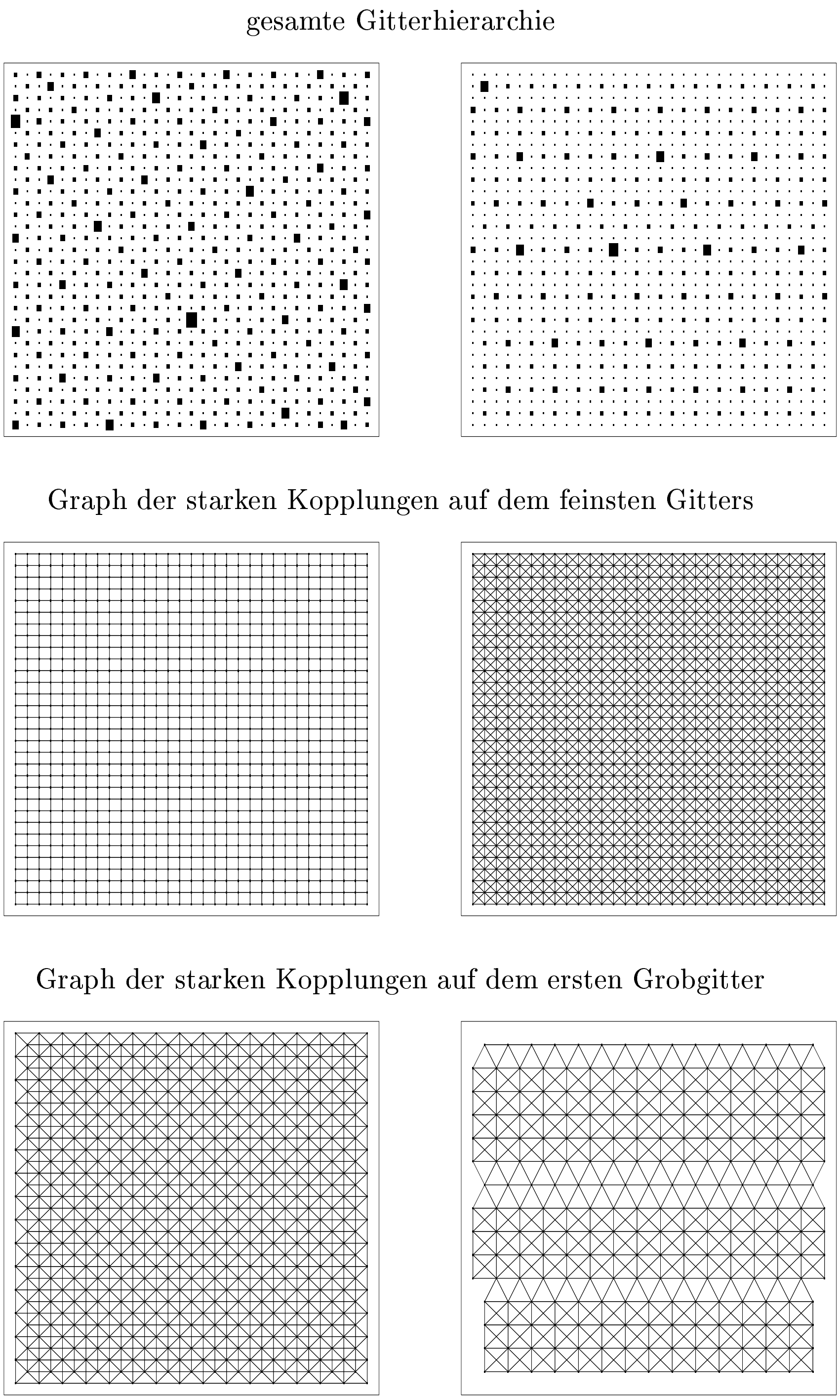


Abbildung 18: Entstehende Grobgitterhierarchie und Grobgitter mit starken Kopplungen bei Verwendung der Norm-Kopplung in der linken Spalte und der Min-Kopplung in der rechten Spalte, $h = 1/32$

Maschenweiten und die Poissonzahlen $\nu = 0.0$ und $\nu = 0.3$ sowie Konvergenzhistorien für die Norm-Kopplung dargestellt. Die mit der Min-Kopplung erzielten Ergebnisse dienen dabei zur Begründung der ausschließlichen Verwendung der Norm-Kopplung bei Problemen aus der Elastizität. Tatsächlich werden bei der Vergröberung mit der Norm-Kopplung wesentlich bessere Resultate erzielt als bei der Grobgitterwahl mit der Min-Kopplung. So konvergiert das Verfahren bei einer Maschenweite $h = 1/256$ und $\nu = 0.3$ für die Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation zusammen mit der Norm-Kopplung mit $\rho = 0.259$ mehr als doppelt so schnell als bei der Verwendung der Min-Kopplung, wo die asymptotische Fehlerreduktion $\rho = 0.633$ erreicht wird.
Insbesondere weisen die mit der Norm-Kopplung erzielten Ergebnisse eine h-Asymptotik auf, während die Konvergenz des Verfahrens mit der Min-Kopplung mit zunehmender Problemgröße langsamer wird.
Betrachtet man das feinste und das aus den beiden Kopplungen resultierende erste Grobgitter mit den starken Kopplungen in Abbildung 18, so wird der Grund dafür ersichtlich: Die Vergröberung mit der Norm-Kopplung liefert das gleiche Gitter wie die Vergröberung des mit der Fünfpunkteformel auf dem Einheitsquadrat diskretisierten Laplace, während die Grobgitterhierarchie bei Verwendung der Min-Kopplung Ähnlichkeit mit der Grobgitterhierarchie des klassischen AMG nach Ruge und Stüben für den mit bilinearen Finiten Elementen diskretisierten Laplace aufweist. Bei Verwendung der Min-Kopplung wird allerdings auch nicht die exakte Vergröberung wie bei dem mit bilinearen Elementen diskretisierten Poissonproblem erreicht, da bereits auf dem ersten Grobgitter (untere Zeile der Abbildung 18) die starken Kopplungen an einigen Punkten nicht mehr mit diesem Problem übereinstimmen.
Die bei der Verwendung der Norm-Kopplung gewonnenen Grobgitter besitzten also mehr Punkte als die entsprechenden Grobgitter der Min-Kopplung, die auch noch regelmäßiger vergröbert sind, womit die Interpolationsgenauigkeit steigt und somit auch das gesamte Verfahren schneller konvergiert. Deutlich wird dieser Unterschied zwischen den Grobgittern auch bei der Betrachtung der Gesamt-Operator- und Gesamt-Gitter-Komplexitäten in Abbildung 20. Während bei $\nu = 0.3$ für die Min-Kopplung mit kleiner werdender Gitterweite die Gesamt-Gitter-Komplexität deutlich unter 1.5 bleibt und die Gesamt-Operator-Komplexität sich dem Schwellenwert 1.5 annähert, ist die asymptotische Gesamt-Operator-Komplexität bei der Norm-Kopplung mit ungefähr 2.8 und die Gesamt-Gitter-Komplexität mit Werten über 1.5 deutlich höher.
Vergleicht man nur die Ergebnisse der zwei Interpolationen mit der Vergröberung durch die Norm-Kopplung miteinander, so werden mit der Punkt-Transformierten-Standard-Interpolation bessere Ergebnisse als für die Transformierte-Standard-Interpolation erzielt.
Besonders deutlich wird dieser Unterschied im Fall $\nu = 0.3$. Dort konvergiert das Verfahren mit der Transformierten-Standard-Interpolation bereits für eine Gitterweite $h = 1/64$ und einer asymptotischen Fehlerreduktion $\rho = 0.332$ langsamer als bei Verwendung der Punkt-Transformierten-Standard-Interpolation, bei der eine asymptotische Fehlerreduktion von $\rho = 0.223$ erreicht wird, bis schließlich die Konvergenz der Punkt-Transformierten-Standard-Interpolation bei einer Maschenweite $h = 1/256$ mit $\rho = 0.259$ fast doppelt so schnell ist

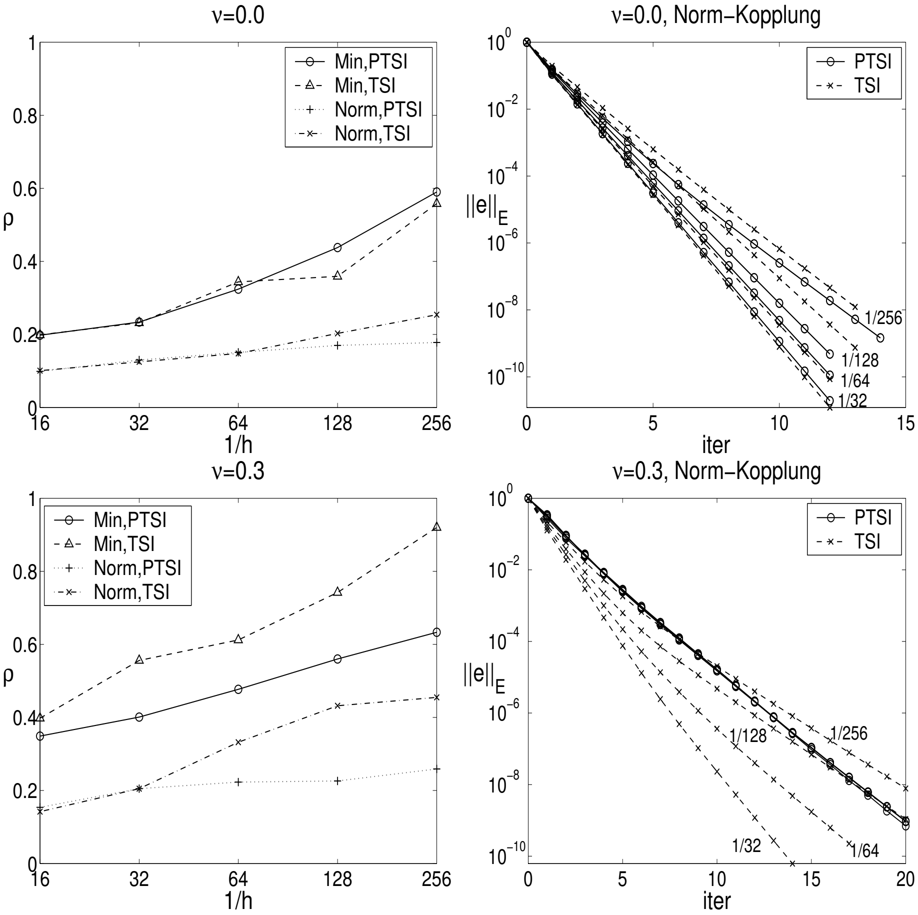


Abbildung 19: Asymptotische Konvergenzraten und Konvergenhistorie bei Verwendung der Min- und Norm-Kopplung und den zwei transformierten Interpolationen in Abhängigkeit von verschiedenen Gitterweiten für das zweidimensionale Elastizitätsproblem auf dem Einheitsquadrat

wie bei der Transformierten-Standard-Interpolation, für die $\rho = 0.455$ gilt. In diesem Fall ist die Betrachtung der in Abbildung 19 dargestellten Konvergenzhistorie besonders interessant. Im Fall $\nu = 0.0$ wird bei beiden Interpolationen der Fehler um ungefähr den gleichen Faktor, unabhängig von der vorangegangenen Zahl an Iterationen, reduziert. Bei der Poissonzahl $\nu = 0.3$ hingegen liefert nur noch die Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation unabhängig von der Anzahl an Iterationschritten nach jedem Mehrgitterschritt die gleiche Fehlerreduktion. Für die Transformierte-Standard-Interpolation nimmt der Reduktionsfaktor mit der Anzahl der Mehrgitteriterationen ungefähr nach dem zehnten Iterationsschritt ab, so dass die asymptotische Fehlerreduktion größer ist, obwohl das Verfahren in den ersten Schritten schneller als bei Interpolation mit der Punkt-Standard-Interpolation konvergiert.

Insgesamt erzielen die zwei Interpolationen recht zufriedenstellende Ergebnisse. Die Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation erreicht sogar unabhängig

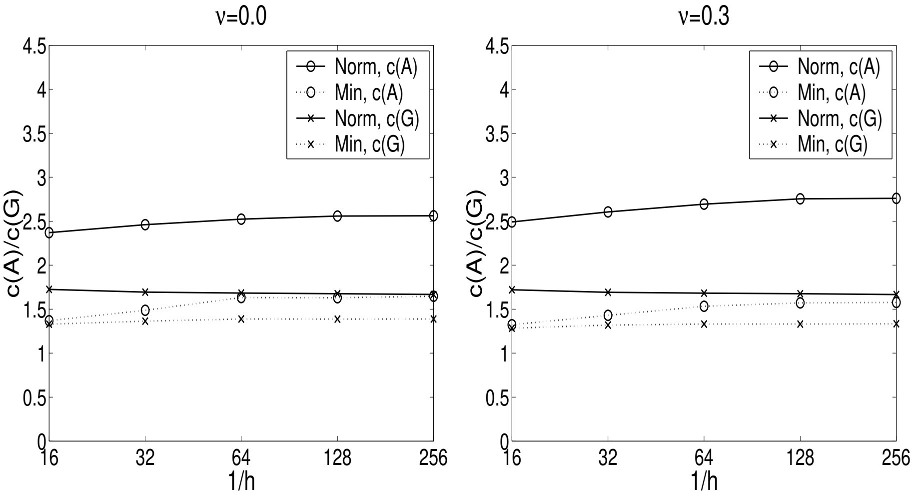


Abbildung 20: Operator- und Gitterkomplexitäten für die Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation mit der Norm-Kopplung in Abhängigkeit von der Gitterweite

		PTSI			TSI		
ν	h	c(G)	c(A)	ρ	c(G)	c(A)	ρ
0.0	16	1.647	3.295	0.107	1.647	3.298	0.102
0.0	32	1.626	3.515	0.123	1.630	3.559	0.119
0.3	16	1.638	3.253	0.176	1.650	3.635	0.157
0.3	32	1.620	3.442	0.269	1.617	3.966	0.259

Tabelle 2: Konvergenzresultate und Komplexitäten für das dreidimensionale Problem ($h = 1/16$ und $h = 1/32$) mit $\nu = 0.0$ und $\nu = 0.3$ bei Vergröberung mit Norm-Kopplung

von der Poissonzahl mit $\rho < 0.26$ für alle Gitterweiten ähnliche Resultate wie bei dem gekoppelten Vektorlaplace.

Für das dreidimensionale Problem (47) mit Gitterweiten $h = 1/16$ und $h = 1/32$ sind die entsprechenden Konvergenzergebnisse und Komplexitäten bei Verwendung der Norm-Kopplung in Tabelle 2 dargestellt.
Wie im zweidimensionalen Fall konvergiert das Verfahren für Probleme mit der Poissonzahl $\nu = 0.0$ schneller als für die Probleme mit der größeren Poissonzahl $\nu = 0.3$. Der Unterschied in der Konvergenzgeschwindigkeit ist nun, unabhängig von der gewählten Interpolation, genauso gravierend wie bei dem zweidimensionalen Problem bei Verwendung der Transformierten-Standard-Interpolation. So ist im Fall $h = 1/32$ die Konvergenz des Verfahrens für $\nu = 0.0$ bei beiden Interpolationen mit $\rho \approx 0.12$ ungefähr doppelt so schnell wie im Fall $\nu = 0.3$, in dem der Wert $\rho \approx 0.26$ erreicht wird.
Im Gegensatz zu dem zweidimensionalen Problem konvergiert das Block-AMG für beide Interpolationen in etwa gleich schnell.

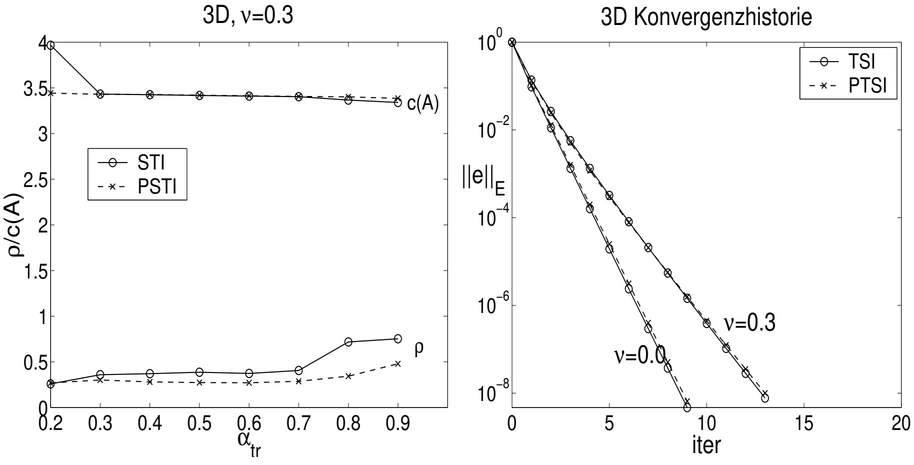


Abbildung 21: Links: Operator-, Gitterkomplexitäten und Konvergenzraten für verschiedene α_{tr} des dreidimensionalen Problems (h=1/32). Rechts: Konvergenzhistorie des Verfahrens mit den beiden transformierten Interpolationen ($\alpha_{tr} = 0.2$) für $\nu = 0.0$ und $\nu = 0.3$ und eine Gitterweite $h = 1/32$.

Obwohl die Konvergenzresultate mit $\rho < 0.27$ im dreidimensionalen Fall insgesamt vergleichbar mit den Ergebnissen der durch die Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation erzielten Ergebnisse im zweidimensionalen Fall sind, so füllen sich die Grobgitteroperatoren bei diesem Problem stärker auf. Dies schlägt sich in einer wesentlich größeren Gesamt-Operator-Komplexität nieder und das Verfahren wird sowohl in der Setup-Phase als auch in der Ausführung eines Mehrgitterzyklus langsamer. Es ist also naheliegend, das Auffüllen der Grobgitteroperatoren durch eine Vergrößerung des Parameters α_{tr} beim Abschneiden des Interpolationsoperators zu verringern. In der Abbildung 21 sind dazu die Konvergenzraten und die Gesamt-Operator-Komplexitäten des dreidimensionalen Problems mit einer Gitterweite von $h = 1/32$ für beide Interpolationen in Abhängigkeit von α_{tr} dargestellt. Obwohl für die Transformierte-Standard-Interpolation die Operatorkomplexität von $\alpha_{tr} = 0.2$ ($c(A) = 4$) zu $\alpha_{tr} = 0.3$ ($c(A) = 3.4$) etwas abnimmt, bleibt die Komplexität des Problems danach unabhängig von der Interpolation konstant bei $c(A) \approx 3.4$. Eine Vergrößerung des Abschneideparameters α_{tr} hat also keinen nennenswerten Effekt auf die Gesamt-Komplexität des Problems.

Für eine breite Anwendung in der Praxis des in dieser Arbeit vorgestellten Block-AMG auf Probleme der linearen Elastizitätstheorie ist nicht nur das h-asymptotische Verhalten der der Fehlerreduktion des Verfahrens von Bedeutung, sondern auch die Stabilität bezüglich der Poissonzahl, die für die unterschiedlichsten Materialien Werte zwischen 0 und 0.5 annehmen kann. Wie in der Abbildung 19 bereits zu beobachten war, liefert das Verfahren für $\nu = 0.3$ schlechtere Konvergenzraten als für den Fall $\nu = 0.0$. Diese Verschlechterung der Ergebnisse liegt dabei nicht an dem Verfahren selbst, sondern vielmehr an der Kondition des zugrundeliegenden diskretisierten Elastizitätsproblems.

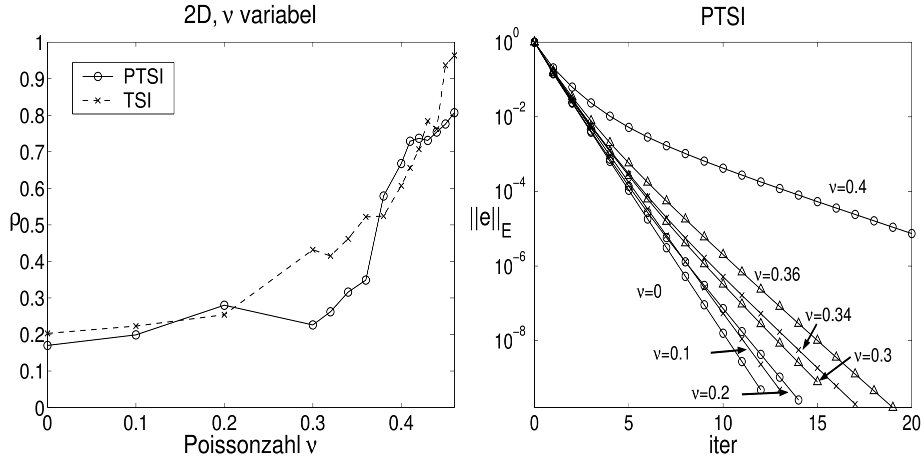


Abbildung 22: Links: Asymptotische Konvergenz des Verfahrens für das zweidimensionale Problem mit verschiedenen Poissonzahlen ($h = 1/128$). Rechts: Konvergenzhistorie des Block-AMG mit der Punkt-Transformierten-Standard-Interpolation bei unterschiedlichen Poissonzahlen.

Es kann für die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ gezeigt werden (siehe [2]), dass für alle $\alpha > 0$ und $C > 0$, für die

$$\alpha \cdot ||v||_1^2 \leq a(v,v) \leq C \cdot ||v||_1^2 \;\forall\, v \in H_\Gamma^1$$

gilt, gleichzeitig folgender Zusammenhang zu λ und μ besteht:

$$\alpha \leq \mu, \quad C \geq \lambda + \mu \ .$$

Hierbei bezeichnet $|| \cdot ||_1$ die übliche Sobolev-Norm im Raum $H^1(\Omega)^3$. Für ν nahe bei $\frac{1}{2}$, also $\lambda \gg \mu$, ist damit das Problem schlechter konditioniert, was sich auch auf das Gleichungssystem überträgt.
In Abbildung 22 sind dazu für das zweidimensionale Problem und eine Gitterweite von $h = 1/128$ die Konvergenzresultate in Abhängigkeit von der Poissonzahlen für beide Interpolationen sowie die Konvergenzhistorie für die Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation bei einigen Poissonzahlen dargestellt. Für Poissonzahlen $\nu < 0.4$ liefert das AMG vor allem für die Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation gute Ergebnisse. In den meisten praktischen Anwendungen ist die Poissonzahl um die 0.3. Die folgenden Probleme werden daher mit der Poissonzahl $\nu = 0.3$ diskretisiert.

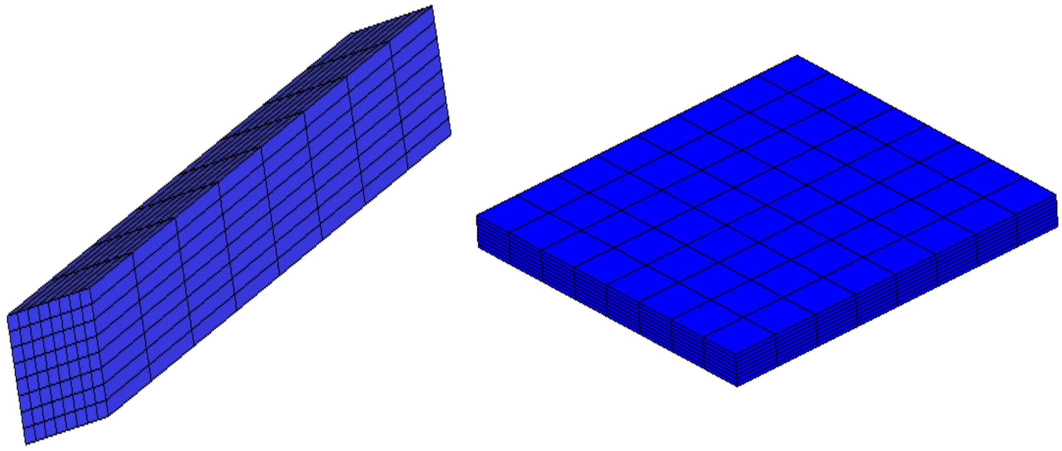
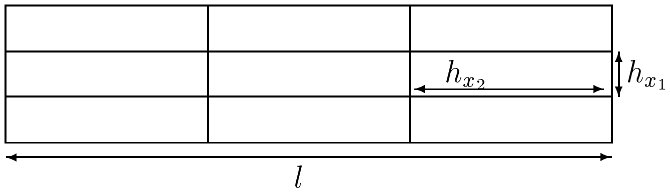


Abbildung 23: Gitter der beiden dreidimensionalen Fälle (61) (links) und (62) (rechts)

5.3.2 Der Krakarm

In diesem Abschnitt wird das Block-AMG für die auf langgestreckten Gittern mit Nullrandbedingungen diskretisierten Probleme (47) bzw. (50) untersucht. Dazu wird das zweidimensionale Problem (48) auf dem Gebiet $\Omega = [0, l] \times [0, 1]$ mit der Gitterweite h_{x_1} in x_1-Richtung und $h_{x_2} = l \cdot h_{x_1}$ diskretisiert, wie in der folgenden Abbildung skizziert:



Im dreidimensionalen Fall werden die folgenden zwei Möglichkeiten betrachtet, die in Abbildung 23 für $l = 16$ dargestellt sind:

$$\Omega = [0, l] \times [0, 1] \text{ und } h_{x_1} = l \cdot h_{x_2} (= h_{x_3}), \quad (61)$$

$$\Omega = [0, l]^2 \times [0, 1] \text{ und } h_{x_1} = h_{x_2} = l \cdot h_{x_3}. \quad (62)$$

Nach den Resultaten des letzten Abschnitts, in dem das Block-AMG ungefähr die gleichen Konvergenzresultate und Grobgitter wie für den Vektorlaplace in 4.2 geliefert hat, ist es anzunehmen, dass die Ergebnisse des Block-AMG für den beschriebenen zweidimensionalen Krakarm große Ähnlichkeit zu den in Abschnitt 4.4 erzielten Ergebnissen für die anisotropen Diffusionsprobleme aufweisen. Dabei übernimmt die Länge l, also die stärke der Streckung eines Elementes, die Rolle des Parameters ε.
In Abbildung 24 ist die asymptotische Konvergenz des Verfahrens mit der Norm-Kopplung und den zwei Interpolationen für verschiedene Gitterweiten

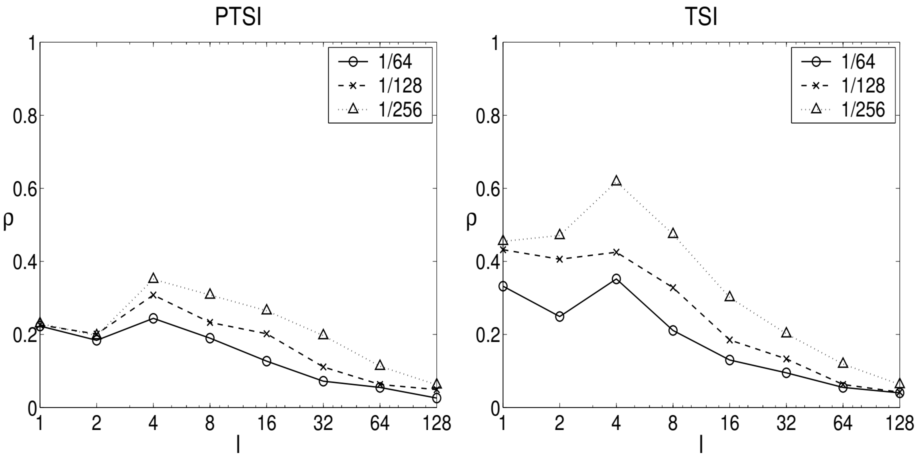


Abbildung 24: Konvergenz des Verfahrens für den zweidimensionalen Krakarm und verschiedene Werte von l unter Verwendung der Transformierten- (links) und Punkt-Transformierten-Standardinterpolation.

in Abhängigkeit von der Länge l dargestellt.
Zunächst verschlechtern sich die Konvergenzergebnisse bis zu der Länge $l = 4$ kontinuierlich. So konvergiert beispielsweise das Verfahren mit der Transformierten-Standard-Interpolation für $h = 1/256$ und $l = 4$ mit $\rho = 0.618$ im Vergleich zu $\rho = 0.455$ auf dem Einheitsquadrat langsamer. Ab dieser Länge fällt die asymptotische Fehlerreduktion allerdings strikt ab, bis bei $l = 128$ das Verfahren unabhängig von der Problemgröße oder der Interpolation mit $\rho \leq 0.07$ konvergiert.
Der Grund für dieses Verhalten ist dabei der gleiche, wie im Fall anisotroper Diffusion in Abschnitt 4.4. Kann für zu kleine Werte von l das Problem auf den gröberen Gittern nicht richtig aufgelöst werden, so ist dies bei größeren Längen möglich.
Das Verfahren führt damit wieder zu einer Semi-Vergröberung, die in Abbildung 26 für $h = 1/32$ zu sehen ist, und entartet mit wachsendem l zu einem direkten Löser. Besonders deutlich wird dieser Sachverhalt, wenn man die Entwicklung der in Abbildung 25 dargestellten Gesamt-Operator- und Gitter-Komplexitäten in Abhängigket von l betrachtet. Während für $l = 2$ die Gesamt-Operator-Komplexität bei beiden Interpolationen auf $c(A) = 3.0$ ansteigt, von Semi-Vergröberung kann also keine Rede sein, nähern sich danach die Operator- und Gitter-Komplexität dem Wert $c(A) \approx c(G) \approx 2.0$ einander an.

Für den dreidimensionalen Fall (61) mit $h_{x_2} = h_{x_3} = 1/32$ kann ein Verhalten wie bei dem zweidimensionalen Krakarm nicht erwartet werden. Bestenfalls ist in diesem Fall damit zu rechnen, dass das Problem mit wachsendem l aus der Sicht des Block-AMG in entsprechend viele zweidimensionale Probleme zerfällt, und somit wenigstens die gleichen Komplexitäten wie im zweidimensionalen erreicht werden können.
Tatsächlich ist dieses Phänomen in Abbildung 27 für eine Gitterweite $h = 1/32$

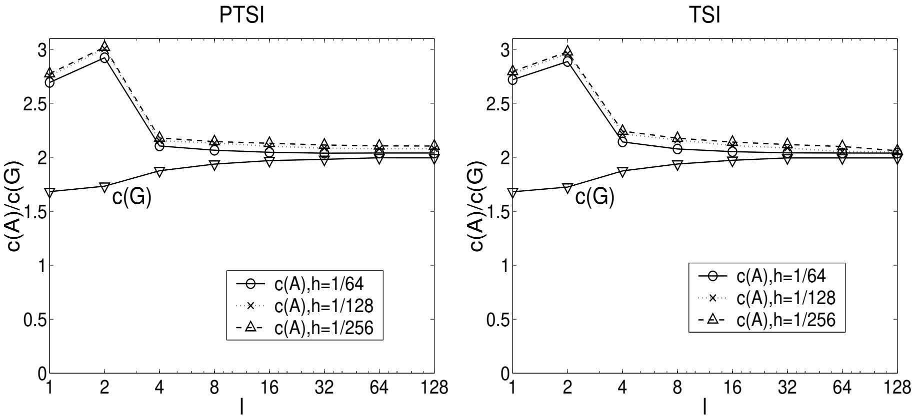


Abbildung 25: Gesamt-Operator- und Gesamt-Gitter-Komplexitäten des Verfahrens in Abhängigkeit von der Länge des zweidimensionalen Krakarms (links: PTSI, rechts: TSI)

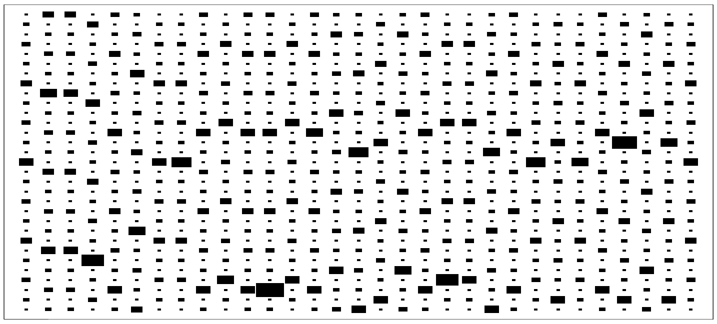


Abbildung 26: Gitterhierarchie bei Verwendung der Norm-Kopplung und der Punkt-Transformierten-Standard-Interpolation für $l = 16$ und $h = 1/32$

zu beobachten. Anders als bei dem zweidimensionalen Problem ist die Konvergenzrate nun nahezu unabhängig von der Länge l des Krakarms. Stattdessen ist in dem rechten Bild der Abbildung 27, in der die Komplexitäten des dreidimensionalen Problems in Abhängigkeit der verschiedenen Längen abgebildet sind, das eben beschriebene Verhalten zu beobachten: Die Gesamt-Operator-Komplexität $c(A)$ fällt mit zunehmender Länge l ab, bis ähnliche Komplexitäten wie in den zweidimensionalen Beispielen des letzten Abschnitts erreicht werden. So beträgt für die Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation bei $l = 16$ $c(A) = 2.570$, während in dem entsprechenden zweidimensionalen Problem ($h = 1/32$) das Verfahren $c(A) = 2.605$ liefert.

Nach diesen Ergebnisssen liegt die Vermutung nahe, dass das AMG für das dreidimensionale Problem (62) nun die gleichen Resultate liefert, wie bei dem zweidimensionalen Krakarm und der anisotropen Diffusion des Abschnitts 4.4.

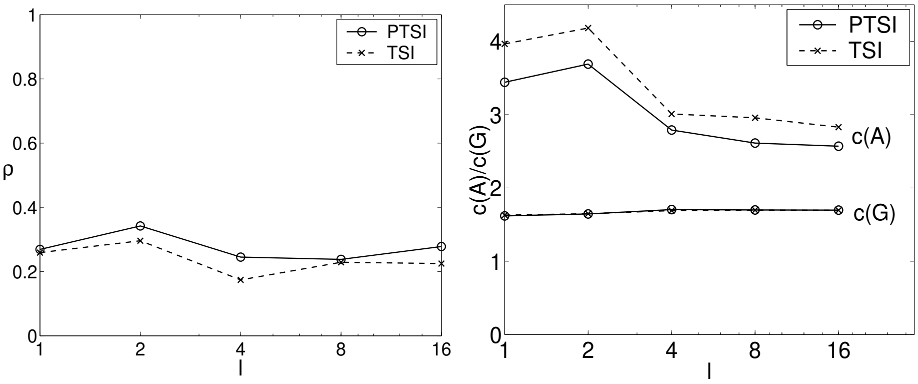


Abbildung 27: Asymptotische Fehlerreduktion, Operator- und Gitterkomplexitäten des Verfahrens bei Vergröberung mit der Norm-Kopplung für verschiedene Längen des dreidimensionalen Krakarms (61) und der Gitterweite $h = 1/32$

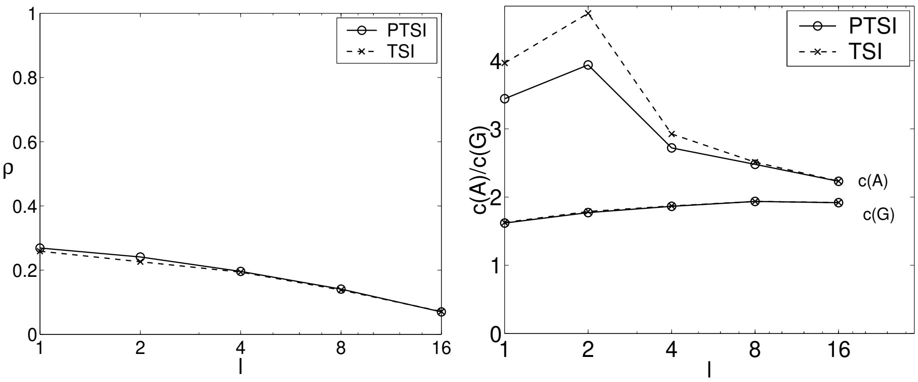


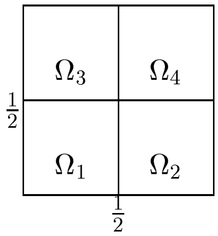
Abbildung 28: Asymptotische Fehlerreduktion, Operator- und Gitterkomplexitäten des Verfahrens bei Vergröberung mit der Norm-Kopplung für verschiedene Längen l des dreidimensionalen Elastizitätsproblems (62) und der Gitterweite $h = 1/32$

In der Tat konvergiert das Verfahren, wie in der Abbildung 28 ($h = 1/32$) zu sehen, mit zunehmendem l immer schneller, bis bei der Größe $l = 1/16$ mit $\rho = 0.070$ ähnliche Ergebnisse wie bei dem zweidimensionalen Krakarm entstehen. Betrachtet man zusätzlich die Gesamt-Operator-Komplexität, wird die Analogie zu dem zweidimensionalen Problem noch deutlicher: Wiederum sinkt die Operator-Komplexität, unabhängig von der gewählten Interpolation, auf $c(A) = 2.234$ für die Länge $l = 16$ ab. Das Verfahren erreicht damit eine noch geringere Komplexität als bei dem dreidimensionalen Beispiel 61.

5.3.3 Sprünge im Elastizitätsmodul

In der Anwendung werden häufig Körper betrachtet, die aus verschiedenen Materialien zusammengesetzt sind. Der Übergang zwischen den unterschiedlichen Materialien findet dabei in der Regel nicht fließend, sondern sprunghaft statt. Der zu untersuchende Körper besteht dementsprechend aus verschiedenen Teilgebieten, auf denen die Materialkonstanten jeweils konstant sind, zwischen den einzelnen Teilgebieten allerdings springen. Man erhält damit ein Elastizitätsproblem, das von ähnlicher Struktur wie das in Abschnitt 4.3 beschriebene Problem Sprüngen in den Koeffizienten des Vektorlaplace ist.
In diesem Abschnitt soll ein zweidimensionales Beispiel mit Sprüngen im Elastizitätsmodul E untersucht werden. Dies ist ausreichend, da bei Sprüngen der Poissonzahl ν innerhalb des Gebietes die Konvergenzraten im ungünstigsten Fall zu den Ergebnissen eines Problems ohne Sprünge ähnlich sind, bei dem die Poissonzahl als die größte Poissonzahl des Sprungproblems auf dem gesamten Gebiet konstant ist ist.

Das Gebiet $\Omega = [0,1]^2$ wird wie in dem Abschnitt 4.3 beschrieben aufgeteilt:



Dabei wird in Ω_1 und Ω_4 das Elastizitätsmodul $E_1 = 1$ und auf den anderen zwei Gebieten das Elastizitätsmodul $E_2 = 10^n$ verwendet.
In Tabelle 3 sind Konvergenzraten und Komplexitäten der beiden Interpolationen für verschiedene Werte des Elastizitätsmodul E_2 bei einem Gitter mit Maschenweite $h = 1/128$ angegeben.
Erneut konvergiert das Verfahren zusammen mit der Punkt-Transformierten-Standard-Interpolation schneller als bei Verwendung der Transformierten -Standard-Interpolation. Mit zunehmendem E_2 nähern sich die Ergebnisse der beiden Interpolationen bei Vergröberung mittels Norm-Kopplung allerdings an, bis bei $n = 4$ kaum mehr ein Unterschied zwischen den Ergebnissen vorhanden ist. Die Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation liefert in diesem Fall den Wert $\rho = 0.422$, während die Transformierte-Standard-Interpolation zu einer asymptotischen Konvergenz von $\rho = 0.485$ führt. Insgesamt weisen die Konvergenzraten eine Asymptotik bezüglich der Größe der Sprünge im Elastizitätsmodul auf, werden mit wachsendem n ab einer bestimmten Größe sogar wieder etwas besser.
Die Operator- und Gitter-Komplexitäten sind sogar fast unabhängig von den Sprüngen im Elastizitätsmodul. So steigt die Gesamt-Operator-Komplexität bei Verwendung der Norm-Kopplung und der Transformierten-Standard-Interpolation

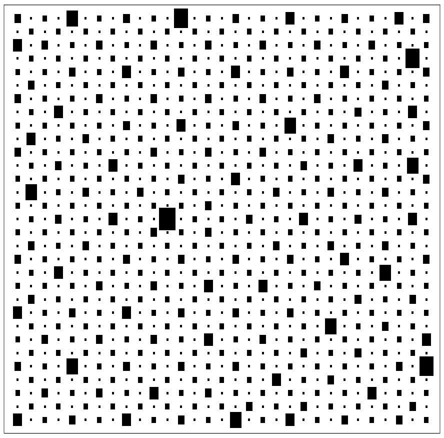


Abbildung 29: Gitterhierarchie für $E_2 = 10^3$ und $h = 1/32$ bei Verwendung der Punkt-Transformierten-Standard-Interpolation (6 Grobgitter)

von $c(A) = 2.776$ für $n = 0$ lediglich auf $c(A) = 2.841$ für $n = 4$. Betrachtet man in in Abbildung 29 für $h = 1/32$ und $E_2 = 10^3$ die entstandenen Gitterhierarchien bei Vergröberung mit der Norm- und Min-Kopplung, so wird auch der Grund für die Unabhängigkeit der Komplexitäten deutlich: Auf jedem Teilgebiet, auf dem das Elastizitätsmodul konstant ist, entstehen ähnliche Grobgitterhierarchien wie bei dem entsprechenden Problem $n = 0$, bei dem keine Sprünge vorhanden sind.

	PTSI			TSI		
E_2	c(A)	c(G)	ρ	c(A)	c(G)	ρ
1	2.754	1.675	0.226	2.776	1.673	0.432
10	2.811	1.681	0.372	2.857	1.682	0.427
10^2	2.807	1.680	0.401	2.848	1.681	0.493
10^3	2.803	1.680	0.474	2.841	1.680	0.485
10^4	2.801	1.680	0.422	2.841	1.680	0.485

Tabelle 3: Konvergenzresultate und Komplexitäten für unterschiedlich große Sprünge des Elastizitätsmoduls ($h = 1/128$)

5.4 Konvergenzresultate bei freien Rändern

Bei den bisherigen Beispiele waren auf dem gesamten Rand Nullrandbedingungen gesetzt. In den meisten praxisnahen Anwendungen der linearen Elastizitätstheorie treten allerdings gemischte Randbedingungen auf: Einige Teile des Randes sind fest montiert, auf andere wirken äußere oder gar keine Flächenkräfte. Obwohl das Verfahren bisher gute Resultate lieferte, werden die Ergebnisse bei Einführung von freien Rändern, also Rändern, an denen keine oder Neumann-

	TSI			PTSI		
Anzahl freier Ränder	1/64	1/128	1/256	1/64	1/128	1/256
0	0.323	0.432	0.455	0.223	0.226	0.259
1	0.529	0.508	0.598	0.309	0.299	0.278
2	0.690	0.650	0.712	0.571	0.494	0.540
3	0.828	0.754	0.882	0.643	0.697	0.702

Tabelle 4: Asymptotische Konvergenzraten für des zweidimensionalen Elastizitätsproblems auf dem Einheitsquadrat mit unterschiedlicher Zahl freier Ränder und verschiedenen Gitterweiten

Randbedingungen gesetzt sind, wesentlich schlechter.
Da der Unterschied zwischen Neumann-Randbedingungen und dem setzten gar keiner Randbedingungen lediglich in der rechten Seite des entsprechenden linearen Gleichungssystems besteht, die keinen nennenswerten Einfluss auf die Konvergenzrate des AMG hat, werden die folgenden Betrachtung auf Probleme mit freien Rändern, an denen keinerlei Randbedinungen gesetzt sind, eingeschränkt.
Es wird nun das zweidimensionale Problem (48) mit $\nu = 0.3$ auf $\Omega = [0, 1]^2$ mit den folgenden vier Möglichkeiten untersucht:

- Alle Ränder sind fest eingespannt.
- Der rechte Rand ist frei, alle anderen Ränder sind fest.
- Der rechte und der untere Rand sind frei, die beiden anderen Ränder sind fest.
- Nur noch der linke Rand ist fest eingespannt, die anderen Ränder sind frei.

In Tabelle 4 sind die Konvergenzraten des Block-AMG mit der Norm-Kopplung und den beiden transformierten Interpolationen für verschiedene Maschenweiten für diese vier Fälle angegeben.
Unabhängig von der Maschenweite konvergiert das Verfahren für beide Interpolationen mit zunehmender Zahl an freien Rändern immer langsamer. So erreicht das Block-AMG bei Verwendung der Punkt-Transformierten-Standard-Interpolation bei zwei freien Rändern für $h = 1/256$ nur noch eine Konvergenzrate $\rho = 0.540$ und im Fall von drei freien Rändern lediglich eine Fehlerreduktion $\rho = 0.702$. Sind keine freien Ränder vorhanden, konvergiert das AMG somit fast dreimal so schnell ($\rho = 0.259$) als bei drei freien Rändern.
Für die Transformierte-Standard-Interpolation gilt ein ganz ähnlicher Sachverhalt, mit dem Unterschied, dass schon bei nur einem freien Rand mit $\rho = 0.598$ die Konvergenzresultate merklich schlechter als für das reine Dirichletproblem ($\rho = 0.455$) sind.

Auch im dreidimensionalen Fall verschlechtern sich die Konvergenzraten mit zunehmender Anzahl freier Ränder. Dazu ist in Tabelle 5 die asymptotische

Konvergenz des Verfahrens mit Norm-Kopplung bei einer Gitterweite $h = 1/16$ in Abhängigkeit von der Anzahl der freien Ränder wiedergegeben.

	Anzahl freier Ränder					
	0	1	2	3	4	5
PTSI	0.176	0.250	0.321	0.476	0.598	0.733
TSI	0.119	0.209	0.313	0.407	0.524	0.675

Tabelle 5: Asymptotische Konvergenzraten des dreidimensionalen Problems bei einer Gitterweite $h = 1/16$, $\nu = 0.3$, für eine unterschiedliche Zahl freier Rändern.

Um diesen Sachverhalt zu verstehen, betrachtet man nochmals die für die Konvergenzgeschwindigkeit des Theorems (3.3) wichtige Bedingung (33) an die Interpolationsgüte des Interpolationsoperators:
Dabei war τ so zu wählen, dass

$$||e_F - I_{FC}e_C||_{0,F}^2 \leq \tau ||e||_1^2 \;\; \forall e \in \mathbb{R}^{d \cdot n}.$$

Um so kleiner τ gewählt werden kann, umso schneller konvergiert das Verfahren. In der Realität liefert das Verfahren auch dann schon gute Werte, wenn diese Bedingung nur für algebraisch glatte Fehler mit möglichst kleinem τ erfüllt ist, da andere Fehlerkomponenten bereits durch den Glätter gut verkleinert werden. Nach den Betrachtungen des vorletzten Abschnittes 5.1 ist nun bekannt, dass die *rigid body modes* besonders algebraisch glatt sind. Sei also ein Element r des Raums der *rigid body modes* fest vorgegeben. Es bezeichne $\hat{e}$ die Darstellung von r im Finite-Element-Raum, die die Nullrandbedingung auf dem gesamten Rand erfüllt und $\tilde{e}$ entsprechend das Element des Finite-Element-Raums, das auch auf Teilen des Randes, an dem keine Randbedingungen vorgegeben sind, mit der Funktion r übereinstimmt.
Dann gilt:

$$a(\hat{e}, \hat{e}) \;\; \geq \;\; a(\tilde{e}, \tilde{e}). \tag{63}$$

Bezeichnen nun e_1 und e_2 die entsprechende Koeffizienten der Basidarstellung von $\hat{e}$ und $\tilde{e}$, dann folgt dementsprechend:

$$||e_1||_1^2 \;\; \geq \;\; ||e_2||_1^2.$$

Bleibt die Interpolationsgenauigkeit und damit die rechte Seite der Ungleichung (33) für das Problem mit freien Ränder vergleichbar mit den Ergebnissen des Dirichletproblems, wird die Voraussetzung des Theorems (3.3) zumindest für die algebraisch glatten *rigid body modes* nur mit einem größeren τ als für das entsprechende Dirichletproblem erfüllbar sein. Ein größeres τ bedeutet aber im allgemeinen eine Verschlechterung der Konvergenz.

Hiermit ergibt sich auch direkt eine Möglichkeit, die Konvergenz im Fall von freien Ränder zu verbessern: Entweder die Grobgitterwahl oder die Interpolationsvorschrift müssen derart verändert werden, dass die Bedingung (33) für die algebraisch glatten Fehler wieder mit kleinerem τ erfüllbar ist.

5.4.1 Die Randvergröberung

Wie bereits in Abschnitt 5.2 gezeigt wurde, werden die Elemente des Nullraums des Operators an inneren Knoten bei einer Standard-Vergröberung durch die Direkte Interpolation exakt interpoliert, während dieses Resultat für an Punkten am Dirichletrand benachbarten Knoten nicht mehr gilt.
In numerischen Experimenten hat sich zusätzlich noch herausgestellt, dass die *rigid body modes* für die in Abbildung 16 dargestellten Vergröberungen auch in Gitterpunkten auf dem freien Rand von den transformierten Interpolationen exakt interpoliert werden. Würde das AMG Grobgitter liefern, die auch an Randpunkten standardvergröbert sind, so könnte somit für die *rigid body modes* die Bedingung (33) mit einem kleineren τ erfüllt werden.
In der Regel führt die normale Vergröberung mittels den beiden Setup-Phasen allerdings nicht zu einem standardvegröberten Gitter am Rand. In Abbildung 18 sind dazu die gesamte Gitterhierarchie und die ersten beiden Grobgitter mit den starken Kopplungen des zwedimensionalen Problems mit drei freien Rändern abgebildet. Obwohl die inneren Knoten, wie dies im linken Bild zu sehen ist, auf allen Gittern nahezu standardvergröbert sind, ist dies bereits bei dem zweiten Grobgitter für die Randpunkte nicht mehr der Fall.

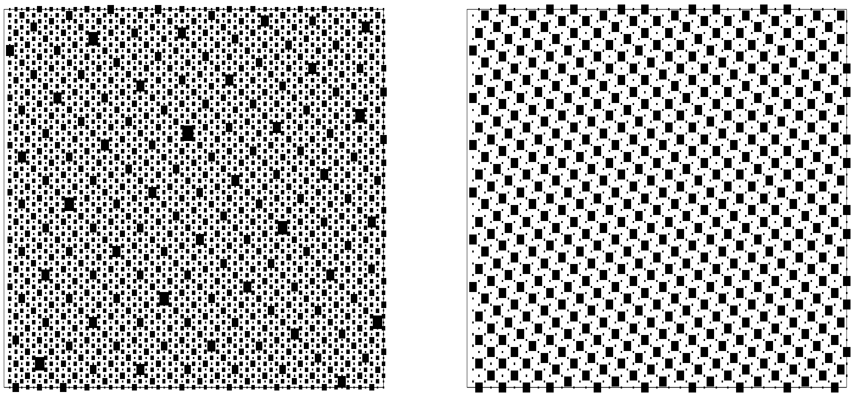


Abbildung 30: Gitterhierarchie des zweidimensionalen Problems mit drei freien Rändern bei Vergröberung mittels der Norm-Kopplung und Verwendung der Transformierten-Standard-Interpolation. Links ist die komplette Gitterhierarchie (7 Gitter), rechts nur das erste und zweite Grobgitter abgebildet.

Es soll deshalb im folgenden eine Vergröberung beschrieben werden, die möglichst für alle Punkte im Inneren und auf den freien Rändern Standardvergröberungen liefert.

Da der bisher verwendete Vergröberungsalgorithmus für innere Knoten gute Resultate liefert, und nur die Vergröberung der Knoten auf dem freien Rand schlechtere Ergebnisse liefert, ist es naheliegend, nicht den gesamten Algorithmus zu verändern, sondern vor der eigentlichen Vergröberung mit Hilfe des bestehenden Vergröberungsalgorithmus in einem ersten Schritt nur die Gitterpunkte auf dem Rand zu vergröbern und danach die Grobgitterwahl an den inneren Punkten wie bisher durchzuführen.
Um dieses Vorgehen möglich zu machen, muß dem Programm bekannt sein, welche Unbekannten zu Punkten auf dem Rand gehören. Dem Verfahren muß dabei entweder diese zusätzliche Information übergeben werden, oder aber die Unbekannten, die zu Randpunkten gehören, müssen vom Programm selbständig erkannt werden.
Da algebraische Mehrgittermethoden gerade ohne vom Benutzer vorzugebende Informationen funktionieren sollen, wurde in dem vorgestellten Verfahren eine Heuristik zur Aufteilung der Punkte in Rand- und Innere-Punkte im Fall von bilinearen Finiten Elementen benutzt, die nun kurz beschrieben werden soll.

Es sei angenommen, dass für die Diskretisierung mit den Basisfunktionen φ_i^k, $1 \leq k \leq d$, $1 \leq i \leq n$, gelte:

$$supp(\varphi_i^k) \cap supp(\varphi_j^k) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \exists 1 \leq k, l \leq d: \; a(\varphi_i^k, \varphi_j^l) \neq 0. \tag{64}$$

Ist diese Eigenschaft bei der dem Problem zugrundeliegenden Diskretisierung erfüllt, so ist die Charakterisierung der Randpunkte für Rechteckgitter, wie sie in den vorigen Beispielen verwendet wurden, trivial:
Ein Punkt i läßt sich dann eindeutig durch die Anzahl $|N_i|$ der zu diesem Punkt benachbarten Punkte als Randpunkt charakterisieren:

$$i \text{ ist Randpunkt} \quad \Leftrightarrow \quad |N_i| < \frac{\sum_{1 \leq j \leq n} |N_j|}{n}. \tag{65}$$

Bei Dreieckgittern ist diese Beobachtung für einige recht einfache Gitter nicht mehr gültig. In dem linken Bild der Abbildung 31 ist dazu ein Dreickgitter dargestellt, dass die Bedingung (65) verletzt. Der markierte Randpunkt k hat in diesem Beispiel fünf benachbarte Punkte, während der innere Punkt i mit acht und der Punkt j mit vier Punkten benachbart ist.
Nun werden in der linearen Elastizitätstheorie, wie auch in den vorangegangenen Beispielen, bevorzugt bilineare Elemente verwendet, so dass solche Problem an dieser Stelle nicht behandelt werden.
Es wird deshalb im folgenden davon ausgegangen, dass die Bedingung (65) für die Rechteck- und Quadergitter erfüllt ist. Im Fall von komplizierteren Geometrien werden die der Diskretisierung zugrundeliegenden Gitter nicht mehr diese Eigenschaft in allen Punkten besitzen. In Abbildung 31 ist zum Beispiel ein Viereckgitter dargestellt, in dem ein Knoten sechs und ein anderer zehn Nachbarn hat und die Bedingung (65) verletzt ist.
Für Gitter, die von guten Gittergeneratoren erzeugt wurden, wird jeodch in den meisten Fällen die Bedingung (65) für viele Randpunkte erfüllt und nur für wenige Gitterpunkte im Inneren verletzt sein, so dass diese Bedingung durch-

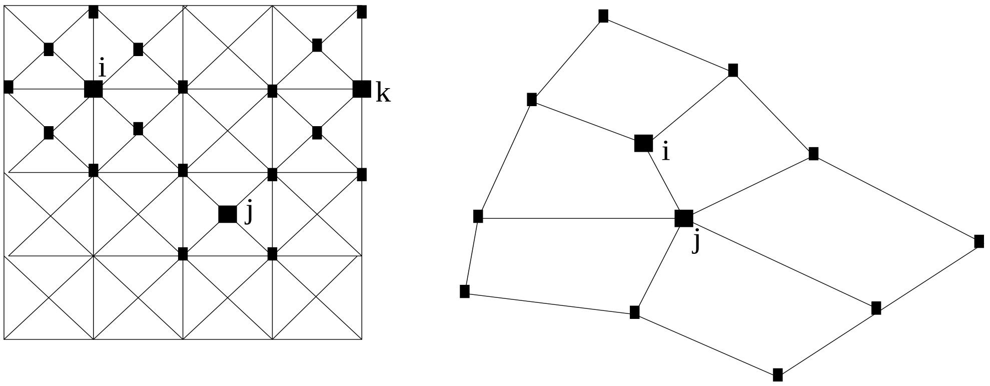


Abbildung 31: Dreieck- und Viereckgitter, die die Bedingung (65) verletzten

aus in einem ersten Schritt dazu benutzt werden kann, eine Vorauswahl von Randpunkten zu treffen. Dabei können die folgenden zwei Fälle auftreten:

- Es existieren Punkte im Inneren, die als Randpunkt ausgewählt wurden.
- Einige Randpunkte wurden nicht erkannt.

Im ersten Fall kann ausgenutzt werden, dass innere Punkte meist mit weniger als zwei Randpunkten benachbart sind. Es werden also bereits ausgewählte Randpunkte verworfen, wenn diese Punkte mit weniger als zwei Randpunkten benachbart sind. Die Behandlung des zweiten Falls ist nicht notwendig, da sich in der Praxis herausgestellt hat, dass die separate Randvergröberung auch dann zufriedenstellende Grobgitter liefert, wenn nicht alle Randpunkte erkannt werden.
Die somit erhaltene Auswahl an Punkten könnte nun separat vergröbert werden. Allerdings ist eine separate Vergröberung von Punkten $i \in \Gamma_h^D$ am Dirichletrand nicht unbedingt notwendig, da die Interpolationen, wie in Abschnitt 5.2 dikutiert wurde, die *rigid body modes* in solchen Knoten im Allgemeinen sowieso nicht exakt interpolieren. In den folgenden Experimenten wird sich sogar herausstellen, dass bei alleiniger separater Vergröberung von Punkten auf dem freien Rand bessere Konvergenzresultate erreicht werden als bei separater Vergröberung des gesamten Randes.
Es sollte daher auch eine Unterscheidung von Dirichletrandpunkten und Punkten auf dem freien Rand möglich sein.
Sei dazu i ein Punkt auf dem freien Rand und $e \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Es gilt dann mit $A(i) = \sum_j A_{ij}$ ähnlich wie in Abschnitt 5.1:

$$\begin{aligned}
A(i) \cdot e &= \sum_j A_{ij} \cdot e \\
&= \sum_j \left(a(\varphi_i^k, \sum_{1 \leq k \leq d} e_k \varphi_j^k) \right)_{k=1}^d \\
&= \left(a(\varphi_i^k, \sum_j \sum_{1 \leq k \leq d} e_k \varphi_j^k) \right)_{k=1}^d
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(a(\varphi_i^k, v)\right)_{k=1}^d \quad \text{wobei } v = \sum_j \sum_{1\le k\le d} e_k \varphi_j^k \\
&= 0, \text{ da } v \equiv e \text{ konstant ist und damit } v \in ker(a(\cdot,\cdot)).
\end{aligned}
$$

Für einen Punkt auf dem freien Rand gilt somit:

$$A(i) \quad = \quad 0. \tag{66}$$

Sind die Randpunkte bestimmt, kann mit der separaten Vergröberung durch die Setup-Phase 1 und die Setup-Phase 2 der gesamten Randpunkte oder, durch weitere Auswahl mit Hilfe der Bedingung (66), der Punkte auf dem freien Rand begonnen werden. Hierzu findet die Berechnung der starken Kopplungen der Randpunkte mit dem Parameter α_b anstelle des Parameters α statt. Zusätzlich wird in der Setup-Phase 2 der Randvergröberung der Parameter β_b verwendet. Außerdem sind die folgenden beiden Punkte zu beachten:

- Bei dem Auswahlkriterium in der Setup Phase 1 für die Grobgitterpunkte werden nur die Kopplungen zu anderen Randpunkten berücksichtigt. Für die Auswahl eines Grobgitterpunktes ist somit nicht mehr die Menge S_i^T von Bedeutung, sondern eine neue Menge $\tilde{S}_i^T$:

  $$\tilde{S}_i^T \quad = \quad \{j \in S_i^T \mid j \text{ ist Randpunkt}\}. \tag{67}$$

  Ist ein Grobgitterpunkt ausgewählt worden, so werden allerdings alle Punkte der Menge S_i^T zu Feingitterpunkten gemacht.

- In der Setup Phase 2 werden bei der Auswahl weiterer Grobgitterpunkte wiederum nur Randpunkte berücksichtigt. Ist zum Beispiel i ein Randpunkt und j ein innerer Punkt, so wird i auch dann schon zum Grobgitterpunkt, wenn $\tilde{C} = \emptyset$ und $d(j, C_i) \le \beta_b \cdot d(i, \{j\})$.

Da der Rand separat vergröbert wird, damit in jedem Grobgitter noch genügend Randpunkte vorhanden sind, ist es nun auch nicht mehr sinnvoll, als gröbstes Level dasjenige mit einem Gitterpunkt zu wählen. Bei den folgenden Experimenten zu der separaten Randvergröberung ist daher das gröbste Gitter das bei der Vergröberung entstandene kleinste Gitter mit mehr als zehn Punkten. Auf diesem Gitter wird das Gleichungssystem mittels L-U-Faktorisierung direkt gelöst.
In der Tabelle 6 sind für das zweidimensionale Problem die Konvergenzresultate des Verfahrens bei Verwendung keiner separaten Randvergröberung bzw. der separaten Randvergröberung des gesamten sowie der separaten Vergröberung des freien Randes angegeben.
Bei diesen Experimenten wurde $\alpha_b = 0.4$ für die Setup-Phase 1 auf dem Rand und $\alpha = 0.3$ bei der Vergröberung der inneren Punkte verwendet. Die Anwendung der Setup-Phse 2 in dem zweidimensionalen Problem entfällt, da der Rand eindimensionale ist und die Setup-Phase 2 bei eindimensionalen Problemen keinerlei Verbesserung erbringt. Da sich in den letzten Abschnitten herausgestellt hat, das im zweidimensionalen die Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation die besseren Resultate liefert, und im dreidimensionalen beide Interpolationen zu ähnlichen Resultaten führen, werden außerdem in diesem und

	$h = 1/128$			$h = 1/256$		
	1	2	3	1	2	3
keine Randvergröberung	0.299	0.494	0.697	0.278	0.540	0.702
Vergröberung des gesamten Randes	0.269	0.369	0.561	0.256	0.336	0.590
Vergröberung des freien Randes	0.244	0.338	0.518	0.257	0.303	0.540

Tabelle 6: Konvergenzraten für das zweidimensionale Problem ($h = 1/128$, $h = 1/256$) mit unterschiedlicher Anzahl freier Ränder bei Verwendung der Punkt-Transformierten-Standard-Interpolation und der separaten Vergröberung des gesamten und freien Randes.

dem nächsten Abschnitt nur noch die Ergebnisse für die Punkt-Transformierte-Standard-Interpolation wiedergegeben.

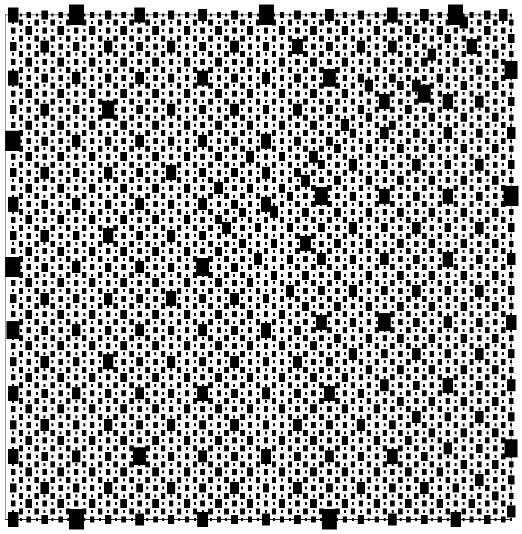
Die Verwendung der separaten Randvergröberungen verbessern im Fall von zwei oder drei freien Rändern die Konvergenzresultate erheblich. So liefert die separate Vergröberung im Fall von zwei freien Rändern bei einer Gitterweite $h = 1/256$ zu einer Verbesserung von $\rho = 0.540$ auf $\rho = 0.303$ und bei drei freien Rändern zu einer Konvergenz mit $\rho = 0.540$. Den geringsten Effekt hat die Randvergröberung bei dem Problem mit nur einem freien Rand. Dieses Resultat ist keineswegs überraschend, schließlich konvergiert das Verfahren ohne separate Randvergröberung bei diesem Problem ($h = 1/256$, $\rho = 0.223$) ungefähr genauso schnell wie im Fall des entsprechenden Dirichletproblem ($\rho = 0.259$), so dass kein großer Spielraum für besonders große Verbesserungen mehr vorhanden ist. Bemerkenswert ist jedoch, dass in diesem Fall die Ergebnisse des Dirichletproblems sogar erreicht werden.
Insgesamt fällt auf, dass die Ergebnisse bei Vergröberung des freien Randes etwas besser sind, als für die gesamte Randpunktvergröberung. In Abbildung 32 ist dazu die bei Vergröberung des gesamten und nur des freien Randes erzielte Gitterhierarchie des Problems mit drei freien Rändern ($h = 1/64$) zu sehen. Wird der gesamte Rand separat vergröbert, so sind bereits so viele Gorbgitterpunkte ausgewählt, dass im Inneren nicht mehr gleichmäßig vergröbert werden kann, was zu den Unregelmäßigkeiten in der rechten oberen Ecke des Gebietes führt, während bei alleiniger Vergröberung des freien Randes im Inneren ähnlich wie bei den Dirichletproblemen vergröbert werden kann.

Grundlegend andere Ergebnisse werden im dreidimensionalen Fall erzielt. In der Tabelle 6 sind dazu die Resultate der unterschiedlichen Vergröberungen für das dreidimensionale Problem ($h = 1/32$) mit fünf freien Rändern dargestellt. Die Konvergenz des Block-AMG ist nahezu unabhängig von der gewählten Randvergröberung. Das beste Ergebniss ($\rho = 0.723$) wird bei der separaten Vergröberung des freien Randes mittels der Setup-Phase 1 und der Setup-Phase 2 erzielt, dass sich allerdings kaum von dem Ergebniss unterscheidet, das er-

reicht wird, wenn der Rand nicht separat vergröbert wird ($\rho = 0.785$).
Hierfür sind im wesentlichen zwei Gründe denkbar. Eine mögliche Ursache ist in Abbildung 33, in der die bei separater Randvergröberung und ohne Randvergröberung entstandene Grobgitterhierarchien auf einer Seite des Würfels abgebildet sind, zu sehen ($h = 1/16$). Es ist zu erkennen, dass Punkte im Inneren der Wüfelseite bei Verwendung der separaten Randvergröberung zwar regelmäßiger vergröbert werden, auf den entsprechenden Würfelkanten allerdings, in Analogie zu dem zweidimensionalen Fall ohne separate Randvergröberung, keine Standardvergröberung stattfindet. Zusätzlich werden bei einer separaten Randvergröberung der Flächen des Würfels vor Beginn der eigentlichen Vergröberung im Inneren bereits so viele Grobgitterpunkte am Rand vorgegeben, dass, ähnlich wie im zweidimensionalen Fall bei gesamter Randvergröberung (vgl. Abbildung 32) innere Punkte nicht mehr regelmäßig vergröbert werden können.

	ρ	c(A)	c(G)
Ohne Randvergröberung	0.785	3.451	1.620
Randvergröberung ohne Setup 2	0.774	3.933	1.662
Vergröberung des freien Randes ohne Setup 2	0.752	3.932	1.664
Randvergröberung mit Setup 2	0.744	3.951	1.665
Freier Rand mit Setup 2	0.723	2.933	1.665

Tabelle 7: Konvergenzraten für den dreidimensionalen Würfel , $h = 1/32$ bei Verwendung der Punkt-Transformierten-Standard-Interpolation für die unterschiedlichen Vergröberungen.



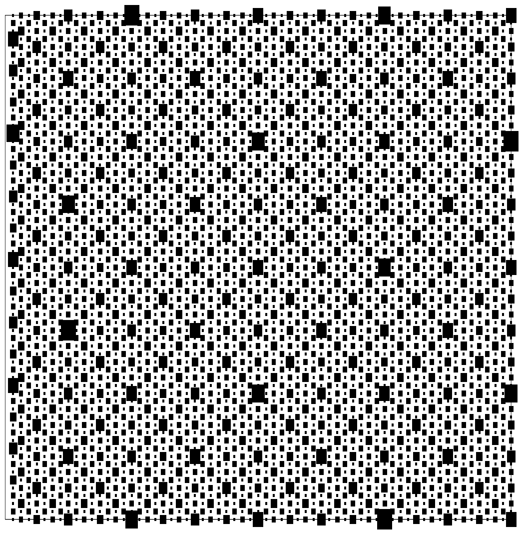


Abbildung 32: Gitterhierarchie des Block-AMG mit der Punkt-Transformierten-Standard-Interpolation bei drei freien Rändern und vorheriger Vergröberung des ganzen (oben) bzw. des freien (unten) Randes

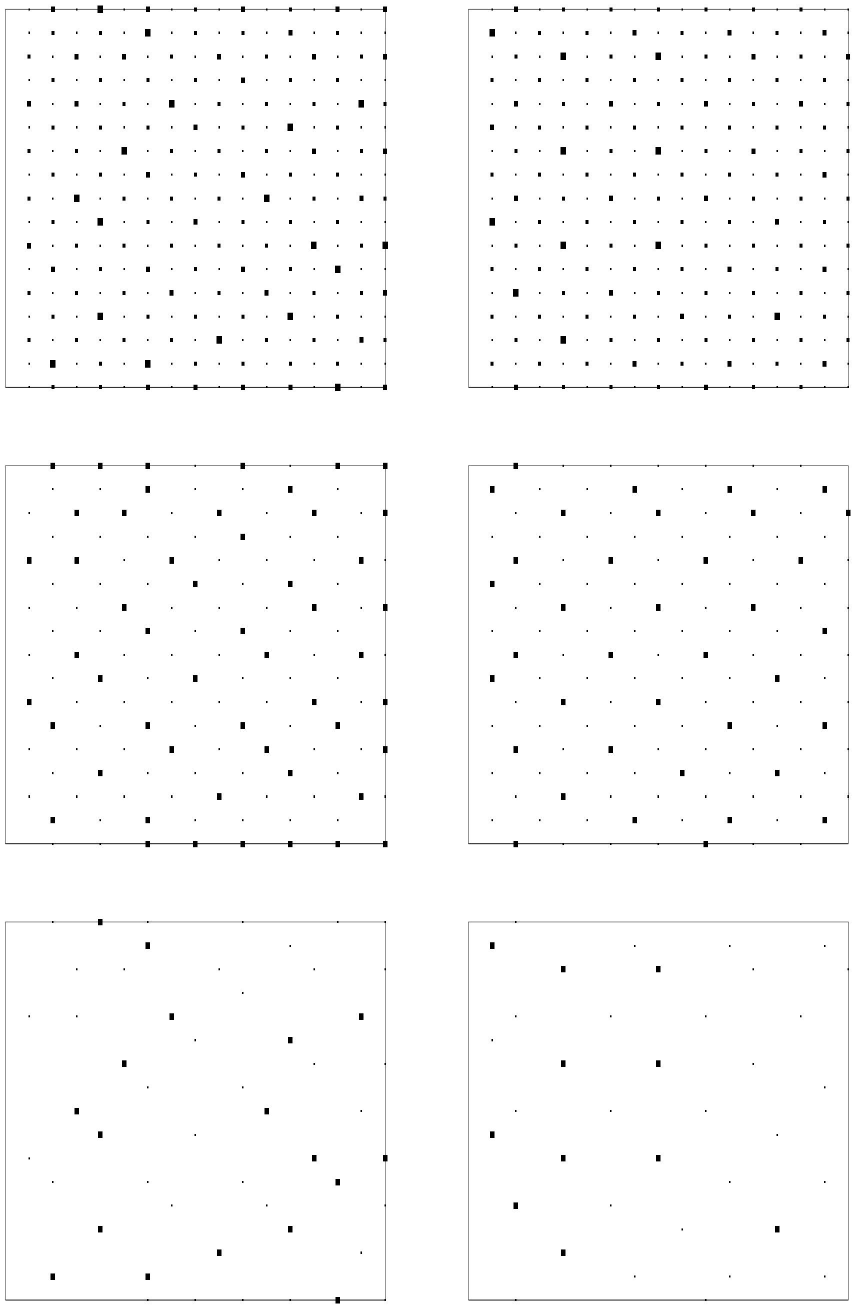


Abbildung 33: Gitterhierarchie auf einer Seite des Einheitswürfels der frei ist, mit (rechts) und ohne (links) separate Randvergröberung

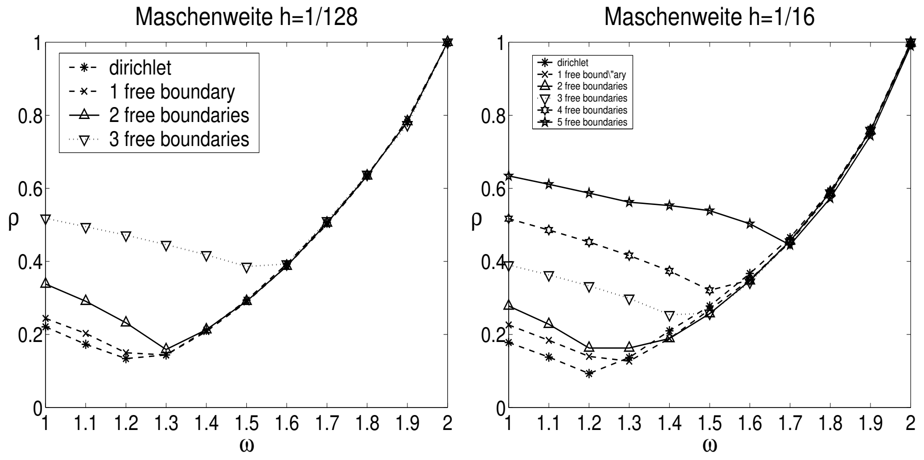


Abbildung 34: Asymptotische Fehlerreduktion für verschiedene Relaxationsparameter ω und Anzahl freier Ränder (Transformierte-Standard-Interpolation)

5.4.2 Die Wahl des Glätters

Um die Konvergenz des Verfahrens bei freien Rändern weiter zu verbessern, besteht die Möglichkeit, im Mehrgitterzyklus einen anderen Glätter zu verwenden. In numerischen Experimenten hat dabei die Verwendung des Block-SOR-Verfahrens besonders gute Resultate geliefert.
In Abbildung 34 sind dazu die Konvergenzergebnisse der zweidimensionalen Probleme ($h = 1/128$) und der dreidimensionalen Probleme ($h = 1/16$) in Abhängigkeit des gewählten Relaxationsparameters ω abgebildet. Dabei wurde die separate Randvergröberung (im dreidimensionalen mit der Setup-Phase2) des freien Randes mit den gleichen Parametern wie in den vorigen Experimenten verwendet.
Besonders überraschend ist dabei die Abhängigkeit des optimalen Relaxationsparameters von der Zahl an freien Rändern. So wächst der optimale Parameter mit der Anzahl der freien Ränder an. Bei der Wahl des richtigen Relaxationsparameters werden die Konvergenzergebnisse entscheidend verbessert. So wird für des zweidimensionale Problem mit drei freien Rändern und $\omega = 1.5$ eine Fehlerreduktion $\rho = 0.386$, im Fall des dreidimensionalen Problems mit fünf freien Rändern $\rho = 0.445$ für $\omega = 1.7$ erreicht. Da die Wahl des Relaxationsparameters von der Größe des freien Randes abzuhängen scheint, kann mit Hilfe der Randpunkterkennung die Zahl der Randpunkte ermittelt werden, und so eine Wahl des Parameters ω getroffen werden. Dabei ist aus der Abbildung 34 ersichtlich, dass bei der Schätzung des Relaxationsparameters der Parameter im Vergleich zu dem Optimum besser etwas zu klein als zu groß gewählt werden sollte, da die Konvegenz für zu groß gewählte Parameter stark abfällt.

5.5 Kompliziertere Geometrien

Die bisher betrachteten Beispiele beschränkten sich ausschliesslich auf rechteckige oder quaderförmige Gebiete. Diese Standardexperimente dienten dabei zur Untersuchung der Robustheit und der Stabilität des Verfahrens und können gut zum Vergleich mit anderen Methoden herangezogen werden.
Für anwendungsorientierte Probleme sind solche Beispiele allerdings uninteressant, da rechtwinklige, regelmäßige Gitter bei komplizierteren Geometrien nicht mehr vorkommen. Doch gerade für solche Anwendungen sind die algebraischen Mehrgittermethoden aus den geometrischen Mehrgittermethoden entwickelt worden. In diesem Abschnitt wird deshalb das vorgestellte Block-AMG auf solche Probleme angewendet. Um dabei die Abhängigkeit der Konvergenz von der betrachteten Geometrie zu untersuchen, werden alle Probleme mit Nullrandbedingungen diskretisiert.
Da die Verwendung des Block-SOR-Verfahrens im vorigen Abschnitt zu einer Verbesserung der Ergebnisse geführt hat, werden in diesem Abschnitt die Ergebnisse des Block-AMG bei Glättung durch das Gauss-Seidel-Verfahren und durch das Block-SOR-Verfahren ($\omega = 1.5$) vorgestellt.
Zusätzlich zu der Wahl des Glätters ist auch die verwendete Anzahl an Vor- und Nachglättungsschritten für die Konvergenz des Verfahrens von Bedeutung. Obwohl in den vorgestellten Praxisbeispielen bereits mit einem Vor- und Nachglättungsschritt im Mehrgitterzyklus zufriedenstellende Resultate erzielt werden, sind dennoch die Resultate für andere Konfigurationen interessant. Bei den folgenden Experimenten werden deshalb auch noch die Konvergenzergebnisse für eine unterschiedliche Zahl an Vor- und Nachglättungsschritten angegeben.
Obwohl in der linearen Elastizität in vielen Fällen bilineare Elemente verwendet werden, weshalb das Augenmerk dieser Arbeit auf diese Probleme gerichtet ist, kommen in einigen Anwendungen dennoch lineare Elemente vor. Aus diesem Grund finden sich in diesem Abschnitt auch zwei mit linearen Elementen diskretisierte Probleme.

5.5.1 Kreis und Kugel

Im folgenden werden nun das auf der Einheitskugel mit linearen Elementen diskretisierte Dirichletproblem (47) im dreidimensionalen, und das auf dem Einheitskreis mit linearen Elementen diskretisierte Problem (50) mit Nullrandbedingungen betrachtet.
Dabei ersetzen, wie in der Abbildung 35 dargestellt, die an den Rand der Kugel angrenzenden Tetraederflächen die Kugeloberfläche, bzw. die Seiten der einbeschriebenen Vierecke den Kreisrand.
Für die Diskretisierung des Kreises mit bilinearen Elementen ist eine Verschlechterung der Konvergenzergebnisse im Vergleich zu den in Abschnitt 5.3.1 erzielten Resultaten zu erwarten, insgesamt sollte die Stabilität des Verfahrens allerdings erhalten bleiben.

In den Tabellen 8 und 9 sind die Konvergenzresultate und die Komplexitäten des zweidimensionalen Problems für das Verfahren bei Verwendung der

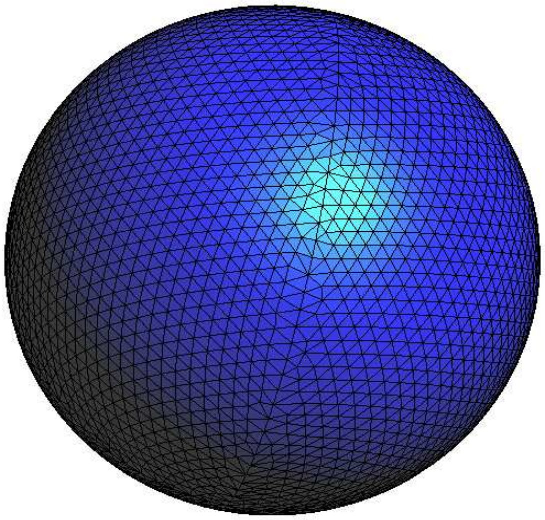


Abbildung 35: Oberflächengitter der Kugel

	$\omega = 1.0$			$\omega = 1.5$				
n	1/1	2/1	2/2	1/1	2/1	2/2	c(A)	c(G)
2342	0.370	0.328	0.301	0.261	0.161	0.144	2.853	1.699
9978	0.456	0.419	0.400	0.303	0.289	0.244	2.907	1.730
22594	0.444	0.417	0.393	0.350	0.283	0.273	3.120	1.732
90422	0.480	0.445	0.430	0.311	0.329	0.334	3.156	1.731

Tabelle 8: Asymptotische Fehlerreduktion des zweidimensionalen Elastizitätsproblems auf dem Kreis, für verschieden feine Gitter und $\alpha = 0.25$.

Vergröberung mit $\alpha = 0.25$ bzw. $\alpha = 0.35$ und einer unterschiedlichen Anzahl von Vor- und Nachglättungsschritten des Block-Gauss-Seidel- und Block-SOR-Verfahrens ($\omega = 1.5$) dargestellt. Dabei konvergiert das Verfahren bei der Vergröberung mit $\alpha = 0.35$ etwas schneller als bei einer Vergröberung mit $\alpha = 0.25$. Der Grund hierfür wird in Abbildung 36 sichtbar, in der das feinste Gitter mit den starken Kopplungen für die beiden Parameter dargestellt ist. Während für $\alpha = 0.25$ wie in Abschnitt 5.3.1 bei Verwendung der Min-Kopplung jeder Gitterpunkt mit jeweils acht anderen Gitterpunkten gekoppelt ist, erhält man mit $\alpha = 0.25$ weitgehend die gleiche Struktur wie bei der Verwendung der Norm-Kopplung in 5.3.1. Die gesamte Gitterhierarchie sowie einige Grobgitter mit starken Kopplungen bei der Vergröberung mit $\alpha = 0.35$ sind in Abbildung 37 abgebildet.
Ein signifikanter Unterschied besteht zwischen der Konvergenz des Verfahrens mit dem Gauss-Seidel-Glätter im Vergleich zu den Ergebnissen mit des AMG mit dem Block-SOR-Glätter. Einen großen und wirklich signifikanten Unter-

	$\omega = 1.0$			$\omega = 1.5$				
n	1/1	2/1	2/2	1/1	2/1	2/2	c(A)	c(G)
2342	0.314	0.261	0.236	0.255	0.143	0.087	2.910	1.792
9978	0.366	0.340	0.301	0.259	0.160	0.149	3.100	1.795
22594	0.388	0.334	0.302	0.272	0.179	0.179	3.200	1.803
90422	0.424	0.383	0.367	0.273	0.247	0.244	3.253	1.804

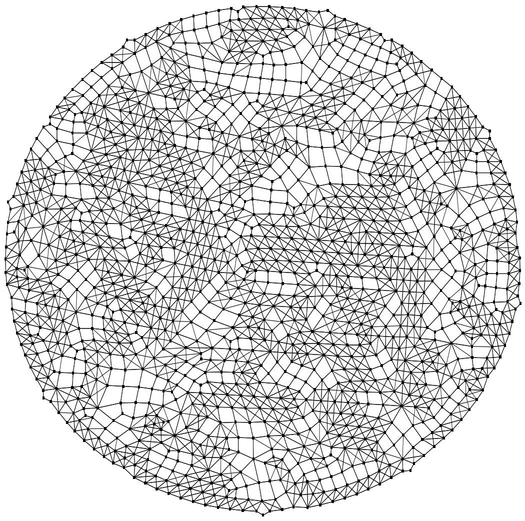
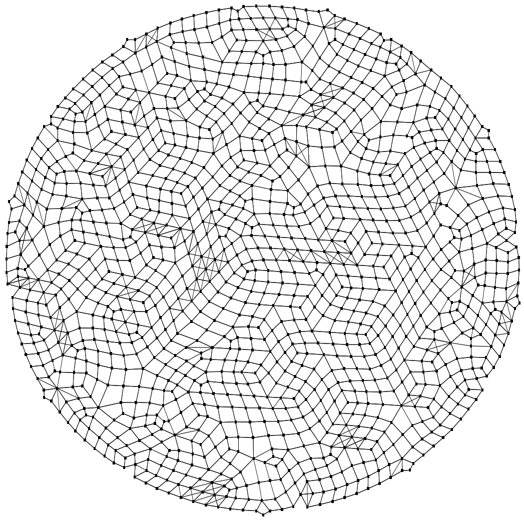
Tabelle 9: Asymptotische Fehlerreduktion des zweidimensionalen Elastizitätsproblems auf dem Kreis für verschieden feine Gitter und $\alpha = 0.35$

schied liefert das Verfahren für die beiden Glätter. Während für das Block-SOR-Verfahren mit einem Vor- und Nachglättungsschritt unabhängig von der gewählten Problemgröße $\rho \leq 0.273$ gilt, ist bei Verwendung des Gauss-Seidel-Verfahrens das Block-AMG bei 90422 Unbekannte mit $\rho = 0.424$ merklich langsamer.
Die Anzahl an Vor- und Nachglättungsschritten hat dabei keinen bedeutenden Einfluss auf die Konvergenzergebnisse. Obwohl für einige Probleme klassische AMG-Verfahren mit zunehmender Zahl an Glättungsschritten bessere Resultate liefern, werden bei dem Problem mit 90422 Unbekannten die Ergebnisse für $\alpha = 0.25$ und $\omega = 1.5$ sogar etwas schlechter. So beträgt bei jeweils einem Vor- und Nachglättungsschritt die asymptotische Fehlerreduktion $\rho = 0.311$ während bei zwei Vor- und Nachglättungsschritten eine Konvergenz von $\rho = 0.334$ erreicht wird.

Die zu der Diskretisierung des Problems auf der Kugel gehörigen Ergebnisse für zwei verschieden feine Gitter sind in den Tabellen 10 und 11 wiedergegeben. Auch dieses Mal liefert die Vergröberung mit $\alpha = 0.35$ etwas bessere Resultate. Die Ergebnisse der beiden Glätter sind dabei für einen Vor- und Nachglättungsschritt nahezu gleich. Nur mit wachsender Zahl von Glättungsschritten konvergieren die beiden Verfahren unterschiedlich. Bei Einsatz des Block-SOR Glätters mit zwei Vor- und Nachglättungsschritte wird eine Fehlerreduktion von $\rho \approx 0.07$ unabhängig von der Wahl des Parameters α erreicht, während in diesem Fall die Ergebnisse bei Glättung mittels des Gauss-Seidel-Verfahrens für $\alpha = 0.25$ $\rho \approx 0.176$ betragen.

	$\omega = 1.0$			$\omega = 1.5$				
n	1/1	2/1	2/2	1/1	2/1	2/2	c(A)	c(G)
8187	0.267	0.194	0.144	0.257	0.132	0.068	3.443	1.517
20697	0.265	0.197	0.154	0.259	0.136	0.070	3.703	1.504
29823	0.318	0.214	0.176	0.259	0.137	0.071	3.767	1.500

Tabelle 10: Asymptotische Fehlerreduktion bei linearen Elementen für die Kugel, $\alpha = 0.25$.

$\alpha = 0.25$ $alpha$=0.35

Abbildung 36: Starke Kopplungen des feinsten Gitters mit 1171 Knoten für $\alpha = 0.25$ in der linken Abbildung und $\alpha = 0.35$ in der rechten Abbildung.

	$\omega = 1.0$			$\omega = 1.5$				
n	1/1	2/1	2/2	1/1	2/1	2/2	c(A)	c(G)
8187	0.242	0.189	0.137	0.250	0.127	0.066	3.993	1.609
29823	0.251	0.183	0.147	0.249	0.129	0.066	4.361	1.596

Tabelle 11: Asymptotische Fehlerreduktion bei linearen Elementen für die Kugel, $\alpha = 0.35$.

5.5.2 Adaptiv verfeinerte Gitter

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Beispielen werden in der Praxis häufig Gitter verwendet, deren einzelne Elementgrößen innerhalb des Gebietes stark voneinander abweichen. In Teilen des Gebietes, in denen eine genauere Lösung gesucht ist, die gesuchte Lösung singulär ist oder einfach keine größeren Elemente Platz finden, sind solche Fälle häufig von Nutzen. In diesem Unterabschnitt wird nun das Block-Verfahren an der Diskretisierung des Elastizitätsproblems auf zwei solchen lokal verfeinerten Gittern untersucht.

Das zweidimensionale Problem ist dabei auf dem Einheitsquadrat $\Omega = [0, 1]^2$ mit bilinearen finiten Elementen und einem Gitter diskretisiert, bei dem die Elemente an der unteren Würfelseite im Durchschnitt einviertel der Größe der übrigen Elemente besitzen. Das linke Bild der Abbildung 38 zeigt ein solches Gitter.

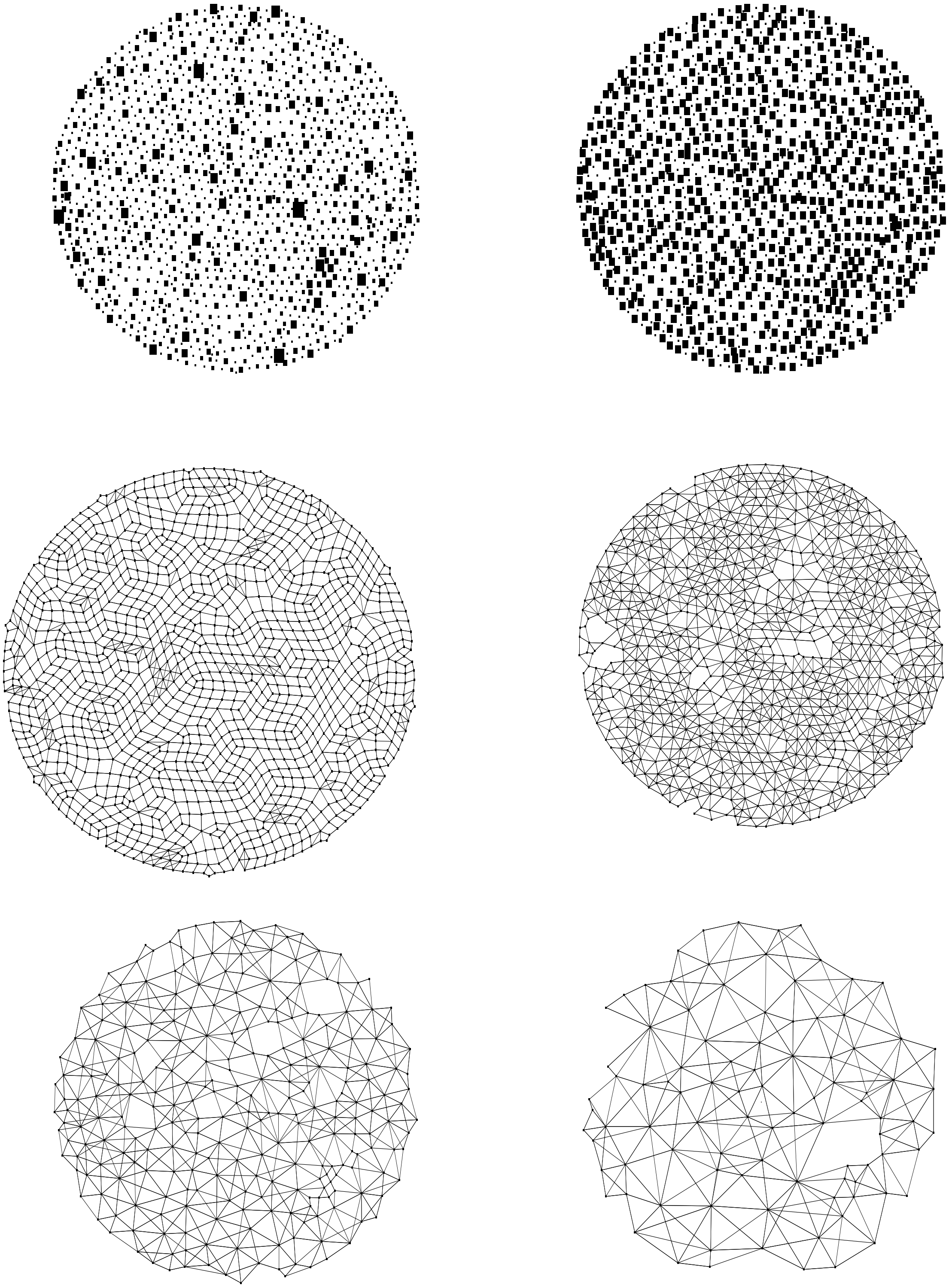


Abbildung 37: Obere Zeile: Die gesamte Gitterhierarchie des Verfahrens (links), bei Vergröberung mit $alpha = 0.35$ und das feinste mit dem ersten Grobgitter (rechts). Mittlere Zeile: Feinstes Gitter mit starken Kopplungen (links), erstes Grobgittr mit starken Kopplungen. Unten: Zweites und drittes Grobgitter mit starken Kopplungen.

Das Gebiet des dreidimensionalen Problems ist erneut der Einheitswürfel $\Omega = [0,1]^3$. Das der Diskretisierung des dreidimensionalen Problems zugrundeliegende Gitter ist in dem linken Bild der Abbildung 38 dargestellt. Dabei werden die Elemente um einen konstanten Faktor in Richtung einer Wüfelecke gleichmäßig verkleinert.

In den Tabellen 12 und 13 sind die Ergebnisse des zweidimensionalen Problems für verschieden feine Gitter angegeben. Erneut sind die Konvergenzresultate für $\alpha = 0.35$ etwas besser. Bei 152554 Unbekannten und der Verwendung von $\omega = 1.5$ ist dieser Unterschied zwischen den beiden unterschiedlichen Vergröberungen sogar signifikant. So ist bei der Grobgitterwahl mit $\alpha = 0.35$ bei einem Vor- und Nachglättungsschritt $\rho = 0.317$, während für $\alpha = 0.25$ nur eine Fehlerreduktion von $\rho = 0.417$ erreicht wird. Allerdings ist dafür in diesem Fall die Gesamt-Operator-Komplexität mit $c(A) = 3.350$ etwas größer als im Fall $\alpha = 0.25$ ($c(A) = 2.935$), weshalb das Block-AMG mehr Rechenoperationen in der Setup-Phase und in jedem Mehrgitterzyklus benötigt, was den Vorteil der schnelleren Konvergenz wieder ausgleicht.

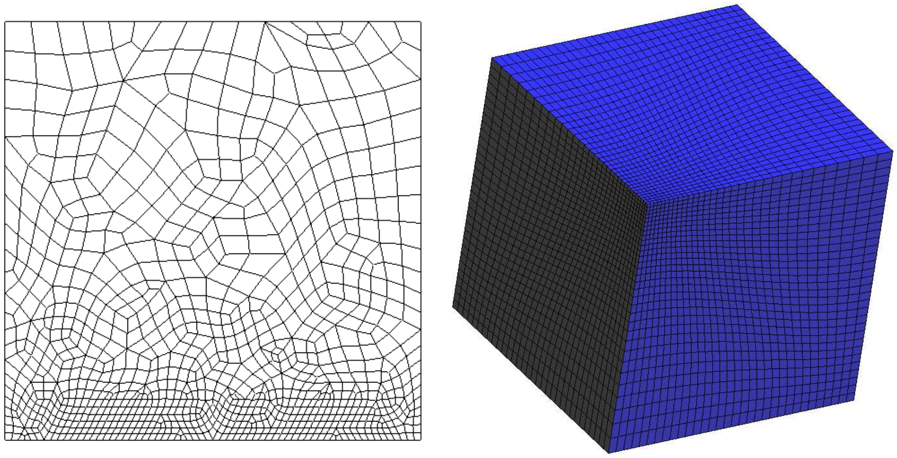


Abbildung 38: Das lokal verfeinerte Gitter des zweidimensionalen Problem (linkes Bild) und des dreidimensionalen Problems (rechts)

Das dreidimensionale Problem konvergiert unabhängig von der Wahl des Parameters α, wie in der Tabelle 14 angegeben. Während die Ergebnisse bei der Verwendung von mehr als einem Vor- und Nachglättungsschritt für das Verfahren mit dem Block-SOR-Verfahren besser sind als bei Einsatz des Gauss-Seidel-Verfahrens, so verschlechtert sich die Konvergenz ein wenig bei nur einem Vor- und Nachglättungsschritt von $\rho = 0.286$ ($\alpha = 0.25$) bei Glättung mittels des Gauss-Seidel-Verfahrens auf $\rho = 0.307$ ($\alpha = 0.25$) bei Einsatz des Block-SOR Glätters. Bis auf die Gesamt-Operator-Komplexität, die mit $c(A) = 4.829$ recht hoch ist, wodurch das Verfahren mehr Rechenschritte benötigt, sind die Resultate auch für das dreidimensionale Problem recht zufriedenstellend.

	$\omega = 1.0$			$\omega = 1.5$				
n	1/1	2/1	2/2	1/1	2/1	2/2	c(A)	c(G)
10742	0.406	0.363	0.340	0.298	0.234	0.212	2.941	1.730
41234	0.473	0.430	0.405	0.299	0.310	0.309	2.927	1.691
152554	0.509	0.480	0.469	0.417	0.382	0.380	2.935	1.698

Tabelle 12: Asymptotische Fehlerreduktion für das zweidimensionale Problem auf lokal verfeinerten Gittern mit $\alpha = 0.25$

	$\omega = 1.0$			$\omega = 1.5$				
n	1/1	2/1	2/2	1/1	2/1	2/2	c(A)	c(G)
10742	0.344	0.296	0.264	0.272	0.145	0.127	3.070	1.790
41234	0.417	0.352	0.325	0.259	0.229	0.231	3.318	1.831
152554	0.460	0.422	0.399	0.317	0.336	0.332	3.350	1.845

Tabelle 13: Asymptotische Fehlerreduktion für das zweidimensionale Problem auf lokal verfeinerten Gittern mit $\alpha = 0.35$

		$\omega = 1.0$			$\omega = 1.5$				
α	n	1/1	2/1	2/2	1/1	2/1	2/2	c(A)	c(G)
0.25	89373	0.286	0.228	0.193	0.307	0.153	0.086	4.829	1.693
0.35	89373	0.290	0.225	0.190	0.306	0.142	0.078	4.931	1.694

Tabelle 14: Ergebnisse des Block-AMG für das auf dem Würfel mit einem adaptiven Gitter diskretisierten Elastizitätsproblems

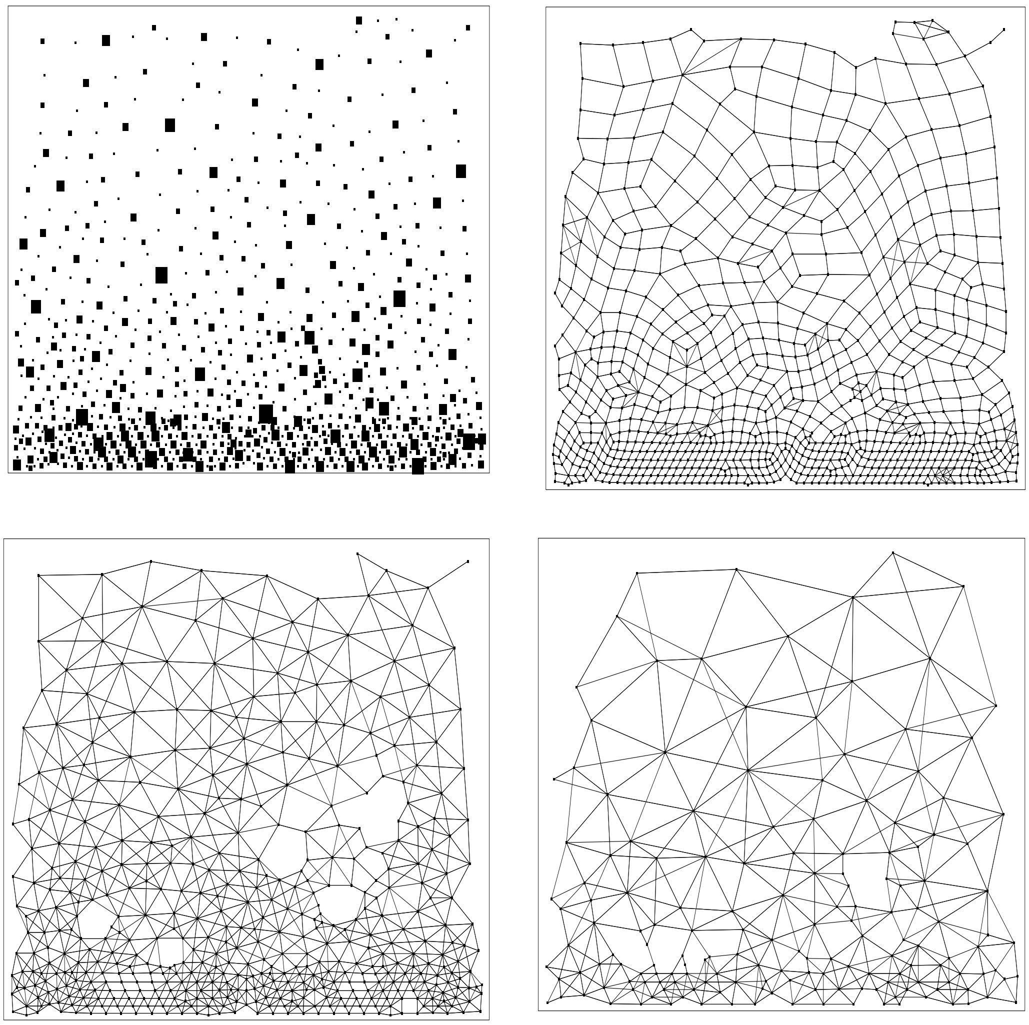


Abbildung 39: Gesamte Grobgitterhierarchie (oben links), feinstes Gitter mit starken Kopplungen (oben rechts), sowie das erste und zweite Grobgitter mit starken Kopplungen (untere Reihe) für das zweidimensionale Problem auf einem adaptiven Gitter bei Vergröberung mit $\alpha = 0.35$

5.5.3 Zwei Praxisbeispiele

Zum Abschluß dieses Kapitels sollen nun noch Konvergenzresultate für zwei, auf praxisbezogenen Geometrien diskretisierten, Elastizitätsprobleme vorgestellt werden.

Das zuerst betrachtete Objekt, das Teil eines Kolbens ist, ist in Abbildung 40 mit dem entsprechenden Gitter dargestellt. Zur Diskretisierung wurden bilineare finite Elemente verwendet. Die Konvergenzresultate zu diesem Problem sind in der Tabelle 15 wiedergegeben. Die Ergebnisse für jeweils einen Vor- und Nachglättungsschritt sind sind dabei relativ unabhängig von dem gewählten Glätter. Die asymptotische Fehlerreduktion beträgt in diesem Fall $\rho \approx 0.3$. Erst für mehr Vor- und Nachglättungsschritten liefert das AMG mit dem Block-SOR-Glätter bessere Resultate ($\rho = 0.183$ bei zwei Vor- und einem Nachglättungsschritt, bzw. $\rho = 0.113$ für zwei Vor- und Nachglättungsschritte).

Für das auf dem Gebiet 41, das einen Elektromotor darstellt, mit linearen Elementen diskretisierte Elastizitätsproblem erhält man ähnliche Resultate, wobei das Glätten mit dem Block-SOR-Verfahren bereits für nur einen Vor- und Nachglättungsschritt die Ergebnisse verbessert. So wird in diesem Fall eine asymptotische Fehlerreduktion $\rho = 0.262$ erreicht.

	$\omega = 1.0$			$\omega = 1.5$				
n	1/1	2/1	2/2	1/1	2/1	2/2	c(A)	c(G)
30582	0.237	0.170	0.133	0.280	0.155	0.098	3.194	1.755
89805	0.312	0.245	0.231	0.307	0.183	0.113	3.660	1.856

Tabelle 15: Asymptotische Fehlerreduktion für das auf dem in 40 dargestellten Gebiet mit linearen Elementen diskretisierte Elastizitätsproblem, $\alpha = 0.25$

	$\omega = 1.0$			$\omega = 1.5$				
n	1/1	2/1	2/2	1/1	2/1	2/2	c(A)	c(G)
60592	0.350	0.273	0.189	0.262	0.148	0.100	3.894	1.755

Tabelle 16: Asymptotische Fehlerreduktion für das auf dem in 41 dargestellten Gebiet mit linearen Elementen diskretisierte Elastizitätsproblem, $\alpha = 0.25$

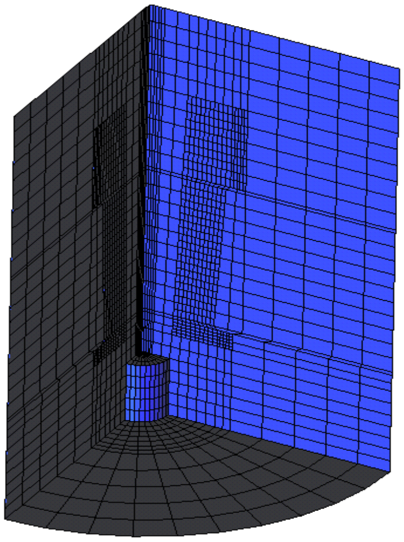


Abbildung 40: Teil eines Kolbens

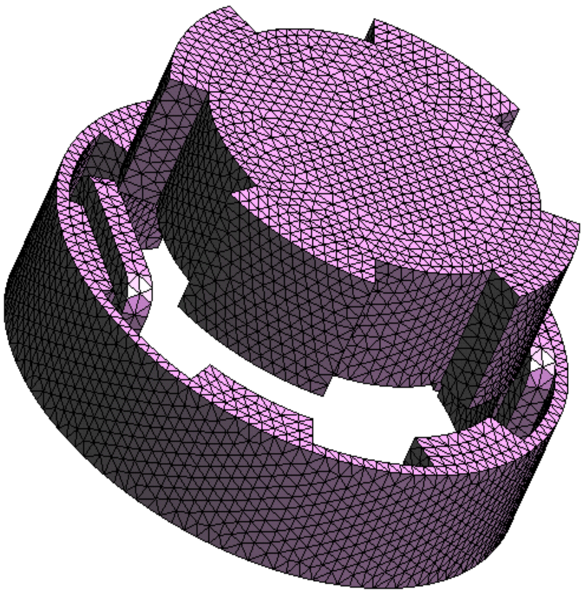


Abbildung 41: Elektromotor

6 Schlußbemerkungen

6.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein algebraisches Mehrgitterverfahren für Systeme partieller Differentiagleichungen vorgestellt. Der Versuch, die Probleme, die bei der Anwendung klassischer AMG-Verfahren auf den Systemfall entstehen, zu beheben, führte dabei zu dem Block-AMG. Bei dieser Methode wurden die Unbekannten nach der geometrischen Zugehörigkeit des zur Diskretisierung gehörigen Gitters partitioniert, was zu einer Block-Matrix führte. Die Ergebnisse der darauf folgenden Konvergenzuntersuchung eines Zweigitter-Verfahrens für eine spezielle, auf den Blöcken der Matrix arbeitende Interpolation und Grobgitterwahl dienten als Motivation für die Übertragung des herkömmlichen Vergröberungsalgorithmus des Ruge und Stüben AMG und verschiedener Interpolationsvorschriften auf die Block-Struktur.
Tests der verschiedenen Interpolationen und Vergröberungen des Block-AMG an einigen auf den Systemfall übertragenen Diffusionsproblemen dienten daraufhin dem ersten Einblick in die Funktionsweise des Block-AMG und dem Vergleich mit klassischen AMG-Methoden. Durch gute Konvergenzresultate für einige Interpolationen und Vergröberungen konnte gezeigt werden, dass mit dem vorgestellten Ansatz die diskutierten Probleme im Falle von Systemen partieller Differentialgleichungen tatsächlich überwunden werden können.
Dabei führten vor allem zwei Interpolationen in Verbindung mit einer Vergröberung zu guten Resultaten, die eine große Ähnlichkeit zu den Ergebnissen des AMG nach Ruge und Stüben für die entsprechenden skalaren Probleme aufwiesen.
Nach diesen einleitenden Betrachtungen sollte das Verfahren mit diesen beiden Interpolationen und der Vergröberung an Problemen der Elastizitätstheorie getestet werden. Hierfür erfolgte zunächst eine kurze Einleitung in die Elastiziätstheorie. Dabei wurden die *rigid body modes* als algebraisch glatt charakterisiert und die Bedeutung der exakten Interpolation dieser Funktionen für eine schnelle Konvergenz des Block-AMG diskutiert. Dadurch motiviert wurde die exakte Interpolation der *rigid body modes* für eine Interpolation gezeigt, die den beiden verwendeten Interpolationen als Grundlage dient.
Daraufhin konnten die durch die Theorie gestärkten, optimistischen Einschätzungen über das Konvergenzverhalten an einigen Dirichletproblemen der Elastizität bestätigt werden. Dabei wurde sowohl die Stabilität des Verfahrens gegenüber der Problemgröße als auch die Robustheit gegenüber Schwankungen in der Poissonzahl ν und Sprüngen des Elastizitätsmoduls innerhalb des Gebietes gezeigt. Durch die Einführung von Neumann-Randbedingungen oder freien Rändern verschlechterten sich die Ergebnisse. In diesem Fall konnten mit Hilfe einer separaten Vergröberung der freien Ränder und der Verwendung des Block-SOR- an Stelle des Block-Gauss-Seidel-Verfahrens als Glätter die Konvergenzresultate wieder verbessert werden, so dass auch diese Probleme mit der vorgestellten Methode zufriedenstellend gelöst werden konnten.
Am Ende der Arbeit wurden schliesslich noch Konvergenzergebnisse des Verfahrens für unstrukturierte Gitter und komplizierte, praxisbezogene Geometri-

en betrachtet. Auch für solche Fälle erwies sich das Block-AMG als optimaler Löser.

6.2 Ausblick

Trotz der durchweg guten Ergebnisse des Block-AMG ist die Suche nach effizienten Lösungsverfahren für Systeme partieller Differentialgleichungen damit noch nicht abgeschlossen. So beruht das vorgestellte Verfahren auf der Annahme, dass alle physikalischen Größen auf einem gemeinsamen Gitter diskretisiert sind. Für den Fall von *staggered grids* ist diese Methode also nicht ohne weiteres anwendbar. Hier wäre es unter Umständen möglich, mit Hilfe der in [4] beschriebenen *ghost unknowns* das Verfahren auch auf solche Fälle zu übertragen.
Eine weitere Schwierigkeit liegt bei der Behandlung gemischter Randbedingungen. In den behandelten Beispielen der Elastizitätstheorie wurden für alle Grössen an einem gemeinsamen Gitterpunkt die gleichen Randbedingungen gesetzt. Probleme, bei denen zum Beispiel auf Teilen des Randes für Verschiebungen in x-Richtung Dirichletrandbedingungen und für Verschiebungen in y-Richtung Neumann-Randbedingungen gesetzt sind, können durchaus in der Praxis auftreten. Werden in einem solchen Fall die zu Nullrandbedingungen gehörenden Unbekannten wie üblich aus dem linearen Gleichungssystem eliminiert, entstehen bei Verwendung des Block-Ansatzes teilweise nichtquadratische Block-Einträge in der Matrix. Wie sich diese Tatsache auf die Konvergenz des Verfahrens auswirkt, ist dabei noch nicht geklärt. Zusätzlich wäre im Fall von freien Rändern ein neuer Vergröberungsalgorithmus wünschenswert, der den Rand und das Innere des Gebietes gleichzeitig berücksichtigt, so dass regelmäßigere Grobgitter als bei vorheriger separater Randvergröberung entstehen, wodurch unter Umständen die Resultate für dreidimensionale Probleme weiter verbessert werden könnten. Außerdem sollte das Block-SOR-Verfahren als Glätter im algebraischen Mehrgitterverfahren sowohl theoretisch als auch in der Praxis genauer untersucht werden.
Abschließend sei noch auf das für alle AMG-Methoden ungelöste Problem der Parallelisierung hingewiesen. Es existieren zwar einige Ansätze, so wird zum Beispiel in [12] ein solcher Ansatz vorgestellt, um algebraische Mehrgittermethoden zu parallelisieren. Diese Verfahren beruhen allerdings auf Methoden, bei denen das Gleichungssystem mittels Graph-Partitionierung in mehrere Gebiete zerlegt wird. Entsprechende Algorithmen zur Graph-Partitionierung sind allerdings rechenintensiv und in der Regel nicht von linearem Aufwand, so dass diese Methodik nicht wirklich für eine Parallelisierung des AMG geeignet ist.

Am Ende dieser Arbeit möchte ich mich an erster Stelle bei Herrn Prof. Dr. M. Griebel für die Überlassung des Themas sowie die intensive Betreuung bedanken. Auch Herrn Prof. Dr. K. Scherer sei für das rege Interesse an dieser Arbeit gedankt. Desweiteren sollten auch nicht Herr Dr. G. Zumbusch, Herr F. Kiefer und Herr M. A. Schweitzer vergessen werden, die mir immer mit Rat und Tat beiseite standen und mit ihren Anregungen vieles zu dieser Arbeit beigetragen haben.

7 Anhang

7.1 Interpolation der rigid body modes in 3D

Wie im Abschnitt 5.2 angekündigt, soll nun der Beweis der exakten Interpolation der *rigid body modes* im Fall geeigneter Grobgitter eines Gitters, dass in jede Koordinaten Richtung x_i konstante Maschenweite h_i besitzt, gezeigt werden. Dafür benötigt man zunächst die folgende Notation:
Ist ein Feingitterpunkt $i \in F$, $i = (x_1, x_2, x_3)$, vorgegeben, so bezeichnen i_0,..., i_{26} die um diesen Punkt angeordneten weiteren Gitterpunkte . Dabei sind die Gitterpunkte i_j derart durchindiziert, so dass aus dem Index die relative Position zu dem Gitterpunkt i errechnet werden kann. Dazu wird der Index j, $0 \leq j \leq 26$ als ternär geschriebene Zahl dargestellt:

$$j \quad = \quad j_3 \cdot 3^2 + j_2 \cdot 3^1 + j_1 \cdot 3^0.$$

Nun läßt sich mit dieser Darstellung die relative Position zu dem Gitterpunkt $i = (x_1, x_2, x_3)$ bzw. der Index j folgendermaßen errechnen:

$$i_j \quad = \quad (x_1 + |1 - j_1| \cdot h_1, x_2 + |1 - j_2| \cdot h_2, x_3 + |1 - j_3| \cdot h_3).$$

Ähnlich wie in dem Abschnitt 5.2 werden nun bei jedem Grobgitter, bei dem die Grobgitterpunkte punktsymmetrisch zu dem Feingitterpunkt angeordnet sind, die *rigid body modes* exakt interpoliert. Dieser Sachverhalt wird im folgenden Theorem für ein spezielles Gitter exemplarisch bewiesen. Alle anderen Fällen folgen, wie leicht zu sehen ist, analog.

Theorem 7.1 *Sei $i \in F$, $i = (x_1, x_2, x_3)$, ein Feingitterpunkt und $P_i = \{i_4, i_{10}, i_{12}, i_6, i_{16}, i_{22}\}$ die Grobgitterpunkte, die den Feingitterpunkt interpolieren. Sei $e \in \mathbb{R}^{3n}$ der Koeffizientenvektor bezüglich der Basisdarstellung eines* rigid body modes *im Raum der finiten Elemente, dann gilt für die Direkte Interpolation:*

$$(I_{FC} e_C)_i \quad = \quad e_i. \tag{68}$$

Beweis: Analog zu den Beweisen des Abschnitts 5.2 wird die Aussage für die Elemente der in Lemma 5.1 beschriebenen Basis gezeigt. Die Aussage für die konstanten vektorwertigen Funktionen folgt dabei genauso wie in dem Abschnitt 5.2 im zweidimensinalen Fall. Die Behauptung wird deshalb exemplarisch für die Basisfunktion

$$r(x_1, x_2, x_3) \quad = \quad \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

skizziert.Mit $c := -A_{ii}^{-1} \left(\sum_{k \in N_i} A_{ik}\right) \left(\sum_{k \in P_i} A_{ik}\right)^{-1}$ gilt dann:

$$
\begin{aligned}
(I_{FC}e_C)_i \quad = \quad & c \cdot \left(A_{ii_4} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{ii_{10}} \begin{pmatrix} -x_2 - h_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{ii_{12}} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 + h_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. \left(A_{ii_6} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{ii_{16}} \begin{pmatrix} -x_2 + h_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{ii_{12}} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 - h_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right).
\end{aligned}
$$

Durch Auseinanderziehen der Summe un der Tatsache, dass konstante Funktionen exakt interpoliert, kann die Gleichung, ähnlich wie in Theorem 5.1, folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
(I_{FC}e_c)_i \quad = \quad & \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \left(A_{ii_{10}} \begin{pmatrix} -h_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{ii_{12}} \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. \left(A_{ii_{16}} \begin{pmatrix} h_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{ii_{12}} \begin{pmatrix} 0 \\ -h_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right).
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe von Satz 5.1 wird nun wie in Lemma 57 gezeigt, dass die Klammer verschwindet. Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

Literatur

[1] D. Braess. Towards algebraic multigrid for elliptic problems of second order. Technical report, Institut für angewandte Mathematik, Ruhr-Universität Bochum.

[2] D. Braess. *Finite Elemente.* Springer-Verlag, 1996.

[3] A. Brandt. Multigrid techniques: 1984 guide with applications to fluid dynamic. Technical Report GMD-Studien Nr. 85, 1984.

[4] A. Brandt. Algebraic multigrid theory: The symmetric case. *Applied Mathematics and Computation*, 1986.

[5] Brezina, M., A.J. Cleary, R.D. Falgout, V.E. Henson, J.E. Jones, T.A. Manteuffel, S.F. McCormick, and J.W. Ruge. Algebraic Multigrid Based on Element Interpolation (AMGe). Technical Report UCRL-JC-131752, Lawrence Livermore National Laboratory.

[6] H. Bungartz. Entwurf von Datenstrukturen und Algorithmen für das algebraische Mehrgitterverfahren. Master's thesis, Technische Universität München, 1988.

[7] A. J. Cleary, R.D. Falgout, V. E. Henson, J. E. Jones, T. A. Manteuffel, S. F. McCormick, G.N. Miranda, and J.W. Ruge. Robustness and scalability of algebraic multigrid. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2000.

[8] J. Franke. Lineare Algebra II. Vorlesung am Institut für Mathematik der Universität Bonn, SS 1996.

[9] Grauschopf, Griebel, and Regler. Additive multilevel-preconditioners based on bilinear interpolation, matrix debendent geometric coarsening and algebraic-multigrid coarsening for second order pdes. Technical Report SFB-Bericht Nr. 342/02/96 A, 1996.

[10] Griebel, Neunhoeffer, and Regler. Algebraic multigrid methods for the solution of the navier-stokes equations in complicated geometries. Technical Report SFB Bericht Nr. 342/01/96 A, Technische Universität München, 1996.

[11] W. Hackbusch. *Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations.* Springer-Verlag, 1994.

[12] A. Krechel and K. Stüben. Parallel algebraic multigrid based on subdomain blocking. Technical Report GMD-Report 71, GMD- Forschungszentrum Informationstechnik GmbH, 1999.

[13] H. Regler. *Anwendung algebraischer Mehrgittermethoden auf das Plazierproblem beim Chipentwurf und auf die numerische Simulation von Strömungen.* PhD thesis, Technische Universität München, 1997.

[14] Ruge and Stüben. Algebraic multigrid (AMG). Technical report, GMD - Forschungszentrum Informationstechnik GmbH, 1986.

[15] J. Ruge and K. Stüben. Efficient solution of finite difference and finite element equations by algebraic multigrid (amg). Technical report, GMD - Forschungszentrum Informationstechnik GmbH, 1984.

[16] K. Stüben. Algebraic multigrid (AMG): an introduction with applications. Technical report, GMD - Forschungszentrum Informationstechnik GmbH, 1999.

[17] P. Vanek, J. Mandel, and M. Brezina. Algebraic Multigrid on Unstructured Meshes. Technical report, University of Colorado at Denver, 1994.