

Diplomarbeit

Modellierung und Simulation
von globalen Atmosphärenströmungen
mit Finite-Volumen-Methoden
auf adaptiven Polyedergittern

angefertigt am
Institut für Numerische Simulation

vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Januar 2008

von
Jutta Adelsberger
aus
Moers

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Modellierung	5
2.1. Klassische Strömungsmechanik	5
2.1.1. Erhaltung der Masse	6
2.1.2. Erhaltung des Impulses	6
2.1.3. Erhaltung der Energie	7
2.1.4. Zustandsgleichung	8
2.2. Einfluß der Gravitation	8
2.3. Einfluß der Erddrehung	9
2.3.1. Corioliskraft	13
2.3.2. Zentrifugalkraft	14
2.4. Temperaturgleichung	15
2.5. Randbedingungen	16
2.6. Zusammenfassung der Gleichungen	17
2.7. Dimensionsanalyse	18
2.7.1. Tangentiales Koordinatensystem	18
2.7.2. Entdimensionalisierung der Strömungsgleichungen	22
2.7.3. Zusammenfassung der dimensionslosen Gleichungen	30
2.7.4. Skalenanalyse	31
2.8. Turbulenzmodellierung	33
2.8.1. Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS)	34
2.8.2. Entdimensionalisierung der RANS-Gleichungen	43
2.8.3. Large Eddy Simulation (LES)	45
2.8.4. Entdimensionalisierung der LES-Gleichungen	51
3. Gittergenerierung	55
3.1. Triangulierung der Erdoberfläche	55
3.1.1. Bisektionsverfahren	55
3.1.2. Geländeabhängige Adaptivität	58
3.2. Triangulierung der Atmosphäre	61
3.2.1. Wahl der Vertikalkoordinaten	62
3.2.2. Gitterhierarchie	64
3.2.3. Maße für Nicht-Orthogonalität und Schräge	66

4. Diskretisierung	69
4.1. Grundlagen	69
4.2. Finite-Volumen-Methoden	70
4.2.1. Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung	70
4.2.2. Diskretisierung der Kontinuitäts-, Temperatur- und Zustandsgleichung	76
4.2.3. Diskretisierung der Impulsgleichung	77
4.2.4. Berechnung des Massenflusses	78
4.2.5. CFL-Kriterium	82
4.2.6. Randbedingungen	83
4.2.7. Zuordnung von Höhenwerten	83
5. Numerische Simulationen	87
5.1. Kontinuitätsgleichung	87
5.1.1. Kreisströmung	88
5.1.2. Um 90° geneigte Kreisströmung	89
5.1.3. Sinuskreisströmung	90
5.1.4. Rossby-Haurwitz-Welle	91
5.1.5. Transport eines \cos^2 -Zylinders	94
5.2. Kontinuitäts-, Impuls- und Zustandsgleichung	99
5.2.1. Hoch- und Tiefdruckgebiete	100
6. Zusammenfassung und Ausblick	115
A. Anhang	119
A.1. Elementare Sätze	119
A.2. Konstanten	120
Literaturverzeichnis	121

1. Einleitung

Numerische Wettervorhersage

Eine Prognose des Wetters interessiert die Menschen bereits seit Jahrtausenden, da das Wetter damals wie heute einen wichtigen Einfluß auf das Leben ausübt. Früher bekamen die Menschen dies ganz unmittelbar zu spüren, da beispielsweise Mißernten direkt katastrophale Folgen hatten. Doch auch heutzutage spielt das Wetter oft eine entscheidende Rolle, man denke etwa an Bereiche wie die Landwirtschaft, das Bauwesen oder den Tourismus.

Die frühe Wettervorhersage beruhte zunächst auf Beobachtungen und Erfahrung. Erst in der Mitte des 20. Jahrhunderts setzten sich zunehmend mathematische Modelle durch, die anhand physikalischer Gesetzmäßigkeiten und gestützt von meteorologischen Meßdaten Prognosen des Wetters berechneten.

Grundlage für die Durchführbarkeit solcher Wettersimulationen ist die Beschreibungsmöglichkeit des atmosphärischen Geschehens durch Naturgesetze. Dadurch lassen sich Variablen wie die Windgeschwindigkeit, der Luftdruck, die Dichte und die Temperatur definieren und ein Gleichungssystem aufstellen, das die mathematische Formulierung dieser Gesetze darstellt und die zeitliche Entwicklung der Variablen beschreibt. Es entstehen nichtlineare partielle Differentialgleichungen, die keine analytische Lösung besitzen und daher näherungsweise auf Gittern gelöst werden müssen.

Dabei ist die numerische Wettervorhersage nach wie vor ein Gebiet intensiver Forschung mit dem Ziel, die Vorhersagequalität anhand der zum Einsatz kommenden Modelle, Gitter und Simulationstechniken stetig zu verbessern. Entscheidend dafür ist der Einsatz immer leistungsstärkerer Rechnerstrukturen, wodurch die Verlässlichkeit kurzfristiger Vorhersagen in den vergangenen Jahren drastisch erhöht wurde. Problematisch sind jedoch immer noch ein zu grobmaschiges Rechengitter für die turbulenten Anteile des Wettergeschehens, eine unregelmäßige Verteilung der Meßstationen und generell die vielen verschiedenen Faktoren, die das Wetter beeinflussen und teilweise noch nicht ausreichend modelliert sind.

Problemstellungen

In dieser Arbeit möchten wir uns mit den grundlegenden Methoden zur Modellierung und Simulation von globalen Atmosphärenströmungen auseinandersetzen und anhand erster Testfälle die Qualität des verwendeten Gitters und des numerischen Verfahrens untersuchen.

Atmosphärenmodellen liegt stets ein sogenannter dynamischer Kern zugrunde, der aus den kompressiblen Navier-Stokes-Strömungsgleichungen mit den Variablen Geschwindigkeit, Dichte, Druck und Temperatur besteht. Weitere Effekte wie etwa Wolkenbildung und Niederschlag können durch zusätzliche Variablen und Modellgleichungen hinzugenommen werden.

In der Atmosphäre gibt es ein breites Spektrum von Bewegungen, das von kleinen Wirbeln über Strömungen zwischen Hoch- und Tiefdruckgebieten bis hin zur globalen Zirkulation der Atmosphäre reicht. Daher ist eine Skalenanalyse der Gleichungen nötig, bei der untersucht

wird, welchen Einfluß die einzelnen Terme der Gleichungen tatsächlich haben. Dies wird uns schließlich zu den kompressiblen Euler-Gleichungen führen, in denen die diffusiven reibungsbedingten Terme vernachlässigt werden können. Interessant ist in diesem Zusammenhang, daß die Gleichungen in der Literatur häufig dennoch um einen künstlichen Diffusionsterm ergänzt werden, um das Lösungsverfahren stabiler zu machen. Dies führt jedoch zu einem anderen Typ von Gleichungen, die nicht wirklichkeitsgetreu sind und die wir daher vermeiden wollen.

Neben der Modellierung ist auch die Gittergenerierung ein wichtiger Forschungspunkt. Der Deutsche Wetterdienst verwendet für seine Vorhersagen zwei Gitter, und zwar das grob aufgelöste Globale Modell GME [36, 9] und das feiner aufgelöste Lokale Modell LM [11] von Mitteleuropa, dessen Randwerte aus dem GME gewonnen werden. Diese Schachtelung der Modelle ist problematisch, und zwar insbesondere bei der Bewahrung von Erhaltungseigenschaften. In der Atmosphäre gibt es Größen wie die Masse, den Impuls und die Energie, deren Gesamtsumme stets erhalten bleiben muß, was jedoch bei der Schachtelung zweier Rechengebiete leicht verletzt werden kann. Ein Ziel wäre also, ein kombiniertes adaptives Gitter zu konstruieren, in dem bestimmte Gebiete feiner aufgelöst sind als andere, und so auf einem einzigen Gittermodell zu rechnen. Genau diesen Ansatz werden wir in unserer Arbeit verfolgen. Auch beim Deutschen Wetterdienst gibt es Bestrebungen, die unter dem Begriff ICON-Projekt [3] zusammengefaßt werden, ein kombiniertes globales Modell zu entwickeln. Bisher wurden darauf allerdings erst die 2D-Flachwassergleichungen getestet [4].

Lösungsansätze

Unser Ansatz besteht nun darin, die Erdoberfläche mit einem Dreiecksnetz zu überdecken, das auf Bisektion basiert und bei dem wir eine geländeabhängige Adaptivität einführen, um zu erreichen, daß rauhes Gelände feiner aufgelöst wird als flaches. Es lassen sich auch ohne Probleme bestimmte Gebiete wie etwa Deutschland oder Europa verfeinern, womit wir eine Kombination eines globalen und lokalen Gitters erreicht haben. Die Erweiterung auf die dritte Raumdimension läßt sich dann durch Projektion der Bodendreiecke in bestimmte Höhenschichten realisieren.

Auf unseren so erzeugten 3D-Atmosphäregittern, die aus Tetraederstümpfen bestehen, müssen nun die Gleichungen diskretisiert werden, wofür sich Finite-Volumen-Methoden anbieten, da sie zum einen unstrukturierte flexible Geometrien erlauben und zum anderen Erhaltungseigenschaften bewahren. Dies beruht darauf, daß sich eine Erhaltungsgröße nur durch Ab- oder Hinzufießen über den Rand einer Zelle verändern darf.

Umsetzen werden wir die Finite-Volumen-Methoden mit dem Open Source Strömungspaket OpenFOAM [40, 41], wobei sich die Untersuchung der Qualität der Gitter im Hinblick auf ihre Anisotropie und Schräge und die Konstruktion eines neuen an die Erdgeometrie angepaßten Interpolationsschemas für die Geschwindigkeit als sinnvoll erweisen wird.

Da keine nicht-triviale analytische Lösung der kompressiblen Euler-Gleichungen existiert, stellt sich die Validierung globaler 3D-Simulationsverfahren als schwierig heraus. Insbesondere haben sich noch keine Standardtestfälle wie etwa bei den Flachwassergleichungen [52] etabliert. Erst in den letzten Jahren wurden Vorschläge für die Entwicklung einer baroklinen Welle als Testfall gemacht [29, 44]. Dies ist jedoch bereits eine sehr anspruchsvolle Simulation, die gerade für den Anfang als ersten Test ungeeignet ist. Es wäre vielmehr wie bei den Flachwassergleichungen eine nach Schwierigkeitsgrad gestaffelte Serie von Fällen nötig. Daher werden wir in

dieser Arbeit das Ziel verfolgen, schrittweise den Schwierigkeitsgrad unserer Testsimulationen zu erhöhen. Wir beginnen mit Beobachtungen der Dichteentwicklung unter verschiedenen Geschwindigkeitsfeldern wie etwa der Kreisströmung oder der Rossby-Haurwitz-Welle, simulieren dann den Transport eines \cos^2 -Zylinders um die Erde und schließen mit der Simulation von Hoch- und Tiefdruckgebieten, zwischen denen sich ausgleichende Strömungen bilden und anhand derer man den Einfluß der Druckgradientkraft, der Konvektion und der Corioliskraft beobachten kann.

Eigene Beiträge

Fassen wir an dieser Stelle die eigenen Beiträge in dieser Arbeit zusammen.

- Ausführliche Dimensionsanalyse der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen für klein- und großskalige Bewegungen in der Atmosphäre.
- Konstruktion von uniformen und adaptiven 3D-Atmosphärengridern basierend auf einer mit dem Bisektionsverfahren erzeugten Triangulierung der Erdoberfläche und Untersuchung der Qualität dieser Gitter im Sinne von Anisotropie, Nicht-Orthogonalität und Schräge.
- Konstruktion eines neuen an die Erdgeometrie angepaßten Interpolationsverfahrens für die Geschwindigkeit, das im Zusammenhang mit den Finite-Volumen-Methoden für die Berechnung des Massenflusses benötigt wird, und Untersuchung der Qualität dieses Verfahrens anhand verschiedener Strömungen wie etwa der Rossby-Haurwitz-Welle im Vergleich zu Standardmethoden.
- Simulation des Transports eines \cos^2 -Zylinders um die Erde und Simulation von Hoch- und Tiefdruckgebieten und ihren ausgleichenden Strömungen zur Untersuchung des Einflusses von Druckgradientkraft, Konvektion und Corioliskraft, jeweils mit Konvergenzanalyse.

Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist wie folgt strukturiert. Wir beginnen im Kapitel 2 mit der Modellierung von Atmosphärenströmungen und leiten dazu zunächst aus den physikalischen Erhaltungseigenschaften die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen her. Anschließend untersuchen wir den Einfluß der Gravitation und der Erddrehung und gehen dazu zu einem rotierenden Koordinatensystem über. Durch eine ausführliche Dimensionsanalyse für klein- und großskalige Bewegungen in der Atmosphäre gewinnen wir einen Eindruck von der Bedeutung der einzelnen Terme und erhalten so schließlich die kompressiblen Euler-Gleichungen. Eine Turbulenzmodellierung, die nötig ist, da wir die Atmosphäre aus Gründen der Rechenzeit und des Speicheraufwandes nicht fein genug auflösen können, schließt das Kapitel ab. Wir stellen dabei die beiden grundlegenden Ansätze der Reynolds-gemittelten Gleichungen (RANS) und der Large Eddy Simulation (LES) vor.

Im Kapitel 3 beschäftigen wir uns mit der Gittergenerierung und konstruieren zunächst

uniforme und adaptive Triangulierungen der Erdoberfläche mittels Bisektionsverfahren und geländeabhängiger Adaptivität. Diese erweitern wir dann in die dritte Raumdimension zu Atmosphären-gittern, die aus Tetraederstümpfen bestehen, und untersuchen sie auf ihre Anisotropie, Schräge und Abweichung von orthogonalen Gittern.

Nun wird eine Diskretisierung der Gleichungen auf diesen Gittern nötig, so daß wir uns im Kapitel 4 mit Finite-Volumen-Methoden auseinandersetzen. In diesem Zusammenhang erweist es sich als sinnvoll, ein neues Interpolationsverfahren für die Geschwindigkeit zur Berechnung des Massenflusses zu konstruieren.

Im Kapitel 5 stellen wir dann erste numerische Ergebnisse vor. Zunächst simulieren wir die Dichteentwicklung unter dem Einfluß verschiedener Geschwindigkeitsfelder wie etwa der Kreisströmung oder der Rossby-Haurwitz-Welle, um die Qualität des neuen Interpolationsverfahrens zu beurteilen. Es folgt die Simulation des Transports eines \cos^2 -Zylinders um die Erde mit anschließender Konvergenzanalyse. Zuletzt wählen wir Hoch- und Tiefdruckgebiete als Anfangsbedingung und simulieren die ausgleichenden Strömungen, die zu periodischen Schwankungen der Gebiete führen.

Eine Zusammenfassung und einen Ausblick auf weitere interessante Fragestellungen geben wir im Kapitel 6.

Danksagung

Bedanken möchte ich mich bei Prof. Dr. Michael Griebel für das interessante Thema, seine vielen Anregungen und die stete Unterstützung bei der Entwicklung dieser Arbeit. Prof. Dr. Rolf Krause danke ich für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Betreut wurde ich von Priv.-Doz. Dr. Thomas Gerstner, der mit seinen vielen hilfreichen Ideen, seiner steten Diskussionsbereitschaft und Geduld sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Herzlichen Dank dafür.

Des weiteren möchte ich mich bei Margrit Klitz, Martin Engel und Ralph Thesen für ihre Hilfe und wertvollen Hinweise und Diskussionen bedanken, bei ersterer außerdem für ihr aufmerksames Korrekturlesen.

Besonderer Dank gilt meinen Eltern für all ihre Unterstützung und ihr Vertrauen.

2. Modellierung

Um Phänomene der Natur auf dem Rechner zu simulieren und diese Simulation z.B. zur Vorhersage des Wetters zu nutzen, benötigt man ein mathematisches Modell. Ein solches Modell stellt die Übersetzung der Wirklichkeit in ein mathematisches Problem wie etwa ein System von partiellen Differentialgleichungen dar.

In unserem Fall sind wir konkret an den Strömungen in der Atmosphäre interessiert. Daher beginnen wir zunächst mit der Darstellung der physikalischen Gesetze, die jeder Strömung zugrunde liegen, und ihren Entsprechungen in der Mathematik. Im weiteren Verlauf nehmen wir die speziell in der Atmosphäre vorherrschenden Kräfte, die sich aus der Erdanziehung und der Erdrotation ergeben, hinzu. Es entstehen Gleichungen, deren Terme wir einer Dimensionsanalyse unterziehen, um Aussagen über ihre Bedeutung zu gewinnen. Abschließend beschäftigen wir uns dann noch mit der Turbulenzmodellierung, die bei der approximativen Lösung der Gleichungen relevant wird.

2.1. Klassische Strömungsmechanik

Wir wollen zunächst in kurzer Form die Gleichungen vorstellen, die die Strömung eines Fluids beschreiben und die sich aus den grundlegenden physikalischen Prinzipien der Massen-, Impuls- und Energieerhaltung ergeben. Für detailliertere Herleitungen sei auf die reichhaltige Literatur wie etwa [25, 32] verwiesen, denen wir in unserer Darstellung folgen. Dabei betrachten wir zunächst die klassische Strömungsmechanik und lassen Effekte, die aus der Erdanziehung und der Erddrehung resultieren, aus. Auf sie wird in späteren Kapiteln ausführlich eingegangen.

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein dreidimensionales Gebiet, der Ort $\mathbf{x} \in \Omega$ und die Zeit $t \in [0, t_{\text{end}}]$. Die Strömung eines Fluids in einem Gebiet Ω über die Zeit t läßt sich durch die Größen Geschwindigkeit, Dichte, Druck und Energie charakterisieren. Sei also im folgenden

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \quad \Omega \times [0, t_{\text{end}}] &\rightarrow \mathbb{R}^3 && \text{das Geschwindigkeitsfeld,} \\ \rho : \quad \Omega \times [0, t_{\text{end}}] &\rightarrow \mathbb{R} && \text{die Dichte,} \\ p : \quad \Omega \times [0, t_{\text{end}}] &\rightarrow \mathbb{R} && \text{der Druck und} \\ e : \quad \Omega \times [0, t_{\text{end}}] &\rightarrow \mathbb{R} && \text{die Energie.} \end{aligned}$$

Es werden nun kurz aus den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie die sogenannten Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet. Man beachte dabei, daß in der Literatur auch häufig nur die Impulsgleichung diesen Namen trägt, wir im folgenden jedoch das gesamte System so bezeichnen wollen.

2.1.1. Erhaltung der Masse

Bei der Bewegung von Masseteilchen bleibt deren Masse erhalten, nur das Volumen, das die Teilchen einnehmen, kann sich ändern. Sei also M die Masse eines Fluids, das zum Zeitpunkt t das Gebiet Ω_t einnimmt. Die Masse läßt sich dann durch das Integral über die Dichte des Fluids bestimmen

$$M(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}.$$

Da die Masse erhalten bleibt, wenn sich das Fluid bewegt, muß die zeitliche Ableitung der Masse verschwinden. Mit Hilfe des Transporttheorems (A.1) folgt daraus

$$\int_{\Omega_t} (\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}))(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Diese Gleichung gilt für beliebige Gebiete Ω_t , also auch insbesondere für beliebig kleine, so daß wir zur differentiellen Form der Massenerhaltung übergehen können

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.1)$$

Sie wird auch als Kontinuitätsgleichung bezeichnet.

2.1.2. Erhaltung des Impulses

Der Impuls eines Körpers ist das Produkt seiner Masse mit der Geschwindigkeit. Handelt es sich um ein Fluidsystem und nicht um einen festen Körper, so läßt sich der Impuls \mathbf{m} eines Kontrollvolumens Ω_t zum Zeitpunkt t durch das Integral

$$\mathbf{m}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}$$

berechnen. Außerdem wissen wir nach dem 2. Newtonschen Gesetz, daß die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe aller auf das Fluid wirkenden Kräfte ist. Mit Hilfe des Transporttheorems (A.1), des Gaußschen Integralsatzes (A.2) und nach Übergang zur differentiellen Form erhalten wir so schließlich die Impulsgleichung

$$(\rho \mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \circ \mathbf{u} + \mathbf{1}p + \boldsymbol{\tau}) = 0. \quad (2.2)$$

Dabei ist $\mathbf{u} \circ \mathbf{u} := \mathbf{u} \mathbf{u}^T$, $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix und $\boldsymbol{\tau}$ der Spannungstensor, der die molekularen Reibungskräfte beschreibt, mit

$$\boldsymbol{\tau} := -\mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{1} \right), \quad (2.3)$$

wobei μ die dynamische Viskosität ist.

Die Gleichung (2.2) läßt sich unter Berücksichtigung von $\nabla \cdot (\mathbf{1}p) = \nabla p$, der Vektoridentität

(A.18) und der Kontinuitätsgleichung (2.1) zu der gebräuchlichen Darstellung

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = -\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.4)$$

umformen. Dabei beschreibt der erste Term die zeitliche Änderung, der zweite die Konvektion, der dritte die Druckgradientkraft und der vierte die molekulare Reibung.

2.1.3. Erhaltung der Energie

Der Energiegehalt E eines Kontrollvolumens Ω_t kann durch das Integral über die gesamte Energie e pro Masseneinheit multipliziert mit der Dichte ρ ausgedrückt werden

$$E(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t)e(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Man beachte, daß hier mit e die spezifische Gesamtenergie

$$e = e_{th} + e_{kin} = c_v T + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 \quad (2.5)$$

als Summe von thermischer/innerer und kinetischer Energie gemeint ist. Die potentielle Energie in Form der Gravitation wird erst im Kapitel 2.2 betrachtet. Außerdem läßt sich an dieser Stelle schon festhalten, daß wir mit Hilfe der Gleichung (2.5) auch statt der Energie e die Temperatur T als Variable verwenden können. c_v ist dabei eine Konstante und drückt die spezifische Wärmekapazität von trockener Luft bei konstantem Volumen aus.

Die Energie eines Systems ändert sich, wenn am System Arbeit verrichtet wird. Konkret bedeutet dies, daß sich die Energie durch Teilchenbewegung, durch Kompression bzw. Expansion, durch Scherkräfte und durch Wärmeleitung ändern kann. Beschreibt man diese Effekte durch Oberflächenintegrale, verwendet den Gaußschen Integralsatz (A.2) und geht wie zuvor zur differentiellen Form über, so erhält man die Energiegleichung

$$(\rho e)_t + \nabla \cdot (\mathbf{u}(\rho e + p) + \mathbf{j} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{u}) = 0, \quad (2.6)$$

wobei \mathbf{j} die thermische Energiestromdichte

$$\mathbf{j} := -\lambda \nabla T \quad (2.7)$$

ist, die sich über die Temperatur T und die thermische Leitfähigkeit λ ausdrücken läßt. Für die Konstanten sei auf den Anhang A.2 verwiesen.

Mit Hilfe der Vektoridentität (A.18) und der Kontinuitätsgleichung (2.1) läßt sich (2.6) zu

$$e_t + \mathbf{u} \cdot \nabla e + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (p\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho}\nabla \cdot (\mathbf{j} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{u}) + \frac{1}{\rho}Q \quad (2.8)$$

umformen. Dabei wurde noch der Quellterm Q/ρ hinzugefügt, der sich aus Effekten der Sonneneinstrahlung zusammensetzt und geeignet modelliert werden muß, siehe [32].

2.1.4. Zustandsgleichung

Unser Gleichungssystem bestehend aus Massenerhaltung (2.1), Impulserhaltung (2.4) und Energieerhaltung (2.8) ist noch nicht geschlossen, da wir fünf Gleichungen, jedoch sechs Unbekannte \mathbf{u} , ρ , p und e bzw. T haben.

Wir benötigen also noch einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Größen wie etwa das ideale Gasgesetz. Dieses beschreibt den Zusammenhang von Druck, Dichte und Temperatur eines idealen Gases bzw. Gasgemisches, als welches die trockene Atmosphäre angesehen werden kann, und lautet

$$p = \rho RT, \quad (2.9)$$

wobei $R = R_{\text{Luft}}$ die Gaskonstante für trockene Luft ist. Diese Gleichung wird auch als Zustandsgleichung bezeichnet.

Zusammen mit der Massen-, Impuls- und Energiegleichung erhalten wir so ein geschlossenes Gleichungssystem mit den Variablen Geschwindigkeit \mathbf{u} , Dichte ρ , Druck p und Energie e bzw. Temperatur T .

2.2. Einfluß der Gravitation

Nun wollen wir auch die Effekte, die durch die Gravitationskraft hervorgerufen werden, in den Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigen.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz beschreibt die Kraft \mathbf{f} , mit der sich zwei Massen gegenseitig anziehen, und läßt sich als

$$\mathbf{f} = \frac{GMm}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}$$

formulieren. Dabei sind M und m Massen, G ist die Gravitationskonstante, \mathbf{r} der Vektor, der die Position des einen Körpers in bezug auf den anderen angibt, und $|\mathbf{r}|$ der Abstand der beiden Massenschwerpunkte.

Für die Erdgravitation sei M die Masse der Erde und \mathbf{r} der Vektor vom Erdmittelpunkt zum anderen Körper mit der Einheitsmasse m . Damit ist die Gravitationskraft pro Masseneinheit in Entfernung $|\mathbf{r}|$ vom Zentrum der Erde durch

$$\mathbf{f} = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right)$$

gegeben. Zerlegen wir nun den Abstand $|\mathbf{r}|$ in $|\mathbf{r}| = a + z$ mit dem Erdradius a und verwenden den Einheitsnormalenvektor $\mathbf{k} := \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, so läßt sich

$$\begin{aligned} -g^* \mathbf{k} := \mathbf{f} &= -\frac{GM}{(a+z)^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \\ &= \frac{a^2}{(a+z)^2} \left(-\frac{GM}{a^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \right) \\ &= \frac{a^2}{(a+z)^2} (-g_0^* \mathbf{k}) \end{aligned}$$

schreiben, wobei $-g_0^* \mathbf{k}$ die Gravitationskraft an der Erdoberfläche darstellt. Es gilt $a \gg z$, insbesondere für die Höhe der Troposphäre und unteren Stratosphäre, so daß wir

$$g^* \approx g_0^*$$

setzen und somit auf die Höhenabhängigkeit der Gravitationskraft verzichten können, die eigentlich um 0,3% innerhalb von 10 km Höhe abnimmt.

Führen wir die Gravitationskraft nun in der Impulsgleichung (2.4) und Energiegleichung (2.8) ein, erhalten wir jeweils einen neuen Quellterm, und zwar für den Impuls $-g^* \mathbf{k}$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - g^* \mathbf{k} \quad (2.10)$$

und für die Energie $-g^*(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})$

$$e_t + \mathbf{u} \cdot \nabla e + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{j} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{u}) - g^*(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} Q. \quad (2.11)$$

Man beachte, daß sich die auf der Erde zu beobachtende Erdanziehungskraft aus obiger Gravitationskraft und der Zentrifugalkraft zusammensetzt, worauf wir im Abschnitt 2.3.2 noch näher eingehen werden.

2.3. Einfluß der Erddrehung

Bisher haben wir bei der Beschreibung der Dynamik der Atmosphäre ein festes kartesisches Koordinatensystem verwendet und dabei nicht weiter berücksichtigt, daß sich die Gesamtgeschwindigkeit eines Teilchens aus seiner relativen Geschwindigkeit zur Erdoberfläche und der planetaren Winkelgeschwindigkeit zusammensetzt, mit der es um die Erdachse rotiert.

Physikalische Phänomene sind zwar prinzipiell unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, ihre Beschreibung hängt jedoch durchaus vom Betrachter und dem somit gewählten Bezugssystem ab. Da wir als Beobachter auf der Erdoberfläche nur relative Geschwindigkeiten wahrnehmen und messen, ist es sinnvoll, zu einem rotierenden Koordinatensystem überzugehen. Statt absolute Geschwindigkeiten wollen wir also in den Navier-Stokes-Gleichungen nur noch relative Geschwindigkeiten beschreiben. Wir folgen in unserer Darstellung im wesentlichen [12, 28], insbesondere stammen auch die nachfolgenden Beweise daher.

Drehungen bedeuten Richtungsänderungen und somit Beschleunigungen. Von einem mitbewegten Koordinatensystem erwarten wir also, daß es neue (Trägheits-) Kräfte erzeugt.

Es sei im folgenden

- \mathbf{x} ein Ortsvektor im rotierenden System und
- $\hat{\mathbf{x}}$ ein Ortsvektor im Inertialsystem.

Die Gesamtgeschwindigkeit \mathbf{u}_I im Inertialsystem läßt sich in die Relativgeschwindigkeit \mathbf{u}_R und die Führungsgeschwindigkeit \mathbf{u}_F , d.h. die Geschwindigkeit des Koordinatensystems selbst, aufspalten

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_F.$$

Definition 2.1 [SUBSTANTIELLE ABLEITUNG]

Sei $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ fest vorgegeben. Dann wird

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (2.12)$$

als substantielle Ableitung bezeichnet.

Satz 2.2

Für skalare Funktionen ϕ ändert sich die substantielle Ableitung unter Koordinatentransformation nicht, also gilt

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_I = \left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_R. \quad (2.13)$$

Beweis 2.2. Im Inertialsystem gilt nach (2.12) die sogenannte Euler-Beziehung

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_I = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{u}_I \widehat{\nabla} \phi. \quad (2.14)$$

Die Koordinatentransformation sei durch $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ gegeben, und somit gilt $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}, t), t)$. Mit Hilfe der Kettenregel für partielle Ableitungen (A.3) können wir dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{\hat{\mathbf{x}}} &= \left(\frac{\partial\phi(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial t}\right)_{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}} \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial\mathbf{x}} \frac{\partial\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot 1 \\ &= \nabla\phi \cdot \left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right)_{\hat{\mathbf{x}}} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

schreiben. Die zeitliche Änderung eines festen Punktes \mathbf{x} im bewegten Koordinatensystem ist, wenn man sie vom Inertialsystem aus betrachtet, nichts anderes als die Führungsgeschwindigkeit

$$\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{x}}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = \mathbf{u}_F,$$

siehe dazu die Abbildung 2.1. Dementsprechend ist die zeitliche Ableitung eines festen Punktes $\hat{\mathbf{x}}$ im Inertialsystem vom bewegten Koordinatensystem aus betrachtet die negative Führungsgeschwindigkeit

$$\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right)_{\hat{\mathbf{x}}} = -\mathbf{u}_F. \quad (2.16)$$

Setzen wir nun (2.15) und (2.16) in die Euler-Beziehung (2.14) ein, erhalten wir

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_I = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} - \mathbf{u}_F \nabla\phi + \mathbf{u}_I \widehat{\nabla}\phi.$$

Der Gradientenoperator muß in beiden Systemen identisch sein, da keine Längenänderungen

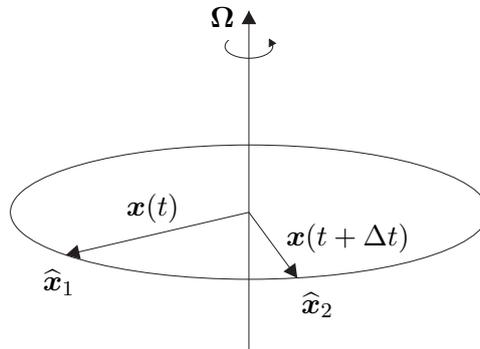


Abb. 2.1.: Der im rotierenden Koordinatensystem feste Vektor \mathbf{x} bewegt sich vom Inertialsystem aus betrachtet in der Zeit Δt von $\hat{\mathbf{x}}_1$ nach $\hat{\mathbf{x}}_2$.

durch den Wechsel in das beschleunigte Koordinatensystem auftreten. Damit folgt die Behauptung

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_I = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_x + \mathbf{u}_R \nabla\phi = \left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_R.$$

□

Wir wissen nun also, daß die substantielle Ableitung einer skalaren Funktion in beiden Bezugssystemen gleich ist, insbesondere ändert sich die Kontinuitätsgleichung (2.1) und die Energiegleichung (2.11) nicht unter Koordinatentransformation. Unterschiede sind jedoch bei der Behandlung von Geschwindigkeitsvektoren zu erwarten und damit bei der Bewegungsgleichung (2.10) für das Geschwindigkeitsfeld.

Betrachten wir nun einen Vektor \mathbf{r} , der, wie in der Abbildung 2.2 zu sehen ist, um die Achse $\mathbf{\Omega}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $|\mathbf{\Omega}|$ rotiert. Die Spitze von \mathbf{r} benötigt dabei für eine Umdrehung die Zeit $2\pi/|\mathbf{\Omega}|$ und legt in dieser Zeit die Strecke $2\pi R = 2\pi|\mathbf{r}|\sin\theta$ zurück, d.h. sie wandert mit der Geschwindigkeit

$$\frac{2\pi|\mathbf{r}|\sin\theta}{2\pi/|\mathbf{\Omega}|} = |\mathbf{\Omega}||\mathbf{r}|\sin\theta \equiv |\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}|,$$

da das Kreuzprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ einen Vektor der Länge $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ liefert. Ein fester Punkt \mathbf{r} im rotierenden Koordinatensystem hat also die Geschwindigkeit $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$, wenn wir mit $\mathbf{\Omega}$ die Rotationsachse der Erde bezeichnen und $|\mathbf{\Omega}|$ die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist. Der Vektor $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ steht dann senkrecht auf $\mathbf{\Omega}$ und \mathbf{r} , also tangential zu der Kreisbahn von \mathbf{r} .

Seien $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ die Einheitsvektoren des bewegten Koordinatensystems. Insbesondere gilt für einen solchen Einheitsvektor \mathbf{e}_i mit $i = 1, \dots, 3$

$$\left(\frac{D\mathbf{e}_i}{Dt}\right)_I = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}_i. \quad (2.17)$$

Nach Definition läßt sich die substantielle Ableitung eines Vektors \mathbf{a} im rotierenden System

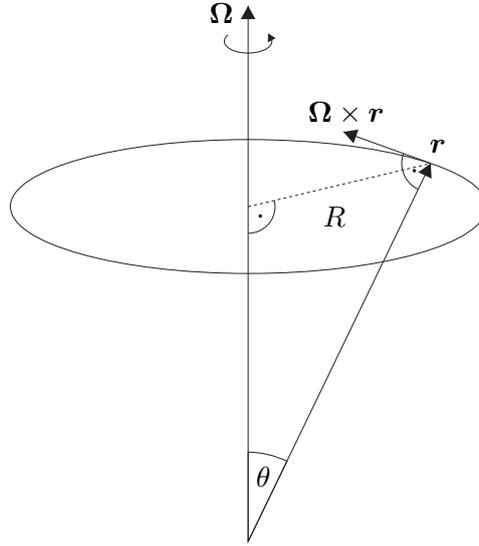


Abb. 2.2.: Ein Vektor \mathbf{r} rotiert mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ um die Achse $\boldsymbol{\Omega}$.

als

$$\left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_R = \frac{Da_1}{Dt} \mathbf{e}_1 + \frac{Da_2}{Dt} \mathbf{e}_2 + \frac{Da_3}{Dt} \mathbf{e}_3 \quad (2.18)$$

darstellen, da die Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ konstant in diesem System sind.

Satz 2.3

Sei \mathbf{a} ein Vektor im rotierenden Koordinatensystem und $\boldsymbol{\Omega}$ die Rotationsachse. Dann gilt

$$\left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_I = \left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}. \quad (2.19)$$

Beweis 2.3.

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_I &= \left[\frac{D}{Dt} (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \right]_I \\ &= \left[\frac{Da_1}{Dt} \mathbf{e}_1 + a_1 \frac{D\mathbf{e}_1}{Dt} + \frac{Da_2}{Dt} \mathbf{e}_2 + a_2 \frac{D\mathbf{e}_2}{Dt} + \frac{Da_3}{Dt} \mathbf{e}_3 + a_3 \frac{D\mathbf{e}_3}{Dt} \right]_I \\ &= \left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_R + a_1(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_1) + a_2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_2) + a_3(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_3) \quad \text{wegen (2.17) und (2.18)} \\ &= \left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}. \end{aligned}$$

□

Als nächstes betrachten wir Beschleunigungen und wenden daher das Ergebnis (2.19) doppelt an.

Satz 2.4

$$\left(\frac{D^2\mathbf{a}}{Dt^2}\right)_I = \left(\frac{D^2\mathbf{a}}{Dt^2}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}). \quad (2.20)$$

Beweis 2.4. Die doppelte Anwendung von Satz 2.3 ergibt

$$\begin{aligned} \left(\frac{D^2\mathbf{a}}{Dt^2}\right)_I &= \left(\frac{D}{Dt} \left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_I\right)_I \\ &= \left(\frac{D}{Dt} \left[\left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}\right]\right)_I \\ &= \left(\frac{D}{Dt} \left[\left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}\right]\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \left[\left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}\right] \\ &= \left(\frac{D^2\mathbf{a}}{Dt^2}\right)_R + \left(\frac{D}{Dt}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a})\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}) \\ &= \left(\frac{D^2\mathbf{a}}{Dt^2}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}). \end{aligned}$$

□

$\left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_R$ läßt sich als relative Geschwindigkeit \mathbf{u}_R und $\left(\frac{D\mathbf{a}}{Dt}\right)_I$ als absolute Geschwindigkeit \mathbf{u}_I auffassen, so daß wir Satz 2.4 auch als

$$\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt} = \frac{D\mathbf{u}_R}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

schreiben können, wobei \mathbf{r} der jeweilige Ortsvektor ist. Somit können wir nun die Impulsgleichung (2.10) unter Verwendung von (2.12) und Satz 2.4 in das rotierende Koordinatensystem transformieren. Dabei wird im folgenden immer der Index R weggelassen. Die Impulsgleichung lautet nun

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{\rho}\nabla p + g^*\mathbf{k} = -\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2.21)$$

2.3.1. Corioliskraft

Der neue Term $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ beschreibt die Corioliskraft, die nach dem französischen Physiker Gaspard Gustave de Coriolis (1792 - 1843) benannt ist. Da man Kräfte üblicherweise auf der rechten Seite von Gleichungen anordnet, verwenden wir hier ein negatives Vorzeichen.

Die Corioliskraft ist eine Scheinkraft, da sie in einem rotierenden System nur von einem mitbewegten Beobachter wahrgenommen wird. Kräftefreie Bewegungen sind geradlinig, doch in einem rotierenden Bezugssystem erscheinen solche Bewegungen aus Sicht eines mitbewegten Beobachters gekrümmt. Diese Krümmung wird der Corioliskraft zugeschrieben, die senkrecht zur Bewegungsrichtung und senkrecht zur Rotationsachse wirkt. Sie hat daher sowohl eine horizontale als auch eine vertikale Komponente, die am Nord- und Südpol verschwindet, und lenkt jede nichtparallele Bewegung zur Erdachse in der Atmosphäre ab.

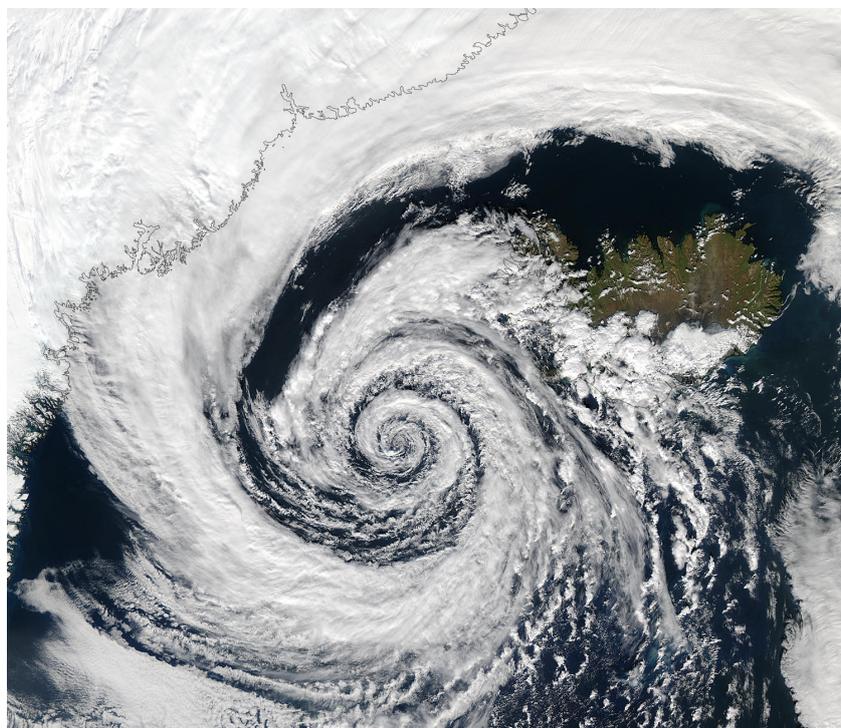


Abb. 2.3.: Auswirkung der Corioliskraft auf ein Tiefdruckgebiet über Island, 4. September 2003, Jacques Desclotres, MODIS Rapid Response Team, NASA/GSFC.

Die Erde dreht sich von West nach Ost, wodurch auf der Nordhalbkugel die Linksdrehung eine Rechtskrümmung hervorruft und auf der Südhalbkugel die Rechtsdrehung eine Linkskrümmung. Dies führt dazu, daß sich auf der Nordhalbkugel Hochdruckgebiete im Uhrzeigersinn und Tiefdruckgebiete gegen den Uhrzeigersinn drehen. Auf der Südhalbkugel ist dies entsprechend umgekehrt. Sehr schön ist ein solcher Effekt in der Abbildung 2.3 zu sehen.

2.3.2. Zentrifugalkraft

Der zweite neue Term $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$ in der Impulsgleichung (2.21) ist die Zentrifugalkraft, auch Fliehkraft genannt. Sie wirkt senkrecht zur Rotationsachse nach außen, wie man sich leicht anhand der Kreuzprodukte veranschaulicht, und variiert mit dem Breitengrad. Am Äquator ist sie am stärksten, während sie an den Polen verschwindet. Auf der Erde nehmen wir diese Kraft selbst nicht wahr, sondern nur die resultierende Schwerkraft, die sich aus Zentrifugal- und Gravitationskraft zusammensetzt, wie in der Abbildung 2.4 verdeutlicht wird.

Sei $-\boldsymbol{g}$ die resultierende Schwerkraft

$$-\boldsymbol{g} := -g^* \boldsymbol{k} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}).$$

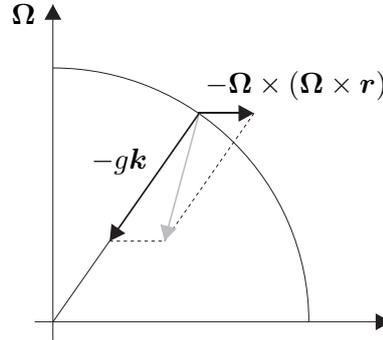


Abb. 2.4.: Die Schwerkraft als Resultierende von Gravitations- und Zentrifugalkraft.

$-g$ läßt sich auch als Potential schreiben, und zwar mit Hilfe von

$$\begin{aligned} -g^* \mathbf{k} &= -\nabla \phi_a \quad \text{mit} \quad \phi_a := -\frac{GM}{r} + \text{const}, \\ -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) &= -\nabla \phi_z \quad \text{mit} \quad \phi_z := -\frac{(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2}{2} + \text{const} = -\frac{\boldsymbol{\Omega}^2 R^2}{2} + \text{const} \end{aligned}$$

mit den Bezeichnungen des Kapitels 2.2 und der Abbildung 2.2. Es gilt dann

$$-\mathbf{g} = -\nabla \phi = -\nabla(\phi_a + \phi_z).$$

ϕ wird als Geopotential bezeichnet.

Betrachtet man jedoch die Größenordnung der beiden Kräfte, so stellt man fest, daß die Gravitationskraft von der Ordnung $O(10^1)$ ist, während die Zentrifugalkraft nur $O(10^{-2})$ beträgt. Wie in [23] motiviert, variiert die Schwerkraft aufgrund der Zentrifugalkraft und der Gestalt der Erde um $\pm 0,3\%$ auf der Erdoberfläche. In vielen Anwendungen wird die Zentrifugalkraft daher vernachlässigt, und man geht von einer stets zum Mittelpunkt einer kugelförmigen Erde gerichteten Schwerkraft und einer konstanten Erdbeschleunigung

$$g := g^*$$

aus. Auch wir werden im folgenden die Zentrifugalkraft vernachlässigen und erhalten so die Impulsgleichung in der Form

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g\mathbf{k} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2.22)$$

2.4. Temperaturgleichung

Wie bereits im Kapitel 2.1.3 erwähnt, läßt sich die Energievariable e durch die Temperatur T ersetzen. Die daraus entstehende Temperaturgleichung soll in diesem Kapitel hergeleitet

werden. Die Energiegleichung (2.11) lautete

$$e_t + \mathbf{u} \cdot \nabla e + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{j} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{u}) - g(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} Q,$$

und den Zusammenhang zwischen spezifischer Gesamtenergie e und Temperatur T hatten wir in der Gleichung (2.5) festgehalten

$$e = e_{th} + e_{kin} = c_v T + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2,$$

so daß wir nun (2.5) in die Gleichung (2.11) einsetzen können. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & c_v T_t + \frac{1}{2} (\mathbf{u}^2)_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \left(c_v T + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\mathbf{u}) + g(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{j} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} Q \\ \Leftrightarrow & c_v T_t + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_t) + c_v \mathbf{u} \cdot \nabla T + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{u}^2) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\mathbf{u}) + g(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) = \dots \\ \Leftrightarrow & c_v (T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\mathbf{u}) + g(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) = \dots \\ \Leftrightarrow & c_v (T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T) + \underbrace{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})}_{\substack{\text{Impulsgleichung} \\ (2.10) \text{ einsetzen}}} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\mathbf{u}) + g(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) = \dots \\ \Leftrightarrow & c_v (T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T) + \mathbf{u} \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - g\mathbf{k} \right) + \frac{1}{\rho} (p \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla p) + g(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) = \dots \\ \Leftrightarrow & c_v (T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T) + \frac{1}{\rho} p \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} (\nabla \cdot (\mathbf{j} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})) + \frac{1}{\rho} Q. \end{aligned}$$

Beachte, daß die Impulsgleichung ohne Rotation verwendet wurde, da die Energiegleichung invariant unter Koordinatentransformation ist.

Mit der abkürzenden Schreibweise des Frobenius-Produkts

$$\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} := \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (2.23)$$

erhalten wir so die Temperaturgleichung

$$c_v (T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T) + \frac{1}{\rho} p \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{j} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} Q. \quad (2.24)$$

2.5. Randbedingungen

Zur Schließung des Gleichungssystems sind noch Randbedingungen für die einzelnen Variablen nötig. Die Gleichungen gelten in einem Gebiet Ω , das in unserem Fall die Atmosphäre ist, so daß der Rand $\partial\Omega$ aus dem Erdboden und einer Begrenzung in Höhe der Stratosphäre besteht. An diesen Rändern müssen nun Bedingungen für die einzelnen Variablen festgesetzt werden.

Prinzipiell gibt es dabei zwei Typen, und zwar zum einen Dirichlet-Randbedingungen, die den Wert einer Variablen am Rand vorschreiben, und zum anderen Neumann-Randbedingungs-

en, bei denen der Gradient in Normalenrichtung am Rand bekannt ist.

\perp bezeichne die äußere Normalenrichtung am Rand und \parallel die tangentielle Richtung. Für die Dichte ρ werden wir sowohl am Boden als auch in der Stratosphäre Neumann-0-Randbedingungen vorschreiben

$$\nabla_{\perp}\rho = 0, \quad (2.25)$$

um keinen Massenfluß über den Rand zuzulassen, und für die Geschwindigkeit \mathbf{u} Slip-Bedingungen der Form

$$\mathbf{u}_{\perp} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla_{\perp}\mathbf{u}_{\parallel} = 0 \quad (2.26)$$

wählen. Eine solche am Rand entlang gleitende Geschwindigkeit ist insbesondere an der künstlichen Begrenzung in der Stratosphäre sinnvoll, während auf der Erde auch die Beschaffenheit des Erdbodens und seine Rauigkeit in die Randbedingung eingehen könnte.

Für den Druck p schreiben wir eine Neumann-Randbedingung vor, bei der der Druckgradient gleich der Gravitationskraft gesetzt wird, so daß sie sich am Rand ausgleichen

$$\nabla_{\perp}p = (-\rho g \mathbf{k})_{\perp}. \quad (2.27)$$

Für die Temperatur T kann man zumindest am oberen Rand in der Stratosphäre die Neumann-0-Randbedingung

$$\nabla_{\perp}T = 0 \quad (2.28)$$

wählen, während am Boden eine Dirichlet-Bedingung in Abhängigkeit der Sonneneinstrahlung sinnvoll wäre.

2.6. Zusammenfassung der Gleichungen

Wir wollen nun unser Gleichungssystem zusammenfassen. Ausgehend von den Erhaltungsprinzipien von Masse, Impuls und Energie und unter Berücksichtigung der Erdanziehung und Erdrotation sind wir bei den dreidimensionalen kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen mit Gravitation und Rotation angelangt

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g \mathbf{k} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ c_v(T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T) + \frac{1}{\rho} p \nabla \cdot \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{j} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} Q. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Das System besteht aus der Kontinuitätsgleichung (2.1), der Impulsgleichung (2.22) und der Temperaturgleichung (2.24), in die sich die Energiegleichung (2.11) überführen läßt. Zusammen mit der Zustandsgleichung (2.9)

$$p = \rho RT$$

erhalten wir so mit geeigneten Anfangs- und Randbedingungen ein geschlossenes System für die Variablen \mathbf{u} , ρ , p und T .

Fassen wir an dieser Stelle auch einmal die Annahmen zusammen, die wir auf dem bisherigen Weg getroffen haben. Zum einen sind wir von trockener Luft ausgegangen, was nur als

erste Näherung aufgefaßt werden kann, da es gerade bei meteorologischen Anwendungen entscheidend ist, auch die Feuchtigkeit zu modellieren. Dies stellt jedoch kein Problem dar, unser Gleichungssystem müßte lediglich um weitere Gleichungen ergänzt werden, in denen dann die Bestandteile trockene Luft, Wasserdampf, flüssiges Wasser und gefrorenes Wasser als Variablen auftreten, siehe etwa [11].

Des Weiteren sind wir davon ausgegangen, daß die Erde eine perfekte Kugel ist, deren Masse sich im Mittelpunkt konzentriert. Als Konsequenz daraus ist die Gravitationskraft stets zum Mittelpunkt gerichtet. Unter Vernachlässigung der Zentrifugalkraft und der Höhenabhängigkeit der Gravitationskraft, was jeweils nur eine Schwankung der resultierenden Schwerkraft um $\pm 0,3\%$ verursacht, kann auch die Erdbeschleunigung g als konstant angenommen werden. Außerdem sei die Rotationsachse der Erde fest und die Winkelgeschwindigkeit der Drehung konstant. All diese letzten Annahmen sind durchaus üblich in der Literatur und werden im folgenden als gegeben vorausgesetzt.

Hier noch einmal die Annahmen in der Übersicht:

- Trockene Luft.
- Erde perfekte Kugel mit Konzentration der Masse im Mittelpunkt.
- Vernachlässigung der Zentrifugalkraft.
- Schwerkraft zum Mittelpunkt gerichtet und Erdbeschleunigung g konstant.
- Rotationsachse fest mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

2.7. Dimensionsanalyse

Unsere Gleichungen sind dimensionsbehaftet, also abhängig von der Größenskala der einzelnen Variablen. Unser Ziel ist es nun, zu relativen Größen überzugehen und so dimensionslose Kennzahlen herauszuarbeiten, die charakteristisch für das beschriebene Problem sind. Die Größen der einzelnen Terme lassen sich dann direkt miteinander vergleichen, so daß wir ein Kriterium dafür haben, welche Terme entscheidend zu dem modellierten Phänomen beitragen.

2.7.1. Tangentiales Koordinatensystem

In der Atmosphäre wirken stark anisotrope Kräfte. Daher wollen wir zunächst die Impulsgleichung in ihren horizontalen und vertikalen Anteil aufspalten, um so die Größen der horizontal und vertikal wirkenden Kräfte getrennt voneinander beurteilen zu können. Dazu ist es nötig, die Impulsgleichung (2.22) einem erneuten Koordinatenwechsel zu unterziehen. Das neue Koordinatensystem sei in einem Punkt \mathbf{r} verankert, dessen \mathbf{x} -Achse nach Osten, \mathbf{y} -Achse nach Norden und \mathbf{z} -Achse radial nach außen weise. Die \mathbf{xy} -Ebene stellt somit die Tangentialebene im Punkt \mathbf{r} dar, so daß wir im folgenden auch von einem tangentialen Koordinatensystem sprechen werden.

Die Basisvektoren des kartesischen (rotierenden) Koordinatensystems seien

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei liegt der Ursprung im Zentrum der Erde, und \mathbf{e}_3 weist entlang der Rotationsachse, während \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 die Äquatorebene aufspannen. Im tangentialen Koordinatensystem seien $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ die Basisvektoren. Der dritte zeigt radial nach außen, er lautet also

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

$\tilde{\mathbf{e}}_1$ weist nach Osten und liegt somit parallel zur $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ -Ebene, also senkrecht zur Rotationsachse \mathbf{e}_3 . Außerdem stehen die neuen Basisvektoren orthogonal zueinander, so daß wir $\tilde{\mathbf{e}}_1$ aus dem Kreuzprodukt

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_3 \times \tilde{\mathbf{e}}_3$$

gewinnen können. Es ergibt sich der Vektor

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der nach Norden weisende Basisvektor $\tilde{\mathbf{e}}_2$ läßt sich dann über

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \tilde{\mathbf{e}}_3 \times \tilde{\mathbf{e}}_1$$

berechnen. Wir erhalten den normierten Vektor

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \begin{pmatrix} -r_1 r_3 \\ -r_2 r_3 \\ r_1^2 + r_2^2 \end{pmatrix}.$$

Zu beachten ist noch der Spezialfall, wenn \mathbf{r} selbst auf der Rotationsachse liegt. Dann können wir $\tilde{\mathbf{e}}_1$ und $\tilde{\mathbf{e}}_2$ nicht mehr als nach Osten bzw. Norden weisend festlegen, sondern müssen statt dessen beliebige orthogonale Vektoren wählen, die uns die Tangentialebene aufspannen.

Nun kennen wir also die alten und die neuen Basisvektoren und können den Koordinatenwechsel dadurch vollziehen, daß wir einen Vektor

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$$

im alten System auf die jeweiligen neuen Koordinatenrichtungen projizieren. Der Vektor lautet dann im tangentialen System

$$\mathbf{a} = \langle \mathbf{a}, \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle \tilde{\mathbf{e}}_1 + \langle \mathbf{a}, \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle \tilde{\mathbf{e}}_2 + \langle \mathbf{a}, \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle \tilde{\mathbf{e}}_3,$$

wobei das Skalarprodukt hier der Deutlichkeit halber mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet wird.

Da $\tilde{\mathbf{e}}_1$ und $\tilde{\mathbf{e}}_2$ die horizontalen Komponenten beschreiben, wollen wir sie wie folgt abkürzen

$$(\cdot)_{||} := \langle \cdot, \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle \tilde{\mathbf{e}}_1 + \langle \cdot, \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle \tilde{\mathbf{e}}_2 \quad (2.30)$$

und die vertikale Komponente mit

$$(\cdot)_\perp := \langle \cdot, \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle \tilde{\mathbf{e}}_3. \quad (2.31)$$

Auch der Nablaoperator läßt sich in beiden Koordinatensystemen ausdrücken

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tilde{\mathbf{e}}_3 =: \nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp}.$$

Wollen wir nun die Impulsgleichung (2.22) im tangentialen Koordinatensystem schreiben, muß jeder einzelne Term wie oben beschrieben auf die neuen Basisvektoren projiziert werden.

Die Gleichung lautete

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g\mathbf{k} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

Wenden wir (2.30) und (2.31) auf die Gleichung an und nutzen die Linearität der Projektion und die Orthogonalität der Basisvektoren, so ergibt sich für den horizontalen und vertikalen Anteil

$$\begin{array}{cccccc} (\mathbf{u}_{\parallel})_t & + & (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\parallel} & + & 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u})_{\parallel} & + & \frac{1}{\rho} \nabla_{\parallel} p & = & -\frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_{\parallel} \\ (\mathbf{u}_{\perp})_t & + & (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\perp} & + & 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u})_{\perp} & + & \frac{1}{\rho} \nabla_{\perp} p & + & g\mathbf{k} & = & -\frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_{\perp}. \end{array} \quad (2.32)$$

1 2 3 4 5 6

Für die spätere Entdimensionalisierung im Kapitel 2.7.2 ist es sinnvoll, alle Vektoren der Gleichung in horizontaler und vertikaler Form darzustellen. Konkret bedeutet dies, daß die Terme 2, 3 und 6 noch weiter umgeformt werden müssen. Beginnen wir mit Term 2.

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\parallel} &= ((\mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}) \cdot (\nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp})) \mathbf{u}_{\parallel} \\ &= (\mathbf{u}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} + \underbrace{\mathbf{u}_{\parallel} \cdot \nabla_{\perp}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\parallel}}_{=0} + \mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{u}_{\parallel} \\ &= (\mathbf{u}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{u}_{\parallel} \end{aligned} \quad (2.33)$$

und analog

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\perp} = (\mathbf{u}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{u}_{\perp}. \quad (2.34)$$

Für Term 3 ergibt sich unter Berücksichtigung der orthogonalen Zusammenhänge

$$\begin{aligned} 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u})_{\parallel} &= 2((\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp}) \times (\mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}))_{\parallel} \\ &= 2(\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\parallel} + \boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\perp} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\parallel} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\perp}}_{=0})_{\parallel} \\ &= 2(\underbrace{(\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\parallel})_{\parallel}}_{=0} + (\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\perp})_{\parallel} + (\boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\parallel})_{\parallel}) \\ &= 2(\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\perp} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\parallel}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u})_{\perp} &= 2((\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp}) \times (\mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}))_{\perp} \\
&= 2(\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\parallel} + \boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\perp} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\parallel} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\perp}}_{=0})_{\perp} \\
&= 2((\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\parallel})_{\perp} + \underbrace{(\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\perp})_{\perp}}_{=0} + \underbrace{(\boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\parallel})_{\perp}}_{=0}) \\
&= 2(\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\parallel}).
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Beachte außerdem, daß

$$\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} = \langle \boldsymbol{\Omega}, \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle \tilde{\mathbf{e}}_2 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Omega}_{\perp} = \langle \boldsymbol{\Omega}, \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle \tilde{\mathbf{e}}_3$$

gilt. Die Werte $2 \langle \boldsymbol{\Omega}, \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle$ und $2 \langle \boldsymbol{\Omega}, \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle$ werden auch Coriolis-Parameter genannt.

Bei Term 6 läßt sich zunächst feststellen, daß

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} &= -\mu \left(\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot ((\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{1}) \right) \\
&= -\mu \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

gilt, was man mit der Definition (2.3) und einem Übergang zur Komponentenschreibweise überprüfen kann. Aufgespalten in den horizontalen und vertikalen Anteil erhält man dann unter Ausnutzung der Orthogonalität und Beachtung von (2.37)

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_{\parallel} &= -\mu \left((\nabla \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\parallel} + \frac{1}{3} \nabla_{\parallel} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) \\
&= -\mu \left((\nabla_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{u}_{\parallel} + \frac{1}{3} \nabla_{\parallel} (\nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{u}_{\parallel} + \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}) \right)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

und

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_{\perp} &= -\mu \left((\nabla \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\perp} + \frac{1}{3} \nabla_{\perp} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) \\
&= -\mu \left((\nabla_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{u}_{\perp} + \frac{1}{3} \nabla_{\perp} (\nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{u}_{\parallel} + \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}) \right).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Damit können wir das Gleichungssystem (2.32) nun so

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_{\parallel})_t + (\mathbf{u}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{u}_{\parallel} + 2(\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\perp} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\parallel}) + \frac{1}{\rho} \nabla_{\parallel} p &= -\frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_{\parallel} \\
(\mathbf{u}_{\perp})_t + (\mathbf{u}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{u}_{\perp} + 2(\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\parallel}) + \frac{1}{\rho} \nabla_{\perp} p + g \mathbf{k} &= -\frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_{\perp}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

darstellen, wobei die Reibungsterme ausgeschrieben die Form (2.38) und (2.39) annehmen.

2.7.2. Entdimensionalisierung der Strömungsgleichungen

Wenden wir uns nun der Entdimensionalisierung zu. Man erhält eine dimensionslose Größe, indem man eine dimensionsbehaftete durch eine Referenzgröße dividiert. Dabei sollen die verwendeten Referenzgrößen im voraus bekannte Konstanten sein, die für das betrachtete Problem charakteristisch sind. Es seien

- $l_{\text{ref}}^{\parallel}$ die horizontale Referenzlänge, $[l_{\text{ref}}^{\parallel}] = \text{m}$,
- l_{ref}^{\perp} die vertikale Referenzlänge, $[l_{\text{ref}}^{\perp}] = \text{m}$,
- $u_{\text{ref}}^{\parallel}$ die horizontale Referenzgeschwindigkeit, $[u_{\text{ref}}^{\parallel}] = \text{m s}^{-1}$,
- u_{ref}^{\perp} die vertikale Referenzgeschwindigkeit, $[u_{\text{ref}}^{\perp}] = \text{m s}^{-1}$,
- ρ_{ref} die Referenzdichte, $[\rho_{\text{ref}}] = \text{kg m}^{-3}$,
- p_{ref} der Referenzdruck, $[p_{\text{ref}}] = \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2} = \text{Pa}$,
- $T_{\text{ref}} = p_{\text{ref}}/(R\rho_{\text{ref}})$ die Referenztemperatur, $[T_{\text{ref}}] = \text{K}$,
- t_{ref} die Referenzzeit, $[t_{\text{ref}}] = \text{s}$,
- μ die dynamische Viskosität, $[\mu] = \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$,
- λ die thermische Leitfähigkeit, $[\lambda] = \text{kg m s}^{-3}\text{K}^{-1}$,
- g die Erdbeschleunigung, $[g] = \text{m s}^{-2}$,
- c_p die spezifische Wärmekapazität von Luft bei konstantem Druck, $[c_p] = \text{m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1}$,
- c_v die spezifische Wärmekapazität von Luft bei konstantem Volumen, $[c_v] = \text{m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1}$,
- $R = c_p - c_v$ die Gaskonstante für trockene Luft, $[R] = \text{m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1}$,
- $\Omega_{\text{ref}} = |\Omega|$ die Winkelgeschwindigkeit, $[\Omega_{\text{ref}}] = \text{s}^{-1}$,
- Q_{ref} der Referenzwert des Energiequellterms, $[Q_{\text{ref}}] = \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-3}$.

Mit Hilfe dieser Werte führen wir nun die dimensionslosen Größen

$$\begin{aligned} \tilde{x}^* &:= \frac{\tilde{x}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}}, & \tilde{y}^* &:= \frac{\tilde{y}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}}, & \tilde{z}^* &:= \frac{\tilde{z}}{l_{\text{ref}}^{\perp}}, & t^* &:= \frac{t}{t_{\text{ref}}}, \\ \mathbf{u}_{\parallel}^* &:= \frac{\mathbf{u}_{\parallel}}{u_{\text{ref}}^{\parallel}}, & \mathbf{u}_{\perp}^* &:= \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{u_{\text{ref}}^{\perp}}, \\ \rho^* &:= \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}}, & p^* &:= \frac{p}{p_{\text{ref}}}, & T^* &:= \frac{T}{T_{\text{ref}}} \end{aligned}$$

ein. Auch die Differentialoperatoren müssen in dimensionsloser Form geschrieben werden, also

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial t^*}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t^*} \\ &= \frac{\partial(t/t_{\text{ref}})}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t^*} \\ &= \frac{1}{t_{\text{ref}}} \frac{\partial}{\partial t^*}\end{aligned}\tag{2.41}$$

und analog

$$\begin{aligned}\nabla &= \nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tilde{\mathbf{e}}_3 \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^*}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^*} \tilde{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial \tilde{y}^*}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^*} \tilde{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial \tilde{z}^*}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}^*} \tilde{\mathbf{e}}_3 \\ &= \frac{\partial(\tilde{x}/l_{\text{ref}}^{\parallel})}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^*} \tilde{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial(\tilde{y}/l_{\text{ref}}^{\parallel})}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^*} \tilde{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial(\tilde{z}/l_{\text{ref}}^{\perp})}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}^*} \tilde{\mathbf{e}}_3 \\ &= \frac{1}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} \nabla_{\parallel}^* + \frac{1}{l_{\text{ref}}^{\perp}} \nabla_{\perp}^*.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Wir fordern außerdem, daß

$$\frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{u_{\text{ref}}^{\parallel}} = \frac{l_{\text{ref}}^{\perp}}{u_{\text{ref}}^{\perp}}\tag{2.43}$$

gilt. Dies ist insbesondere für die Behandlung der Kontinuitäts- und Temperaturgleichung sinnvoll, da wir diese Gleichungen nicht in ihren horizontalen und vertikalen Anteil aufgespalten haben.

Wir definieren nun zunächst einige dimensionslose Kennzahlen, die bei der Entdimensionalisierung unserer Gleichungen entstehen werden. Dabei wird hier auf den zusätzlichen horizontalen bzw. vertikalen Index der Referenzgrößen verzichtet, der aus dem Kontext zu schließen ist.

Strouhal-Zahl

$$\text{Sr} := \frac{l_{\text{ref}}/u_{\text{ref}}}{t_{\text{ref}}} \hat{=} \frac{\text{Advektionszeit}}{\text{Referenzzeit}}.$$

Mach-Zahl

$$\text{M} := \frac{u_{\text{ref}}}{\sqrt{p_{\text{ref}}/\rho_{\text{ref}}}} \hat{=} \frac{\text{Strömungsgeschwindigkeit}}{\text{Schallgeschwindigkeit}}.$$

Rossby-Zahl

$$\text{Ro} := \frac{u_{\text{ref}}}{2\Omega_{\text{ref}} l_{\text{ref}}} = \frac{1}{2\Omega_{\text{ref}}} \left(\frac{l_{\text{ref}}}{u_{\text{ref}}} \right)^{-1} \hat{=} \frac{\text{Erdumdrehungszeit}}{\text{Advektionszeit}}.$$

Froude-Zahl

$$\text{Fr} := \frac{u_{\text{ref}}}{\sqrt{gl_{\text{ref}}}} \hat{=} \frac{\text{Strömungsgeschwindigkeit}}{\text{barotrope Schwerwellengeschwindigkeit}}.$$

Reynolds-Zahl

$$\text{Re} := \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}} l_{\text{ref}}}{\mu} \hat{=} \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}}.$$

Prandtl-Zahl

$$\text{Pr} := \frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{\gamma R \mu}{(\gamma - 1) \lambda} \hat{=} \frac{\text{kinematische Zähigkeit}}{\text{Wärmeleitfähigkeit}}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Damköhler-Zahl

$$\text{Da} := \frac{l_{\text{ref}} Q_{\text{ref}}}{u_{\text{ref}} \rho_{\text{ref}}}.$$

Um unser Gleichungssystem zu entdimensionalisieren, müssen wir nun jede dimensionsbehaftete Größe durch eine Referenzgröße multipliziert mit der entsprechenden dimensionslosen Größe ersetzen. Ebenso sind die Differentialoperatoren mittels (2.41) und (2.42) umzuformen.

Beginnen wir mit der linken Seite der Kontinuitätsgleichung (2.1)

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= \rho_t + (\nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp}) \cdot (\rho(\mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp})) \\ &= \rho_t + \nabla_{\parallel} \cdot (\rho \mathbf{u}_{\parallel}) + \nabla_{\perp} \cdot (\rho \mathbf{u}_{\perp}) \\ &= \frac{1}{t_{\text{ref}}} \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho_{\text{ref}} \rho^*) + \frac{1}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} \nabla_{\parallel}^* \cdot (\rho_{\text{ref}} \rho^* u_{\text{ref}}^{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel}^*) + \frac{1}{l_{\text{ref}}^{\perp}} \nabla_{\perp}^* \cdot (\rho_{\text{ref}} \rho^* u_{\text{ref}}^{\perp} \mathbf{u}_{\perp}^*) \\ &= \frac{\rho_{\text{ref}}}{t_{\text{ref}}} \rho_{t^*}^* + \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} \nabla_{\parallel}^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}_{\parallel}^*) + \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\perp}}{l_{\text{ref}}^{\perp}} \nabla_{\perp}^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}_{\perp}^*) \\ (2.43) \quad &= \frac{\rho_{\text{ref}}}{t_{\text{ref}}} \rho_{t^*}^* + \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} (\nabla_{\parallel}^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}_{\parallel}^*) + \nabla_{\perp}^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}_{\perp}^*)) \\ &= \frac{\rho_{\text{ref}}}{t_{\text{ref}}} \rho_{t^*}^* + \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} (\nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}^*)). \end{aligned}$$

Multiplizieren wir nun die gesamte Gleichung mit $\frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel}}$, so erhalten wir

$$\frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{t_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel}} \rho_{t^*}^* + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}^*) = 0$$

und somit, wenn wir die Kennzeichnung der dimensionslosen Größen durch den Stern weglassen, die entdimensionalisierte Kontinuitätsgleichung

$$\text{Sr} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.44)$$

Als nächstes betrachten wir die horizontale und vertikale Impulsgleichung (2.40). Die einzelnen Terme seien dabei wie in (2.32) numeriert und werden der Übersicht halber nun einzeln entdimensionalisiert.

Zunächst betrachten wir den Term 2

$$(\mathbf{u}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{u}_{\parallel} = \left(\frac{u_{\text{ref}}^{\parallel}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} \mathbf{u}_{\parallel}^* \cdot \nabla_{\parallel}^* + \frac{u_{\text{ref}}^{\perp}}{l_{\text{ref}}^{\perp}} \mathbf{u}_{\perp}^* \cdot \nabla_{\perp}^* \right) u_{\text{ref}}^{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel}^*$$

$$(2.43) \stackrel{=}{=} \frac{(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} (\mathbf{u}_{\parallel}^* \cdot \nabla_{\parallel}^* + \mathbf{u}_{\perp}^* \cdot \nabla_{\perp}^*) \mathbf{u}_{\parallel}^*$$

und

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{u}_{\perp} &= \left(\frac{u_{\text{ref}}^{\parallel}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} \mathbf{u}_{\parallel}^* \cdot \nabla_{\parallel}^* + \frac{u_{\text{ref}}^{\perp}}{l_{\text{ref}}^{\perp}} \mathbf{u}_{\perp}^* \cdot \nabla_{\perp}^* \right) u_{\text{ref}}^{\perp} \mathbf{u}_{\perp}^* \\ &\stackrel{(2.43)}{=} \frac{(u_{\text{ref}}^{\perp})^2}{l_{\text{ref}}^{\perp}} (\mathbf{u}_{\parallel}^* \cdot \nabla_{\parallel}^* + \mathbf{u}_{\perp}^* \cdot \nabla_{\perp}^*) \mathbf{u}_{\perp}^* \end{aligned}$$

und multiplizieren im folgenden jeden Term der horizontalen Gleichung mit $l_{\text{ref}}^{\parallel}/(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2$ und jeden Term der vertikalen Gleichung mit $l_{\text{ref}}^{\perp}/(u_{\text{ref}}^{\perp})^2$, so daß die Kennzahl vor dem nichtlinearen Term 2 jeweils 1 ist.

Aus Term 1 wird dann

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2} (\mathbf{u}_{\parallel})_t &= \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{u_{\text{ref}}^{\parallel} t_{\text{ref}}} (\mathbf{u}_{\parallel}^*)_{t^*} \\ &= \text{Sr}(\mathbf{u}_{\parallel}^*)_{t^*} \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\perp}}{(u_{\text{ref}}^{\perp})^2} (\mathbf{u}_{\perp})_t &= \frac{l_{\text{ref}}^{\perp}}{u_{\text{ref}}^{\perp} t_{\text{ref}}} (\mathbf{u}_{\perp}^*)_{t^*} \\ &= \text{Sr}(\mathbf{u}_{\perp}^*)_{t^*}. \end{aligned}$$

Wegen der Forderung (2.43) ist die Strouhal-Zahl in horizontaler und vertikaler Richtung gleich. Term 3 führt zu

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2} 2(\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\perp} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\parallel}) &= \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2} 2(\Omega_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\perp} (\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}^* \times \mathbf{u}_{\perp}^*) + \Omega_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel} (\boldsymbol{\Omega}_{\perp}^* \times \mathbf{u}_{\parallel}^*)) \\ &\stackrel{(2.43)}{=} \frac{2\Omega_{\text{ref}} l_{\text{ref}}^{\perp}}{u_{\text{ref}}^{\parallel}} (\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}^* \times \mathbf{u}_{\perp}^*) + \frac{2\Omega_{\text{ref}} l_{\text{ref}}^{\parallel}}{u_{\text{ref}}^{\perp}} (\boldsymbol{\Omega}_{\perp}^* \times \mathbf{u}_{\parallel}^*) \\ &= \frac{1}{\text{Ro}_1} (\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}^* \times \mathbf{u}_{\perp}^*) + \frac{1}{\text{Ro}_2} (\boldsymbol{\Omega}_{\perp}^* \times \mathbf{u}_{\parallel}^*) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\perp}}{(u_{\text{ref}}^{\perp})^2} 2(\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\parallel}) &= \frac{2\Omega_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel} l_{\text{ref}}^{\perp}}{(u_{\text{ref}}^{\perp})^2} (\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}^* \times \mathbf{u}_{\parallel}^*) \\ &\stackrel{(2.43)}{=} \frac{2\Omega_{\text{ref}} l_{\text{ref}}^{\parallel}}{u_{\text{ref}}^{\perp}} (\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}^* \times \mathbf{u}_{\parallel}^*) \\ &= \frac{1}{\text{Ro}_3} (\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}^* \times \mathbf{u}_{\parallel}^*). \end{aligned}$$

Dabei wählen wir sowohl für $\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}$ als auch für $\boldsymbol{\Omega}_{\perp}$ die Referenzgröße $\Omega_{\text{ref}} = |\boldsymbol{\Omega}|$, d.h. es gilt

$$\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}^* = \frac{\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}}{\Omega_{\text{ref}}} = \langle \boldsymbol{\Omega}^*, \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle \tilde{\mathbf{e}}_2 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Omega}_{\perp}^* = \frac{\boldsymbol{\Omega}_{\perp}}{\Omega_{\text{ref}}} = \langle \boldsymbol{\Omega}^*, \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle \tilde{\mathbf{e}}_3$$

mit $\boldsymbol{\Omega}^* := \boldsymbol{\Omega}/\Omega_{\text{ref}} = (0, 0, 1)^T$.

Aus Term 4 wird

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2} \frac{1}{\rho} \nabla_{\parallel} p &= \frac{p_{\text{ref}}}{(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2 \rho_{\text{ref}}} \frac{1}{\rho^*} \nabla_{\parallel}^* p^* \\ &= \frac{1}{\text{M}_{\parallel}^2} \frac{1}{\rho^*} \nabla_{\parallel}^* p^* \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\perp}}{(u_{\text{ref}}^{\perp})^2} \frac{1}{\rho} \nabla_{\perp} p &= \frac{p_{\text{ref}}}{(u_{\text{ref}}^{\perp})^2 \rho_{\text{ref}}} \frac{1}{\rho^*} \nabla_{\perp}^* p^* \\ &= \frac{1}{\text{M}_{\perp}^2} \frac{1}{\rho^*} \nabla_{\perp}^* p^*, \end{aligned}$$

aus Term 5

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\perp}}{(u_{\text{ref}}^{\perp})^2} g \mathbf{k} &= \frac{l_{\text{ref}}^{\perp} g}{(u_{\text{ref}}^{\perp})^2} \mathbf{k} \\ &= \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{k} \end{aligned}$$

und aus Term 6 schließlich

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2} \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_{\parallel} &= \frac{\mu}{\rho_{\text{ref}} l_{\text{ref}}^{\parallel} u_{\text{ref}}^{\parallel}} \frac{1}{\rho^*} \underbrace{\left(-(\nabla_{\parallel}^* \cdot \nabla_{\parallel}^*) \mathbf{u}_{\parallel}^* - \frac{1}{3} \nabla_{\parallel}^* (\nabla_{\parallel}^* \cdot \mathbf{u}_{\parallel}^* + \nabla_{\perp}^* \cdot \mathbf{u}_{\perp}^*) \right)}_{=: \mathbf{r}_1^*} + \\ &\quad \frac{\mu}{\rho_{\text{ref}} l_{\text{ref}}^{\perp} u_{\text{ref}}^{\perp}} \frac{1}{\rho^*} \underbrace{\left(-(\nabla_{\perp}^* \cdot \nabla_{\perp}^*) \mathbf{u}_{\parallel}^* \right)}_{=: \mathbf{r}_2^*} \\ &= \frac{1}{\text{Re}_{\parallel}} \frac{1}{\rho^*} \mathbf{r}_1^* + \frac{1}{\text{Re}_{\perp}} \frac{1}{\rho^*} \mathbf{r}_2^* \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\perp}}{(u_{\text{ref}}^{\perp})^2} \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_{\perp} &= \frac{\mu}{\rho_{\text{ref}} l_{\text{ref}}^{\perp} u_{\text{ref}}^{\perp}} \frac{1}{\rho^*} \underbrace{\left(-(\nabla_{\perp}^* \cdot \nabla_{\perp}^*) \mathbf{u}_{\perp}^* - \frac{1}{3} \nabla_{\perp}^* (\nabla_{\parallel}^* \cdot \mathbf{u}_{\parallel}^* + \nabla_{\perp}^* \cdot \mathbf{u}_{\perp}^*) \right)}_{=: \mathbf{r}_3^*} + \\ &\quad \frac{\mu}{\rho_{\text{ref}} l_{\text{ref}}^{\parallel} u_{\text{ref}}^{\parallel}} \frac{1}{\rho^*} \underbrace{\left(-(\nabla_{\parallel}^* \cdot \nabla_{\parallel}^*) \mathbf{u}_{\perp}^* \right)}_{=: \mathbf{r}_4^*} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\text{Re}_\perp} \frac{1}{\rho^*} \mathbf{r}_3^* + \frac{1}{\text{Re}_\parallel} \frac{1}{\rho^*} \mathbf{r}_4^*.$$

Beachte, daß $\boldsymbol{\tau}$ eine Matrix ist, während \mathbf{r}_1^* bis \mathbf{r}_4^* Vektoren bezeichnen.

Insgesamt erhalten wir so die entdimensionalisierten Impulsgleichungen

$$\begin{aligned} \text{Sr}(\mathbf{u}_\parallel)_t + (\mathbf{u}_\parallel \cdot \nabla_\parallel + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) \mathbf{u}_\parallel + \frac{1}{\text{Ro}_1} (\boldsymbol{\Omega}_\parallel \times \mathbf{u}_\perp) + \frac{1}{\text{Ro}_2} (\boldsymbol{\Omega}_\perp \times \mathbf{u}_\parallel) + \frac{1}{\text{M}_\parallel^2} \frac{1}{\rho} \nabla_\parallel p \\ = -\frac{1}{\text{Re}_\parallel} \frac{1}{\rho} \mathbf{r}_1 - \frac{1}{\text{Re}_\perp} \frac{1}{\rho} \mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \text{Sr}(\mathbf{u}_\perp)_t + (\mathbf{u}_\parallel \cdot \nabla_\parallel + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) \mathbf{u}_\perp + \frac{1}{\text{Ro}_3} (\boldsymbol{\Omega}_\parallel \times \mathbf{u}_\parallel) + \frac{1}{\text{M}_\perp^2} \frac{1}{\rho} \nabla_\perp p + \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{k} \\ = -\frac{1}{\text{Re}_\perp} \frac{1}{\rho} \mathbf{r}_3 - \frac{1}{\text{Re}_\parallel} \frac{1}{\rho} \mathbf{r}_4. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Auch hier haben wir den Stern als Kennzeichnung der dimensionslosen Größen weggelassen.

Bei der Temperaturgleichung (2.24) gehen wir analog vor. Die Terme seien dabei wie folgt nummeriert

$$\begin{array}{cccccc} c_v T_t + c_v \mathbf{u} \cdot \nabla T + \frac{1}{\rho} p \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} Q. \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \end{array}$$

Wir beginnen ebenfalls mit dem nichtlinearen Term 2

$$\begin{aligned} c_v \mathbf{u} \cdot \nabla T &= c_v (\mathbf{u}_\parallel + \mathbf{u}_\perp) \cdot (\nabla_\parallel + \nabla_\perp) T \\ &= c_v (\mathbf{u}_\parallel \cdot \nabla_\parallel T + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp T) \\ &= c_v \left(\frac{u_\parallel^{\parallel} T_{\text{ref}}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} \mathbf{u}_\parallel^* \cdot \nabla_\parallel^* T^* + \frac{u_\perp^{\perp} T_{\text{ref}}}{l_{\text{ref}}^{\perp}} \mathbf{u}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* T^* \right) \\ &\stackrel{(2.43)}{=} \frac{c_v u_\parallel^{\parallel} T_{\text{ref}}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} \mathbf{u}_\parallel^* \cdot \nabla_\parallel^* T^* \end{aligned}$$

und multiplizieren im folgenden jeden Term der Gleichung mit $l_{\text{ref}}^{\parallel} / (c_v u_\parallel^{\parallel} T_{\text{ref}})$. Dadurch steht vor dem nichtlinearen Term die Kennzahl 1.

Aus Term 1 wird dann

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{c_v u_\parallel^{\parallel} T_{\text{ref}}} c_v T_t &= \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{u_\parallel^{\parallel} t_{\text{ref}}} T_t^* \\ &= \text{Sr} T_t^*, \end{aligned}$$

aus Term 3

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{c_v u_\parallel^{\parallel} T_{\text{ref}}} \frac{1}{\rho} p \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{c_v u_\parallel^{\parallel} \left(\frac{p_{\text{ref}}}{R \rho_{\text{ref}}} \right) \rho} \frac{1}{\rho} p (\nabla_\parallel + \nabla_\perp) \cdot (\mathbf{u}_\parallel + \mathbf{u}_\perp) \\ &= \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel} R}{c_v u_\parallel^{\parallel} \rho^*} \frac{1}{\rho^*} p^* \left(\frac{u_\parallel^{\parallel}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} \nabla_\parallel^* \cdot \mathbf{u}_\parallel^* + \frac{u_\perp^{\perp}}{l_{\text{ref}}^{\perp}} \nabla_\perp^* \cdot \mathbf{u}_\perp^* \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2.43)}{=} \frac{R}{c_v} \frac{1}{\rho^*} p^* \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* \\
&= (\gamma - 1) \frac{1}{\rho^*} p^* \nabla^* \cdot \mathbf{u}^*
\end{aligned}$$

und aus Term 4

$$\begin{aligned}
\frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{c_v u_{\text{ref}}^{\parallel} T_{\text{ref}}} \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{j} &= \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{c_v u_{\text{ref}}^{\parallel} T_{\text{ref}}} \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (-\lambda \nabla T) \\
&= \frac{\lambda l_{\text{ref}}^{\parallel}}{c_v u_{\text{ref}}^{\parallel} T_{\text{ref}}} \frac{1}{\rho} (\nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp}) \cdot (-(\nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp}) T) \\
&= \frac{\lambda l_{\text{ref}}^{\parallel}}{c_v u_{\text{ref}}^{\parallel} T_{\text{ref}}} \frac{1}{\rho} (\nabla_{\parallel} \cdot (-\nabla_{\parallel} T) + \nabla_{\perp} \cdot (-\nabla_{\perp} T)) \\
&\stackrel{(2.43)}{=} \frac{c_p}{c_v} \frac{\lambda}{c_p \mu} \frac{1}{\rho^*} \left(\frac{\mu}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel} l_{\text{ref}}^{\parallel}} \nabla_{\parallel}^* \cdot (-\nabla_{\parallel}^* T^*) + \frac{\mu}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\perp} l_{\text{ref}}^{\perp}} \nabla_{\perp}^* \cdot (-\nabla_{\perp}^* T^*) \right) \\
&= \gamma \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho^*} \left(\frac{1}{\text{Re}_{\parallel}} \nabla_{\parallel}^* \cdot \mathbf{j}_{\parallel}^* + \frac{1}{\text{Re}_{\perp}} \nabla_{\perp}^* \cdot \mathbf{j}_{\perp}^* \right)
\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{j}_{\parallel}^* := -\nabla_{\parallel}^* T^* \quad \text{und} \quad \mathbf{j}_{\perp}^* := -\nabla_{\perp}^* T^*. \quad (2.47)$$

Für Term 5 spalten wir zunächst $\boldsymbol{\tau}$ und $\nabla \mathbf{u}$ in

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= -\mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} ((\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{1}) \right] \\
&= -\mu \left[\nabla_{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel} + \nabla_{\parallel} \mathbf{u}_{\perp} + \nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\parallel} + \nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\perp} + (\nabla_{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel} + \nabla_{\parallel} \mathbf{u}_{\perp} + \nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\parallel} + \nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\perp})^T - \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{3} ((\nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{u}_{\parallel} + \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}) \mathbf{1}) \right] \\
&= \frac{\mu u_{\text{ref}}^{\parallel}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} \underbrace{\left[- \left(\nabla_{\parallel}^* \mathbf{u}_{\parallel}^* + \nabla_{\perp}^* \mathbf{u}_{\perp}^* + (\nabla_{\parallel}^* \mathbf{u}_{\parallel}^* + \nabla_{\perp}^* \mathbf{u}_{\perp}^*)^T - \frac{2}{3} ((\nabla_{\parallel}^* \cdot \mathbf{u}_{\parallel}^* + \nabla_{\perp}^* \cdot \mathbf{u}_{\perp}^*) \mathbf{1}) \right) \right]}_{=:\boldsymbol{\tau}_1^*} + \\
&\quad \frac{\mu u_{\text{ref}}^{\perp}}{l_{\text{ref}}^{\perp}} \underbrace{\left[- (\nabla_{\parallel}^* \mathbf{u}_{\perp}^* + (\nabla_{\parallel}^* \mathbf{u}_{\perp}^*)^T) \right]}_{=:\boldsymbol{\tau}_2^*} + \frac{\mu u_{\text{ref}}^{\parallel}}{l_{\text{ref}}^{\perp}} \underbrace{\left[- (\nabla_{\perp}^* \mathbf{u}_{\parallel}^* + (\nabla_{\perp}^* \mathbf{u}_{\parallel}^*)^T) \right]}_{=:\boldsymbol{\tau}_3^*}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{u} &= \nabla_{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel} + \nabla_{\parallel} \mathbf{u}_{\perp} + \nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\parallel} + \nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\perp} \\
&= \frac{u_{\text{ref}}^{\parallel}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} \underbrace{(\nabla_{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel} + \nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\perp})}_{=:\boldsymbol{\sigma}_1^*} + \frac{u_{\text{ref}}^{\perp}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}} \underbrace{\nabla_{\parallel} \mathbf{u}_{\perp}}_{=:\boldsymbol{\sigma}_2^*} + \frac{u_{\text{ref}}^{\parallel}}{l_{\text{ref}}^{\perp}} \underbrace{\nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\parallel}}_{=:\boldsymbol{\sigma}_3^*}
\end{aligned}$$

auf. Mit der Definition (2.23) und der Darstellung

$$\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} = \sum_{i,j} \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \sum_{i,j} (\boldsymbol{\tau})_{ij} (\nabla \mathbf{u})_{ij} \quad (2.48)$$

sieht man, daß für das Frobenius-Produkt das Distributivgesetz gilt und wir somit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} &= \mu((\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3) : (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_3)) \\ &= \frac{\mu(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{(l_{\text{ref}}^{\parallel})^2} (\boldsymbol{\tau}_1^* : \boldsymbol{\sigma}_1^*) + \frac{\mu u_{\text{ref}}^{\parallel} u_{\text{ref}}^{\perp}}{(l_{\text{ref}}^{\parallel})^2} (\boldsymbol{\tau}_1^* : \boldsymbol{\sigma}_2^*) + \frac{\mu(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{l_{\text{ref}}^{\parallel} l_{\text{ref}}^{\perp}} (\boldsymbol{\tau}_1^* : \boldsymbol{\sigma}_3^*) + \\ &\quad \frac{\mu u_{\text{ref}}^{\perp} u_{\text{ref}}^{\parallel}}{(l_{\text{ref}}^{\parallel})^2} (\boldsymbol{\tau}_2^* : \boldsymbol{\sigma}_1^*) + \frac{\mu(u_{\text{ref}}^{\perp})^2}{(l_{\text{ref}}^{\parallel})^2} (\boldsymbol{\tau}_2^* : \boldsymbol{\sigma}_2^*) + \frac{\mu u_{\text{ref}}^{\perp} u_{\text{ref}}^{\parallel}}{l_{\text{ref}}^{\parallel} l_{\text{ref}}^{\perp}} (\boldsymbol{\tau}_2^* : \boldsymbol{\sigma}_3^*) + \\ &\quad \frac{\mu(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{l_{\text{ref}}^{\perp} l_{\text{ref}}^{\parallel}} (\boldsymbol{\tau}_3^* : \boldsymbol{\sigma}_1^*) + \frac{\mu u_{\text{ref}}^{\parallel} u_{\text{ref}}^{\perp}}{l_{\text{ref}}^{\parallel} l_{\text{ref}}^{\perp}} (\boldsymbol{\tau}_3^* : \boldsymbol{\sigma}_2^*) + \frac{\mu(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{(l_{\text{ref}}^{\perp})^2} (\boldsymbol{\tau}_3^* : \boldsymbol{\sigma}_3^*) \\ &= \frac{\mu(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{(l_{\text{ref}}^{\parallel})^2} \underbrace{(\boldsymbol{\tau}_1^* : \boldsymbol{\sigma}_1^* + \boldsymbol{\tau}_2^* : \boldsymbol{\sigma}_3^* + \boldsymbol{\tau}_3^* : \boldsymbol{\sigma}_2^*)}_{=: s_1^*} + \frac{\mu u_{\text{ref}}^{\parallel} u_{\text{ref}}^{\perp}}{(l_{\text{ref}}^{\parallel})^2} \underbrace{(\boldsymbol{\tau}_1^* : \boldsymbol{\sigma}_2^* + \boldsymbol{\tau}_2^* : \boldsymbol{\sigma}_1^*)}_{=: s_2^*} + \\ &\quad \frac{\mu(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{l_{\text{ref}}^{\parallel} l_{\text{ref}}^{\perp}} \underbrace{(\boldsymbol{\tau}_1^* : \boldsymbol{\sigma}_3^* + \boldsymbol{\tau}_3^* : \boldsymbol{\sigma}_1^*)}_{=: s_3^*} + \frac{\mu(u_{\text{ref}}^{\perp})^2}{(l_{\text{ref}}^{\parallel})^2} \underbrace{(\boldsymbol{\tau}_2^* : \boldsymbol{\sigma}_2^*)}_{=: s_4^*} + \frac{\mu(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{(l_{\text{ref}}^{\perp})^2} \underbrace{(\boldsymbol{\tau}_3^* : \boldsymbol{\sigma}_3^*)}_{=: s_5^*} \end{aligned}$$

schreiben können. Mit dem entsprechenden Vorfaktor der Temperaturgleichung erhalten wir also für Term 5

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{c_v u_{\text{ref}}^{\parallel} T_{\text{ref}} \rho} \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) &= (\gamma - 1) \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{u_{\text{ref}} p_{\text{ref}} \rho^*} \frac{1}{\rho^*} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) \\ &= (\gamma - 1) \frac{1}{\rho^*} \left(\frac{\mu}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel} l_{\text{ref}}^{\parallel}} \frac{\rho_{\text{ref}} (u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{p_{\text{ref}}} s_1^* + \frac{\mu}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel} l_{\text{ref}}^{\parallel}} \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel} u_{\text{ref}}^{\perp}}{p_{\text{ref}}} s_2^* + \right. \\ &\quad \left. \frac{\mu}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\perp} l_{\text{ref}}^{\perp}} \frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel} u_{\text{ref}}^{\perp}}{p_{\text{ref}}} s_3^* + \frac{\mu}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel} l_{\text{ref}}^{\parallel}} \frac{\rho_{\text{ref}} (u_{\text{ref}}^{\perp})^2}{p_{\text{ref}}} s_4^* + \frac{\mu}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\perp} l_{\text{ref}}^{\perp}} \frac{\rho_{\text{ref}} (u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{p_{\text{ref}}} s_5^* \right) \\ &= (\gamma - 1) \frac{1}{\rho^*} \left(\frac{M_{\parallel}^2}{\text{Re}_{\parallel}} s_1^* + \frac{M_{\parallel\perp}^2}{\text{Re}_{\parallel}} s_2^* + \frac{M_{\perp\parallel}^2}{\text{Re}_{\perp}} s_3^* + \frac{M_{\perp}^2}{\text{Re}_{\perp}} s_4^* + \frac{M_{\parallel}^2}{\text{Re}_{\perp}} s_5^* \right). \end{aligned}$$

Term 6 läßt sich dann schließlich zu

$$\begin{aligned} \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{c_v u_{\text{ref}}^{\parallel} T_{\text{ref}} \rho} \frac{1}{\rho} Q &= \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel} Q_{\text{ref}}}{c_v u_{\text{ref}}^{\parallel} \rho_{\text{ref}} T_{\text{ref}} \rho^*} \frac{1}{\rho^*} Q^* \\ &= \frac{R}{c_v} \frac{l_{\text{ref}}^{\parallel} Q_{\text{ref}}}{u_{\text{ref}} p_{\text{ref}} \rho^*} \frac{1}{\rho^*} Q^* \\ &= (\gamma - 1) \text{Da} \frac{1}{\rho^*} Q^* \end{aligned}$$

umformen.

Die entdimensionalisierte Temperaturgleichung lautet nun

$$\text{Sr}T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) \frac{1}{\rho} p \nabla \cdot \mathbf{u} = -(\gamma - 1) \frac{1}{\rho} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{1}{\text{Re}_{\parallel}} \nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{j}_{\parallel} + \frac{1}{\text{Re}_{\perp}} \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{j}_{\perp} \right) + \frac{M_{\parallel}^2}{\text{Re}_{\parallel}} s_1 + \frac{M_{\parallel\perp}^2}{\text{Re}_{\parallel}} s_2 + \frac{M_{\parallel\perp}^2}{\text{Re}_{\perp}} s_3 + \frac{M_{\perp}^2}{\text{Re}_{\parallel}} s_4 + \frac{M_{\parallel}^2}{\text{Re}_{\perp}} s_5 - \text{Da}Q \right], \quad (2.49)$$

wobei auch hier die Kennzeichnung der dimensionslosen Größen durch den Stern weggelassen wurde.

Nun fehlt nur noch die Zustandsgleichung (2.9), die sich aufgrund unserer Wahl $T_{\text{ref}} = p_{\text{ref}}/(R\rho_{\text{ref}})$ als

$$\begin{aligned} p &= \rho RT \\ \Leftrightarrow p^* &= \frac{\rho_{\text{ref}} R T_{\text{ref}}}{p_{\text{ref}}} \rho^* T^* \\ \Leftrightarrow p^* &= \rho^* T^* \end{aligned}$$

schreiben läßt. Ohne die Sternnotation lautet sie also dimensionslos

$$p = \rho T. \quad (2.50)$$

2.7.3. Zusammenfassung der dimensionslosen Gleichungen

Fassen wir abschließend noch einmal die dimensionslosen Gleichungen zusammen. Entdimensionalisiert lautet die Kontinuitätsgleichung (2.44)

$$\text{Sr}\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

die horizontale Impulsgleichung (2.45)

$$\begin{aligned} \text{Sr}(\mathbf{u}_{\parallel})_t + (\mathbf{u}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{u}_{\parallel} + \frac{1}{\text{Ro}_1} (\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\perp}) + \frac{1}{\text{Ro}_2} (\boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\parallel}) + \frac{1}{M_{\parallel}^2} \frac{1}{\rho} \nabla_{\parallel} p \\ = -\frac{1}{\text{Re}_{\parallel}} \frac{1}{\rho} \mathbf{r}_1 - \frac{1}{\text{Re}_{\perp}} \frac{1}{\rho} \mathbf{r}_2, \end{aligned}$$

die vertikale Impulsgleichung (2.46)

$$\begin{aligned} \text{Sr}(\mathbf{u}_{\perp})_t + (\mathbf{u}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{u}_{\perp} + \frac{1}{\text{Ro}_3} (\boldsymbol{\Omega}_{\parallel} \times \mathbf{u}_{\parallel}) + \frac{1}{M_{\perp}^2} \frac{1}{\rho} \nabla_{\perp} p + \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{k} \\ = -\frac{1}{\text{Re}_{\perp}} \frac{1}{\rho} \mathbf{r}_3 - \frac{1}{\text{Re}_{\parallel}} \frac{1}{\rho} \mathbf{r}_4, \end{aligned}$$

die Temperaturgleichung (2.49)

$$\text{Sr}T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) \frac{1}{\rho} p \nabla \cdot \mathbf{u} = -(\gamma - 1) \frac{1}{\rho} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{1}{\text{Re}_{\parallel}} \nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{j}_{\parallel} + \frac{1}{\text{Re}_{\perp}} \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{j}_{\perp} \right) + \right.$$

	$l_{\text{ref}}^{\parallel}$ in Metern	l_{ref}^{\perp} in Metern	t_{ref} in Sekunden
Kleinräumige Skala	$\leq 10^2$	$\leq 10^2$	$\leq 10^2$
Konvektive Skala	$10^3 - 10^4$	$10^3 - 10^4$	$10^2 - 10^3$
Mesoskala	$10^5 - 10^6$	10^4	$10^4 - 10^5$
Großräumige Skala	$> 10^6$	10^4	10^6

Tabelle 2.1.: Charakteristische horizontale und vertikale Ausdehnung und mittlere Lebensdauer atmosphärischer Bewegungen nach [42].

$$\left[\frac{M_{\parallel}^2}{\text{Re}_{\parallel}} s_1 + \frac{M_{\parallel\perp}^2}{\text{Re}_{\parallel}} s_2 + \frac{M_{\parallel\perp}^2}{\text{Re}_{\perp}} s_3 + \frac{M_{\perp}^2}{\text{Re}_{\parallel}} s_4 + \frac{M_{\perp}^2}{\text{Re}_{\perp}} s_5 - \text{Da}Q \right]$$

und die Zustandsgleichung (2.50)

$$p = \rho T.$$

2.7.4. Skalenanalyse

Um die einzelnen Terme nun miteinander zu vergleichen, müssen wir typische Referenzgrößen wählen. Dies fällt für Atmosphärenströmungen schwer, da sie ein breites Spektrum von Bewegungen enthalten, die allesamt mit unseren Strömungsgleichungen beschrieben werden. Die Bewegungen reichen dabei von kleinen Turbulenzen über Strömungen zwischen Hoch- und Tiefdruckgebieten bis hin zur globalen Zirkulation der Atmosphäre.

Die Tabelle 2.1 listet die charakteristischen Ausdehnungen in horizontaler, vertikaler und zeitlicher Hinsicht für die verschiedenen Bewegungsformen in der Atmosphäre auf. Zur kleinräumigen Skala zählen die turbulenten Erscheinungen, zur konvektiven Skala die durch Konvektion entstehenden Cumulus-Wolken, zur Mesoskala Fronten und Hoch- und Tiefdruckgebiete und zur großräumigen Skala Zonalströmungen, vgl. [42].

Wir wählen nun als Referenzgrößen zum einen kleinskalige bodennahe Werte und zum anderen großskalige Werte in der unteren Stratosphäre, also in etwa 20 km Höhe, so daß wir den Größenbereich der einzelnen Terme abschätzen können.

Kleinskalige bodennahe Werte:

$$\begin{aligned} l_{\text{ref}}^{\parallel} &\sim 10^2 \text{ m}, & l_{\text{ref}}^{\perp} &\sim 10^2 \text{ m}, & t_{\text{ref}} &\sim 10^3 \text{ s}, \\ u_{\text{ref}}^{\parallel} &\sim 10^{-1} \text{ m s}^{-1}, & u_{\text{ref}}^{\perp} &\sim 10^{-1} \text{ m s}^{-1}, \\ \rho_{\text{ref}} &\sim 10^0 \text{ kg m}^{-3}, & p_{\text{ref}} &\sim 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}. \end{aligned}$$

Großskalige Werte der unteren Stratosphäre:

$$\begin{aligned} l_{\text{ref}}^{\parallel} &\sim 10^7 \text{ m}, & l_{\text{ref}}^{\perp} &\sim 10^4 \text{ m}, & t_{\text{ref}} &\sim 10^5 \text{ s}, \\ u_{\text{ref}}^{\parallel} &\sim 10^2 \text{ m s}^{-1}, & u_{\text{ref}}^{\perp} &\sim 10^{-1} \text{ m s}^{-1}, \\ \rho_{\text{ref}} &\sim 10^{-1} \text{ kg m}^{-3}, & p_{\text{ref}} &\sim 10^4 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}. \end{aligned}$$

Horizontale Impulsgleichung							
	Zeit	Nichtlinear	Corioliskraft		Druck	Reibung	
	Sr		1	Ro_1^{-1}		Ro_2^{-1}	$Re_{ }^{-1}$
kleinskalig, Boden	10^0	10^0	10^{-1}	10^{-1}	10^7	10^{-6}	10^{-6}
großskalig, Strato	10^0	10^0	10^{-2}	10^1	10^1	10^{-13}	10^{-7}

Vertikale Impulsgleichung							
	Zeit	Nichtlinear	Coriolis	Gravitation	Druck	Reibung	
	Sr		1	Ro_3^{-1}		Fr^{-2}	$Re_{ }^{-1}$
kleinskalig, Boden	10^0	10^0	10^{-1}	10^5	10^7	10^{-6}	10^{-6}
großskalig, Strato	10^0	10^0	10^4	10^7	10^7	10^{-13}	10^{-7}

Tabelle 2.2.: Größe der Kennzahlen in der horizontalen und vertikalen Impulsgleichung für kleinskalige bodennahe Strömungen und großskalige Strömungen in der unteren Stratosphäre.

Die charakteristischen Längenskalen wurden dabei aus der Tabelle 2.1 übernommen. Windstille ist allgemein für Geschwindigkeiten unter 0,5 m/s definiert, was die kleinskaligen Werte für $u_{\text{ref}}^{\parallel}$ und u_{ref}^{\perp} erklärt. Diese können nicht auf 0 m/s gesetzt werden, da durch die Referenzgrößen dividiert werden muß.

Der großskalige Wert für u_{ref}^{\perp} wird üblicherweise für großräumige Strömungen verwendet, vgl. [54, 42], während sich der Wert von $u_{\text{ref}}^{\parallel}$ aus Messungen von Jetstreams von bis zu 180 m/s in der unteren Stratosphäre ergibt.

Beachte, daß mit dieser Wahl sowohl Forderung (2.43) als auch die intuitive Beziehung $t_{\text{ref}} = l_{\text{ref}}^{\parallel}/u_{\text{ref}}^{\parallel} = l_{\text{ref}}^{\perp}/u_{\text{ref}}^{\perp}$ erfüllt ist.

Der Druck und die Dichte nehmen mit der Höhe um eine Größenordnung ab, während die Temperatur nur durchschnittlich von $15^{\circ}\text{C} = 288,15\text{ K}$ auf $-55^{\circ}\text{C} = 218,15\text{ K}$ sinkt. Bei ihr liegt also keine Schwankung im Größenordnungsbereich vor, so daß die Referenztemperatur auf $T_{\text{ref}} = p_{\text{ref}}/(R\rho_{\text{ref}}) \sim 10^2\text{ K}$ gesetzt werden kann. Ebenso können die Werte

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{ref}} &\sim 10^{-4}\text{ s}^{-1}, \quad g \sim 10\text{ m s}^{-2}, \quad \mu \sim 10^{-5}\text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}, \\ \lambda &\sim 10^{-2}\text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad c_p \sim 10^3\text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad \gamma \sim 1,4 \end{aligned}$$

als fest angesehen werden, siehe dazu den Anhang A.2.

Für die horizontale und vertikale Impulsgleichung (2.45) und (2.46) ergeben sich daraus die Größen der Kennzahlen, die in der Tabelle 2.2 aufgelistet sind. Man sieht, daß die Terme, die die molekulare Reibung beschreiben, in beiden Gleichungen um mindestens fünf Größenordnungen kleiner sind als alle übrigen Terme. Sie können daher vernachlässigt werden, ebenso wie die verschwindend kleinen Reibungsterme in der Temperaturgleichung (2.49), deren Kennzahlen in

Temperaturgleichung										
	1	2	3	4		5				
	Zeit	Nichtlinear	Druck	Energiestrom		Reibung				
klein	10^0	10^0	10^{-1}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}
groß	10^0	10^0	10^{-1}	10^{-13}	10^{-7}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-12}	10^{-21}	10^{-9}

Tabelle 2.3.: Größe der Kennzahlen in der Temperaturgleichung für kleinskalige bodennahe Strömungen und großskalige Strömungen in der unteren Stratosphäre.

der Tabelle 2.3 aufgelistet sind.

Tatsächlich ist die molekulare Reibung nur in der laminaren Grenzschicht der Atmosphäre von Bedeutung [15]. Das Phasendiagramm 2.5 veranschaulicht diesen Sachverhalt, nämlich daß der Reibungsterm erst für eine Längenskala im Zentimeterbereich relevant wird. Da wir die Atmosphäre jedoch in horizontaler Richtung mit mindestens mehreren Kilometern und in vertikaler Richtung mit mehreren 100 Metern auflösen, ist die molekulare Reibung vernachlässigbar, und wir erhalten so aus der jeweiligen Impulsgleichung eine hyperbolische Euler-Gleichung.

Abschließend noch eine Bemerkung zum Thema schwache Kompressibilität. Strömungen werden allgemein als schwach kompressibel bezeichnet, wenn die Mach-Zahl, also der Quotient aus Strömungsgeschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit, im gesamten Gebiet unter 0,2 liegt. Man findet umfangreiche Literatur über solche Strömungen mit niedrigen Mach-Zahlen, auch in bezug auf Atmosphärenströmungen. Betrachten wir die für uns relevante Troposphäre und untere Stratosphäre genauer, so stellen wir zunächst fest, daß die Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Temperatur und somit der Höhe von 340 m/s bei 15° C auf 296 m/s bei -55° C sinkt. Des weiteren sind in Bodennähe durchaus Windgeschwindigkeiten von 100 m/s möglich, und in der unteren Stratosphäre wurden sogar bei Jetstreams Geschwindigkeiten von 180 m/s gemessen. Die entsprechenden Mach-Zahlen liegen für diese Extremfälle bei 0,3 bzw. 0,6. Global gesehen sind wir also nicht im Bereich der schwachen Kompressibilität, auch wenn größtenteils natürlich eher kleine Mach-Zahlen zu verzeichnen sind.

2.8. Turbulenzmodellierung

Aufgrund der Rauigkeit der Erdoberfläche ist die Strömung in der bodennahen Luftschicht turbulent. Die Verwirbelungen nehmen jedoch mit der Höhe rasch ab, so daß die Strömung in der Atmosphäre ab einer Höhe von 1000 - 1500 m als weitgehend laminar angesehen werden kann. Die so definierte bodennahe Luftschicht bis etwa 1500 m über der Erdoberfläche wird als Grenzschicht der Atmosphäre bezeichnet.

Grundsätzlich wird jede Art von Strömung, egal ob laminar oder turbulent, von unserem Gleichungssystem vollständig beschrieben. Der naheliegendste Ansatz zur Berechnung der Strömungen in der Atmosphäre wäre also, ein genügend feines Gitter zu wählen, das auch die kleinsten Wirbel noch auflöst, und auf diesem Gitter das Gleichungssystem zu lösen. Ein solcher Ansatz wird als „direkte numerische Simulation“ (DNS) bezeichnet.

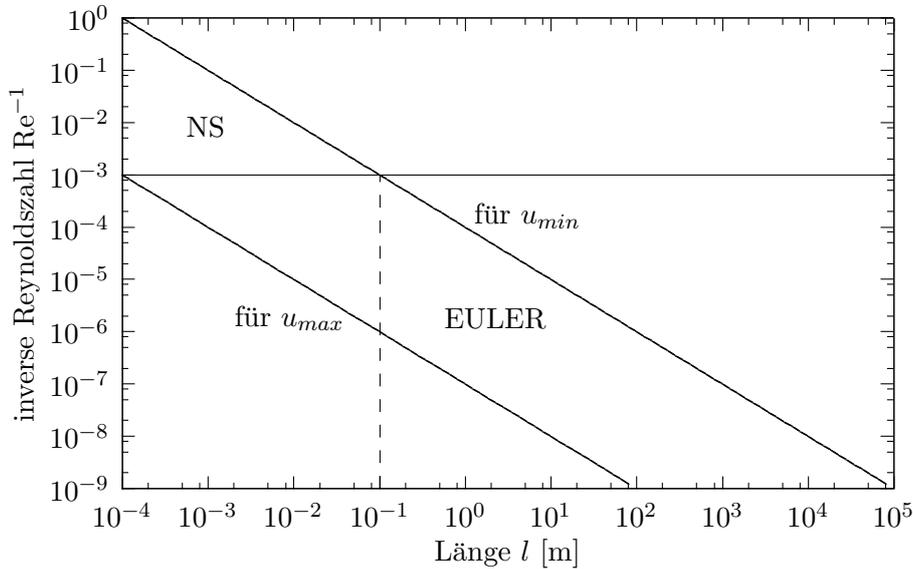


Abb. 2.5.: Phasendiagramm für die inverse Reynoldszahl mit $\rho_{\text{ref}} = 10^0 \text{ kg/m}^3$ und $u_{\text{min}} = 10^{-1} \text{ m/s}$ bzw. $u_{\text{max}} = 10^2 \text{ m/s}$ in doppelt logarithmischer Darstellung.

Die DNS ist jedoch für Berechnungen in der Atmosphäre nicht praktikabel, da sie eine räumliche Auflösung des Modellgitters von etwa 1 cm und eine zeitliche von wenigen Sekunden verlangen würde, was die heutigen Rechnerkapazitäten weit überschreitet, siehe dazu auch [25, 33, 42]. Wir sind also gezwungen, die Turbulenz in der atmosphärischen Grenzschicht geeignet zu modellieren.

Bei einer turbulenten Strömung treten starke örtliche und zeitliche Schwankungen im Geschwindigkeitsfeld auf, die weder vom Modellgitter noch vom meteorologischen Meßnetz erfaßt werden können. Es sind jedoch auch gar nicht unbedingt alle mikroskopisch kleinen Wirbel von Interesse, sondern vielmehr mittlere Werte, die den großskaligen Trend der Strömung beschreiben. Unser Ziel ist es also, unregelmäßige turbulente Schwankungen aus den Gleichungen herauszufiltern und die Effekte nicht auflösbarer Wirbel geeignet zu modellieren.

Da die Gleichungen nichtlinear sind und daher das Mittel über ein Produkt nicht identisch mit dem Produkt der Mittelwerte ist, verändert man bei einer solchen Mittelung die ursprünglich allgemeingültigen Gleichungen. Sie gelten anschließend nur noch für die geglätteten Werte, also auf Skalen, die größer sind als das Mittelungsintervall. In den folgenden Kapiteln werden zwei solcher Turbulenzmodelle vorgestellt.

2.8.1. Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS)

Die Idee jeglicher Turbulenzmodellierung geht auf Osborne Reynolds (1842 - 1912) zurück. Alle in den Navier-Stokes-Gleichungen vorkommenden Größen ψ werden dabei in einen Hauptteil $\overline{\psi}$ und in einen Schwankungsterm ψ' , der auch als Fluktuation bezeichnet wird, aufgeteilt, so

daß

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' \quad (2.51)$$

gilt. Der Hauptteil ist dabei ein zeitlicher Mittelwert über das Turbulenzzeitintervall Δt mit

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \psi(\mathbf{x}, s) ds. \quad (2.52)$$

Außer dieser Mittelwertbildung werden wir noch ein mit der Dichte gewichtetes Mittel für die Geschwindigkeit und die Temperatur verwenden, um turbulente Zusatzterme z.B. in der Kontinuitätsgleichung zu vermeiden. Eine Größe ζ wird dabei analog in ihr gewichtetes Mittel $\widehat{\zeta}$ und die zugehörige Fluktuation ζ'' aufgespalten

$$\zeta = \widehat{\zeta} + \zeta'', \quad (2.53)$$

wobei das Mittel über

$$\widehat{\zeta} := \frac{\overline{\rho\zeta}}{\bar{\rho}} \quad (2.54)$$

definiert ist.

Halten wir zunächst einige Eigenschaften fest, die sowohl für die Mittelung (2.52), die wir in den Navier-Stokes-Gleichungen für die Variablen ρ und p verwenden, als auch für die gewichtete Mittelung (2.54), die für \mathbf{u} und T benutzt wird, gelten. Statt von einer Mittelung können wir auch von einer Filterung sprechen, deren Anwendung auf einen Vektor komponentenweise zu verstehen ist.

Zum einen ist der Filter ein linearer Operator, d.h. für zwei Größen ψ_1 und ψ_2 und eine reelle Konstante α gilt

$$\overline{\psi_1 + \psi_2} = \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 \quad \text{und} \quad \overline{\alpha\psi_1} = \alpha\bar{\psi}_1. \quad (2.55)$$

Außerdem sind die Zeit- und Ortsableitungen mit dem Filter vertauschbar, d.h.

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} \psi} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi} \quad \text{und} \quad \overline{\frac{\partial}{\partial x_i} \psi} = \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\psi} \quad \text{für } i = 1, \dots, 3, \quad (2.56)$$

und es gilt

$$\overline{\psi_1 \psi_2} = \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2, \quad (2.57)$$

da sich $\bar{\psi}_2$ bezüglich des neuen Integrals wie eine Konstante verhält.

Die Eigenschaft (2.56) gilt dabei nur, wenn Δt fest gewählt wird und nicht mit der Zeit variiert, vgl. [43, 18]. Die obigen drei Eigenschaften sind auch für das gewichtete Mittel (2.54) erfüllt, und als direkte Folgerung aus (2.54) und (2.57) können wir noch

$$\overline{\widehat{\zeta} \psi} = \widehat{\zeta} \bar{\psi} \quad (2.58)$$

festhalten.

Wenden wir nun den Filter (2.52) auf die Kontinuitätsgleichung (2.1) an

$$\begin{aligned}
& \overline{\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})} = \bar{0} \\
(2.55) \quad & \Leftrightarrow \overline{\bar{\rho}_t + \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u})} = 0 \\
(2.56) \quad & \Leftrightarrow \bar{\rho}_t + \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}}) = 0 \\
(2.54) \quad & \Leftrightarrow \bar{\rho}_t + \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Durch die Wahl des mit der Dichte gewichteten Mittelwertes für \mathbf{u} ändert sich die Kontinuitätsgleichung also bei Mittelung nicht. Auch die Zustandsgleichung (2.9) bleibt unverändert

$$\begin{aligned}
& \bar{p} = \overline{\rho RT} \\
(2.55) \quad & \Leftrightarrow \bar{p} = R \overline{\bar{\rho} T} \\
(2.54) \quad & \Leftrightarrow \bar{p} = \bar{\rho} R \widehat{T}.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Die Impulsgleichung (2.22) multiplizieren wir zunächst mit der Dichte ρ und gelangen so unter Ausnutzung von (A.18) und der Kontinuitätsgleichung zu der äquivalenten Darstellung

$$(\rho \mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \circ \mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \rho \mathbf{u} + \nabla p = -\rho g \mathbf{k}. \tag{2.61}$$

Der Argumentation im Kapitel 2.7.4 folgend vernachlässigen wir dabei von nun an den molekularen Reibungsterm sowohl in der Impuls- als auch in der Temperaturgleichung. Gefiltert würde er zwar jeweils einen turbulenten Zusatzterm produzieren, aber dieser wird in der Literatur aufgrund seiner Größe ebenfalls vernachlässigt, so daß die Reihenfolge der Vernachlässigung des Reibungsterms und der Filterung keine Rolle spielt.

Gemittelt ergibt sich nun aus der Impulsgleichung

$$\begin{aligned}
& \overline{(\rho \mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \circ \mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \rho \mathbf{u} + \nabla p} = \overline{-\rho g \mathbf{k}} \\
(2.55),(2.56) \quad & \Leftrightarrow \overline{(\bar{\rho} \mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u} \circ \mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\rho} \mathbf{u} + \nabla \bar{p}} = \overline{-\bar{\rho} g \mathbf{k}} \\
(2.54) \quad & \Leftrightarrow \overline{(\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}})_t + \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p}} = \overline{-\bar{\rho} g \mathbf{k}}.
\end{aligned}$$

Der zweite Term läßt sich dabei in

$$\begin{aligned}
\overline{\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}}} &= \bar{\rho} (\widehat{\widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}}} + \widehat{\widehat{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u}''} + \widehat{\widehat{\mathbf{u}'' \circ \widehat{\mathbf{u}}} + \widehat{\widehat{\mathbf{u}'' \circ \mathbf{u}''}}) \\
&= \bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}} + \underbrace{\bar{\rho} (\widehat{\widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}}} - \widehat{\widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}}})}_{\mathcal{L}} + \underbrace{\bar{\rho} (\widehat{\widehat{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u}''} + \widehat{\widehat{\mathbf{u}'' \circ \widehat{\mathbf{u}}})}_{\mathcal{C}} + \underbrace{\bar{\rho} \widehat{\widehat{\mathbf{u}'' \circ \mathbf{u}''}}}_{\mathcal{R}}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

aufspalten. Durch die Nichtlinearität erhalten wir also Zusatzterme, aus denen sich ein neuer Spannungstensor

$$\boldsymbol{\tau}^{RANS} := \mathcal{L} + \mathcal{C} + \mathcal{R} \tag{2.63}$$

zusammensetzt, der eine Art „turbulente“ Reibung beschreibt und bei dem \mathcal{L} Leonard-Term, \mathcal{C} Kreuzspannungsterm und \mathcal{R} Reynolds-Spannungsterm genannt wird.

Nach Division durch $\bar{\rho}$ und unter Ausnutzung von (A.18) gelangen wir so zu der gemittelten

Impulsgleichung

$$\widehat{\mathbf{u}}_t + (\widehat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{u}} + 2\Omega \times \widehat{\mathbf{u}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{p} = -g\mathbf{k} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{RANS}. \quad (2.64)$$

Die Temperaturgleichung (2.24) multiplizieren wir analog zur Impulsgleichung mit der Dichte ρ , verwenden die Kontinuitätsgleichung und gelangen so zur äquivalenten Darstellung

$$c_v((\rho T)_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} T)) + p \nabla \cdot \mathbf{u} = -\nabla \cdot \mathbf{j} + Q \quad (2.65)$$

ohne den Reibungsterm. Nach Anwendung der Filterung ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} c_v \left(\overline{(\rho T)_t} + \overline{\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} T)} \right) + \overline{p \nabla \cdot \mathbf{u}} &= -\overline{\nabla \cdot \mathbf{j}} + \overline{Q} \\ \stackrel{(2.56), (2.54)}{\Leftrightarrow} c_v \left(\overline{(\bar{\rho} \widehat{T})_t} + \overline{\nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}} \widehat{T})} \right) + \overline{p \nabla \cdot \widehat{\mathbf{u}}} &= -\overline{\nabla \cdot \widehat{\mathbf{j}}} + \overline{Q}. \end{aligned}$$

Der zweite Term läßt sich ebenso wie der nichtlineare Term in der Impulsgleichung in

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}} \widehat{T} &= \bar{\rho} (\widehat{\mathbf{u}} \widehat{T} + \widehat{\mathbf{u}} \widehat{T}'' + \widehat{\mathbf{u}}'' \widehat{T} + \widehat{\mathbf{u}}'' \widehat{T}'') \\ &= \bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}} \widehat{T} + \underbrace{\bar{\rho} (\widehat{\mathbf{u}} \widehat{T} - \widehat{\mathbf{u}} \widehat{T})}_{\mathcal{L}_T} + \underbrace{\bar{\rho} (\widehat{\mathbf{u}} \widehat{T}'' + \widehat{\mathbf{u}}'' \widehat{T})}_{\mathcal{C}_T} + \underbrace{\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}}'' \widehat{T}''}_{\mathcal{R}_T} \end{aligned} \quad (2.66)$$

mit dem Wärmestrom

$$\mathbf{q}^{RANS} := \mathcal{L}_T + \mathcal{C}_T + \mathcal{R}_T \quad (2.67)$$

aufspalten. Aus dem dritten Term wird

$$\begin{aligned} \overline{p \nabla \cdot \mathbf{u}} &= \overline{p \nabla \cdot (\widehat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'')} \\ &= \overline{p \nabla \cdot \widehat{\mathbf{u}}} + \overline{p \nabla \cdot \mathbf{u}''} \\ &\stackrel{(2.58)}{=} \overline{p \nabla \cdot \widehat{\mathbf{u}}} + \overline{p \nabla \cdot \mathbf{u}''}, \end{aligned}$$

und auch in $\overline{\widehat{\mathbf{j}}}$ ist ein turbulenter Zusatz enthalten.

Nach Division durch $\bar{\rho}$ und Verwendung von (A.9) ergibt sich so die gemittelte Temperaturgleichung

$$c_v \left(\widehat{T}_t + \widehat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \widehat{T} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathbf{q}^{RANS} \right) + \frac{1}{\bar{\rho}} (\overline{p \nabla \cdot \widehat{\mathbf{u}}} + \overline{p \nabla \cdot \mathbf{u}''}) = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \overline{\widehat{\mathbf{j}}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{Q}. \quad (2.68)$$

Wir gehen also bei der Filterung unseres Gleichungssystems zu den gemittelten Größen $\bar{\rho}$, \bar{p} , $\widehat{\mathbf{u}}$ und \widehat{T} über, erhalten dabei jedoch in der Impuls- und Temperaturgleichung turbulente Zusatzterme mit den zusätzlichen Variablen ρ' , p' , \mathbf{u}'' und T'' . Das Gleichungssystem ist also nicht mehr geschlossen, und wir benötigen zur Bestimmung der zusätzlichen Unbekannten weitere Gleichungen, die die Abhängigkeiten der neuen Variablen von den gemittelten Größen beschreiben. Diese Abhängigkeiten können nicht exakt angegeben werden, da die Subtraktion der gemittelten Gleichungen von den ungemittelten wiederum zu einem System führt, das nicht

geschlossen ist. Wir sind also auf empirische Ansätze angewiesen, die auch als Parametrisierungen bezeichnet werden.

Um die Gleichungen zunächst weiter zu vereinfachen, wird üblicherweise noch für die Filterungen das sogenannte Reynoldssche Postulat

$$\overline{\psi'} = 0 \quad \text{und} \quad \widehat{\zeta}'' = 0 \quad (2.69)$$

bzw. die äquivalente Aussage

$$\overline{\overline{\psi}} = \overline{\psi} \quad \text{und} \quad \widehat{\widehat{\zeta}} = \widehat{\zeta} \quad (2.70)$$

gefordert. Mit dieser Annahme verschwinden die Leonard- und Kreuzspannungsterme in dem Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}^{RANS}$ und dem Wärmestrom \mathbf{q}^{RANS} .

Im allgemeinen ist das Reynoldssche Postulat allerdings nicht erfüllt, obwohl es in der umfangreichen Literatur zur Dynamik der Atmosphäre grundsätzlich als gültig angenommen und demzufolge die Leonard- und Kreuzspannungsterme konsequent vernachlässigt werden. Dort heißt es dann, wenn nicht gar ganz auf die Definition des Mittelwertes (2.52) verzichtet wird, daß das Mittelungsintervall Δt so zu wählen sei, daß das Reynoldssche Postulat erfüllt werde. Doch das ist nicht immer möglich. Es wird dabei nämlich indirekt gefordert, daß Δt groß genug ist, um schnelle turbulente Bewegungen herauszufiltern, aber andererseits auch klein genug, um den großskaligen Trend der Variablen zu bewahren. Mit anderen Worten wird eine klare Skalentrennung zwischen turbulenten und nicht-turbulenten Bereichen der Strömung gefordert, eine sogenannte spektrale Lücke (spectral gap). Betrachten wir dazu die Abbildung 2.6. Das Bild a) zeigt die optimale Wahl von Δt bei der Existenz einer spektralen Lücke, für die das Reynoldssche Postulat (2.70) gültig ist. Bei den Bildern b) und c) dagegen ist es nicht erfüllt, da eine zweite Filterung nicht dasselbe Ergebnis liefern würde. Im Fall d) für $\Delta t \rightarrow \infty$ wird die Strömung stationär, und das Postulat ist im Grenzfall wieder erfüllt.

Wie in [18, 17] dargelegt wird, darf man jedoch nicht von der Existenz einer solchen Möglichkeit zur Skalentrennung ausgehen. Vielmehr haben Messungen in der Atmosphäre gezeigt, daß lediglich für die Vertikalgeschwindigkeit eine solche Annahme gemacht werden kann, im allgemeinen jedoch nicht. Man kann sich natürlich stets auf den Fall $\Delta t \rightarrow \infty$ zurückziehen, doch da wir an einer zeitlichen Entwicklung interessiert sind und nicht an einer stationären Strömung, ist dies nicht sinnvoll.

In Ermangelung geeigneter und erprobter Parametrisierungen für die Leonard- und Kreuzspannungsterme bezüglich der zeitlichen Mittelung vernachlässigen wir sie an dieser Stelle auch, weisen jedoch ausdrücklich darauf hin, daß dies eigentlich nur für $\Delta t \rightarrow \infty$ gilt und wir sonst einen Fehler machen, wobei wir auf die Untersuchungen von Galmarini et al. [18, 17] verweisen.

Wir gehen also nun von dem Reynoldsschen Postulat aus und erhalten mit Hilfe von (2.57), (2.69) und (2.70)

$$\boldsymbol{\tau}^{RANS} = \overline{\widehat{\rho \mathbf{u}'' \circ \mathbf{u}''}}, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{q}^{RANS} = \overline{\widehat{\rho \mathbf{u}'' T''}}, \quad (2.72)$$

so daß in der Impulsgleichung (2.64) ein turbulenter Zusatzterm und in der Temperaturgleichung (2.68) drei turbulente Zusatzterme verbleiben, die nun geeignet parametrisiert werden müssen.

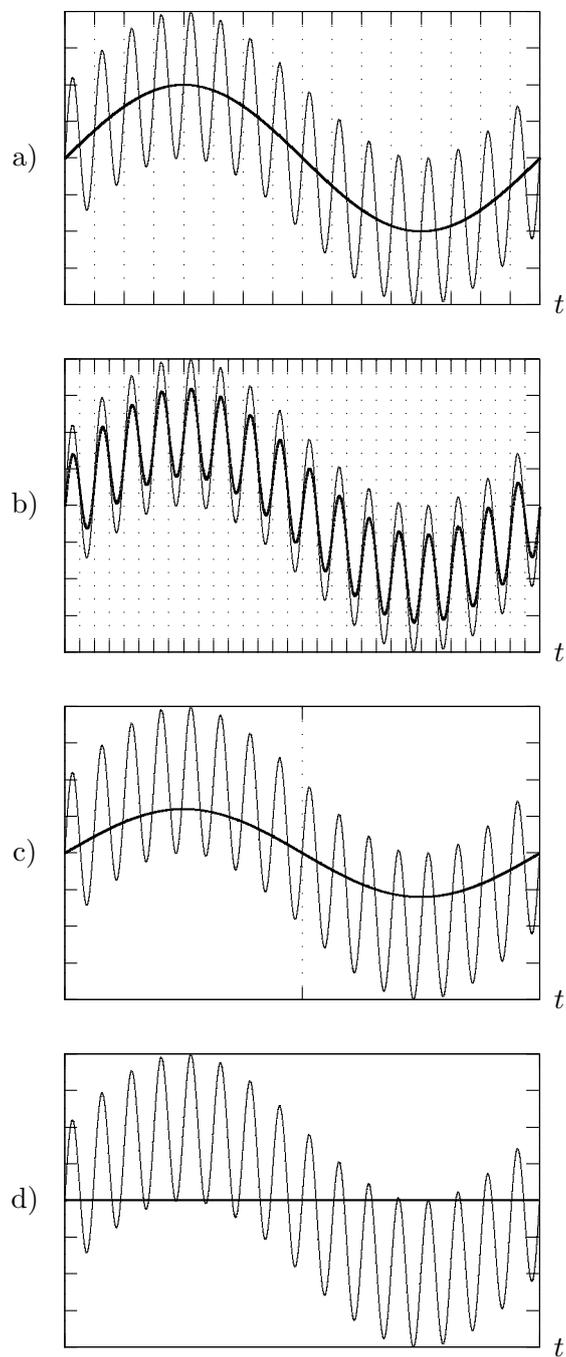


Abb. 2.6.: Reynolds-Mittelung $\bar{\psi}$ (dicke Linie) einer Funktion ψ (dünne Linie) mit unterschiedlicher Filterweite: a) optimales Δt , b) zu kleines Δt , c) zu großes Δt und d) $\Delta t \rightarrow \infty$.

Ein solcher Ansatz zur Modellierung ist das sogenannte Austauschkonzept von Prandtl, auch Konzept der Mischungsweglänge genannt. Dabei wird für die turbulente Reibung eine Analogie zur molekularen Reibung hergestellt, wie wir im folgenden darlegen werden.

Innere Reibung entsteht durch Zusammenstöße von Molekülen. Diese durchlaufen eine freie Weglänge, stoßen zusammen und tauschen dadurch Impuls aus. Die mittlere freie Weglänge, also die Strecke, die ein Molekül im Mittel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen zurücklegt, beträgt für Luft unter Normalbedingungen 10^{-7} m. Die Idee von Prandtl ist nun, auch für die turbulente Reibung eine Mischungsweglänge l' einzuführen, entlang der der Impuls eines „Turbulenzballens“ erhalten bleibt, ehe er sich mit seiner Umgebung vermischt und somit seinen Impuls abgibt. Die Schwierigkeit besteht dabei in der Wahl dieser möglichst von der Geschwindigkeit unabhängigen Mischungsweglänge, da keine allgemeingültigen Aussagen darüber getroffen werden können.

Untersuchen wir nun den turbulenten Zusatzterm $\nabla \cdot (\widehat{\rho \mathbf{u}'' \circ \mathbf{u}''})$ in der Impulsgleichung (2.64). In der atmosphärischen Grenzschicht liegt im wesentlichen eine turbulente Scherströmung vor, genauer dominiert in ihr die vertikale Scherung des horizontalen Windes und somit der vertikale Transport an horizontalem Impuls, vgl. [42]. Unter dieser Voraussetzung können wir für den turbulenten Zusatzterm die Gestalt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\widehat{\rho \mathbf{u}'' \circ \mathbf{u}''}) &\cong \nabla_{\perp} \cdot (\widehat{\rho \mathbf{u}''_{\perp} \circ \mathbf{u}''_{\perp}}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\widehat{\rho w'' \mathbf{u}''_{\perp}}) \end{aligned} \quad (2.73)$$

annehmen, wobei $w := \langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle$ die vertikale Komponente des Geschwindigkeitsvektors ist und die Notation aus dem Kapitel 2.7.1 verwendet wird. Verfolgen wir nun die Idee der Mischungsweglänge. Im Niveau \tilde{z} herrsche die mittlere Geschwindigkeit $\widehat{\mathbf{u}}_{\perp}(\tilde{z})$. Nach Durchlauf der Mischungsweglänge l' wird ein Turbulenzballen im Niveau $\tilde{z} + l'$ eine turbulente Schwankung hervorrufen, die sich über

$$\mathbf{u}''_{\perp} = \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}(\tilde{z}) - \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}(\tilde{z} + l')$$

ausdrücken läßt. Führen wir nun die Taylor-Entwicklung für die mittlere Geschwindigkeit im Niveau $\tilde{z} + l'$ durch

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\perp}(\tilde{z} + l') = \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}(\tilde{z}) + l' \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}}{\partial \tilde{z}} + \dots$$

und brechen nach dem linearen Glied ab, so ergibt sich die Approximation

$$\mathbf{u}''_{\perp} \cong -l' \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}}{\partial \tilde{z}}. \quad (2.74)$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\widehat{\rho \mathbf{u}'' \circ \mathbf{u}''}) &\stackrel{(2.73)}{\cong} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\widehat{\rho w'' \mathbf{u}''_{\perp}}) \\ &\stackrel{(2.74)}{\cong} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(-\widehat{\rho w'' l'} \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}}{\partial \tilde{z}} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\widehat{\rho w'' l'} \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}}{\partial \tilde{z}} \right). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Aus Kontinuitätsgründen muß nun $|\mathbf{u}''| \sim |w''|$ gefordert werden, wodurch aus (2.74)

$$|w''| \cong \left| -l' \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_{||}}{\partial \tilde{z}} \right|$$

folgt. Außerdem gilt für einen aufsteigenden Turbulenzpartikel $w'' > 0$, $l' > 0$ und für einen absteigenden $w'' < 0$, $l' < 0$, so daß wir

$$w'' \cong l' \left| \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_{||}}{\partial \tilde{z}} \right| \quad (2.76)$$

schreiben können. Setzen wir dies in (2.75) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\widehat{\bar{\rho} \mathbf{u}'' \circ \mathbf{u}''}) &\stackrel{(2.75)}{\cong} -\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\widehat{\bar{\rho} w'' l'} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_{||}}{\partial \tilde{z}} \right) \\ &\stackrel{(2.76)}{\cong} -\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\widehat{\bar{\rho} l' l'} \left| \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_{||}}{\partial \tilde{z}} \right| \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_{||}}{\partial \tilde{z}} \right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Somit definieren wir uns nun $l := (\widehat{l'l'})^{\frac{1}{2}}$ als die mittlere Mischungsweglänge für den Impuls eines Turbulenzballens. Der Austauschkoefizient für den Impuls A_M ist dann über

$$A_M := \bar{\rho} l^2 \left| \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_{||}}{\partial \tilde{z}} \right| > 0 \quad (2.78)$$

gegeben.

Wir können den turbulenten Zusatzterm also in Abhängigkeit der mittleren Dichte der Luft, der mittleren Mischungsweglänge und der vertikalen Scherung der mittleren horizontalen Strömung schreiben

$$\nabla \cdot (\widehat{\bar{\rho} \mathbf{u}'' \circ \mathbf{u}''}) \cong -\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(A_M \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_{||}}{\partial \tilde{z}} \right). \quad (2.79)$$

Dabei ist nur die Mischungsweglänge l unbekannt. In der Literatur wird für sie häufig ein höhenabhängiger Ansatz

$$l = \kappa \tilde{z} \quad (2.80)$$

mit der Von Kármán-Konstanten $\kappa = 0,4$ gemacht. Will man die Mischungsweglänge nach oben beschränken, so kann man für sie auch nach einem Vorschlag von Blackadar die Darstellung

$$l = \frac{\kappa \tilde{z}}{1 + \frac{\kappa \tilde{z}}{l_\infty}} \quad (2.81)$$

wählen, wobei l_∞ eine asymptotische Mischungsweglänge ist, für die in [10] 500 m gewählt wird.

Häufig modelliert man auch den turbulenten Viskositätskoeffizienten

$$K_M := \frac{1}{\bar{\rho}} A_M \quad (2.82)$$

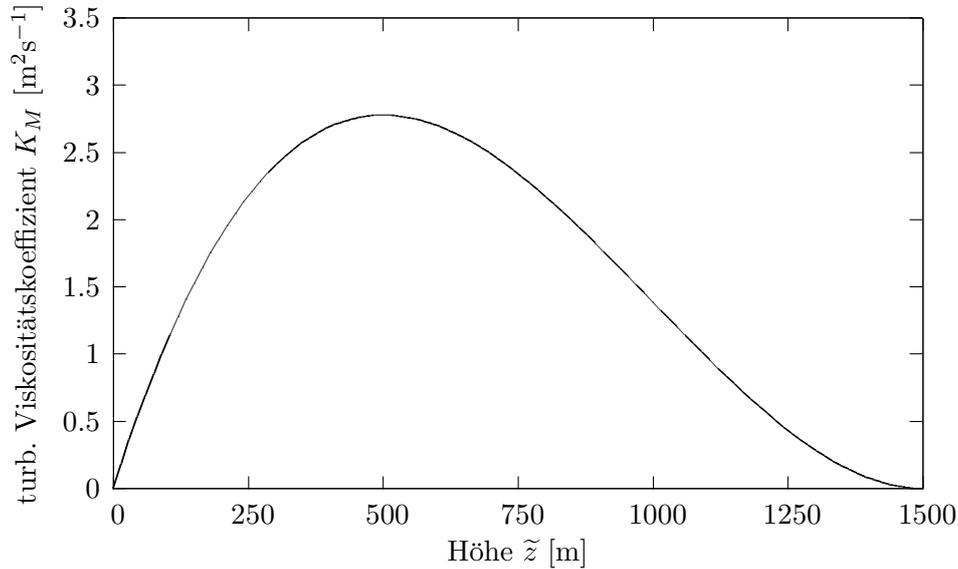


Abb. 2.7.: Vertikale Struktur des turbulenten Viskositätskoeffizienten K_M nach der Darstellung von O'Brien.

geeignet, wie etwa bei O'Brien in [39], wo die Untersuchung seiner vertikalen Struktur zu der kubischen Polynomdarstellung

$$K_M(\tilde{z}) = K_2 + \left(\frac{\tilde{z} - \tilde{z}_2}{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1} \right)^2 \left[K_1 - K_2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_1) \left(\left. \frac{\partial K_M}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}_1} + 2 \frac{K_1 - K_2}{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1} \right) \right] \quad (2.83)$$

mit $K_1 := K_M(\tilde{z}_1) = 1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ und $K_2 := K_M(\tilde{z}_2) = 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ führt. Dabei ist \tilde{z}_2 die Höhe der atmosphärischen Grenzschicht und \tilde{z}_1 die Höhe der Prandtl-Schicht, auch Constant Flux Layer genannt, die etwa die unteren 100 m der Grenzschicht umfaßt und durch weitgehende Höhenkonstanz der turbulenten Schubspannung charakterisiert ist. Der Bereich oberhalb der Prandtl-Schicht, in der die turbulente Schubspannung mit der Höhe abnimmt und etwa bei 1500 m Null erreicht, wird auch als Ekman-Schicht bezeichnet. An diese schließt sich die freie Atmosphäre an. Am Boden und oberhalb der atmosphärischen Grenzschicht, für die wir $\tilde{z}_2 = 1500 \text{ m}$ setzen, wird der turbulente Viskositätskoeffizient zu Null, nimmt linear in der Prandtl-Schicht bis etwa $\tilde{z}_1 = 100 \text{ m}$ zu und verläuft dann nach obiger Formel annähernd wie ein kubisches Polynom, das sein Maximum bei $\tilde{z}_2/3$ annimmt, vgl. auch [19, 46].

In guter Näherung können wir das kubische Polynom auch direkt in $\tilde{z}_1 = 0 \text{ m}$ beginnen lassen. Mit $\tilde{z}_2 = 1500 \text{ m}$ und den zugehörigen turbulenten Viskositätskoeffizienten $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ ergibt sich

$$K_M(\tilde{z}) = \left(\frac{\tilde{z}}{\tilde{z}_2} - 1 \right)^2 \tilde{z} \left. \frac{\partial K_M}{\partial \tilde{z}} \right|_0, \quad (2.84)$$

wobei als Anfangssteigung $\partial K_M / \partial \tilde{z}|_0 = 1/80$ gesetzt werden kann. Der turbulente Viskositätskoeffizient weist damit die vertikale Struktur auf, die in der Abbildung 2.7 dargestellt ist.

Betrachten wir nun die drei turbulenten Zusatzterme in der Temperaturgleichung (2.68). Approximativ können wir

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{j}} \cong \nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}$$

setzen und den Term $\overline{p \nabla \cdot \mathbf{u}''}$, der die turbulente Expansionsleistung darstellt, nach [42, 33] vernachlässigen. Es verbleibt also die Modellierung des Terms $\nabla \cdot (\widehat{\rho \mathbf{u}'' T''})$.

In der atmosphärischen Grenzschicht überwiegt bei weitem der turbulente vertikale Wärmefluß gegenüber dem horizontalen, d.h. wir können zu

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\widehat{\rho \mathbf{u}'' T''}) &\cong \nabla \cdot (\widehat{\rho \mathbf{u}_\perp'' T''}) \\ &= \nabla_\perp \cdot (\widehat{\rho \mathbf{u}_\perp'' T''}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\widehat{\rho w'' T''}) \end{aligned} \quad (2.85)$$

übergehen, wobei auch hier $w := \langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle$ die vertikale Komponente des Geschwindigkeitsvektors ist. Bei einer stabilen Schichtung der Atmosphäre kann das Konzept von Prandtl sinngemäß auch auf die turbulente Wärmediffusion angewandt werden. Analog zu (2.79) gelangen wir so zu der Darstellung

$$\nabla \cdot (\widehat{\rho \mathbf{u}'' T''}) \cong - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(A_H \frac{\partial \hat{T}}{\partial \tilde{z}} \right), \quad (2.86)$$

wobei

$$A_H := \overline{\rho l'_H w''} \quad (2.87)$$

der Austauschkoefizient für die fühlbare Wärme und l'_H die entsprechende Mischungsweglänge ist. Der turbulente Diffusionskoeffizient K_H für die fühlbare Wärme ist dann analog über

$$K_H := \frac{1}{\rho} A_H \quad (2.88)$$

definiert und kann nach [46, 14] aufgrund experimenteller Untersuchungen durch

$$K_H \cong 1,35 K_M \quad (2.89)$$

angenähert werden.

Im Falle einer labilen Schichtung der Atmosphäre ist das Konzept von Prandtl nur noch bedingt anwendbar und muß entsprechend erweitert werden, wozu auf die Literatur [42, 37] verwiesen sei.

2.8.2. Entdimensionalisierung der RANS-Gleichungen

Ehe wir nun die Reynolds-gemittelten Gleichungen entdimensionalisieren, fassen wir sie zunächst noch einmal unter der Annahme des Reynoldsschen Postulats zusammen. Die Kontinuitätsgleichung (2.59)

$$\bar{\rho}_t + \nabla \cdot (\bar{\rho} \hat{\mathbf{u}}) = 0$$

und die Zustandsgleichung (2.60)

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \hat{T}$$

ändern sich beim Übergang zu den gemittelten Größen nicht, während in der Impulsgleichung (2.64)

$$\hat{\mathbf{u}}_t + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + 2\Omega \times \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{p} = -g \mathbf{k} - \boxed{\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}'' \circ \mathbf{u}''})}$$

und der Temperaturgleichung (2.68) turbulente Zusatzterme auftreten. Zwei davon können vernachlässigt werden, was die Temperaturgleichung auf

$$c_v (\hat{T}_t + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{T}) + \boxed{c_v \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}'' T''})} + \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{p} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{Q}$$

reduziert. Die beiden übrigen gerahmten Zusatzterme in der Impuls- und Temperaturgleichung müssen modelliert werden, um das Gleichungssystem zu schließen. Dies geschieht nach dem Prandtl'schen Austauschkonzept über (2.79) und (2.86)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}'' \circ \mathbf{u}''}) &\cong -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\bar{\rho} K_M \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_{||}}{\partial \tilde{z}} \right), \\ c_v \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}'' T''}) &\cong -c_v \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\bar{\rho} K_H \frac{\partial \hat{T}}{\partial \tilde{z}} \right), \end{aligned}$$

wobei die turbulenten Koeffizienten

$$\begin{aligned} K_M(\tilde{z}) &= \frac{1}{80} \left(\frac{\tilde{z}}{1500} - 1 \right)^2 \tilde{z}, \\ K_H(\tilde{z}) &= 1,35 K_M(\tilde{z}) \end{aligned}$$

mit (2.84) und (2.89) modelliert werden.

Zum Schluß überführen wir die Zusatzterme noch in die dimensionslose Form, wobei wir sowohl für K_M als auch für K_H die Referenzgröße $K_M^{max} = 2,75$ verwenden. Außerdem sei festgehalten, daß der Zusatzterm mit obiger Modellierung nur in der horizontalen Impulsgleichung auftritt, was durch eine Projektion auf den vertikalen Anteil nach (2.31) überprüft werden kann. Mit den zugehörigen Vorfaktoren aus dem Kapitel 2.7.2 ergeben sich in dimensionsloser Form der Zusatzterm

$$-\frac{K_M^{max}}{u_{\text{ref}}^{\perp} l_{\text{ref}}^{\perp}} \frac{1}{\bar{\rho}^*} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}^*} \left(\bar{\rho}^* K_M^* \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_{||}^*}{\partial \tilde{z}^*} \right) \quad (2.90)$$

in der horizontalen Impulsgleichung (2.45) und der Zusatzterm

$$-\frac{K_M^{max}}{u_{\text{ref}}^{\perp} l_{\text{ref}}^{\perp}} \frac{1}{\bar{\rho}^*} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}^*} \left(\bar{\rho}^* K_H^* \frac{\partial \hat{T}^*}{\partial \tilde{z}^*} \right) \quad (2.91)$$

in der Temperaturgleichung (2.49). Für die kleinskaligen bodennahen Werte haben die zugehörigen Kennzahlen eine Größenordnung von 10^{-1} , vergleiche dazu die Tabellen 2.2 und 2.3.

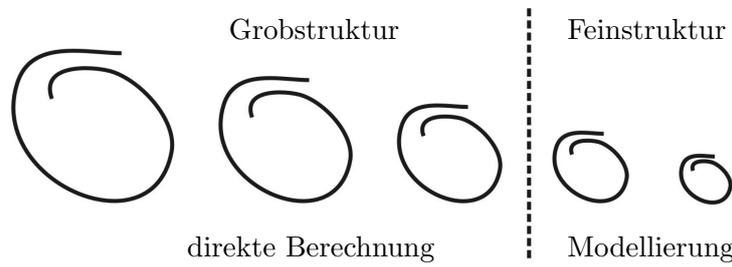


Abb. 2.8.: LES-Konzept nach [6]. Die Filterweite trennt die auflösbare und daher direkt berechenbare Grobstruktur von der zu modellierenden Feinstruktur.

2.8.3. Large Eddy Simulation (LES)

Das Prinzip der im vorherigen Abschnitt dargestellten RANS-Turbulenzmodellierung basiert auf einer zeitlichen Mittelung der Strömungsgleichungen. Die dadurch auftretenden Zusatzterme müssen geeignet modelliert werden, wozu in der Literatur eine Vielzahl von Modellen vorgeschlagen wird, die jedoch alle keine Allgemeingültigkeit besitzen. Das entscheidende Problem dabei ist, daß bei dem RANS-Ansatz aufgrund der zeitlichen Mittelung das gesamte Spektrum der turbulenten Längenskalen modelliert werden muß und dies sehr strömungsabhängig ist.

Die Idee bei der Large Eddy Simulation (LES) ist es nun, statt zeitlich räumlich zu mitteln, so daß große Wirbel im Gegensatz zu kleinen aufgelöst werden und dadurch nur der Einfluß der kleinen Wirbel auf die Grobstruktur modelliert werden muß. Betrachte dazu die Abbildung 2.8. Die Schwierigkeit des RANS-Ansatzes wird so auf die Modellierung der kleinskaligen Turbulenzen beschränkt, für die aufgrund ihrer charakteristischen Eigenschaften wie Kurzlebigkeit, weitgehende Homogenität und Isotropie einfachere und universellere Modelle gewählt werden können. Im Prinzip ist die LES also eine Art Mittelweg zwischen direkter numerischer Simulation (DNS) und den Reynolds-gemittelten Gleichungen (RANS).

Wir folgen in unserer Darstellung [6, 13, 38]. Zunächst wählen wir eine räumliche Filterung der Form

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}, t) := \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \Delta) \psi(\tilde{\mathbf{x}}, t) d\tilde{\mathbf{x}}, \quad (2.92)$$

wobei G die Filterfunktion mit der Filterweite Δ bezeichnet. Nimmt die Filterweite in den drei Raumrichtungen unterschiedliche Werte an, so kann sie als

$$\Delta = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{\frac{1}{3}} \quad (2.93)$$

gewählt werden.

Jede Strömungsgröße ψ läßt sich nun in einen Grobstrukturanteil $\bar{\psi}$ („Grid Scale“, GS) und einen Feinstrukturanteil ψ' („Subgrid Scale“, SGS), der nicht von dem Gitter erfaßt und somit modelliert werden muß, aufspalten

$$\psi = \bar{\psi} + \psi'. \quad (2.94)$$

Die natürlichste Wahl für G ist ein Top-Hat-Filter

$$G_i(x_i, \tilde{x}_i, \Delta_i) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_i} & \text{für } |x_i - \tilde{x}_i| \leq \frac{1}{2}\Delta_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.95)$$

mit

$$G(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \Delta) = \prod_{i=1}^3 G_i(x_i, \tilde{x}_i, \Delta_i), \quad (2.96)$$

was zu einer Integration der Strömungsgröße ψ über die Filterweite Δ führt. G ist dabei gerade so gewählt, daß zum einen das Integral über die Filterfunktion selber 1 ergibt und zum anderen im Grenzfall $\Delta \rightarrow 0$ die Grobstrukturvariable $\overline{\psi}$ gegen die ursprüngliche ungefilterte Variable ψ konvergiert. Eine LES wird also bei verschwindender Filterweite zu einer DNS.

Die eigentliche Wahl der Filterweite spielt bei der LES eine entscheidende Rolle. Zum einen sollte sie möglichst klein sein, um viele Wirbel aufzulösen und die zu modellierenden Feinstrukturen gering zu halten, zum anderen sollte sie aus numerischer Sicht sehr viel größer als die Maschenweite h_i des Gitternetzes sein, um Unabhängigkeit vom numerischen Verfahren zu gewährleisten. Als Kompromiß werden in der Praxis häufig Filterweiten im Bereich $h_i \leq \Delta_i \leq 2h_i$ verwendet.

Wollen wir nun die LES-Filterung auf unser Gleichungssystem anwenden, müssen wir zunächst festhalten, daß wir nicht mehr vom Reynoldsschen Postulat (2.69) ausgehen, das ja bereits bei der RANS-Mittelung sehr fraglich war. Es gilt also

$$\overline{\psi'} \neq 0 \quad \text{und} \quad \overline{\psi \psi'} \neq \overline{\psi} \overline{\psi'}. \quad (2.97)$$

Auch die Vertauschbarkeit der Filterung mit dem Differentialoperator gilt im allgemeinen nicht, sondern führt zu einem sogenannten Kommutationsfehler. Wie in [8] dargestellt wird, verschwindet dieser bei speziellen Filtern wie etwa bei obigem Top-Hat-Filter jedoch, da er von der Form

$$G_i(x_i, \tilde{x}_i, \Delta_i) = G_i(x_i - \tilde{x}_i, \Delta_i = \text{const}) \quad (2.98)$$

ist, wenn die Filterweite fest gewählt wird. Will man für komplexe turbulente Strömungen räumlich variable Filterweiten verwenden, so handelt man sich einen Fehler der Größenordnung $O(\Delta^2)$ ein, der für numerische Verfahren bis zur zweiten Ordnung akzeptabel ist, siehe dazu [6].

Analog zu RANS definieren wir uns noch das mit der Dichte gewichtete Mittel

$$\hat{\zeta} := \frac{\overline{\rho \zeta}}{\overline{\rho}} \quad (2.99)$$

für die Variablen \mathbf{u} und T mit

$$\zeta = \hat{\zeta} + \zeta'' \quad (2.100)$$

Auch hier gelten analog zu (2.97) die Reynoldsschen Postulate nicht.

Wenden wir nun die LES-Filterung auf die Kontinuitäts-, Zustands-, Impuls- und Temperaturgleichung an, so gelangen wir formal gesehen wie bei RANS zu (2.59), (2.60), (2.64) und (2.68), allerdings muß man die gefilterten Variablen anders interpretieren. Bei RANS sind es

zeitliche Mittelwerte über ein großes Zeitintervall, bei LES räumliche Mittelwerte über ein kleines Volumen.

Der Feinstruktur-Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}^{SGS}$ in der Impulsgleichung setzt sich also wie in (2.62) hergeleitet aus dem Leonard-Term \mathcal{L} , dem Kreuzspannungsterm \mathcal{C} und dem Reynolds-Spannungsterm \mathcal{R}

$$\boldsymbol{\tau}^{SGS} := \mathcal{L} + \mathcal{C} + \mathcal{R} \quad (2.101)$$

zusammen. Bei der RANS-Mittelung entfallen die ersten beiden unter Annahme des Reynoldsschen Postulats.

Der Leonard-Term beschreibt die Wechselwirkung der Wirbel in der Grobstruktur, wobei kleinskalige Turbulenz erzeugt wird. Da er nur gefilterte Variablen enthält, kann er direkt berechnet werden und bedarf keiner Modellierung.

Der Kreuzspannungsterm besteht aus den Wechselwirkungen der groben und feinen Skala und muß modelliert werden, da er auch die unbekanntenen Feinstrukturvariablen enthält. Ein üblicher Ansatz dazu ist

$$\mathcal{C} \cong \bar{\rho}(\widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}} - \widehat{\widehat{\mathbf{u}}} \circ \widehat{\widehat{\mathbf{u}}}). \quad (2.102)$$

Dies stellt das kompressible Analogon zu dem Ähnlichkeitsmodell von Bardina dar, bei dem von der Ähnlichkeit der kleinsten aufgelösten Skalen der Grobstruktur und der größten nicht aufgelösten Skalen der Feinstruktur ausgegangen wird, siehe [13, 45, 6].

Der Feinstruktur-Reynolds-Spannungsterm wird zunächst in seinen anisotropen und isotropen Anteil

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_A + \mathcal{R}_I \quad (2.103)$$

mit

$$(\cdot)_A := (\cdot) - \frac{1}{3}\text{spur}(\cdot)\mathbf{1} \quad (2.104)$$

und

$$(\cdot)_I := \frac{1}{3}\text{spur}(\cdot)\mathbf{1} \quad (2.105)$$

aufgespalten, wobei $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Für den anisotropen Term können wir dann eine kompressible Verallgemeinerung des Smagorinsky-Modells verwenden, das sich als

$$\mathcal{R}_A \cong -2C_A\Delta^2\bar{\rho}\|\widehat{\mathbf{S}}\|_F \left(\widehat{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}\text{spur}(\widehat{\mathbf{S}})\mathbf{1} \right) \quad (2.106)$$

schreiben läßt, wobei $\widehat{\mathbf{S}}$ den Deformationstensor

$$\widehat{\mathbf{S}} := \frac{1}{2}(\nabla\widehat{\mathbf{u}} + (\nabla\widehat{\mathbf{u}})^T) \quad (2.107)$$

und $\|\widehat{\mathbf{S}}\|_F$ die Frobenius-Norm

$$\|\widehat{\mathbf{S}}\|_F := \sqrt{\sum_{i,j} |\widehat{S}_{ij}|^2} \quad (2.108)$$

bezeichnet. Der isotrope Term wird mit

$$\mathcal{R}_I \cong \frac{2}{3} C_I \Delta^2 \bar{\rho} \|\widehat{\mathcal{S}}\|_F^2 \mathbf{1} \quad (2.109)$$

modelliert.

Für die Konstanten C_A und C_I werden in [45] die Werte 0,012 und 0,0066 angegeben, die aus einem Vergleich mit einer direkten numerischen Simulation von kompressibler isotroper Turbulenz entstanden sind. Prinzipiell sind diese Konstanten jedoch strömungsabhängig und variieren sowohl in der Zeit als auch im Ort. Weiter unten werden wir uns noch mit dem Modell von Germano beschäftigen, das die Konstanten dynamisch bestimmt.

Insgesamt lautet das Modell für den Feinstruktur-Spannungstensor also

$$\boldsymbol{\tau}^{SGS} \cong \bar{\rho} (\widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}}) - 2\Delta^2 \bar{\rho} \|\widehat{\mathcal{S}}\|_F \left[C_A \left(\widehat{\mathcal{S}} - \frac{1}{3} \text{spur}(\widehat{\mathcal{S}}) \mathbf{1} \right) - \frac{1}{3} C_I \|\widehat{\mathcal{S}}\|_F \mathbf{1} \right]. \quad (2.110)$$

Bei der Filterung der Temperaturgleichung (2.68) können wir zunächst der Argumentation in [13, 38] folgend die Näherungen

$$\begin{aligned} \overline{p \nabla \cdot \mathbf{u}} &\cong \bar{p} \nabla \cdot \widehat{\mathbf{u}}, \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{j}} &\cong \nabla \cdot \widehat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

verwenden. Dadurch muß nur der Feinstruktur-Wärmestrom

$$\mathbf{q}^{SGS} := \mathcal{L}_T + \mathcal{C}_T + \mathcal{R}_T \quad (2.111)$$

noch geeignet modelliert werden. Analog zum Kreuzspannungsterm setzen wir

$$\mathcal{C}_T \cong \bar{\rho} (\widehat{\mathbf{u}} \widehat{T} - \widehat{\mathbf{u}} \widehat{T}) \quad (2.112)$$

und

$$\mathcal{R}_T \cong -\frac{C_A}{\text{Pr}_t} \Delta^2 \bar{\rho} \|\widehat{\mathcal{S}}\|_F \nabla \widehat{T}, \quad (2.113)$$

wobei Pr_t die turbulente Prandtl-Zahl bezeichnet, für die häufig 0,7 gesetzt wird. Der Feinstruktur-Wärmestrom läßt sich also als

$$\mathbf{q}^{SGS} \cong \bar{\rho} (\widehat{\mathbf{u}} \widehat{T} - \widehat{\mathbf{u}} \widehat{T}) - \frac{C_A}{\text{Pr}_t} \Delta^2 \bar{\rho} \|\widehat{\mathcal{S}}\|_F \nabla \widehat{T} \quad (2.114)$$

modellieren.

Da die Konstanten C_A , C_I und Pr_t eigentlich im Ort und in der Zeit variieren, ist es sinnvoll, sie nicht mit heuristischen Werten für die jeweilige Strömung zu belegen, sondern sie während der Simulation dynamisch anzupassen. Die Idee dazu geht auf Germano [20] zurück. Er bestimmt in seinem sogenannten dynamischen Modell die Parameter eines Basismodells, also in unserem Fall die Konstanten C_A , C_I und Pr_t , indem er die kleinsten noch aufgelösten Skalen auswertet. Die Idee dabei ist dieselbe wie bei dem Modell von Bardina, nämlich daß die kleinsten aufgelösten Wirbel den größten Wirbeln der nicht aufgelösten Feinstruktur ähneln.

Der erste Schritt des dynamischen Modells besteht darin, einen Testfilter

$$\overleftrightarrow{\psi}(\mathbf{x}, t) := \int_{\Omega} \overleftrightarrow{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \overleftrightarrow{\Delta}) \psi(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (2.115)$$

mit einer größeren Filterweite $\overleftrightarrow{\Delta} > \Delta$ einzuführen. Den zugehörigen mit der Dichte gewichteten Mittelwert bezeichne

$$\tilde{\zeta} := \frac{\overleftrightarrow{\rho\zeta}}{\overleftrightarrow{\rho}}. \quad (2.116)$$

Mit diesem Testfilter werden nun die bereits gefilterten Gleichungen noch einmal gefiltert. Der zugehörige Spannungstensor hat dann analog zu (2.62) die Gestalt

$$\boldsymbol{\tau}^{TF} = \overleftrightarrow{\rho}(\overleftrightarrow{\widehat{\mathbf{u} \circ \mathbf{u}} - \widetilde{\mathbf{u}} \circ \widetilde{\mathbf{u}}}), \quad (2.117)$$

und es gilt der Zusammenhang

$$\boldsymbol{\kappa} := \overleftrightarrow{\rho}(\overleftrightarrow{\widehat{\mathbf{u} \circ \mathbf{u}} - \widetilde{\mathbf{u}} \circ \widetilde{\mathbf{u}}}) = \boldsymbol{\tau}^{TF} - \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}^{SGS}. \quad (2.118)$$

Dieser Ausdruck repräsentiert den Beitrag der kleinsten noch aufgelösten Skalen, nämlich diejenigen zwischen dem ursprünglichen Filter mit der Filterweite Δ und dem Testfilter mit der Weite $\overleftrightarrow{\Delta}$. Die Beziehung (2.118) ist auch als Germano-Identität bekannt.

Wenn wir nun die jeweiligen Feinstruktur-Spannungstensoren $\boldsymbol{\tau}^{SGS}$ und $\boldsymbol{\tau}^{TF}$ in ihren anisotropen und isotropen Anteil aufteilen und zur Modellierung jeweils das gemischte Bardina-Smagorinsky-Modell (2.110) wie in [53, 50] verwenden, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_A^{SGS} &\cong \underbrace{\overleftrightarrow{\rho}(\overleftrightarrow{\widehat{\mathbf{u} \circ \mathbf{u}} - \widetilde{\mathbf{u}} \circ \widetilde{\mathbf{u}}})_A}_{=: \mathcal{D}_A} - 2\Delta^2 \overleftrightarrow{\rho} C_A \|\widehat{\mathbf{S}}\|_F \overbrace{\left(\widehat{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} \text{spur}(\widehat{\mathbf{S}}) \mathbf{1}\right)}^{\widetilde{\phantom{\widehat{\mathbf{S}}}}}, \\ \boldsymbol{\tau}_A^{TF} &\cong \underbrace{\overleftrightarrow{\rho}(\overleftrightarrow{\widehat{\mathbf{u} \circ \mathbf{u}} - \widetilde{\mathbf{u}} \circ \widetilde{\mathbf{u}}})_A}_{=: \mathcal{E}_A} - 2\overleftrightarrow{\Delta}^2 \overleftrightarrow{\rho} C_A \|\widetilde{\mathbf{S}}\|_F \left(\widetilde{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} \text{spur}(\widetilde{\mathbf{S}}) \mathbf{1}\right), \\ \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_I^{SGS} &\cong \underbrace{\overleftrightarrow{\rho}(\overleftrightarrow{\widehat{\mathbf{u} \circ \mathbf{u}} - \widetilde{\mathbf{u}} \circ \widetilde{\mathbf{u}}})_I}_{=: \mathcal{D}_I} + \frac{2}{3} \Delta^2 \overleftrightarrow{\rho} \overbrace{C_I \|\widehat{\mathbf{S}}\|_F^2}^{\widetilde{\phantom{\widehat{\mathbf{S}}}}}, \\ \boldsymbol{\tau}_I^{TF} &\cong \underbrace{\overleftrightarrow{\rho}(\overleftrightarrow{\widehat{\mathbf{u} \circ \mathbf{u}} - \widetilde{\mathbf{u}} \circ \widetilde{\mathbf{u}}})_I}_{=: \mathcal{E}_I} + \frac{2}{3} \overleftrightarrow{\Delta}^2 \overleftrightarrow{\rho} C_I \|\widetilde{\mathbf{S}}\|_F^2 \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies nun in die Germano-Identität (2.118) ein, so läßt sich der anisotrope Anteil als

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}_A &= \boldsymbol{\tau}_A^{TF} - \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}_A^{SGS} \\ &= \mathcal{E}_A - \mathcal{D}_A - 2\overleftrightarrow{\rho} \left(\overleftrightarrow{\Delta}^2 C_A \|\widetilde{\mathbf{S}}\|_F \left(\widetilde{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} \text{spur}(\widetilde{\mathbf{S}}) \mathbf{1}\right) - \Delta^2 C_A \|\widehat{\mathbf{S}}\|_F \overbrace{\left(\widehat{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} \text{spur}(\widehat{\mathbf{S}}) \mathbf{1}\right)}^{\widetilde{\phantom{\widehat{\mathbf{S}}}}} \right) \end{aligned}$$

und der isotrope als

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_I &= \tau_I^{TF} - \overleftrightarrow{\tau}_I^{SGS} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_I - \boldsymbol{\mathcal{D}}_I + \frac{2}{3} \overleftrightarrow{\rho} \left(\overleftrightarrow{\Delta}^2 C_I \|\tilde{\widehat{\mathbf{S}}}\|_F^2 \mathbf{1} - \Delta^2 \overbrace{C_I \|\widehat{\mathbf{S}}\|_F^2}^{\mathbf{1}} \mathbf{1} \right)\end{aligned}$$

schreiben. C_A und C_I kommen in diesen Beziehungen noch innerhalb der Filteroperation vor. Vernachlässigt man diese Abhängigkeiten und zieht die Variablen heraus, so ergeben sich die Näherungen

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_A &\cong \boldsymbol{\varepsilon}_A - \boldsymbol{\mathcal{D}}_A - 2C_A \overleftrightarrow{\rho} \underbrace{\left(\overleftrightarrow{\Delta}^2 \|\tilde{\widehat{\mathbf{S}}}\|_F \left(\tilde{\widehat{\mathbf{S}}} - \frac{1}{3} \text{spur}(\tilde{\widehat{\mathbf{S}}}) \mathbf{1} \right) - \Delta^2 \|\widehat{\mathbf{S}}\|_F \left(\widehat{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} \text{spur}(\widehat{\mathbf{S}}) \mathbf{1} \right) \right)}_{=: \mathcal{M}}, \\ \mathcal{K}_I &\cong \boldsymbol{\varepsilon}_I - \boldsymbol{\mathcal{D}}_I + \frac{2}{3} C_I \overleftrightarrow{\rho} \underbrace{\left(\overleftrightarrow{\Delta}^2 \|\tilde{\widehat{\mathbf{S}}}\|_F^2 \mathbf{1} - \Delta^2 \|\widehat{\mathbf{S}}\|_F^2 \mathbf{1} \right)}_{=: \mathcal{N}}.\end{aligned}$$

Da wir nun zwei Gleichungssysteme mit jeweils einer einzigen Unbekannten C_A bzw. C_I aufgestellt haben, verwenden wir zur Lösung nach einem Vorschlag von Lilly [34] die Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Die Quadrate der Fehler sind dabei über

$$\begin{aligned}Q_A &:= \|\mathcal{K}_A - \boldsymbol{\varepsilon}_A + \boldsymbol{\mathcal{D}}_A + 2C_A \mathcal{M}\|_F^2 \\ &= \sum_{i,j} (\mathcal{K}_{ij}^A - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^A + \mathcal{D}_{ij}^A + 2C_A \mathcal{M}_{ij})^2, \\ Q_I &:= \left\| \mathcal{K}_I - \boldsymbol{\varepsilon}_I + \boldsymbol{\mathcal{D}}_I - \frac{2}{3} C_I \mathcal{N} \right\|_F^2 \\ &= \sum_{i,j} \left(\mathcal{K}_{ij}^I - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^I + \mathcal{D}_{ij}^I - \frac{2}{3} C_I \mathcal{N}_{ij} \right)^2\end{aligned}$$

definiert, und die Minimierungsbedingungen sind

$$\frac{\partial Q_A}{\partial C_A} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial Q_I}{\partial C_I} = 0.$$

Daraus ergeben sich zur Berechnung von C_A und C_I

$$C_A = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{i,j} (\mathcal{K}_{ij}^A - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^A + \mathcal{D}_{ij}^A) \mathcal{M}_{ij}}{\sum_{i,j} \mathcal{M}_{ij}^2}, \quad (2.119)$$

$$C_I = \frac{3}{2} \frac{\sum_{i,j} (\mathcal{K}_{ij}^I - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^I + \mathcal{D}_{ij}^I) \mathcal{N}_{ij}}{\sum_{i,j} \mathcal{N}_{ij}^2}. \quad (2.120)$$

Analog erhalten wir bei der Einführung des Testfilters die Germano-Identität für den Feinstruktur-Wärmestrom

$$\mathcal{K}_T := \overleftrightarrow{\rho}(\widetilde{\widehat{\mathbf{u}T}} - \widetilde{\widehat{\mathbf{u}}T}) = \mathbf{q}^{TF} - \overleftrightarrow{\mathbf{q}}^{SGS}. \quad (2.121)$$

Eingesetzt ergibt sich, wenn man die Modellierung (2.114) verwendet und die Prandtl-Zahl aus dem Filter herauszieht,

$$\mathcal{K}_T \cong \underbrace{\overleftrightarrow{\rho}(\widetilde{\widehat{\mathbf{u}T}} - \widetilde{\widehat{\mathbf{u}}T})}_{=: \mathcal{G}} - \underbrace{\overleftrightarrow{\rho}(\widetilde{\widehat{\mathbf{u}T}} - \widetilde{\widehat{\mathbf{u}}T})}_{=: \mathcal{F}} - \frac{C_A}{\text{Pr}_t} \overleftrightarrow{\rho} \underbrace{\left(\overleftrightarrow{\Delta^2} \|\widetilde{\widehat{\mathbf{S}}}\|_F \nabla \widehat{T} - \Delta^2 \|\widehat{\widehat{\mathbf{S}}}\|_F \nabla \widehat{T} \right)}_{=: \mathcal{H}}.$$

Beachte, daß hier \mathcal{K}_T , \mathcal{F} , \mathcal{G} und \mathcal{H} Vektoren und keine Tensoren bezeichnen. Mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate läßt sich schließlich die turbulente Prandtl-Zahl über

$$\text{Pr}_t = - \frac{C_A \sum_i \mathcal{H}_i^2}{\sum_i (\mathcal{K}_i^T - \mathcal{G}_i + \mathcal{F}_i) \mathcal{H}_i} \quad (2.122)$$

bestimmen.

Wir können nun also abhängig vom Ort und von der Zeit die Werte von C_A , C_I und Pr_t berechnen. In der Literatur findet sich noch eine Vielzahl von Varianten dieses dynamischen Modells, wie etwa in [6, 51] zusammengestellt wird.

2.8.4. Entdimensionalisierung der LES-Gleichungen

Fassen wir zunächst noch einmal die LES-gemittelten Gleichungen zusammen. Die Kontinuitätsgleichung (2.59)

$$\bar{\rho}_t + \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}}) = 0$$

und die Zustandsgleichung (2.60)

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \widehat{T}$$

ändern sich bei der LES-Filterung nicht, während in der Impulsgleichung (2.64)

$$\widehat{\mathbf{u}}_t + (\widehat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{u}} + 2\Omega \times \widehat{\mathbf{u}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{p} = -g\mathbf{k} - \boxed{\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{SGS}}$$

ein Zusatzterm mit dem Feinstruktur-Spannungstensor (2.101)

$$\boldsymbol{\tau}^{SGS} := \bar{\rho}(\widehat{\widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}}} - \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}}) + \bar{\rho}(\widehat{\widehat{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u}''} + \widehat{\mathbf{u}'' \circ \widehat{\mathbf{u}}}) + \bar{\rho} \widehat{\mathbf{u}'' \circ \mathbf{u}''}$$

auftritt. Ebenso erhält man in der Temperaturgleichung (2.68)

$$c_v(\widehat{T}_t + \widehat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \widehat{T}) + \boxed{c_v \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathbf{q}^{SGS}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{p} \nabla \cdot \widehat{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \widehat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{Q}$$

einen Zusatzterm mit dem Feinstruktur-Wärmestrom (2.111)

$$\mathbf{q}^{SGS} := \bar{\rho}(\widehat{\mathbf{u}}\widehat{T} - \widehat{\mathbf{u}}\widehat{T}) + \bar{\rho}(\widehat{\mathbf{u}}\widehat{T}'' + \widehat{\mathbf{u}}''\widehat{T}) + \bar{\rho}\widehat{\mathbf{u}}''\widehat{T}''.$$

Zwei weitere Zusatzterme in der Temperaturgleichung können nach [13, 38] vernachlässigt werden.

Um das Gleichungssystem zu schließen, müssen die beiden gerahmten Terme in der Impuls- und Temperaturgleichung noch geeignet modelliert werden. Dies geschieht mit dem gemischten Bardina-Smagorinsky-Modell (2.110) und (2.114)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{SGS} &\cong \underbrace{\bar{\rho}(\widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{u}} \circ \widehat{\mathbf{u}})}_{=: \boldsymbol{\tau}_1} - \underbrace{2\Delta^2 \bar{\rho} C_A \|\widehat{\mathbf{S}}\|_F \left(\widehat{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} \text{spur}(\widehat{\mathbf{S}}) \mathbf{1} \right)}_{=: \boldsymbol{\tau}_2} - \underbrace{\frac{2}{3} \Delta^2 \bar{\rho} C_I \|\widehat{\mathbf{S}}\|_F^2 \mathbf{1}}_{=: \boldsymbol{\tau}_3}, \\ \mathbf{q}^{SGS} &\cong \underbrace{\bar{\rho}(\widehat{\mathbf{u}}\widehat{T} - \widehat{\mathbf{u}}\widehat{T})}_{=: \mathbf{q}_1} - \underbrace{\frac{C_A}{\text{Pr}_t} \Delta^2 \bar{\rho} \|\widehat{\mathbf{S}}\|_F \nabla \widehat{T}}_{=: \mathbf{q}_2}, \end{aligned}$$

wobei die Konstanten C_A , C_I und Pr_t dynamisch, also in Abhängigkeit von Ort und Zeit, nach dem Modell von Germano (2.119), (2.120) und (2.122) bestimmt werden können.

Zum Schluß spalten wir die modellierten Zusatzterme noch in ihren horizontalen und vertikalen Anteil auf, um sie in dimensionsloser Form angeben zu können. Beachte zunächst, daß

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2}(\nabla \widehat{\mathbf{u}} + (\nabla \widehat{\mathbf{u}})^T) \\ &= \frac{1}{2}(\nabla_{||} \widehat{\mathbf{u}}_{||} + \nabla_{||} \widehat{\mathbf{u}}_{\perp} + \nabla_{\perp} \widehat{\mathbf{u}}_{||} + \nabla_{\perp} \widehat{\mathbf{u}}_{\perp} + (\nabla_{||} \widehat{\mathbf{u}}_{||} + \nabla_{||} \widehat{\mathbf{u}}_{\perp} + \nabla_{\perp} \widehat{\mathbf{u}}_{||} + \nabla_{\perp} \widehat{\mathbf{u}}_{\perp})^T) \\ &= \frac{u_{\text{ref}}^{||}}{2l_{\text{ref}}^{||}}(\nabla_{||}^* \widehat{\mathbf{u}}_{||}^* + \nabla_{\perp}^* \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^* + (\nabla_{||}^* \widehat{\mathbf{u}}_{||}^* + \nabla_{\perp}^* \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*)^T) + \frac{u_{\text{ref}}^{\perp}}{2l_{\text{ref}}^{||}}(\nabla_{||}^* \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^* + (\nabla_{||}^* \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*)^T) + \\ &\quad \frac{u_{\text{ref}}^{||}}{2l_{\text{ref}}^{\perp}}(\nabla_{\perp}^* \widehat{\mathbf{u}}_{||}^* + (\nabla_{\perp}^* \widehat{\mathbf{u}}_{||}^*)^T) \end{aligned}$$

gilt. Da wir uns aber im kleinskaligen bodennahen Bereich befinden, können wir die entsprechenden Referenzgrößen aus dem Kapitel 2.7.4 übernehmen und so den Ausdruck noch zu

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{S}} &= \frac{u_{\text{ref}}^{||}}{2l_{\text{ref}}^{||}}(\nabla_{||}^* \widehat{\mathbf{u}}_{||}^* + \nabla_{||}^* \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^* + \nabla_{\perp}^* \widehat{\mathbf{u}}_{||}^* + \nabla_{\perp}^* \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^* + (\nabla_{||}^* \widehat{\mathbf{u}}_{||}^* + \nabla_{||}^* \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^* + \nabla_{\perp}^* \widehat{\mathbf{u}}_{||}^* + \nabla_{\perp}^* \widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*)^T) \\ &= \frac{u_{\text{ref}}^{||}}{2l_{\text{ref}}^{||}}(\nabla^* \widehat{\mathbf{u}}^* + (\nabla^* \widehat{\mathbf{u}}^*)^T) \end{aligned}$$

vereinfachen. Für die kleinskaligen Werte gilt nämlich

$$u_{\text{ref}}^{||} = u_{\text{ref}}^{\perp} \quad \text{und} \quad l_{\text{ref}}^{||} = l_{\text{ref}}^{\perp}.$$

Mit dieser Annahme ist die Entdimensionalisierung des Terms $\widehat{\mathbf{S}}$ also unabhängig von der Aufspaltung in den horizontalen und vertikalen Anteil, so daß sich vereinfachend und analog

zum Vorgehen in den Kapiteln 2.7.1 und 2.7.2 und mittels (A.18)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_1\right)_{\parallel} &= \frac{(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{l_{\text{ref}}^{\parallel}}\frac{1}{\bar{\rho}^*}\left(\nabla_{\parallel}^*\cdot\left(\bar{\rho}^*(\widehat{\mathbf{u}}_{\parallel}^*\circ\widehat{\mathbf{u}}_{\parallel}^*-\widehat{\mathbf{u}}_{\parallel}^*\circ\widehat{\mathbf{u}}_{\parallel}^*)\right)+\nabla_{\perp}^*\cdot\left(\bar{\rho}^*(\widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*\circ\widehat{\mathbf{u}}_{\parallel}^*-\widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*\circ\widehat{\mathbf{u}}_{\parallel}^*)\right)\right), \\
\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_1\right)_{\perp} &= \frac{(u_{\text{ref}}^{\perp})^2}{l_{\text{ref}}^{\perp}}\frac{1}{\bar{\rho}^*}\left(\nabla_{\parallel}^*\cdot\left(\bar{\rho}^*(\widehat{\mathbf{u}}_{\parallel}^*\circ\widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*-\widehat{\mathbf{u}}_{\parallel}^*\circ\widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*)\right)+\nabla_{\perp}^*\cdot\left(\bar{\rho}^*(\widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*\circ\widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*-\widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*\circ\widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*)\right)\right), \\
\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_2\right)_{\parallel} &= \frac{\Delta^2 C_A^{\text{ref}}(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{2(l_{\text{ref}}^{\parallel})^2 l_{\text{ref}}^{\parallel}}\frac{1}{\bar{\rho}^*}\nabla_{\parallel}^*\cdot\left(\bar{\rho}^* C_A^* \|\widehat{\mathbf{S}}^*\|_F\left(\widehat{\mathbf{S}}^*-\frac{1}{3}\text{spur}(\widehat{\mathbf{S}}^*)\mathbf{1}\right)\right), \\
\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_2\right)_{\perp} &= \frac{\Delta^2 C_A^{\text{ref}}(u_{\text{ref}}^{\perp})^2}{2(l_{\text{ref}}^{\perp})^2 l_{\text{ref}}^{\perp}}\frac{1}{\bar{\rho}^*}\nabla_{\perp}^*\cdot\left(\bar{\rho}^* C_A^* \|\widehat{\mathbf{S}}^*\|_F\left(\widehat{\mathbf{S}}^*-\frac{1}{3}\text{spur}(\widehat{\mathbf{S}}^*)\mathbf{1}\right)\right), \\
\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_3\right)_{\parallel} &= \frac{\Delta^2 C_I^{\text{ref}}(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}{6(l_{\text{ref}}^{\parallel})^2 l_{\text{ref}}^{\parallel}}\frac{1}{\bar{\rho}^*}\nabla_{\parallel}^*\cdot\left(\bar{\rho}^* C_I^* \|\widehat{\mathbf{S}}^*\|_F^2 \mathbf{1}\right), \\
\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_3\right)_{\perp} &= \frac{\Delta^2 C_I^{\text{ref}}(u_{\text{ref}}^{\perp})^2}{6(l_{\text{ref}}^{\perp})^2 l_{\text{ref}}^{\perp}}\frac{1}{\bar{\rho}^*}\nabla_{\perp}^*\cdot\left(\bar{\rho}^* C_I^* \|\widehat{\mathbf{S}}^*\|_F^2 \mathbf{1}\right)
\end{aligned}$$

schreiben läßt.

Mit den passenden Vorfaktoren für die horizontale und vertikale Impulsgleichung erhalten wir so insgesamt

$$\begin{aligned}
\frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{(u_{\text{ref}}^{\parallel})^2}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}^{SGS}\right)_{\parallel} &= \underbrace{1}_{\boxed{10^0}}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_1\right)_{\parallel}^* - \underbrace{\frac{\Delta^2 C_A^{\text{ref}}}{2(l_{\text{ref}}^{\parallel})^2}}_{\boxed{10^{-2}}}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_2\right)_{\parallel}^* - \underbrace{\frac{\Delta^2 C_I^{\text{ref}}}{6(l_{\text{ref}}^{\parallel})^2}}_{\boxed{10^{-3}}}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_3\right)_{\parallel}^*, \\
\frac{l_{\text{ref}}^{\perp}}{(u_{\text{ref}}^{\perp})^2}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}^{SGS}\right)_{\perp} &= \underbrace{1}_{\boxed{10^0}}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_1\right)_{\perp}^* - \underbrace{\frac{\Delta^2 C_A^{\text{ref}}}{2(l_{\text{ref}}^{\perp})^2}}_{\boxed{10^{-2}}}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_2\right)_{\perp}^* - \underbrace{\frac{\Delta^2 C_I^{\text{ref}}}{6(l_{\text{ref}}^{\perp})^2}}_{\boxed{10^{-3}}}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_3\right)_{\perp}^*.
\end{aligned}$$

Für die zugehörigen Kennzahlen wurden die Referenzgrößen $C_A^{\text{ref}} = 0,012$ und $C_I^{\text{ref}} = 0,0066$ aus [45] und die kleinskaligen bodennahen Werte aus dem Kapitel 2.7.4 mit $\Delta = 10^2$ m verwendet.

Entsprechend führen wir nun noch den Feinstruktur-Wärmestrom in die dimensionslose Darstellung über

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\cdot\mathbf{q}_1 &= \frac{u_{\text{ref}}^{\parallel} T_{\text{ref}}}{l_{\text{ref}}^{\parallel}}\frac{1}{\bar{\rho}^*}\left(\nabla_{\parallel}^*\cdot\left(\bar{\rho}^*(\widehat{\mathbf{u}}_{\parallel}^*\widehat{T}^*-\widehat{\mathbf{u}}_{\parallel}^*\widehat{T}^*)\right)+\nabla_{\perp}^*\cdot\left(\bar{\rho}^*(\widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*\widehat{T}^*-\widehat{\mathbf{u}}_{\perp}^*\widehat{T}^*)\right)\right), \\
\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\cdot\mathbf{q}_2 &= \frac{\Delta^2 C_A^{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\parallel} T_{\text{ref}}}{2\text{Pr}_t^{\text{ref}} l_{\text{ref}}^{\parallel} (l_{\text{ref}}^{\parallel})^2}\left(\frac{1}{\bar{\rho}^*}\nabla_{\parallel}^*\cdot\left(\frac{C_A^*}{\text{Pr}_t^*}\bar{\rho}^*\|\widehat{\mathbf{S}}^*\|_F\nabla_{\parallel}^*\widehat{T}^*\right)\right)+ \\
&\quad \frac{\Delta^2 C_A^{\text{ref}} u_{\text{ref}}^{\perp} T_{\text{ref}}}{2\text{Pr}_t^{\text{ref}} l_{\text{ref}}^{\perp} (l_{\text{ref}}^{\perp})^2}\left(\frac{1}{\bar{\rho}^*}\nabla_{\perp}^*\cdot\left(\frac{C_A^*}{\text{Pr}_t^*}\bar{\rho}^*\|\widehat{\mathbf{S}}^*\|_F\nabla_{\perp}^*\widehat{T}^*\right)\right).
\end{aligned}$$

Mit dem passenden Vorfaktor für die Temperaturgleichung erhalten wir insgesamt

RANS	LES
<ul style="list-style-type: none"> • Zeitliche Mittelung über großes Zeitintervall. • Modellierung des gesamten Turbulenzspektrums erforderlich. • Parametrisierungen sehr strömungsabhängig, wenig allgemeingültig. 	<ul style="list-style-type: none"> • Räumliche Mittelung über kleinen Bereich. • Modellierung nur der kleinskaligen Turbulenzen erforderlich. • Parametrisierungen allgemeingültiger wegen Kurzlebigkeit, Homogenität, Isotropie der kleinen Wirbel.
<ul style="list-style-type: none"> • Annahme des Reynoldsschen Postulats. • Prandtl'sches Austauschkonzept. • Berechnung des turbulenten Viskositätskoeffizienten nach O'Brien. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ähnlichkeitsmodell von Bardina für \mathcal{C}. • Smagorinsky-Modell für \mathcal{R}. • Dynamische Bestimmung der Konstanten nach Germano.

Tabelle 2.4.: Wesentliche Unterschiede zwischen dem RANS- und LES-Konzept und die verschiedenen Modellierungsansätze.

$$\frac{l_{\text{ref}}^{\parallel}}{u_{\text{ref}}^{\parallel} T_{\text{ref}}} \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathbf{q}^{SGS} = \underbrace{1}_{10^0} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathbf{q}_1 \right)^* - \underbrace{\frac{\Delta^2 C_A^{\text{ref}}}{2 \text{Pr}_t^{\text{ref}} (l_{\text{ref}}^{\parallel})^2}}_{10^{-2}} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathbf{q}_2 \right)_{\parallel}^* - \underbrace{\frac{\Delta^2 C_A^{\text{ref}}}{2 \text{Pr}_t^{\text{ref}} (l_{\text{ref}}^{\perp})^2}}_{10^{-2}} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathbf{q}_2 \right)_{\perp}^*,$$

wobei für die Kennzahlen auch hier die kleinskaligen bodennahen Werte aus dem Kapitel 2.7.4 und die Referenzgrößen aus [45] mit $\Delta = 10^2$ m und $\text{Pr}_t^{\text{ref}} = 0,7$ verwendet wurden.

Die turbulenten Zusatzterme in der horizontalen und vertikalen Impulsgleichung und in der Temperaturgleichung haben also jeweils eine Größenordnung von 10^0 , vergleiche dazu die Tabellen 2.2 und 2.3.

Abschließend seien noch einmal in der Tabelle 2.4 die wesentlichen Unterschiede zwischen den Konzepten RANS und LES und die verschiedenen Modellierungsansätze festgehalten.

3. Gittergenerierung

Nun stellt sich die Frage, auf welchem Gitter wir die Gleichungen aus dem Kapitel 2 lösen wollen. Zunächst benötigen wir dazu ein Höhenmodell der Erdoberfläche, wie es im GTOPO30-Datensatz [48] bereit gestellt wird. Darin ist die Erde im Abstand von 30 Bogensekunden, was etwa einem Punktabstand von 1 km entspricht, vermessen.

Der GTOPO30-Datensatz ist allerdings viel zu groß, um ihn mit heutigen Rechnerkapazitäten komplett als Randgitter für unsere Strömungsgleichungen zu verwenden. Wir sind also gezwungen, ihn geeignet zu komprimieren. Dabei wollen wir zum einen eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Gitterpunkte erreichen und dabei insbesondere keine Singularitäten an den Polen erzeugen und zum anderen eine statische Adaptivität in dem Sinne ermöglichen, daß rauhes Gelände feiner aufgelöst wird als flaches, da dort mit stärkeren Verwirbelungen zu rechnen ist.

Dazu greifen wir auf Prinzipien der Computergraphik zurück [21] und nutzen Vorkenntnisse aus der Beschäftigung mit einem interaktiven Visualisierungsprogramm der Erdoberfläche. Das Konzept der SOAR Terrain Engine [35, 22] für ebene Landschaftsdatsätze wurde im Vorfeld dieser Arbeit auf die gesamte Erde übertragen [1]. So sind wir in der Lage, dieses Gitter als Rand für die Atmosphärentriangulierung zu verwenden. Die Höhe der Atmosphäre wird dabei als dritte Dimension hinzugefügt. In der Abbildung 3.1 sind Screenshots des Programms zu sehen.

3.1. Triangulierung der Erdoberfläche

Ist das Prinzip zur Erzeugung eines Dreiecksnetzes für ein ebenes Höhenmodell bzw. einen Landschaftsausschnitt bekannt, worauf wir in den folgenden Kapiteln 3.1.1 und 3.1.2 eingehen werden, so läßt sich dies auch auf die gesamte Erde übertragen. Dazu wählen wir einen Würfel als Grundobjekt, behandeln die einzelnen Seiten wie ebene Landschaftsdatsätze und erzeugen so ein Gitter, das dann im Anschluß nur noch auf die Erdkugel projiziert werden muß. Dieses Konzept wird in der Abbildung 3.2 veranschaulicht.

Wir erreichen so eine annähernd gleichmäßige Verteilung der Gitterpunkte auf der Erdoberfläche, erzeugen keine Singularitäten wie bei Polarkoordinaten und können das Prinzip der ebenen Landschaftstriangulierung direkt übertragen. Wie nun die einzelnen Seiten konkret trianguliert werden, sehen wir uns in den nächsten Kapiteln an.

3.1.1. Bisektionsverfahren

Betrachten wir nun eine einzelne Würfelseite, deren größtes Gitter aus zwei Dreiecken besteht. Nach der Bisektionsstrategie erhalten wir dann das nächstfeinere Gitter, indem wir in der Mitte der längsten Seite eines Dreiecks einen neuen Knoten einfügen und mit der gegenüberliegenden Ecke verbinden, wie in der Abbildung 3.3 dargestellt wird. Man erhält so eine Hierarchie von

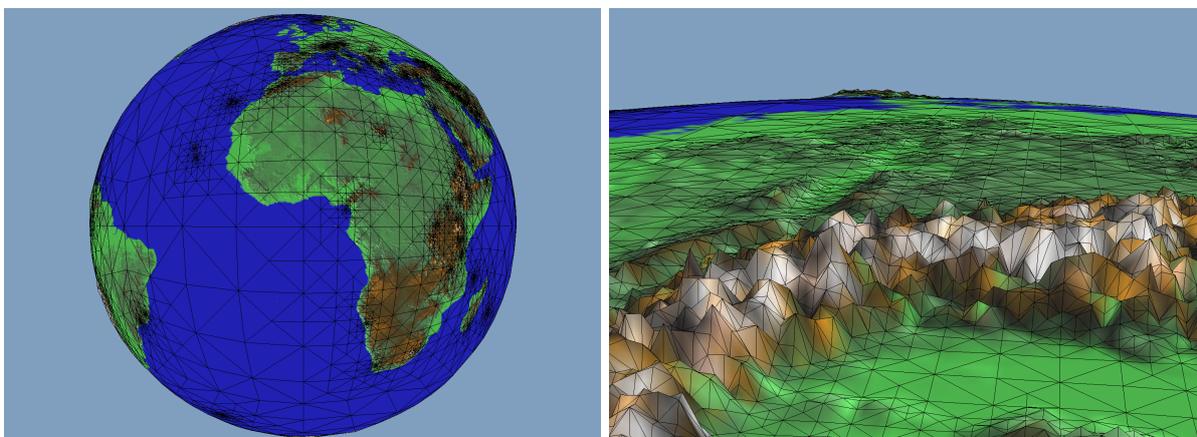


Abb. 3.1.: Screenshots des Erdvisualisierungsprogramms [1]. Blick auf die Erde und Blick über die Alpen in Richtung Norden. Zur besseren Anschauung wurde die Erde überhöht, also ihre Höhenwerte mit einem Faktor gestreckt.

regulären Gittern, die mit einem sogenannten Level numeriert werden können und die jeweils aus rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecken derselben Größe bestehen.

Für die feinste Auflösung haben wir dazu aus dem GTOPO30-Datensatz die Höhenwerte für 1025^2 Knoten pro Würfelseite ausgelesen. Abzüglich doppelter Ränder bedeutet dies eine Überdeckung der Erde mit 6.291.458 Knoten, was einer mittleren horizontalen Maschenweite von 9 km entspricht.

Dieses Gitter übersteigt als Randgitter für unsere Strömungsgleichungen immer noch bei weitem die heutigen Rechnerkapazitäten, so daß wir es noch weiter komprimieren müssen. Anstatt nun global zu einer gröberen Maschenweite überzugehen und dabei viele Details der Landschaft zu verlieren, kann man auch ein adaptives Dreiecksgitter erzeugen, bei dem nur dort vergrößert wird, wo das Gelände relativ flach ist.

An ein solches adaptives Gitter müssen allerdings bestimmte Forderungen gestellt werden. Dazu verdeutliche man sich zunächst die Vater-Kind-Struktur der Knoten eines regulären Dreiecksnetzes anhand der Abbildung 3.3. Ein Verfeinerungsknoten wird auf der längsten Seite eines Dreiecks eingefügt und gehört daher stets zu zwei benachbarten Dreiecken. Ränder gibt es wegen der Würfelstruktur, die in der Abbildung 3.2 dargestellt ist, nicht. So lassen sich also jedem Verfeinerungsknoten, der im folgenden auch Kindknoten genannt wird, zwei Dreiecke zuordnen und somit auch zwei Vaterknoten, die im Netz enthalten sein müssen, ehe der Kindknoten eingefügt werden kann. Die Abbildung 3.3 verdeutlicht diesen Zusammenhang. So hat jeder Vaterknoten vier Kinder und jeder Kindknoten zwei Väter.

Wenn wir nun ein adaptives Dreiecksnetz generieren wollen, in dem bestimmte Gebiete feiner aufgelöst sind als andere, müssen wir sicherstellen, daß zu jedem Knoten seine beiden Väter im Netz enthalten sind. Sonst kann es nämlich zu sogenannten hängenden Knoten kommen, was zu Unstetigkeiten in der Landschaft führt. Ein solcher hängender Knoten ist in der Abbildung 3.4 a) dargestellt.

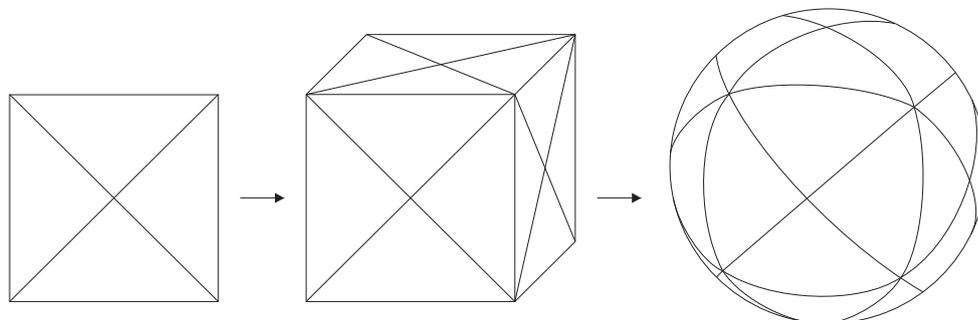


Abb. 3.2.: Übertragung des ebenen Dreiecksnetzes auf den Würfel und dann mittels Projektion auf die Kugel.

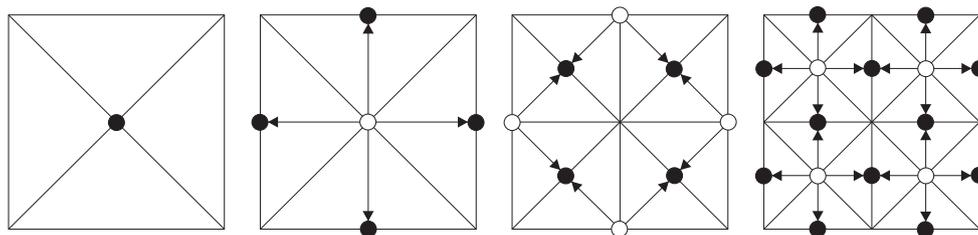


Abb. 3.3.: Bisektionsstrategie. Die jeweiligen Verfeinerungsknoten sind schwarz markiert und die Väter weiß. Die Pfeile verdeutlichen die Vater-Kind-Beziehung.

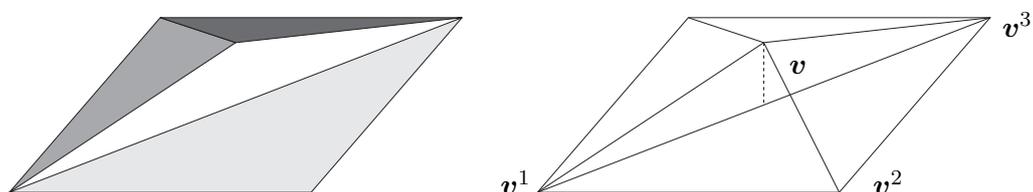


Abb. 3.4.: a) Problem der hängenden Knoten. b) 1-level look ahead Fehler. Gestrichelt ist die lokale Höhenänderung durch Einfügen eines Verfeinerungsknotens v eingezeichnet.

3.1.2. Geländeabhängige Adaptivität

Rauhes Gelände soll feiner aufgelöst werden als flaches. Wir möchten also den lokalen Höhenunterschied, der entsteht, wenn ein Knoten eingefügt bzw. weggelassen wird, als Kriterium für eine adaptive Verfeinerung verwenden. Ausgehend vom größten Gitter müssen wir also bei jedem Dreieck überprüfen, ob es einer Verfeinerung bedarf. Ein solcher Durchlauf nennt sich top-down, da mit dem größten Gitter begonnen und so lange verfeinert wird, bis ein bestimmtes Abbruchkriterium erfüllt ist.

Betrachten wir dazu zunächst einmal den Kernalgorithmus zur Konstruktion eines solchen adaptiven Dreiecksnetzes:

```

visit(Triangle T, Level l) {
  if (metric(T) <= eps or l=lmax) {
    render(T)
  }
  else {
    visit(Child1(T), l+1)
    visit(Child2(T), l+1)
  }
}

```

Eine auf jedem Dreieck T definierte Metrik ist dabei das lokale Abbruchkriterium, das in unserem Fall ein Maß dafür sein soll, wie rauh das Gelände ist. Die Frage ist nun, welche Bedingungen wir an die Metrik $\mu(T)$ stellen müssen, damit sie zum einen die gewünschte Aussagekraft hat und zum anderen hängende Knoten wie in der Abbildung 3.4 a) ausgeschlossen werden.

Ein erster Ansatz für letztere Bedingung ist, die Metrik nicht auf dem Dreieck T , sondern auf seinem Verfeinerungsknoten $v(T)$ zu definieren

$$\mu(T) = \mu(v(T)). \quad (3.1)$$

Dadurch stellen wir sicher, daß zwei Dreiecke mit demselben Verfeinerungsknoten dieselbe Metrik erhalten und deshalb auch gleichzeitig verfeinert werden. Dies schließt jedoch noch nicht alle hängenden Knoten aus, so daß wir auch noch die sogenannte Saturierungseigenschaft

$$\mu(T) \geq \max\{\mu(\text{Child}_1(T)), \mu(\text{Child}_2(T))\} \quad (3.2)$$

fordern müssen. Mit diesem Monotoniekriterium sind nun alle Väter eines zu zeichnenden Knotens im Netz enthalten und somit hängende Knoten ausgeschlossen.

Mit obigem Algorithmus kann so vom größten Gitter ausgehend top-down ein adaptives Dreiecksnetz erzeugt werden. Nur die konkrete Konstruktion der Metrik μ fehlt uns noch.

Wie bereits motiviert, soll die Metrik ein Maß dafür sein, wie rauh das Gelände ist. Wird ein neuer Knoten in das Dreiecksnetz eingefügt, ändert sich die Höhe dort lokal, und zwar wird an dieser Stelle nun statt des linearen Interpolationswertes die exakte Höhe des Knotens verwendet. Dieser Höhenunterschied, auch „1-level look ahead“ Fehler genannt, soll uns nun als Maß für den geometrischen Fehler dienen, siehe dazu die Abbildung 3.4 b).

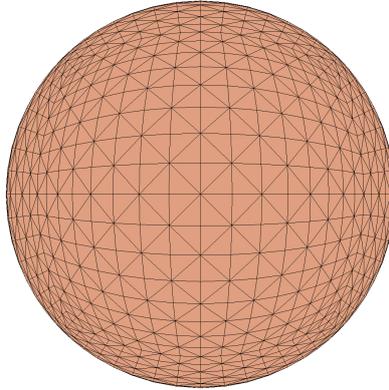


Abb. 3.5.: Ein uniform trianguliertes Gitter der Erdoberfläche.

Da nur die Höhenwerte der Knoten in die Berechnung der Metrik eingehen, läßt sich dies für jeden Knoten noch vor der Projektion des Würfelgitters auf die Kugel durchführen. Sei dazu \mathbf{v} der Verfeinerungsknoten des Dreiecks $T = \Delta(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3)$, wobei \mathbf{v}^1 und \mathbf{v}^3 die Eckpunkte des Dreiecks sind, die die Hypotenuse einschließen. v_z, v_z^1 und v_z^3 stehen für die Höhenwerte in den jeweiligen Knoten. Die geometrische Metrik definieren wir dann über

$$\tilde{\mu}_{geo}(T) := \left| v_z - \frac{1}{2} (v_z^1 + v_z^3) \right|. \quad (3.3)$$

Diese Metrik erfüllt im allgemeinen nicht die Saturierungseigenschaft (3.2), was sich jedoch in einem bottom-up Durchlauf über die folgende Formel

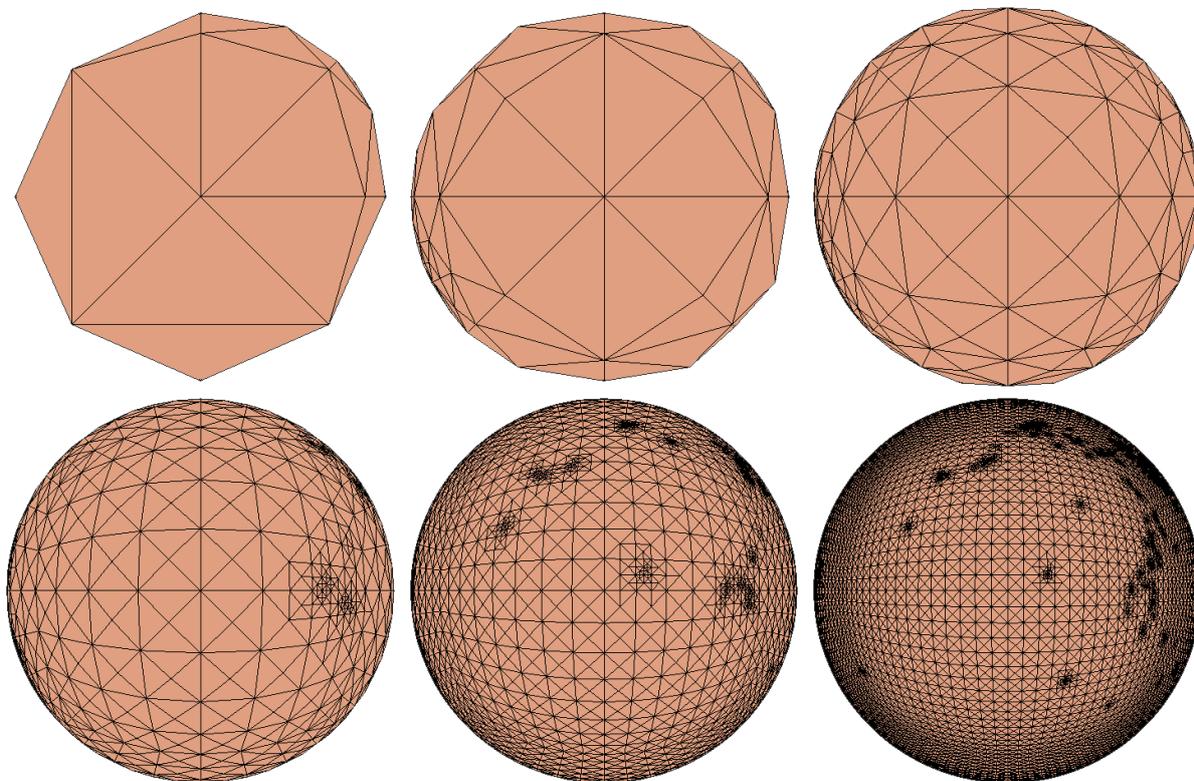
$$\mu_{geo}(T) := \max \{ \tilde{\mu}_{geo}(T), \mu_{geo}(\text{Child}_1(T)), \mu_{geo}(\text{Child}_2(T)) \} \quad (3.4)$$

korrigieren läßt. Mit bottom-up ist ein Durchlauf vom feinsten zum größten Level gemeint, und es gelte $\mu_{geo}(T) = \tilde{\mu}_{geo}(T)$ auf dem feinsten Level.

Wir können nun also auf diese Art in Abhängigkeit der Rauigkeit des Geländes ein adaptives Dreiecksnetz erstellen. Natürlich sind auch noch viele andere Metriken denkbar. So sind etwa bei einem Visualisierungsprogramm noch Verfeinerungen in Abhängigkeit des Blickpunkts, der Blickrichtung und des Sichtbarkeitsbereiches sinnvoll, deren Metriken dann mittels simpler algebraischer Verknüpfungen kombinierbar sind [22, 1]. Für unseren Fall wäre es auch noch denkbar, bestimmte Gebiete wie etwa Deutschland oder Europa stärker aufzulösen, was mit obigem Konzept kein Problem darstellt. Im folgenden beschränken wir uns jedoch auf die geometrische Metrik (3.4).

In Abhängigkeit einer vorgegebenen Fehlerschranke für μ_{geo} können wir uns nun eine Hierarchie von statisch adaptiven Dreiecksgittern auf der Erdoberfläche generieren. Die Abbildung 3.6 b) zeigt solche Testgitter, die mit der Metrik (3.4) erzeugt wurden. Diese Gitter haben die Eigenschaft, daß selbst bei groben Auflösungen mit relativ wenigen Dreiecken fast alle Level vom feinsten bis hin zum größten vertreten sind. Diese sehr unterschiedliche Auflösung des Geländes und die damit verbundene rapide Änderung der Größe der Dreiecke haben im Verlauf

a)



b)

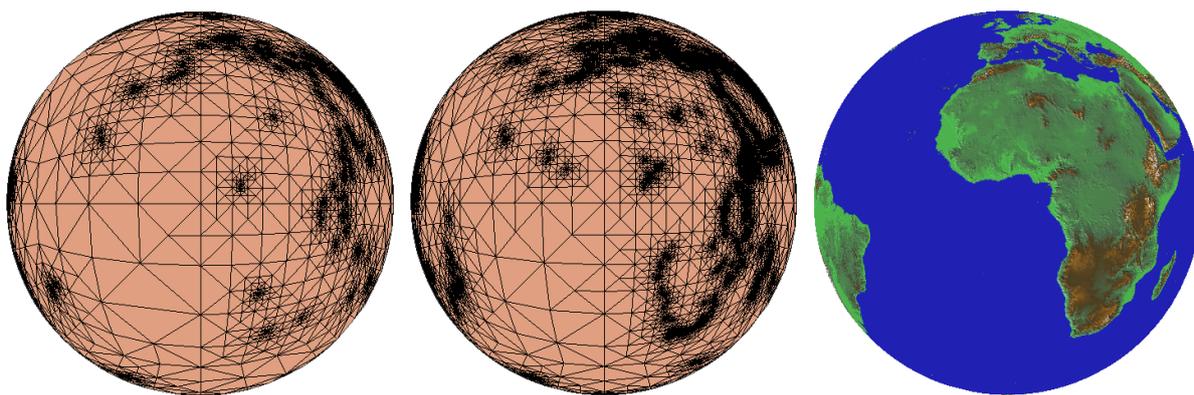


Abb. 3.6.: Statisch adaptive Testgitter unterschiedlicher Auflösung. a) Geländeabhängige adaptive Gitter mit Beschränkung der Spanne der Level auf sechs. Die zugehörigen Größenangaben sind in der Tabelle 3.1 aufgelistet. b) Geländeabhängige adaptive Gitter ohne Beschränkung der Level.

Uniforme Gitter der Erdoberfläche					
Gitter	Level	# Knoten	# Dreiecke	# Kanten	mittl. Maschenweite
uniform01	1	14	24	36	6036 km
uniform03	3	50	96	144	3194 km
uniform05	5	194	384	576	1621 km
uniform07	7	770	1536	2304	814 km
uniform09	9	3074	6144	9216	407 km
uniform11	11	12290	24576	36864	204 km

Adaptive Gitter der Erdoberfläche					
Gitter	Levelspanne	# Knoten	# Dreiecke	# Kanten	μ_{geo}
adaptiv01	1 - 6	24	44	66	4178,1
adaptiv03	3 - 8	80	156	234	3636,5
adaptiv05	5 - 10	343	682	1023	3249,6
adaptiv07	7 - 12	1386	2768	4152	2475,9
adaptiv09	9 - 14	5650	11296	16944	1779,6
adaptiv11	11 - 16	21854	43704	65556	1276,6

Tabelle 3.1.: Größenangaben der sechs uniformen und adaptiven Testgitter der Erdoberfläche aus der Abbildung 3.6 a) und 3.5.

der Rechnungen auf diesen Gittern zu Problemen geführt. Daher stellen wir noch eine zusätzliche Bedingung an die adaptiven Gitter, und zwar daß die Spanne der Level, die in einem Gitter auftreten darf, auf sechs beschränkt ist. So lassen sich Gitter erzeugen, wie sie in der Abbildung 3.6 a) dargestellt sind. Diese haben außerdem den Vorteil, daß sich ihnen jeweils direkt ein uniformes Gitter wie in der Abbildung 3.5 zuordnen läßt, in dem alle Dreiecke die Größe des größten Levels der adaptiven Auflösung haben. So lassen sich später die Ergebnisse der Rechnungen auf uniformen und adaptiven Gittern direkter vergleichen. Die Tabelle 3.1 listet diese beiden Gittersets und ihre entsprechenden Größen auf.

3.2. Triangulierung der Atmosphäre

Nachdem wir nun die Erdoberfläche trianguliert haben, muß jetzt auch die Atmosphäre mit einem Gitternetz versehen werden. Dabei sei zunächst festgehalten, daß wir mit dem Begriff Atmosphäre in dieser Arbeit die Troposphäre und untere Stratosphäre bis etwa 24 km Höhe bezeichnen, da dieser Bereich im wesentlichen das Wetter bestimmt.

Einen Überblick über den Aufbau der Erdatmosphäre gibt die Abbildung 3.7. Die einzel-

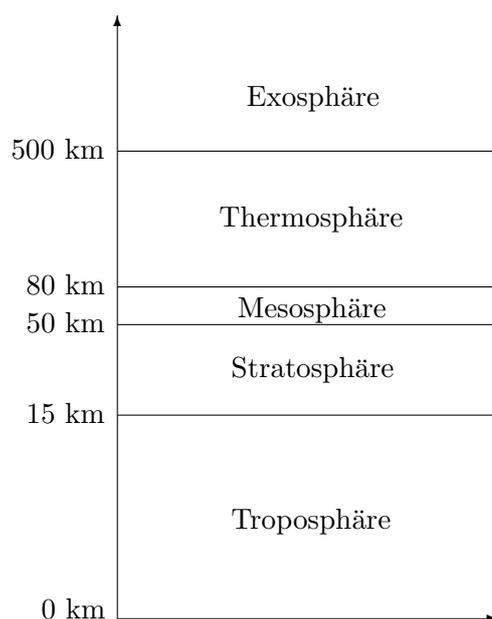


Abb. 3.7.: Der Aufbau der Erdatmosphäre in logarithmischer Darstellung.

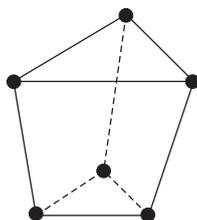


Abb. 3.8.: Ein Tetraederstumpf, der als Volumenelement entsteht, wenn das Geländedreieck in die Atmosphärenschicht projiziert wird.

nen Schichten unterscheiden sich dabei durch ihren mit der Höhe sinkenden bzw. steigenden Temperaturverlauf. In der Troposphäre sind bereits 90% der Luft und nahezu der gesamte Wasserdampf der Atmosphäre enthalten, in ihr spielt sich also ein Großteil des Wettergeschehens ab.

Um nun die unteren 24 km der Atmosphäre mit einem Gitter zu versehen, unterteilen wir diese in Schichten und projizieren dann die Dreiecke auf der Erdoberfläche vom Mittelpunkt der Erde ausgehend in die einzelnen Schichten, so daß wir als Volumenelemente Tetraederstümpfe erhalten, wie in der Abbildung 3.8 zu sehen ist.

3.2.1. Wahl der Vertikalkoordinaten

Man hat nun noch die Wahl, ob sich die soeben definierten Höhenschichten dem Gelände anpassen sollen oder nicht. An das Gelände angepaßte Schichten werden auch als geländefol-

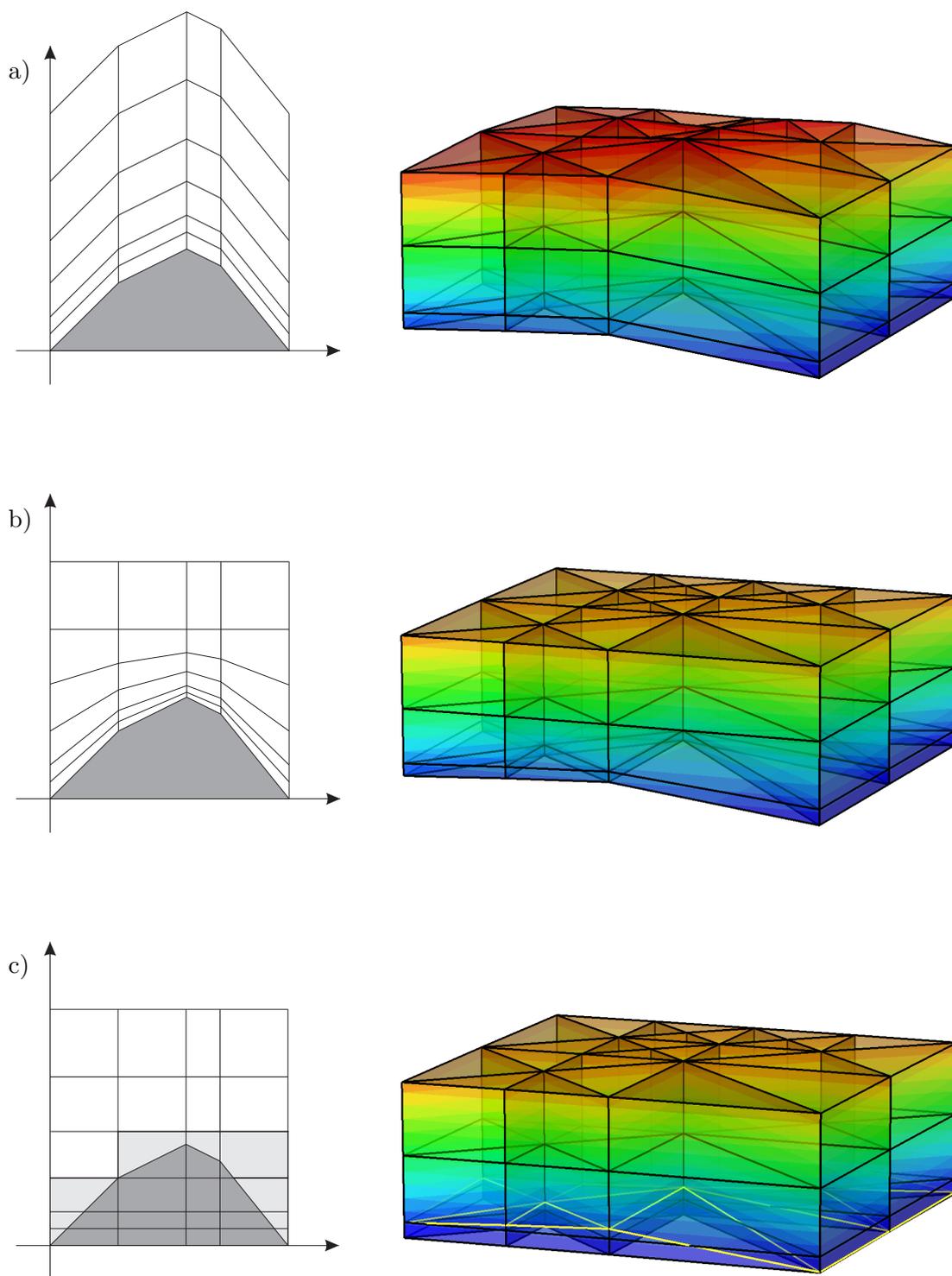


Abb. 3.9.: Verschiedene Wahl der Vertikalkoordinaten in 2D und 3D. a) Geländefolgend, b) geländefolgend mit Glättung in der Höhe, c) nicht-geländefolgend mit Randbehandlung.

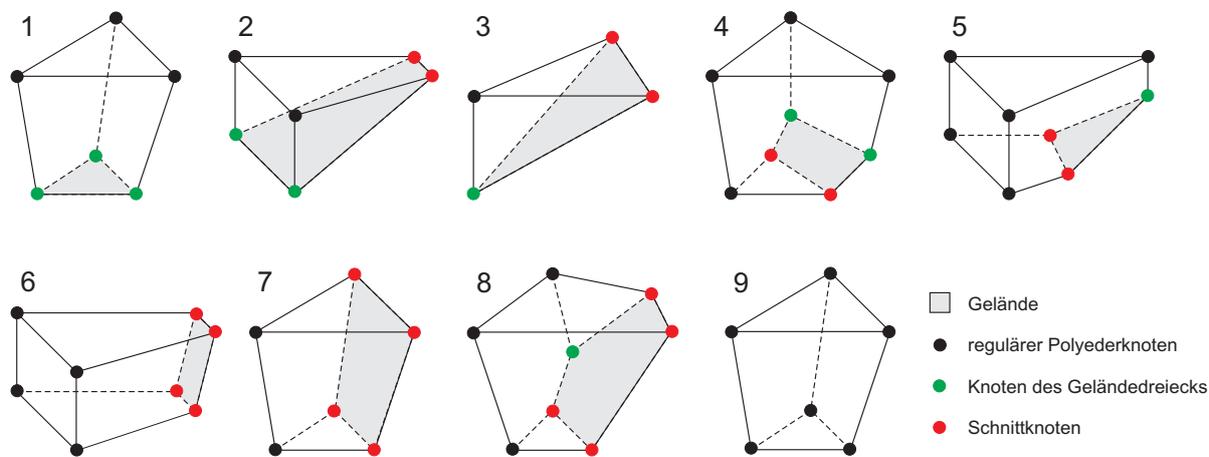


Abb. 3.10.: Typen der Randpolyeder, die im nicht-geländefolgenden Fall durch den Schnitt der Erdoberfläche mit den regulären Tetraederstümpfen entstehen.

gend bezeichnet und üblicherweise bei der Wettervorhersage verwendet, da man sich so eine gesonderte Randbehandlung erspart. Jedes einzelne Volumenelement ist dadurch nämlich ein Tetraederstumpf wie in der Abbildung 3.8, wenn auch entsprechend geschert, wie es die Erdoberfläche vorgibt. Es ist außerdem üblich, noch eine Glättung in der Höhe einzuführen, da die Struktur des Bodens in großen Höhen irrelevant ist und daher auch nicht im Gitter widergespiegelt werden muß. Dies führt dazu, daß die Tetraederstümpfe zusätzlich noch gestaucht oder gestreckt werden, wodurch ihre Deckel- und Bodenflächen nicht mehr parallel zueinander liegen müssen. Die Abbildungen 3.9 a) und b) zeigen die entsprechenden Fälle in 2D und 3D.

Möchte man die Schichten nicht an das Gelände anpassen und somit ausschließlich reguläre Tetraederstümpfe erzeugen, also weder gescherte noch gestauchte oder gestreckte, so ist man gezwungen, den Rand gesondert zu behandeln. Das Gelände schneidet dann nämlich am Rand aus den regulären Tetraederstümpfen Teile heraus, so daß andere Polyeder entstehen. In der Abbildung 3.9 c) ist dies dargestellt.

Die verschiedenen Typen von Randpolyedern, die durch den Schnitt der Erdoberfläche mit den regulären Tetraederstümpfen entstehen, sind in der Abbildung 3.10 zusammengestellt. Die Berechnung des Gitters, das sich aus den Knoten, Kanten, Flächen und Zellen zusammensetzt, erfordert hier also diverse Fallunterscheidungen und Schnittberechnungen am Rand, was jedoch in einem Vorverarbeitungsschritt ausgeführt werden kann und so auf die Laufzeit des Strömungslösers keinen Einfluß hat.

Außerdem sei erwähnt, daß im nicht-geländefolgenden Fall weitere Schichten im negativen Höhenbereich hinzugenommen werden müssen, da sich das reale Gelände zwischen 418 m unter NN am Toten Meer und dem Mount Everest mit 8850 m über NN bewegt.

3.2.2. Gitterhierarchie

Aus den uniformen und adaptiven Gittern der Erdoberfläche läßt sich die Atmosphäre nun also auf drei verschiedene Arten triangulieren: geländefolgend, geländefolgend mit Glättung

Gitter der Atmosphäre					
Gitter	# Schichten	Schichtbreite in m	# Zellen pro Schicht	# Zellen insgesamt	Dateigröße in MB
uniform01	1	24000	24	24	0,006
uniform03	2	12000	96	192	0,022
uniform05	4	6000	384	1536	0,153
uniform07	8	3000	1536	12288	1,310
uniform09	16	1500	6144	98304	11,459
uniform11	32	750	24576	786432	100,353
adaptiv01	1	24000	44	44	0,008
adaptiv03	2	12000	156	312	0,034
adaptiv05	4	6000	682	2728	0,283
adaptiv07	8	3000	2768	22144	2,421
adaptiv09	16	1500	11296	180736	21,381
adaptiv11	32	750	43704	1398528	181,414

Tabelle 3.2.: Größenangaben der sechs uniformen Atmosphäregitter mit und ohne Gelände und der sechs adaptiven Atmosphäregitter.

in der Höhe und nicht-geländefolgend mit gesonderter Randbehandlung. Wir haben allerdings noch nichts über die konkrete Wahl der Schichten gesagt. Ein erster Ansatz wäre, die unteren 24 km der Atmosphäre in äquidistante Schichten zu unterteilen. Üblicherweise werden jedoch bei der Wettervorhersage gradierte Schichten verwendet, deren Breite mit der Höhe zunimmt. Der Deutsche Wetterdienst etwa rechnet sein globales Modell mit 31 gradierten Schichten zwischen 33 m und 7 km [9].

Es stellt sich jedoch heraus, daß solche gradierte Schichten die Qualität des Gitters im Sinne des kommenden Kapitels 3.2.3 über Nicht-Orthogonalität und Schräge stark beeinflussen, da sie wesentlich anisotropere Polyeder beinhalten. Außerdem erfordern sie bei unseren Rechnungen eine sehr kleine Zeitschrittweite, die ja an die kleinste Maschenweite und somit die niedrigste Höhenschicht gekoppelt ist. Es ist daher für uns zunächst nicht praktikabel, gradierte Gitter zu verwenden, und so nehmen wir statt dessen äquidistante Schichten unterschiedlicher Auflösung, und zwar von einer Schicht der Breite 24 km bis hin zu 32 Schichten der Breite 750 m.

Diese Schichten ordnen wir unseren Gittern der Erdoberfläche aus der Tabelle 3.1 so zu, daß sich die Anzahl der Zellen mit ansteigendem Level ungefähr verachtfacht. So erhalten wir eine Hierarchie von ineinander geschachtelten Atmosphäregittern uniformer und adaptiver Auflösung. Die entsprechenden Größenangaben sind in der Tabelle 3.2 zusammengestellt.

Zu Testzwecken werden wir noch ein weiteres Gitterset verwenden, um den Einfluß des Geländes besser beurteilen zu können. Dafür vernachlässigen wir bei den bereits besprochenen

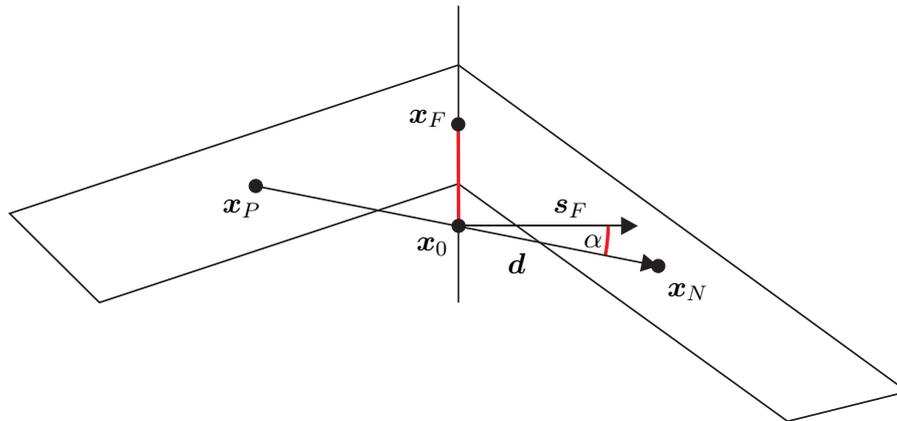


Abb. 3.11.: Zwei Gitterzellen mit der Schräge $s = |\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_0|/|\mathbf{d}|$ und dem Winkel α als Maß für die Nicht-Orthogonalität.

uniformen Gittern das Gelände, nehmen also die glatte Kugel als Grundlage. Da nun alle Punkte einer Schicht auf einer Kugeloberfläche liegen, fallen für diese Gitter die drei Arten der Vertikalkoordinaten aus dem Kapitel 3.2.1 zu einer zusammen.

Bei den Gittern mit Gelände verwenden wir zunächst die geländefolgenden Vertikalkoordinaten vom Typ a), um zum einen die Qualität des Gitters nicht durch gestauchte oder gestreckte Elemente zu verschlechtern und zum anderen eine gesonderte Randbehandlung zu vermeiden.

So haben wir nun im folgenden uniform triangulierte Gitter mit und ohne Gelände und adaptiv triangulierte Gitter mit Gelände in unterschiedlichen Auflösungen zur Auswahl.

3.2.3. Maße für Nicht-Orthogonalität und Schräge

An dieser Stelle wollen wir unsere Gitter auf zwei wichtige Eigenschaften hin untersuchen, die auf die Qualität der Diskretisierung Einfluß haben können. Zum einen ist dies die Nicht-Orthogonalität, die sich aus dem Winkel zwischen dem Normalenvektor einer Seitenfläche und der Verbindungslinie der zwei benachbarten Zellmittelpunkte ergibt, und zum anderen die Schräge oder auch „Skewness“, die ein Maß dafür ist, wie schräg die einzelnen Elemente zueinander stehen.

Betrachte dazu die Abbildung 3.11. Darin verwenden wir bereits die Bezeichnungen aus dem Diskretisierungskapitel 4. Seien also \mathbf{x}_P und \mathbf{x}_N zwei benachbarte Zellmittelpunkte mit $\mathbf{d} := \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P$ und F die gemeinsame Seitenfläche mit dem Mittelpunkt \mathbf{x}_F und dem Normalenvektor \mathbf{s}_F . Der Schnittpunkt von \mathbf{d} mit F sei \mathbf{x}_0 .

Das Maß der Nicht-Orthogonalität, also die Abweichung von einem orthogonalen Gitter, drückt der Winkel

$$\alpha := \sphericalangle(\mathbf{d}, \mathbf{s}_F) = \arccos \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{s}_F}{|\mathbf{d}| |\mathbf{s}_F|} \quad (3.5)$$

aus, der bei einem orthogonalen Gitter Null wäre.

Die Schräge s zweier Zellen ist durch das Verhältnis des Abstands von \mathbf{x}_F zu \mathbf{x}_0 und des

Abstands zwischen \mathbf{x}_P und \mathbf{x}_N charakterisiert

$$s := \frac{|\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_0|}{|\mathbf{d}|}. \quad (3.6)$$

Optimal wäre ein Gitter mit Schräge $s = 0$.

Untersuchen wir dies an unseren adaptiven und uniformen Gittern mit und ohne Gelände, so ergeben sich für den maximalen und durchschnittlichen Winkel und die maximale Schräge die Werte aus der Tabelle 3.3.

Bei den uniformen Gittern fällt zunächst auf, daß sich die Werte für die Gitter mit und ohne Gelände kaum unterscheiden. Dies liegt im wesentlichen an der Wahl der Vertikalkoordinaten, die die Polyeder bei Hinzunahme des Geländes zwar leicht scheren, jedoch weder stauchen noch strecken. Der Winkel der Nicht-Orthogonalität und die Schräge nehmen dabei jeweils mit feinerer Auflösung zu, sind jedoch beide geringer als die zugehörigen Werte der adaptiven Gitter. Dies war zu erwarten, da die unterschiedliche Größe von benachbarten Zellen zum Grad der Nicht-Orthogonalität und zur Schräge beiträgt.

Die maximale Abweichung der adaptiven Gitter von orthogonalen ist deutlich höher als bei den uniformen, während die durchschnittliche sogar mit feinerer Auflösung leicht abnimmt und ein ähnliches Niveau wie bei den übrigen erreicht. Durchschnittliche Winkel von 8° bzw. 10° sind allerdings nicht groß zu nennen, während hingegen einzelne Zellen mit maximalen Winkeln von 28° bzw. 43° schon eher zu einer Beeinträchtigung des Diskretisierungsverfahrens führen könnten. Als besonders problematisch werden Zellen mit einer Nicht-Orthogonalität von über 70° angesehen.

Auch die Schräge liegt zwar unter dem üblichen Grenzwert von 2, könnte mit maximalen Werten um 0,5 allerdings auch die Qualität der Rechnungen beeinflussen. Dies wird in späteren Kapiteln noch zu untersuchen sein.

uniforme Gitter ohne Gelände			
Gitter	α_{\max}	α_{aver}	s_{\max}
1	10^{-6}	0,0	0,28
3	7,9	5,0	0,29
5	15,6	6,9	0,35
7	23,3	7,5	0,39
9	26,8	7,7	0,41
11	28,4	7,8	0,42

uniforme Gitter mit Gelände			
Gitter	α_{\max}	α_{aver}	s_{\max}
1	0,01	0,004	0,28
3	7,9	5,0	0,29
5	15,6	7,0	0,35
7	23,3	7,5	0,39
9	26,8	7,7	0,41
11	28,4	7,8	0,42

adaptive Gitter mit Gelände			
Gitter	α_{\max}	α_{aver}	s_{\max}
1	29,0	13,4	0,31
3	29,7	10,2	0,35
5	35,4	9,7	0,36
7	40,6	9,8	0,52
9	41,8	9,8	0,55
11	43,2	9,8	0,57

Tabelle 3.3.: Maximale und durchschnittliche Abweichung von orthogonalen Gittern α_{\max} und α_{aver} in Grad und maximale Schräge s_{\max} der Testgitter.

4. Diskretisierung

Im Kapitel 2 wurde ein kontinuierliches Modell hergeleitet, das wir auf den im Kapitel 3 beschriebenen Gittern lösen wollen. Dazu ist eine Diskretisierung der ursprünglichen Gleichungen nötig, also ein Übergang vom kontinuierlichen Modell zu einem diskreten, bei dem die Variablen in den Gitterpunkten definiert sind. Dies stellt eine mit einem Fehler behaftete Approximation dar.

4.1. Grundlagen

Führen wir zunächst einige grundlegende Begriffe ein. Wir folgen dabei der Darstellung in [24]. Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $V = V(\Omega)$ und $F = F(\Omega)$ unendlichdimensionale Banachräume. Abstrakt läßt sich dann eine partielle Differentialgleichung in der Variablen $u \in V$ als

$$Au = f$$

schreiben, wobei $f \in F$ sei und $A : V \rightarrow F$ einen Differentialoperator bezeichne. Approximieren wir diese Gleichung in den diskreten Räumen V_N und F_N , die geeignete endlichdimensionale Banachräume darstellen, so erhalten wir

$$A_N u_N = f_N$$

mit $u_N \in V_N$, $f_N \in F_N$ und $A_N : V_N \rightarrow F_N$.

Es stellt sich nun die Frage, wie man den Diskretisierungsfehler ausdrücken kann, da sich die kontinuierliche Lösung $u \in V$ und die diskrete Lösung $u_N \in V_N$ nicht direkt vergleichen lassen. Vielmehr sind dazu Prolongations- und Restriktionsoperatoren vonnöten, mit denen dann z.B. u an den Gitterpunkten ausgewertet wird und so ein Vergleich im Raum V_N möglich wird. Die Restriktionsoperatoren seien

$$R_N : V \rightarrow V_N \quad \text{und} \quad \tilde{R}_N : F \rightarrow F_N$$

und die Prolongationsoperatoren

$$P_N : V_N \rightarrow V \quad \text{und} \quad \tilde{P}_N : F_N \rightarrow F.$$

Nun lassen sich die Begriffe Konsistenz, Stabilität und Konvergenz eines Diskretisierungsverfahrens definieren.

Definition 4.1 [KONSISTENZ]

Die Approximation $A_N u_N$ von Au heißt konsistent, falls

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|A_N R_N u - \tilde{R}_N Au\|_{F_N} = 0. \quad (4.1)$$

Definition 4.2 [STABILITÄT]

Die Approximation A_N von A heißt stabil, falls eine Konstante $c > 0$ existiert, so daß

$$\|v_N\|_{V_N} \leq c \|A_N v_N\|_{F_N} \quad \forall v_N \in V_N. \quad (4.2)$$

Definition 4.3 [KONVERGENZ]

Die diskreten Lösungen $u_N \in V_N$ konvergieren gegen u , falls

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u_N - R_N u\|_{V_N} = 0. \quad (4.3)$$

Konvergenz der Ordnung k liegt vor, falls

$$\|u_N - R_N u\|_{V_N} = O(h^k) \quad (4.4)$$

mit der Maschenweite $h = 1/N$.

Aus der Stabilität und der Konsistenz folgt die Konvergenz.

Wenden wir uns nun einem speziellen Diskretisierungsverfahren zu, nämlich dem der Finiten Volumen.

4.2. Finite-Volumen-Methoden

Bei der Herleitung der Modellgleichungen im Kapitel 2.1 geht man zunächst von einer integralen Formulierung aus, die die jeweilige Erhaltungseigenschaft widerspiegelt. So wird eine bestimmte Größe wie etwa die Dichte über ein Gebiet integriert und postuliert, daß sich dieses Integral mit der Zeit nicht ändern darf. Der Gaußsche Integralsatz und die Betrachtung beliebig kleiner Gebiete erlaubt dann den Übergang zur bekannten differentiellen Form.

Die Idee bei den Finite-Volumen-Methoden besteht nun darin, nicht die differentielle sondern die integrale Form der Gleichungen als Grundlage zur Diskretisierung zu verwenden und so ein konservatives Verfahren zu entwickeln, das ebenso wie die kontinuierlichen Gleichungen bestimmte Größen auf jeden Fall erhält.

Dazu unterteilt man sein Rechengebiet in endliche Teilgebiete, die als Finite Volumen bezeichnet werden. In jedem dieser Kontrollvolumen muß die Erhaltungseigenschaft erfüllt sein, d.h. man formuliert die Gleichung für jede Zelle und kann so die zeitliche Änderung der Erhaltungsgröße im Mittel für jedes Volumen berechnen. Entscheidend ist dabei, daß sich die Erhaltungsgröße nur durch Ab- oder Hinzufießen über den Rand einer Zelle verändern darf.

4.2.1. Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung

Führen wir das Konzept der Finiten Volumen einmal beispielhaft an der allgemeinen Transportgleichung

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)}_{\text{zeitl. Ableitung}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\phi)}_{\text{Konvektion}} - \underbrace{\nabla \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla \phi)}_{\text{Diffusion}} = \underbrace{S_\phi(\phi)}_{\text{Quellterm}} \quad (4.5)$$

für eine skalare Größe ϕ durch. Eine solche Gleichung ist sowohl die Kontinuitäts- (2.1) als auch die Temperaturgleichung (2.24). Dabei beschreiben wir auch gleichzeitig das Verfahren,

das in dem Open Source Strömungspaket OpenFOAM 1.3 (Field Operation And Manipulation) [40, 41] verwendet wird und das wir zur Lösung unseres Gleichungssystems benutzen wollen. OpenFOAM ist eine in C++ geschriebene CFD-Toolbox, die auf beliebigen unstrukturierten Polyedergittern operiert und zur Diskretisierung Finite-Volumen-Methoden verwendet.

Unser Gitter aus dem Kapitel 3 unterteilt das Strömungsgebiet in Tetraederstümpfe, die sich direkt als Kontrollvolumen verwenden lassen. Jeder Zelle P ordnen wir dazu ein Zentrum \mathbf{x}_P und ein Volumen V_P und jeder Seitenfläche F einen nach außen gerichteten Normalenvektor \mathbf{n} , einen Mittelpunkt \mathbf{x}_F , einen Flächeninhalt A_F und eine Nachbarzelle N mit Zentrum \mathbf{x}_N zu. Den Variablen des Gleichungssystems wird dabei in jeder Zelle ein Wert im Mittelpunkt zugewiesen. Insbesondere teilen sich bei OpenFOAM alle Variablen dieselben Kontrollvolumen, was in der Literatur mit einer „non-staggered“ Anordnung bezeichnet wird.

Des weiteren teilen wir das Zeitintervall in feste Zeitschritte im Abstand Δt auf und gehen davon aus, daß sich die Kontrollvolumen mit der Zeit nicht ändern.

Sei $\phi_P := \phi(\mathbf{x}_P)$ der Mittelwert von ϕ in der Zelle P , also

$$\phi_P = \frac{1}{V_P} \int_P \phi \, dV$$

und somit

$$\int_P \phi \, dV = V_P \phi_P. \quad (4.6)$$

Außerdem können wir an dieser Stelle schon festhalten, daß wir mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes (A.2) die Divergenz eines Vektorfeldes \mathbf{a} in ein Oberflächenintegral über die Seitenflächen gemäß

$$\begin{aligned} \int_P \nabla \cdot \mathbf{a} \, dV &= \int_{\partial P} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \sum_F \int_F \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned} \quad (4.7)$$

überführen können. Wenn wir auch hier annehmen, daß $\mathbf{a}_F := \mathbf{a}(\mathbf{x}_F)$ einem Mittelwert von \mathbf{a} auf der Seitenfläche F entspricht, so läßt sich analog zu (4.6)

$$\mathbf{a}_F \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{A_F} \int_F \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

und somit

$$\int_F \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dS = \underbrace{A_F \mathbf{n}}_{=: \mathbf{s}_F} \cdot \mathbf{a}_F \quad (4.8)$$

schreiben. Dabei sei im folgenden \mathbf{s}_F von einer Zelle P aus betrachtet der nach außen weisende Normalenvektor einer Seitenfläche, deren Länge dem Flächeninhalt entspricht. Er wird mit „Face Area“ Vektor bezeichnet.

Wenden wir uns nun konkret der Diskretisierung der Transportgleichung (4.5) zu. Dabei folgen wir im wesentlichen der Darstellung in [30]. Die Gleichung wird als erstes über eine Zelle P und einen Zeitschritt Δt integriert

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\int_P \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dV + \int_P \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\phi) dV - \int_P \nabla \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla\phi) dV \right) dt = \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_P S_\phi(\phi) dV \right) dt. \quad (4.9)$$

Betrachten wir zunächst die räumlichen Integrale. Aus dem ersten ergibt sich mit (4.6)

$$\int_P \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dV = V_P \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) \right)_P. \quad (4.10)$$

Auf die Diskretisierung der Zeitableitung werden wir später eingehen. Der konvektive Term läßt sich mit Hilfe von (4.8) zu

$$\begin{aligned} \int_P \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\phi) dV &= \sum_F \mathbf{s}_F \cdot (\rho\mathbf{u}\phi)_F \\ &= \sum_F \underbrace{\mathbf{s}_F \cdot (\rho\mathbf{u})_F}_{=: \varphi} \phi_F \end{aligned} \quad (4.11)$$

umformen. φ ist dabei der Massenfluß durch die Fläche F , auf dessen Berechnung wir im Kapitel 4.2.4 näher eingehen werden. Im Prinzip muß er aus den geeignet interpolierten Werten von ρ und \mathbf{u} berechnet werden.

Auch ϕ_F kennen wir nicht, da jede Variable in den Zellmittelpunkten verankert war. Daher müssen wir ϕ_F aus den Werten ϕ_P und ϕ_N der benachbarten Zellen interpolieren und haben dazu eine Fülle von Interpolationsschemata zur Auswahl. Entscheidend ist für uns allerdings, daß das Schema beschränkt ist, d.h. die Werte von ϕ dürfen sich dabei weder aufschaukeln noch etwa negativ werden. Daher verwenden wir ein Upwind-Schema der Form

$$\phi_F = \begin{cases} \phi_P & \text{falls } \varphi \geq 0 \\ \phi_N & \text{falls } \varphi < 0 \end{cases}, \quad (4.12)$$

das an der Seitenfläche den Wert von ϕ aus der Zelle P oder N in Abhängigkeit der Flußrichtung übernimmt. Es ist von 1. Ordnung, erhält dabei allerdings die Beschränktheit der Variablen auf Kosten der Genauigkeit.

Sehen wir uns als nächstes den diffusiven Term an. Er läßt sich analog mittels (4.8) zu

$$\int_P \nabla \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla\phi) dV = \sum_F (\rho\Gamma_\phi)_F \mathbf{s}_F \cdot (\nabla\phi)_F \quad (4.13)$$

umformen. Hier benötigen wir also die Werte von $\nabla\phi$ auf dem Rand, die wieder geeignet interpoliert werden müssen. Im Falle eines orthogonalen Gitters gilt, daß $\mathbf{d} := \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P$ parallel zu \mathbf{s}_F ist, und daher können wir direkt den Ansatz

$$\mathbf{s}_F \cdot (\nabla\phi)_F = |\mathbf{s}_F| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|} \quad (4.14)$$

verwenden. Unser Gitter ist jedoch nicht orthogonal, was einen Korrekturterm erfordert. Be-

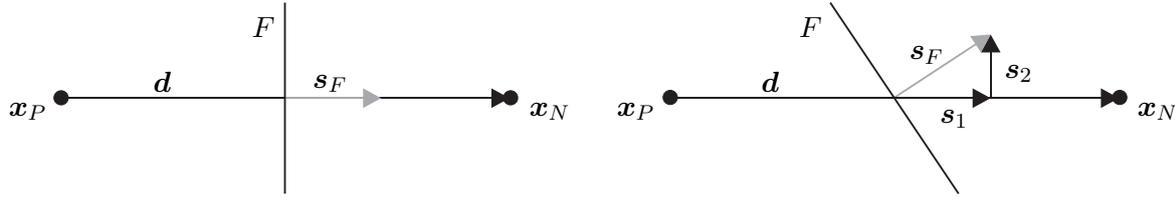


Abb. 4.1.: Der Face Area Vektor \mathbf{s}_F in einem orthogonalen Gitter und dessen Zerlegung in $\mathbf{s}_F = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ in einem nicht-orthogonalen Gitter nach [30].

trachte dazu die Abbildung 4.1. Zunächst spalten wir das Produkt in einen orthogonalen und nicht-orthogonalen Anteil

$$\mathbf{s}_F \cdot (\nabla \phi)_F = \underbrace{\mathbf{s}_1 \cdot (\nabla \phi)_F}_{\text{orth.}} + \underbrace{\mathbf{s}_2 \cdot (\nabla \phi)_F}_{\text{nicht-orth.}} \quad (4.15)$$

auf. Wollen wir den Korrekturterm so klein wie möglich halten, so können wir

$$\mathbf{s}_1 = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{s}_F}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}} \mathbf{d} \quad (4.16)$$

wählen, was einer Projektion von \mathbf{s}_F auf \mathbf{d} entspricht. \mathbf{s}_2 wird dann entsprechend auf

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_F - \mathbf{s}_1$$

gesetzt. Der Korrekturterm verletzt allerdings die Beschränktheit. Will man auf sie nicht verzichten, so sollte man diesen Term komplett vernachlässigen, was bei einer mäßigen Abweichung von orthogonalen Gittern auch durchaus gerechtfertigt ist. Dies ist bei unseren Gittern der Fall, da die maximalen und durchschnittlichen Winkel zwischen \mathbf{s}_F und \mathbf{d} bei etwa 43° und 10° liegen, womit wir uns im Kapitel 3.2.3 näher beschäftigt haben.

Insgesamt läßt sich der diffusive Term also als

$$\int_P \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dV = \sum_F (\rho \Gamma_\phi)_F |\mathbf{s}_1| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|} \quad (4.17)$$

mit $\mathbf{d} := \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P$ und \mathbf{s}_1 aus (4.16) schreiben.

Alle übrigen Terme der Gleichungen, die sich nicht als Zeitableitung, Konvektion oder Diffusion schreiben lassen, werden als Quellterme behandelt. S_ϕ kann dabei eine allgemeine Funktion von ϕ sein. Als erstes wird dieser Term falls nötig linearisiert

$$S_\phi(\phi) = S_0 + S_1 \phi, \quad (4.18)$$

wobei S_0 und S_1 noch von ϕ abhängen können. Mit Hilfe von (4.6) läßt sich der Quellterm dann über

$$\int_P S_\phi(\phi) dV = V_P S_0 + V_P S_1 \phi_P \quad (4.19)$$

diskretisieren.

Zusammenfassend haben wir die Transportgleichung (4.9) nun in eine semi-diskretisierte Form gebracht

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(V_P \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) \right)_P + \sum_F \varphi\phi_F - \sum_F (\rho\Gamma_\phi)_F \mathbf{s}_F \cdot (\nabla\phi)_F \right) dt = \int_t^{t+\Delta t} V_P S_0 + V_P S_1 \phi_P dt, \quad (4.20)$$

bei der ϕ_F über das Upwind-Schema (4.12) berechnet und der orthogonale Ansatz

$$\mathbf{s}_F \cdot (\nabla\phi)_F = |\mathbf{s}_1| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|} \quad (4.21)$$

verwendet wird.

Es fehlt nun noch die Zeitdiskretisierung. Es seien dazu

$$\begin{aligned} \phi^n &:= \phi(t) \\ \phi^{n+1} &:= \phi(t + \Delta t) \end{aligned}$$

die alten und neuen Werte von ϕ zum Zeitpunkt t und $t + \Delta t$. Als Näherung für die zeitliche Ableitung nehmen wir den üblichen Differenzenquotienten

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) \right)_P = \frac{\rho_P^{n+1} \phi_P^{n+1} - \rho_P^n \phi_P^n}{\Delta t}, \quad (4.22)$$

während für das Zeitintegral verschiedene Diskretisierungen gewählt werden können. Typischerweise unterscheidet man eine explizite Wahl

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi(t) dt = \phi^n \Delta t, \quad (4.23)$$

eine implizite Wahl, auch implizite Euler-Methode genannt,

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi(t) dt = \phi^{n+1} \Delta t \quad (4.24)$$

und eine Kombination aus beiden der Form

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi(t) dt = \frac{1}{2} (\phi^n + \phi^{n+1}) \Delta t, \quad (4.25)$$

die Crank-Nicolson-Methode heißt. Letztere ist von 2. Ordnung, während die anderen beiden Verfahren 1. Ordnung sind. Unsere Wahl wird allerdings auf die implizite Euler-Methode fallen, da sie sich bei unseren Rechnungen als stabiler erwiesen hat und außerdem im Unterschied zu Crank-Nicolson die Beschränktheit der Variablen erhält.

Nehmen wir nun also (4.24) an und betrachten die Zeitdiskretisierung von (4.20) wieder

termweise. Aus dem ersten wird mit (4.22)

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} V_P \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) \right)_P dt &= \int_t^{t+\Delta t} V_P \frac{\rho_P^{n+1} \phi_P^{n+1} - \rho_P^n \phi_P^n}{\Delta t} dt \\ &= V_P (\rho_P^{n+1} \phi_P^{n+1} - \rho_P^n \phi_P^n) \end{aligned} \quad (4.26)$$

und aus dem zweiten

$$\int_t^{t+\Delta t} \sum_F \varphi \phi_F dt = \sum_F \varphi^n \phi_F^{n+1} \Delta t. \quad (4.27)$$

Beachte dabei, daß der Fluß φ^n explizit gewählt wird, was einer Linearisierung des nichtlinearen konvektiven Terms entspricht.

Analog läßt sich der dritte Term zu

$$\int_t^{t+\Delta t} \sum_F (\rho\Gamma_\phi)_F \mathbf{s}_F \cdot (\nabla\phi)_F dt = \sum_F (\rho\Gamma_\phi)_F^{n+1} \mathbf{s}_F \cdot (\nabla\phi)_F^{n+1} \Delta t \quad (4.28)$$

umformen.

Quellterme wie etwa die Corioliskraft und die Gravitation werden wir generell explizit behandeln, so daß sich aus dem vierten Term

$$\int_t^{t+\Delta t} V_P S_0 + V_P S_1 \phi_P dt = (V_P S_0 + V_P S_1 \phi_P^n) \Delta t \quad (4.29)$$

ergibt.

Insgesamt erhalten wir so aus (4.20) die diskretisierte Form der Transportgleichung

$$V_P \frac{\rho_P^{n+1} \phi_P^{n+1} - \rho_P^n \phi_P^n}{\Delta t} + \sum_F \varphi^n \phi_F^{n+1} - \sum_F (\rho\Gamma_\phi)_F^{n+1} \mathbf{s}_F \cdot (\nabla\phi)_F^{n+1} = V_P S_0 + V_P S_1 \phi_P^n. \quad (4.30)$$

Dabei sind die neuen Werte ϕ_F^{n+1} und $(\nabla\phi)_F^{n+1}$ auf den Seitenflächen so zu verstehen, daß bei der Interpolation zur Berechnung dieser Flächenwerte in (4.12) und (4.21) jeweils die neuen Zellwerte ϕ_P^{n+1} und ϕ_N^{n+1} genommen werden.

Da (4.30) eine Gleichung in ϕ ist und daher auch nach ϕ gelöst werden soll, nehmen wir für alle anderen Variablen der Gleichung wie etwa die Dichte ρ die alten Zeitwerte ρ^n oder aber, falls wir ein Gleichungssystem sequentiell lösen und daher z.B. schon neue Werte für ρ berechnet haben, diese entsprechenden. Die Gleichung (4.30) vereinfacht sich daher noch zu

$$V_P \rho_P^n \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} + \sum_F \varphi^n \phi_F^{n+1} - \sum_F (\rho\Gamma_\phi)_F^n \mathbf{s}_F \cdot (\nabla\phi)_F^{n+1} = V_P S_0 + V_P S_1 \phi_P^n. \quad (4.31)$$

Abstrakt läßt sich die Gleichung (4.31) für jeden Zeitschritt nun auch in der Form

$$a_P \phi_P^{n+1} + \sum_N a_N \phi_N^{n+1} = f_P \quad (4.32)$$

schreiben, wobei in die rechte Seite f_P alle bekannten alten Werte eingehen.

Für jedes Kontrollvolumen erhält man eine solche Gleichung, so daß man insgesamt ein Gleichungssystem

$$[A][\phi^{n+1}] = [f] \quad (4.33)$$

zu lösen hat, bei dem $[A]$ eine dünn besiedelte Matrix mit den Koeffizienten a_P auf der Diagonale und a_N auf den Nebendiagonalen, $[\phi^{n+1}]$ der gesuchte Vektor mit den neuen ϕ -Werten für jedes Kontrollvolumen und $[f]$ die bekannte rechte Seite ist.

Zur Lösung dieses unsymmetrischen dünn besetzten linearen Gleichungssystems verwenden wir in OpenFOAM den BICCG-Löser (Incomplete-Cholesky Preconditioned Biconjugate Gradient), der das Ergebnis bis auf eine Genauigkeit von 10^{-16} iteriert.

4.2.2. Diskretisierung der Kontinuitäts-, Temperatur- und Zustandsgleichung

Sowohl die Kontinuitätsgleichung (2.1)

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

als auch die Temperaturgleichung (2.65)

$$c_v((\rho T)_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} T)) - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + Q$$

ist eine spezielle Transportgleichung. Daher ergibt sich direkt mit (4.31) aus dem vorigen Kapitel die diskretisierte Form der Kontinuitätsgleichung für eine Zelle P

$$V_P \frac{\rho_P^{n+1} - \rho_P^n}{\Delta t} + \sum_F \varphi^n \rho_F^{n+1} = 0 \quad (4.34)$$

mit dem Upwind-Verfahren (4.12)

$$\rho_F^{n+1} = \begin{cases} \rho_P^{n+1} & \text{falls } \varphi^n \geq 0 \\ \rho_N^{n+1} & \text{falls } \varphi^n < 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

für die Werte an den Seitenflächen und ebenso die diskretisierte Form der Temperaturgleichung

$$c_v V_P \rho_P^n \frac{T_P^{n+1} - T_P^n}{\Delta t} + c_v \sum_F \varphi^n T_F^{n+1} - \lambda \sum_F \mathbf{s}_F \cdot (\nabla T)_F^{n+1} = -V_P p^n \sum_F \mathbf{s}_F \cdot \mathbf{u}_F^n + V_P Q^n. \quad (4.36)$$

Auch hier verwenden wir das Upwind-Verfahren

$$T_F^{n+1} = \begin{cases} T_P^{n+1} & \text{falls } \varphi^n \geq 0 \\ T_N^{n+1} & \text{falls } \varphi^n < 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

und außerdem den orthogonalen Ansatz (4.21)

$$\mathbf{s}_F \cdot (\nabla T)_F^{n+1} = |\mathbf{s}_1| \frac{T_N^{n+1} - T_P^{n+1}}{|\mathbf{d}|}. \quad (4.38)$$

Die Werte von \mathbf{u}_F an den Seitenflächen müssen auch geeignet interpoliert werden, worauf wir im Kapitel 4.2.4 eingehen werden.

Die diskretisierte Form der Zustandsgleichung lautet dann abschließend

$$p_P^{n+1} = \rho_P^n RT_P^n. \quad (4.39)$$

4.2.3. Diskretisierung der Impulsgleichung

Bisher haben wir die Diskretisierung von skalaren Transportgleichungen betrachtet. Wir sind allerdings wegen der Impulsgleichung (2.61)

$$(\rho \mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \circ \mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \rho \mathbf{u} + \nabla p = -\rho g \mathbf{k}$$

auch an einer vektorwertigen interessiert. Die Ortsdiskretisierung des zeitlichen (4.10) und des konvektiven Terms (4.11) überträgt sich dabei analog, nur daß ϕ jeweils keine skalare sondern eine vektorwertige Größe ist. Auch die Zeitdiskretisierung (4.22) und (4.24) ändert sich nicht.

Der Coriolis term und die Gravitation werden als Quellterme (4.19) behandelt und lassen sich daher direkt als

$$\int_P 2\boldsymbol{\Omega} \times \rho \mathbf{u} \, dV = 2V_P \boldsymbol{\Omega} \times \rho_P \mathbf{u}_P \quad (4.40)$$

und

$$\int_P \rho g \mathbf{k} \, dV = V_P \rho_P g \mathbf{k} \quad (4.41)$$

schreiben.

Für die Diskretisierung des Gradienten von p läßt sich der Gaußsche Integralsatz (A.2) anwenden, da $\nabla p = \nabla \cdot (\mathbf{1}p)$ gilt. $\mathbf{1}$ ist dabei die Einheitsmatrix. Es folgt

$$\int_P \nabla p \, dV = \sum_F \mathbf{s}_{FP} p_F. \quad (4.42)$$

In OpenFOAM wird allerdings noch eine weitere Möglichkeit zur Berechnung des Gradienten angeboten, die auf der Methode der kleinsten Quadrate (Least Squares) basiert und sich auf unseren Gittern als günstiger erwiesen hat. Die Idee beruht dabei auf den folgenden Punkten [41]:

- Der Wert in einem Punkt P kann zu seinem Nachbarpunkt N mit Hilfe des Gradienten in P extrapoliert werden.
- Vergleicht man den extrapolierten Wert mit dem tatsächlichen in N , so erhält man einen Fehler.
- Wird nun die Summe dieser quadrierten und gewichteten Fehler von allen Nachbarpunkten bezüglich des Gradienten minimiert, so sollte der resultierende Gradient in P eine gute Approximation sein.

Konkret wird zunächst der Tensor \mathbf{G}

$$\mathbf{G} := \sum_N \frac{1}{|\mathbf{d}_N|^2} \mathbf{d}_N \mathbf{d}_N^T \quad (4.43)$$

in jeder Zelle P berechnet, wobei $\mathbf{d}_N := \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P$ den Abstandsvektor zum Mittelpunkt der Nachbarzelle N bezeichnet. Für den Gradienten ergibt sich dann

$$(\nabla p)_P = \sum_N \frac{1}{|\mathbf{d}_N|^2} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{d}_N (p_N - p_P). \quad (4.44)$$

Insgesamt können wir so die diskretisierte Form der Impulsgleichung

$$V_P \rho_P^n \frac{\mathbf{u}_P^{n+1} - \mathbf{u}_P^n}{\Delta t} + \sum_F \varphi^n \mathbf{u}_F^{n+1} + 2V_P \boldsymbol{\Omega} \times \rho_P^n \mathbf{u}_P^n + V_P (\nabla p)_P^n = -V_P \rho_P^n g \mathbf{k} \quad (4.45)$$

mit dem Upwind-Verfahren

$$\mathbf{u}_F^{n+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_P^{n+1} & \text{falls } \varphi^n \geq 0 \\ \mathbf{u}_N^{n+1} & \text{falls } \varphi^n < 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

und dem Least-Square-Ansatz (4.44) festhalten. Den Massenfluß φ^n werden wir dabei wie im Kapitel 4.2.4 beschrieben berechnen.

4.2.4. Berechnung des Massenflusses

Wenden wir uns nun der Berechnung des Massenflusses durch die Fläche F

$$\varphi := \mathbf{s}_F \cdot (\rho \mathbf{u})_F \quad (4.47)$$

zu, der bei der Diskretisierung des konvektiven Terms in (4.11) aufgetreten ist. Es stellt sich die Frage, wie das Produkt $\rho \mathbf{u}$ aus Dichte und Geschwindigkeit geeignet auf der Seitenfläche aus den Werten in den Zellmittelpunkten der beiden angrenzenden Zellen interpoliert werden kann.

Zunächst einmal postulieren wir

$$(\rho \mathbf{u})_F = \rho_F \mathbf{u}_F. \quad (4.48)$$

Für die skalare Größe ρ_F läßt sich dabei wie in (4.12) ein Upwind-Verfahren verwenden, um die Beschränktheit von ρ zu garantieren.

Die Interpolation des Geschwindigkeitsvektors ist dagegen nicht so intuitiv. Ein Upwind-Verfahren würde der Geschwindigkeitsrichtung nicht gerecht werden, und eine lineare Interpolation würde wegen der Schräge der Gitterzellen Werte an falschen Orten liefern, siehe dazu die Abbildung 3.11 im Kapitel 3.2.3. Was wir vielmehr suchen, ist ein Interpolationsverfahren, das an die Erdgeometrie angepaßt ist und das wir uns nun konstruieren wollen.

Betrachten wir dazu ein Geschwindigkeitsfeld, das konstant um die Erde rotiert, wie in der Abbildung 4.2 dargestellt wird. Dies ist das einfachste Geschwindigkeitsfeld, das durch die Erdrotation um $\boldsymbol{\Omega}$ entsteht und daher sowohl die Kugelform als auch die Rotationsachse der Erde

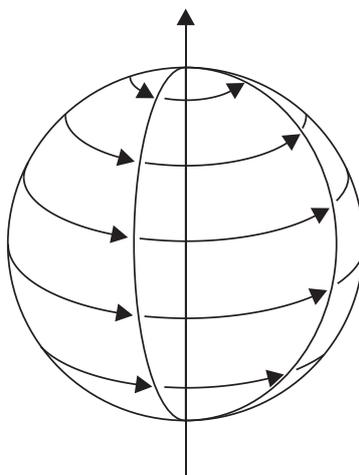


Abb. 4.2.: Ein konstant um die Erde rotierendes Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$.

widerspiegelt. Ausdrücken läßt es sich exakt über

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (4.49)$$

für alle Ortsvektoren \mathbf{r} .

Dieses Geschwindigkeitsfeld hat mehrere Charakteristika.

1. Entlang eines Breitengrades haben die Vektoren dieselbe Länge, aber unterschiedliche Richtung, nämlich eine tangential am Breitengradkreis gelegene.
2. Entlang eines Längengrades haben die Vektoren dieselbe Richtung, während ihre Länge linear zwischen 0 an den Polen und $|\boldsymbol{\Omega}|a$ am Äquator variiert. a ist dabei der Erdradius.
3. Entlang einer durch den Erdmittelpunkt verlaufenden Geraden haben die Vektoren dieselbe Richtung, und ihre Länge nimmt linear mit dem Abstand zum Mittelpunkt zu, der auch gleichzeitig der Ursprung ist und in dem die Geschwindigkeit 0 herrscht.

Nutzen wir nun diese Charakteristika zur Konstruktion eines Interpolationsverfahrens aus, das obiges Geschwindigkeitsfeld (4.49) exakt interpoliert.

Gegeben sind stets die Geschwindigkeiten \mathbf{u}_P und \mathbf{u}_N in den Zellmittelpunkten \mathbf{x}_P und \mathbf{x}_N . Gesucht ist der Wert \mathbf{u}_F im Flächenmittelpunkt \mathbf{x}_F , der die Zellen P und N als Nachbarn hat. In der Abbildung 4.3 ist dies dargestellt. Per linearer Interpolation können wir beliebige Geschwindigkeitswerte auf der Gerade zwischen \mathbf{x}_P und \mathbf{x}_N berechnen, also auch insbesondere den Wert \mathbf{u}_0 am Flächendurchstoßpunkt \mathbf{x}_0 . Die Idee ist nun, diesen linearen Interpolationswert im Punkt \mathbf{x}_0 entsprechend obiger Charakteristika so zu skalieren und rotieren, daß er schließlich den exakten Wert $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_F$ im Punkt \mathbf{x}_F annimmt.

Beginnen wir also damit, den Flächendurchstoßpunkt \mathbf{x}_0 und den zugehörigen linearen In-

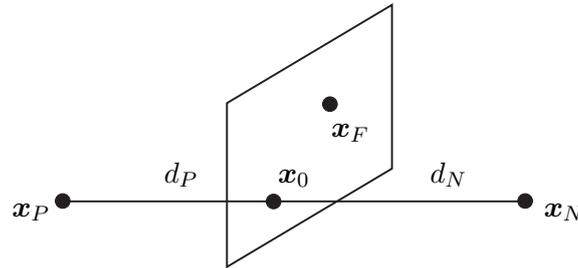


Abb. 4.3.: Mit linearer Interpolation läßt sich die Geschwindigkeit im Flächendurchstoßpunkt \mathbf{x}_0 aus den Werten in \mathbf{x}_P und \mathbf{x}_N berechnen.

terpolationswert \mathbf{u}_0 zu berechnen. Die Normalenform der Flächenebene lautet

$$\mathbf{s}_F \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_F) = 0,$$

und die Gerade durch \mathbf{x}_P und \mathbf{x}_N ist

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_P + \lambda(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Eingesetzt läßt sich so der Durchstoßpunkt

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_P + \frac{\mathbf{s}_F \cdot (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_P)}{\mathbf{s}_F \cdot (\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P)} (\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P) \quad (4.50)$$

berechnen. Mit linearer Interpolation gilt dann

$$\mathbf{u}_0 = \frac{d_N}{d_P + d_N} \mathbf{u}_P + \frac{d_P}{d_P + d_N} \mathbf{u}_N \quad (4.51)$$

mit $d_P = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_P|$ und $d_N = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_N|$.

Als nächstes skalieren wir nach obigem 3. Punkt \mathbf{x}_0 auf die Länge des gesuchten \mathbf{x}_F

$$\mathbf{x}_1 = \frac{|\mathbf{x}_F|}{|\mathbf{x}_0|} \mathbf{x}_0 \quad (4.52)$$

und entsprechend auch die Geschwindigkeit

$$\mathbf{u}_1 = \frac{|\mathbf{x}_F|}{|\mathbf{x}_0|} \mathbf{u}_0. \quad (4.53)$$

\mathbf{x}_1 hat nun dieselbe Länge wie \mathbf{x}_F , liegt also in derselben Kugelschale und muß jetzt noch nach dem 1. und 2. Punkt entlang des Breiten- und Längengrades korrigiert werden.

Gesucht ist also zunächst, wie in der Abbildung 4.4 verdeutlicht, der Ort \mathbf{x}_2 , an dem sich der Breitengrad von \mathbf{x}_1 und der Längengrad von \mathbf{x}_F schneiden. Dazu projizieren wir \mathbf{x}_1 und

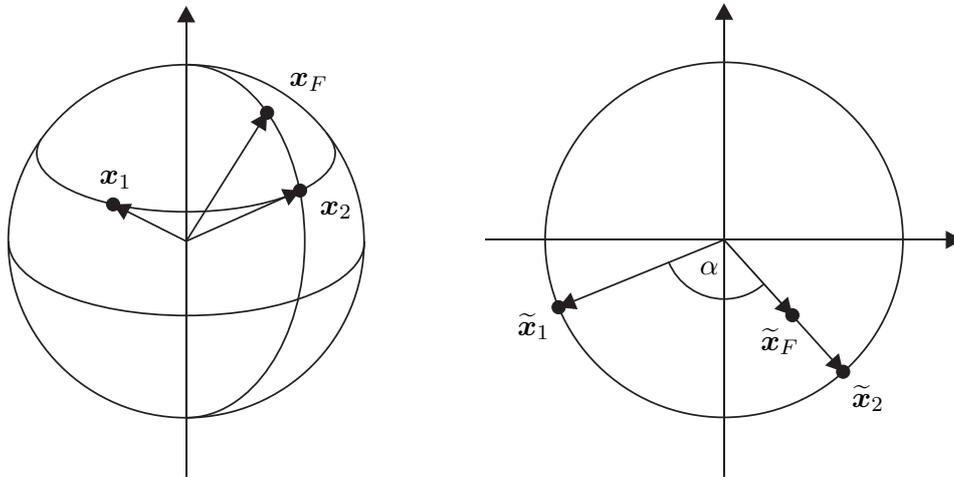


Abb. 4.4.: Der Breitengrad von \mathbf{x}_1 und der Längengrad von \mathbf{x}_F schneiden sich in \mathbf{x}_2 . Rechts wurden die Punkte in die Äquatorebene projiziert.

\mathbf{x}_F in die Äquatorebene

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_1)_1 \\ (\mathbf{x}_1)_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{x}}_F = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_F)_1 \\ (\mathbf{x}_F)_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bringt man nun $\tilde{\mathbf{x}}_F$ auf die Länge von $\tilde{\mathbf{x}}_1$, so erhält man $\tilde{\mathbf{x}}_2$

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{|\tilde{\mathbf{x}}_1|}{|\tilde{\mathbf{x}}_F|} \tilde{\mathbf{x}}_F,$$

und das gesuchte \mathbf{x}_2 ist dann schließlich

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} (\tilde{\mathbf{x}}_2)_1 \\ (\tilde{\mathbf{x}}_2)_2 \\ (\mathbf{x}_1)_3 \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

da \mathbf{x}_2 auf dem Breitengrad von \mathbf{x}_1 liegt. Um \mathbf{u}_2 zu berechnen, muß \mathbf{u}_1 nun entlang des Breitengrades um den Winkel

$$\alpha := \angle(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_F) = \arccos \frac{\tilde{\mathbf{x}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_F}{|\tilde{\mathbf{x}}_1| |\tilde{\mathbf{x}}_F|}$$

gegen den Uhrzeigersinn rotiert werden. $\boldsymbol{\Omega}/|\boldsymbol{\Omega}|$ ist dabei die Rotationsachse, so daß die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lautet. Es gilt dann im Punkt \mathbf{x}_2

$$\mathbf{u}_2 = A\mathbf{u}_1. \quad (4.55)$$

Als letzten Schritt muß nun noch entlang des Längengrades skaliert werden. Betrachten wir dazu die exakten Geschwindigkeitswerte in \mathbf{x}_2 und \mathbf{x}_F . Es gilt

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_2| &= |\boldsymbol{\Omega}| |\mathbf{x}_2| \sin \theta_2 & \text{mit} & \quad \theta_2 := \sphericalangle(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x}_2), \\ |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_F| &= |\boldsymbol{\Omega}| |\mathbf{x}_F| \sin \theta_F & \text{mit} & \quad \theta_F := \sphericalangle(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x}_F). \end{aligned}$$

Im Prinzip muß nun also $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_2$ auf die Länge von $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_F$ gebracht werden, d.h.

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_F = \frac{|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_F|}{|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_2|} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_2 = \frac{\sin \theta_F}{\sin \theta_2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_2,$$

da $|\mathbf{x}_F| = |\mathbf{x}_2|$. Also ist

$$\mathbf{u}_F = \frac{\sin \theta_F}{\sin \theta_2} \mathbf{u}_2 \quad (4.56)$$

zu wählen, womit wir die gesuchte Geschwindigkeit in \mathbf{x}_F konstruiert haben.

Zusammenfassend läßt sich \mathbf{u}_F aus den angrenzenden Zellwerten \mathbf{u}_P und \mathbf{u}_N über

$$\mathbf{u}_F = \frac{\sin \theta_F}{\sin \theta_2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{|\mathbf{x}_F|}{|\mathbf{x}_0|} \left(\frac{d_N}{d_P + d_N} \mathbf{u}_P + \frac{d_P}{d_P + d_N} \mathbf{u}_N \right) \quad (4.57)$$

bestimmen, was dem exakten Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_F$ entspricht.

Insgesamt wird durch diese Prozedur also das Geschwindigkeitsfeld (4.49) aus der Abbildung 4.2 exakt an den Flächenmittelpunkten interpoliert. Skaliert man dann \mathbf{u}_F mit den Upwind-Werten ρ_F und multipliziert mit dem Face Area Vektor \mathbf{s}_F , so ist der gesuchte Massenfluß (4.47) berechnet.

Die Qualität dieser Erdinterpolation im Vergleich zu Standardverfahren wie linearer oder Upwind-Interpolation werden wir im Kapitel 5.1.1 bis 5.1.4 näher untersuchen.

4.2.5. CFL-Kriterium

Wir haben nun unser Gleichungssystem bestehend aus Kontinuitäts-, Impuls-, Temperatur- und Zustandsgleichung diskretisiert. Jetzt müssen wir uns noch Gedanken um die konkrete Wahl der Zeitschrittweite Δt machen. Da wir einige Terme in unseren Gleichungen explizit behandeln, darf die Zeitschrittweite nicht zu groß gewählt werden, da sie sonst zu Instabilitäten führt. Entscheidend ist dabei das sogenannte CFL-Kriterium [24]

$$\frac{|\mathbf{u}| \Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (4.58)$$

Ihm liegt zugrunde, daß sich eine Größe pro Zeitschritt nur maximal eine Zelle weit fortbewegen darf, da sonst die Erhaltungseigenschaft verletzt wäre. Dies bedeutet für ein global gewähltes Δt

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x_{\min}}{|\mathbf{u}|_{\max}}. \quad (4.59)$$

Die kleinste Maschenweite Δx_{\min} ist dabei für jedes Gitter die Breite der Höenschicht, und als charakteristisches $|\mathbf{u}|_{\max}$ kann 180 m/s als maximale Geschwindigkeit von Atmosphärenströmungen gewählt werden. So muß im folgenden also die Zeitschrittweite an das jeweilige Gitter angepaßt werden.

4.2.6. Randbedingungen

Nun müssen wir noch die Randbedingungen unserer Variablen aus dem Kapitel 2.5 auf die diskrete Formulierung übertragen. Sie lassen sich in zwei Arten unterteilen, und zwar zum einen in Dirichlet-Randbedingungen, die den Wert einer Variablen am Rand direkt vorschreiben, und zum anderen in Neumann-Randbedingungen, bei denen der Gradient in Normalenrichtung am Rand bekannt ist.

Wird ein Dirichlet-Wert ϕ_B vorgegeben, so kann er direkt verwendet werden, wenn der Wert ϕ_F an einer Randfläche F benötigt wird, während der Gradient $(\nabla\phi)_F$ auf der Randfläche erst über

$$\mathbf{s}_F \cdot (\nabla\phi)_F = |\mathbf{s}_F| \frac{\phi_B - \phi_P}{|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_P|} \quad (4.60)$$

berechnet werden muß.

Bei Neumann-Randbedingungen verhält sich dies umgekehrt. Man kennt den Wert des Gradienten in Normalenrichtung

$$g_B = \left(\frac{\mathbf{s}_F}{|\mathbf{s}_F|} \cdot \nabla\phi \right)_F, \quad (4.61)$$

so daß direkt

$$\mathbf{s}_F \cdot (\nabla\phi)_F = |\mathbf{s}_F| g_B \quad (4.62)$$

gesetzt werden kann. Wird statt des Gradienten der Wert der Variablen an einer Randfläche benötigt, so läßt er sich über

$$\begin{aligned} \phi_F &= \phi_P + (\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P) \cdot (\nabla\phi)_F \\ &= \phi_P + |\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P| g_B \end{aligned} \quad (4.63)$$

berechnen.

4.2.7. Zuordnung von Höhenwerten

Da wir höhenabhängige Anfangswerte für unsere kommenden Simulationen vorschreiben werden, möchten wir zum Schluß des Diskretisierungskapitels noch eine Bemerkung zu den Höhenwerten machen, die jedem Zellmittelpunkt zugeordnet werden müssen. Unsere Triangulierung der Erde ist genau so gewählt, daß die Eckpunkte des Gitters auf der Erdoberfläche liegen. Die Gitterpunkte in der Atmosphäre sind dann geländefolgend so angeordnet, daß sie stets im Abstand der jeweiligen Höenschicht über den Bodenpunkten liegen. Da wir jedoch bei den Finite-Volumen-Methoden jeder Variablen einen Wert im Zellmittelpunkt und nicht in den Eckpunkten des Gitters zugewiesen haben, führt dies zu folgendem Problem.

Betrachte dazu ein Gitter ohne Gelände, wie es in der Abbildung 4.5 dargestellt ist. Die Eckpunkte \mathbf{e} liegen auf der Kugeloberfläche bzw. im Abstand der jeweiligen Höenschicht darüber und haben daher die Höhe $h_e = |\mathbf{e}| - a$ über NN, wobei a den Erdradius bezeichnet und der

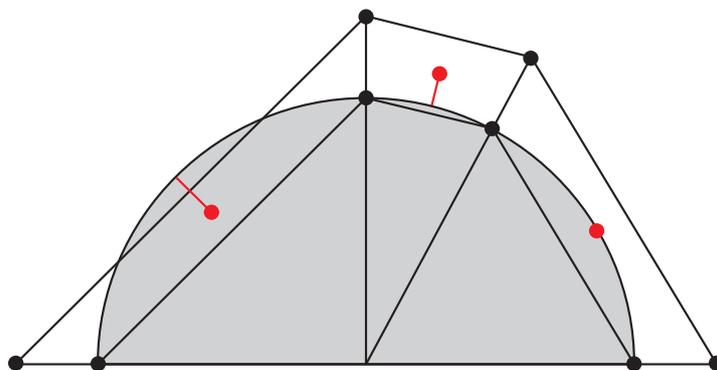


Abb. 4.5.: Die unterste Schicht eines Gitters ohne Gelände. Die Eckpunkte des Gitters sind schwarz markiert, die Zellmittelpunkte und ihre Höhen über NN rot.

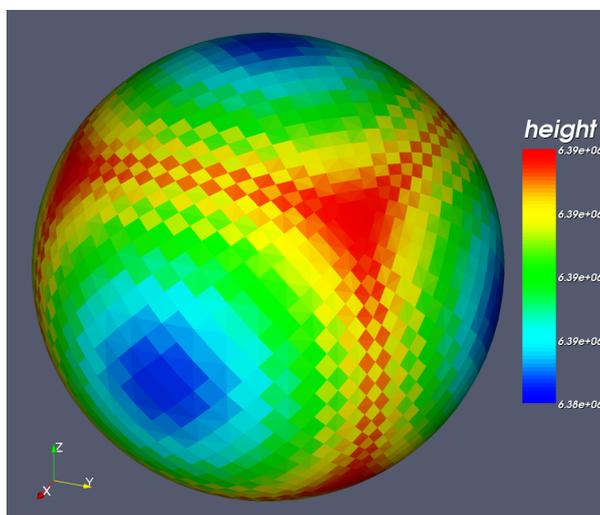


Abb. 4.6.: Die Höhenwerte der Zellmittelpunkte für die oberste Schicht eines uniformen Gitters ohne Gelände.

Ursprung im Zentrum der Erde liegt. Die Zellen einer Schicht haben dabei selbst bei den uniformen Gittern unterschiedliche Größen wegen der Projektion des ursprünglichen Würfelgitters auf die Kugel und die damit verbundene unterschiedliche Verzerrung der Zellen. Dies führt wie in der Abbildung 4.5 dazu, daß die Zellmittelpunkte \mathbf{x} unterschiedliche Höhenwerte $h_{\mathbf{x}} = |\mathbf{x}| - a$ über NN haben, obwohl sie eigentlich in derselben Höhenschicht liegen sollten.

Da wir in späteren Kapiteln für unsere Rechnungen höhenabhängige Anfangswerte wählen wollen, erweist sich dies als Problem. Es entstehen dann nämlich Felder, in denen die Würfelstruktur des zugrundeliegenden Gitters aufgrund der unterschiedlichen Zellgröße deutlich zutage tritt, wie in der Abbildung 4.6 für ein uniformes Gitter zu sehen ist.

Die Idee ist nun, die Höhe eines Zellmittelpunkts nicht über NN, also über der Kugel auszurechnen, sondern über dem Grundpolyeder, der durch die Eckpunkte auf der Kugeloberfläche definiert ist. Bestimme dazu für jede Zelle die Höhe h_i der Eckpunkte \mathbf{e}_i über die Formel

$$h_i = |\mathbf{e}_i| - a \quad (4.64)$$

für $i = 1, \dots, 6$ und interpoliere den Höhenwert h im Zellmittelpunkt \mathbf{x} mit Inverser Distanzgewichtung (Inverse Distance Weighting) der Form

$$h = \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{1}{d_i^2} h_i}{\sum_{i=1}^6 \frac{1}{d_i^2}}, \quad (4.65)$$

wobei $d_i := |\mathbf{x} - \mathbf{e}_i|$ den Abstand des Zellmittelpunkts zur jeweiligen Ecke bezeichnet.

So definieren wir uns im folgenden realistischere Höhenwerte in den Mittelpunkten, die an unsere jeweiligen adaptiven oder uniformen Gitter mit und ohne Gelände angepaßt sind.

5. Numerische Simulationen

Wenden wir uns nun der konkreten Lösung der Gleichungen zu. Dazu verwenden wir im folgenden das Open Source Strömungspaket OpenFOAM 1.3 (Field Operation And Manipulation) [40, 41]. OpenFOAM ist eine in C++ geschriebene CFD-Toolbox, die auf unstrukturierten Polyedergittern wie jene aus dem Kapitel 3 operiert und zur Diskretisierung Finite-Volumen-Methoden, wie sie im Kapitel 4 beschrieben wurden, verwendet.

5.1. Kontinuitätsgleichung

Als ersten Testfall wollen wir eine skalare Transportgleichung, nämlich die Kontinuitätsgleichung (2.1)

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

lösen und daran das Verhalten eines Skalars ρ unter dem Einfluß eines festen transportierenden Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{u} studieren. Insbesondere können wir so auch die Qualität unserer neuen an die Erdgeometrie angepaßten Interpolation von \mathbf{u} aus dem Kapitel 4.2.4 untersuchen.

Im Kapitel 4.2.2 wurde die Kontinuitätsgleichung diskretisiert

$$V_P \frac{\rho_P^{n+1} - \rho_P^n}{\Delta t} + \sum_F \varphi \rho_F^{n+1} = 0,$$

wobei für ρ_F^{n+1} das Upwind-Verfahren gewählt werden kann. φ ist der Massenfluß

$$\varphi = \mathbf{s}_F \cdot \mathbf{u}_F \tag{5.1}$$

über die jeweilige Seitenfläche und wird mit unserer an die Erdgeometrie angepaßten Interpolation von \mathbf{u} oder zum Vergleich auch mit linearer oder Upwind-Interpolation berechnet.

Als Randbedingungen verwenden wir für das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} im folgenden die Slip-Randbedingung (2.26)

$$\mathbf{u}_\perp = 0 \quad \text{und} \quad \nabla_\perp \mathbf{u}_\parallel = 0$$

und für die Dichte ρ die Neumann-0-Randbedingung (2.25)

$$\nabla_\perp \rho = 0.$$

Dadurch findet kein Massenfluß über den Rand statt.

In den folgenden vier Abschnitten untersuchen wir nun die Qualität unserer Erdinterpolation anhand verschiedener Geschwindigkeitsfelder.

5.1.1. Kreisströmung

Zunächst wählen wir als festes Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} eine Kreisströmung der Form

$$\mathbf{u} = \frac{1}{12} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (5.2)$$

wobei $\boldsymbol{\Omega}$ die Rotationsachse der Erde mit der Winkelgeschwindigkeit $|\boldsymbol{\Omega}|$ und \mathbf{r} der jeweilige Ortsvektor ist. In der Abbildung 5.1 a) ist das Strömungsfeld dargestellt.

Für eine Umdrehung werden bei dieser Wahl von \mathbf{u} auf jeder Kreisbahn um $\boldsymbol{\Omega}$

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{12}|\boldsymbol{\Omega}|} \approx 12 \text{ Tage} = 1.036.800 \text{ Sekunden}$$

benötigt.

Für ρ verwenden wir als Anfangsbedingung ein konstantes Feld

$$\rho^0 = 1 \text{ kg/m}^3, \quad (5.3)$$

das sich mit der Zeit nicht ändern sollte. Beachte außerdem, daß wir von nun an dimensionsbehaftet rechnen werden, um ein besseres Gefühl für die Größeneinheiten zu haben.

Wir lösen also nun (4.34) und möchten dabei die Güte unseres neuen Interpolationsschemas (4.57) bewerten. Dazu vergleichen wir es zum einen mit einer linearen Interpolation

$$\mathbf{u}_F = \frac{d_N}{d_P + d_N} \mathbf{u}_P + \frac{d_P}{d_P + d_N} \mathbf{u}_N, \quad (5.4)$$

wobei d_P und d_N jeweils die Abstände der Zellmittelpunkte zum Flächenmittelpunkt bezeichnen, und zum anderen mit einer Upwind-Interpolation

$$\mathbf{u}_F = \begin{cases} \mathbf{u}_P & \text{falls } \varphi \geq 0 \\ \mathbf{u}_N & \text{falls } \varphi < 0 \end{cases}, \quad (5.5)$$

wobei das Vorzeichen von φ zuvor per linearer Interpolation geschätzt werden muß.

Als Gitter verwenden wir das uniforme Gitter des Levels 9 mit 16 Höhengschichten. Gelände und Adaptivität werden an dieser Stelle außer acht gelassen, da sie für die Überprüfung der Interpolationsqualität irrelevant sind.

Im ersten Teil der Tabelle 5.1 sind die jeweiligen Spannen von ρ zu verschiedenen Zeitpunkten und mit den drei Interpolationsschemata aufgelistet. Unsere Erdinterpolation ist für diese Kreisströmung per Konstruktion exakt, liefert also dieselben Werte in den Flächenmittelpunkten, die eine Auswertung der Formel (5.2) an diesen Orten ergeben würde. Daher erhält sie das Anfangsfeld von ρ , während die anderen Schemata Artefakte liefern, die mit der Zeit immer größer werden.

In der Abbildung 5.2 a) sind diese Fehler zum Zeitpunkt 10000 s dargestellt. Die lineare Interpolation bildet schachbrettartige Muster aus, bei denen die Würfelstruktur des zugrundeliegenden Gitters hervortritt. Die Upwind-Interpolation ist dagegen deutlich besser, führt jedoch auch zu Artefakten an Würfelkanten, was natürlich vermieden werden sollte, während bei der Erdinterpolation wie bereits erwähnt das Anfangsfeld von ρ perfekt erhalten wird.

	Interpolation	10 s	100 s	1000 s	10000 s
Kreis- strömung	linear	[0,99300; 1,01]	[0,9360; 1,0700]	[0,579; 1,570]	[0,421; 3,21]
	upwind	[0,99997; 1,00]	[0,9998; 1,0003]	[0,998; 1,003]	[0,988; 1,01]
	earth	[1; 1]	[1; 1]	[1; 1]	[1; 1]
Kreis- strömung 90°	linear	[0,99300; 1,01]	[0,9360; 1,0700]	[0,579; 1,570]	[0,421; 3,21]
	upwind	[0,99997; 1,00]	[0,9998; 1,0003]	[0,998; 1,003]	[0,988; 1,01]
	earth	[0,99985; 1,00]	[0,9985; 1,0015]	[0,986; 1,010]	[0,906; 1,10]
Sinus- kreis- strömung	linear	[0,9930; 1,0100]	[0,936; 1,0700]	[0,584; 1,58]	[0,370; 3,19]
	upwind	[0,9998; 1,0002]	[0,998; 1,0017]	[0,994; 1,01]	[0,941; 1,08]
	earth	[0,9999; 1,0001]	[0,999; 1,0008]	[0,992; 1,01]	[0,935; 1,07]
Rossby- Haurwitz- Welle	linear	[0,9830; 1,0200]	[0,850; 1,170]	[0,408; 2,12]	[0,374; 3,73]
	upwind	[0,9995; 1,0005]	[0,995; 1,005]	[0,958; 1,04]	[0,757; 1,31]
	earth	[0,9998; 1,0002]	[0,998; 1,002]	[0,977; 1,02]	[0,856; 1,17]

Tabelle 5.1.: Spanne von ρ nach 10, 100, 1000 und 10000 s, wenn mit einem konstanten Anfangsfeld $\rho^0 = 1 \text{ kg/m}^3$ begonnen wird. Gerechnet wurde auf dem uniformen Gitter des Levels 9 mit 16 Schichten und mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 10 \text{ s}$. Die Abbildung 5.2 zeigt die zugehörigen Bilder.

5.1.2. Um 90° geneigte Kreisströmung

Wir wählen nun ebenso wie im vorigen Kapitel eine Kreisströmung

$$\mathbf{u} = \frac{1}{12} \boldsymbol{\Omega}_{90} \times \mathbf{r} \quad (5.6)$$

als Geschwindigkeitsfeld, diesmal jedoch mit einer um 90° geneigten Achse

$$\boldsymbol{\Omega}_{90} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{\Omega}| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

wie in der Abbildung 5.1 b) dargestellt wird.

Für ρ verwenden wir wieder ein konstantes Anfangsfeld

$$\rho^0 = 1 \text{ kg/m}^3 \quad (5.8)$$

und vergleichen wie im Kapitel 5.1.1 die drei verschiedenen Interpolationsschemata, siehe dazu die Tabelle 5.1.

Für diese um 90° geneigte Kreisströmung erhält unser Erdinterpolationsschema das Anfangsfeld von ρ auch nicht mehr, liefert jedoch qualitativ deutlich bessere Ergebnisse als die

übrigen beiden. Die Spanne von ρ ist zwar bei der Erdinterpolation leicht größer als bei der Upwind-Interpolation, doch erstere weicht nur an den Polen von dem konstanten Anfangsfeld $\rho^0 = 1 \text{ kg/m}^3$ ab, wie man in der Abbildung 5.2 b) sieht. Die anderen beiden Schemata liefern dagegen erneut großflächig verteilte Artefakte, die im Vergleich zur normalen Kreisströmung nur entsprechend rotiert sind und bei denen die Würfelstruktur des zugrundeliegenden Gitters hervortritt.

5.1.3. Sinuskreisströmung

Nun wollen wir die Kreisströmung (5.2) um einen Sinus modulieren und so eine Art gestörte Kreisströmung konstruieren. Bestimme dazu zunächst für jeden Ortsvektor \mathbf{r} seinen Längengrad $\alpha \in [0, 2\pi[$ und seinen Breitengrad $\beta \in [0, \pi]$ über die Formeln

$$\alpha(\mathbf{r}) = \begin{cases} \arccos \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} & \text{falls } r_1 \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} & \text{falls } r_1 < 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

und

$$\beta(\mathbf{r}) = \arccos \frac{r_3}{|\mathbf{r}|}. \quad (5.10)$$

Der Vektor $\frac{1}{12}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ soll nun in der Tangentialebene, deren Normalenvektor $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ ist, abgelenkt werden, und zwar so, daß pro Viertelkreis eine Sinusschwingung $\sin(4\alpha)$ erzeugt wird, die mit dem Breitengrad über $\frac{1}{8}\sin(2\beta)$ gestaucht wird. Betrachte also die Funktion

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{8} \sin(2\beta) \sin(4\alpha), \quad (5.11)$$

deren Steigung bezüglich des Längengrades

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \sin(2\beta) \cos(4\alpha)$$

ist. Dies entspricht einem Rotationswinkel γ um die Achse $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ mit

$$\gamma(\alpha, \beta) = \arctan \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right). \quad (5.12)$$

Rotiere nun also jeden Vektor $\mathbf{u}_K = \frac{1}{12}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ der Kreisströmung gegen den Uhrzeigersinn um γ um die Achse $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$

$$\mathbf{u}_S = \cos \gamma \mathbf{u}_K + (1 - \cos \gamma) \left\langle \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \mathbf{u}_K \right\rangle \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + \sin \gamma \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \times \mathbf{u}_K. \quad (5.13)$$

Nun soll noch jede Kurve wie bei der ursprünglichen Kreisströmung in einer annähernd gleichen Geschwindigkeit durchlaufen werden. Dies erreichen wir, indem wir das resultierende

\mathbf{u}_S noch geeignet skalieren, und zwar auf der Nord- und Südhalbkugel mittels

$$\mathbf{u} = \begin{cases} 2^{+f(\alpha,\beta)} \mathbf{u}_S & \text{falls } \beta \leq \frac{\pi}{2} \\ 2^{-f(\alpha,\beta)} \mathbf{u}_S & \text{falls } \beta > \frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad (5.14)$$

Es ergibt sich das Strömungsfeld aus der Abbildung 5.1 c).

Wie zuvor wählen wir eine konstante Anfangsbedingung für die Dichte

$$\rho^0 = 1 \text{ kg/m}^3 \quad (5.15)$$

und vergleichen wieder die Resultate der verschiedenen Interpolationsschemata. Nun kann nicht mehr erwartet werden, daß das Anfangsfeld von ρ erhalten bleibt, jedoch sollte dies annähernd der Fall sein. Die Tabelle 5.1 und die Abbildung 5.2 c) zeigen, daß die Upwind- und Erdinterpolation qualitativ ähnliche Ergebnisse mit leicht geringeren Werten und einer glatteren Verteilung bei der Erdinterpolation liefern, wohingegen die lineare Interpolation erneut Artefakte mit deutlich größeren Spannen von ρ erzeugt.

5.1.4. Rossby-Haurwitz-Welle

Als vierte Strömung betrachten wir die sogenannte Rossby-Haurwitz-Welle, die zu den Standardtestfällen der Flachwassergleichungen zählt [26, 52]. Sei dazu $\alpha \in [-\pi, \pi[$ der Längengrad und $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ der Breitengrad des Ortsvektors \mathbf{r} mit

$$\alpha(\mathbf{r}) = \begin{cases} \arccos \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} & \text{falls } r_1 \geq 0 \\ -\arccos \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} & \text{falls } r_1 < 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

und

$$\beta(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{r_3}{|\mathbf{r}|}. \quad (5.17)$$

Das Strömungsfeld einer Rossby-Haurwitz-Welle der Wellenzahl 4 setzt sich aus der zonalen Geschwindigkeit u_z in Richtung Osten

$$u_z = 50 (\cos \beta + \cos^3 \beta (5 \sin^2 \beta - 1) \cos(4\alpha)) \quad (5.18)$$

und der meridionalen Geschwindigkeit u_m in Richtung Norden

$$u_m = -200 \cos^3 \beta \sin \beta \sin(4\alpha) \quad (5.19)$$

zusammen. Insgesamt erhalten wir so das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{u}_R = u_z \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}}{|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|} + u_m \frac{\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}{|\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})|}, \quad (5.20)$$

das konstant in der Höhe ist. Wollen wir es noch linear in der Höhe skalieren, wie es auch schon

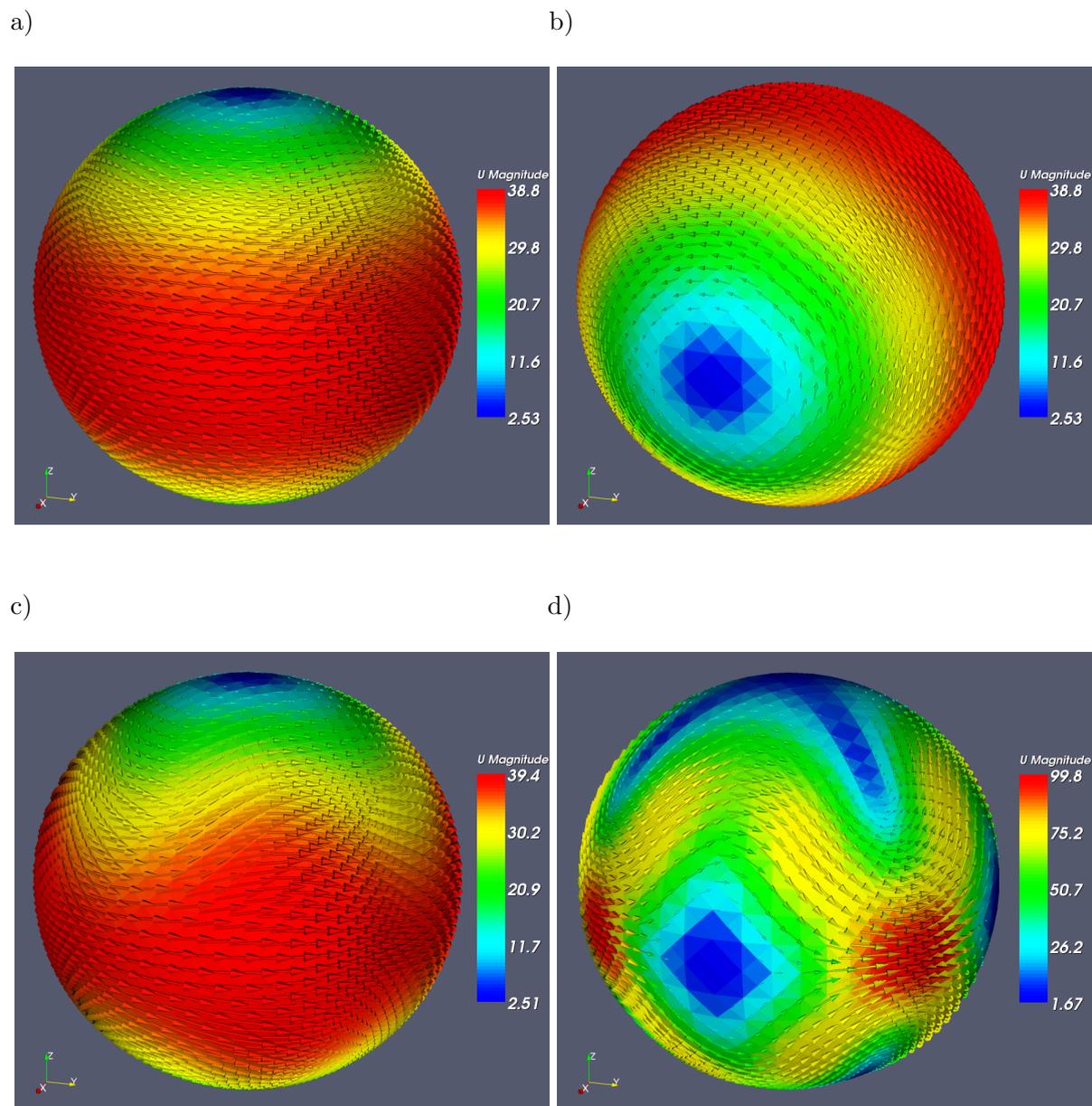


Abb. 5.1.: Geschwindigkeitsfelder \mathbf{u} für a) die Kreisströmung, b) die um 90° geneigte Kreisströmung, c) die Sinuskreisströmung und d) die Rossby-Haurwitz-Welle.

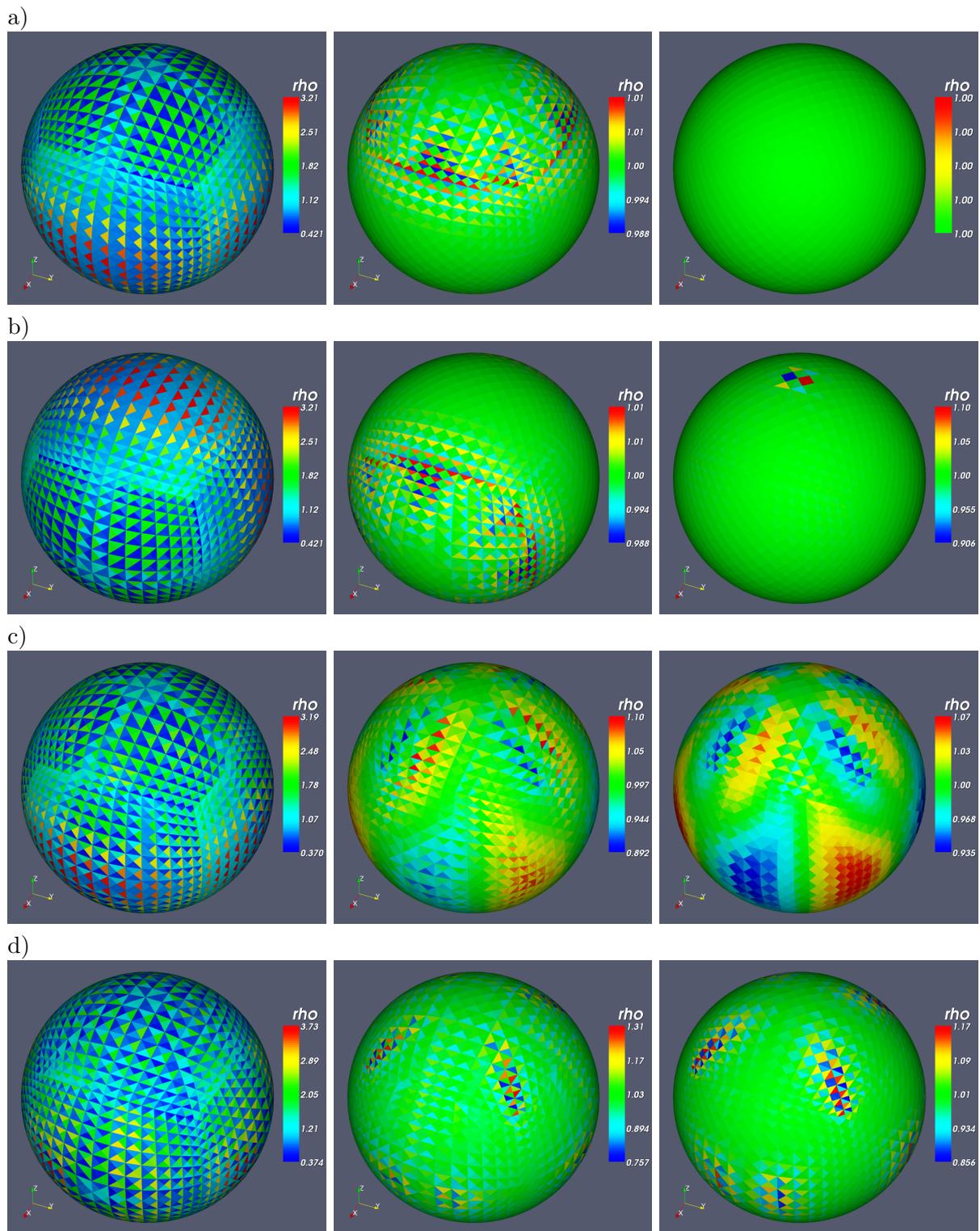


Abb. 5.2.: ρ nach 10000 s bei konstantem Anfangsfeld und mit linearer, Upwind- und Erdinterpolation für a) die Kreisströmung, b) die um 90° geneigte Kreisströmung, c) die Sinuskreisströmung und d) die Rossby-Haurwitz-Welle.

die vorherigen Strömungen waren, so ergibt sich schließlich

$$\mathbf{u} = \frac{|\mathbf{r}|}{a} \mathbf{u}_R \quad (5.21)$$

mit dem Erdradius a . Die Abbildung 5.1 d) zeigt dieses Geschwindigkeitsfeld.

Ein erneuter Start mit

$$\rho^0 = 1 \text{ kg/m}^3 \quad (5.22)$$

und ein Vergleich der drei Interpolationsschemata führt zu den entsprechenden Werten der Tabelle 5.1 und den Bildern der Abbildung 5.2 d). Auch hier beobachten wir eine qualitative Ähnlichkeit der Ergebnisse bei der Upwind- und Erdinterpolation mit leicht geringeren Spannen und einer weniger großflächigen Verteilung der Abweichung von ρ^0 bei der Erdinterpolation.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die lineare Interpolation in keinem der vorgestellten Fälle zufriedenstellende Ergebnisse liefert, sondern vielmehr schachbrettartige Würfelstrukturen erzeugt, die unrealistisch sind und deren Fehler sich mit der Zeit deutlich aufschaukeln. Die Würfelstruktur erklärt sich dabei durch die Stauchung der Zellen zu den Würfelkanten hin und die damit verbundene unterschiedliche Schräge der jeweiligen Nachbarzellen, während die Entstehung des Schachbrettmusters daran liegt, daß die Zellen in unterschiedlichen Winkeln zur Strömung ausgerichtet sind.

Die Upwind-Interpolation liefert da schon weitaus bessere Ergebnisse, bildet bei den Kreisströmungen jedoch auch Artefakte an den Würfelkanten aus und tendiert zu eher großflächigeren Verteilungen des Fehlers, während die Erdinterpolation die Kreisströmung exakt interpoliert und auch bei geneigten Kreisströmungen lediglich geringe Fehler an den Polen erzeugt. Bei der Sinus- und Rossby-Haurwitz-Strömung sind sich Upwind- und Erdinterpolation ähnlich, wobei letztere jedoch leicht geringere Spannen von ρ ausbildet und bei der Sinusströmung glattere Ergebnisse liefert. Die Erdinterpolation stellt sich daher in allen vier Fällen als die beste Wahl heraus.

5.1.5. Transport eines \cos^2 -Zylinders

Als nächstes wollen wir die numerische Genauigkeit unserer Lösung untersuchen. Dazu betrachten wir erneut die Kreisströmung (5.2) und konstruieren einen \cos^2 -Zylinder als Anfangsbedingung für die Dichte ρ , um so den passiven Transport eines Skalars beobachten zu können. Der Zylinder soll durch das fest vorgegebene Geschwindigkeitsfeld in zwölf Tagen einmal um die Erde transportiert werden. Dies ist ein üblicher Testfall, der sich in vielen Varianten in der Literatur finden läßt [31, 52].

Sei \mathbf{r} ein Ortsvektor, der den Abstand

$$d := \sqrt{r_2^2 + r_3^2}$$

zur \mathbf{x} -Achse hat. \mathbf{r} ist dabei immer als Zellmittelpunkt zu verstehen. Das Anfangsfeld der Dichte läßt sich dann über die Formel

$$\rho^0 = \begin{cases} 1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{3000000}\right) \text{ kg/m}^3 & \text{falls } r_1 > 0 \text{ und } d \leq 3000000 \\ 1 \text{ kg/m}^3 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.23)$$

Gitter	1	3	5	7	9	11
Δt in s	32400	16200	8100	4050	2025	1012,5
# Zeitschritte	32	64	128	256	512	1024

Tabelle 5.2.: Wahl der Zeitschrittweite Δt für den Transport des \cos^2 -Zylinders über zwölf Tage = 1036800 s. Dies gilt sowohl für die uniformen als auch die adaptiven Gitter.

wählen. Gelöst wird erneut die Kontinuitätsgleichung (2.1). Da diese Gleichung keinen diffusiven Term enthält und wir außerdem für \mathbf{u} Slip-Randbedingungen gesetzt haben, wäre zu erwarten, daß der Zylinder bei seinem Transport um die Erde zumindest bei den Gittern ohne Gelände erhalten bleibt und nach zwölf Tagen, also nach einer Umdrehung, wieder seinen Ausgangsort erreicht hat. Diese perfekte Erhaltung des Zylinders ist jedoch allein durch die approximative Lösung der Gleichung nicht gewährleistet, statt dessen wird sich sogenannte numerische Diffusion einstellen, die den ursprünglichen Zylinder mit einem Kreis als Grundfläche entlang der Strömung ellipsenförmig mit entsprechend kleineren Maxima von ρ verzerrt.

Genau dies beobachten wir dann auch, wenn wir die Kontinuitätsgleichung auf unseren drei Gittersets des Kapitels 3.2.2 lösen. Die Gitter waren so gewählt, daß sich für das nächstfeinere Gitter die Anzahl der Zellen etwa verachtacht hat, was einer Halbierung der Maschenweite entspricht. Daher wählen wir die Zeitschrittweite Δt so, daß sie sich ebenfalls mit dem nächstfeineren Gitter halbiert. Da wir die Kontinuitätsgleichung voll implizit lösen, sind wir bei der Wahl von Δt nicht an das CFL-Kriterium des Kapitels 4.2.5 gebunden und können daher die großen Zeitschrittweiten der Tabelle 5.2 verwenden. Es ergeben sich die Abbildungen 5.3 und 5.4 für die Dichte ρ zu Beginn und nach einer Umdrehung.

Bei den Rechnungen fällt auf, daß das Gelände kaum einen Einfluß auf den Transport des Zylinders hat, was daran liegt, daß er sich bis in die Stratosphäre erstreckt. Außerdem muß man sich verdeutlichen, wie flach die Erde selbst mit Gelände in Wirklichkeit ist. Ihr Oberflächeninhalt beträgt ca. 510 Mio. km² und ihr Durchmesser etwa 12742 km, während der Mount Everest gerade mal 8850 m hoch ist. Bei sehr groben Gittern, zu denen unsere Beispiele zählen, ist der Einfluß des Geländes daher relativ gering. So sieht man auch bei den uniformen Gittern keinen sichtbaren Unterschied zwischen denjenigen mit und ohne Gelände, so daß die Bilder der oberen beiden Reihen jeweils für beide Arten von uniformen Gittern zu verstehen sind.

Die adaptiven Gitter waren so gewählt, daß ihr größtes Level mit dem Level des zugehörigen uniformen Gitters übereinstimmt. Sie lösen also nur bestimmte Bereiche feiner auf, liefern sonst jedoch qualitativ ähnliche Ergebnisse. Nur bei dem größten Gitter ist ein deutlicher Unterschied zu erkennen, der daran liegt, daß der Zylinder durch die unterschiedliche Größe der Zellen und Abstände zur \mathbf{x} -Achse zu einem Dreieck degeneriert. Dadurch, daß wir statisch adaptive Gitter verwenden, die zwar das Gelände besser approximieren, allerdings nicht den Zylinder dynamisch feiner auflösen, ist auch kein größerer Qualitätssprung in der Rechnung zu erwarten. Allerdings muß man festhalten, daß es zumindest ohne Probleme möglich ist, diesen Testfall auf adaptiven Gittern zu rechnen und dafür ähnliche Konvergenzraten zu erhalten, wie sie in der Abbildung 5.5 dargestellt sind.

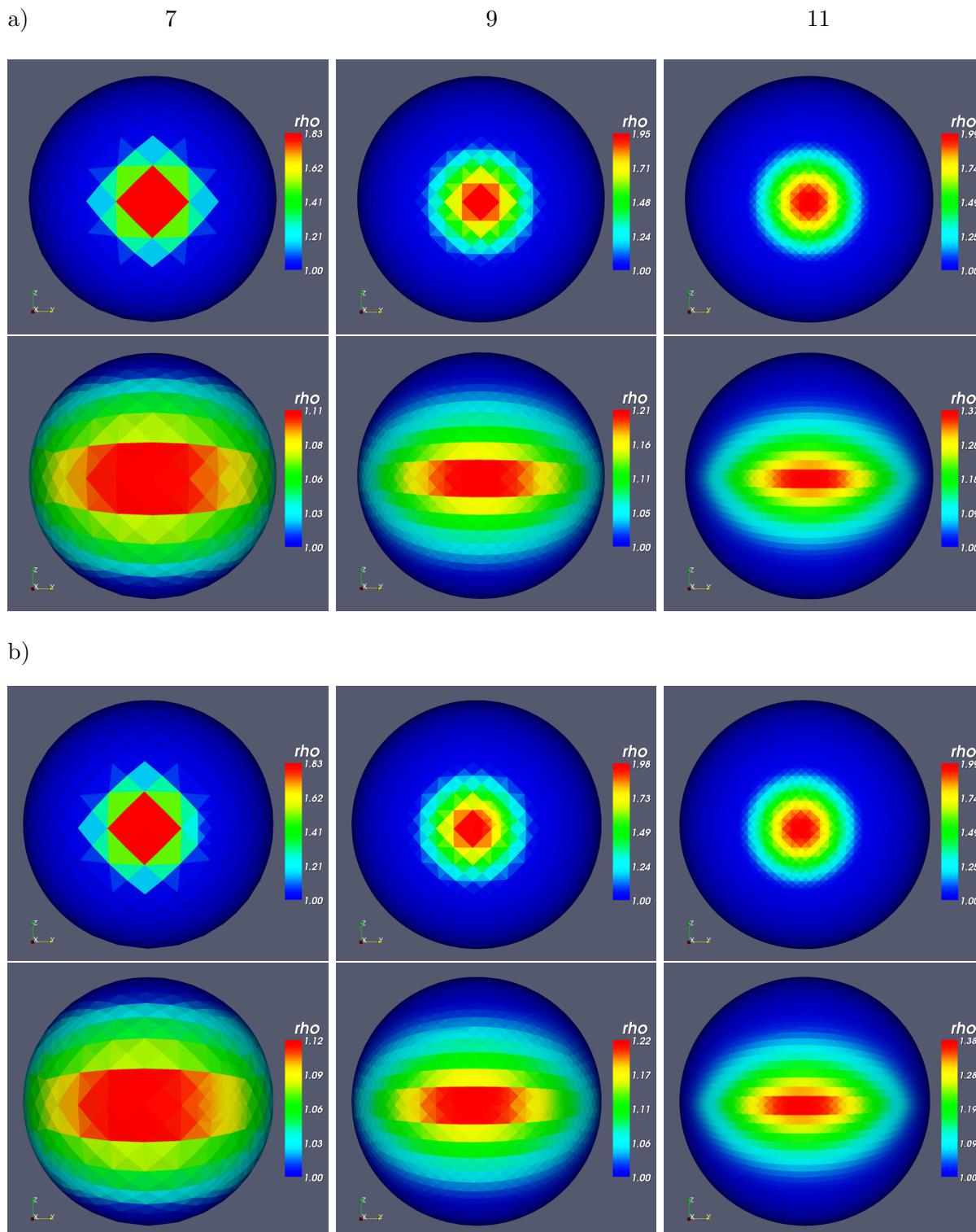


Abb. 5.4.: Transport eines \cos^2 -Zylinders um die Erde. Dargestellt ist jeweils in der oberen Zeile ρ zu Beginn und in der unteren ρ nach zwölf Tagen für die Auflösungen 7, 9 und 11 von a) uniformen Gittern und b) adaptiven Gittern.

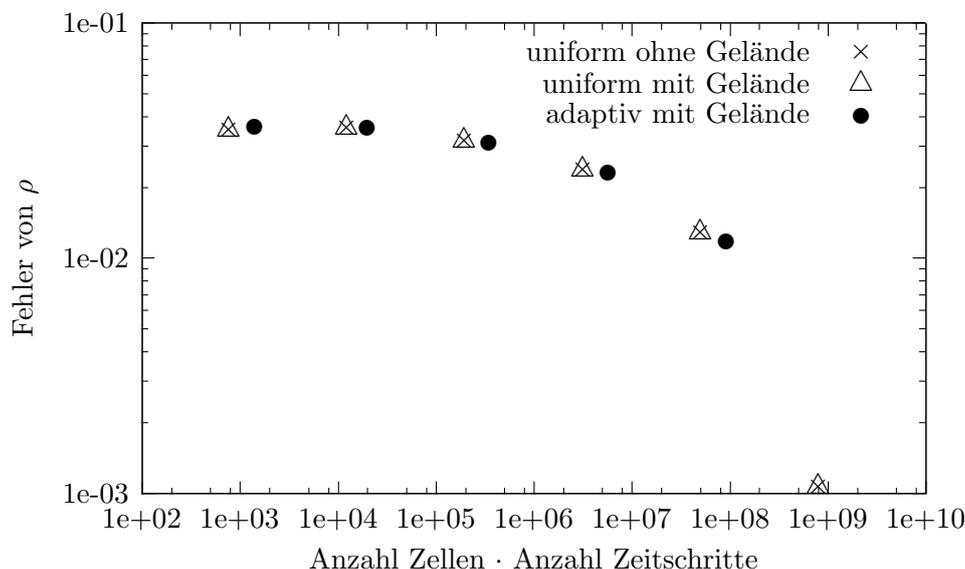


Abb. 5.5.: Gesamtkomplexität von ρ in doppeltlogarithmischer Darstellung. Der Fehler ist jeweils in Differenz zum feinsten adaptiven Gitter zu verstehen. Die Anzahl der Zeitschritte wurde nach der Tabelle 5.2 an die Gitter angepaßt.

Der Fehler e wurde dabei über die Formel

$$e := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_i^{\text{ref}})^2} \quad (5.24)$$

berechnet, wobei ρ_i der Wert von ρ in der Zelle i ist. Als Referenzlösung ρ^{ref} nehmen wir stets die Lösung des feinsten adaptiven Gitters. Dadurch ist eine Interpolation von ρ auf dieses Gitter nötig, da sich die Werte sonst nicht vergleichen lassen. Für diese Interpolation zwischen den einzelnen Gittern verwenden wir das Programm Tecplot [47] und darin den Kriging-Algorithmus, der zu besseren Resultaten als die Inverse Distance Interpolation geführt hat. Der Vollständigkeit halber halten wir auch die Einstellungen fest, die wir für die Kriging-Interpolation getroffen haben: Range 0.3, Zero Value 0, No Drift, Point Selection Octant, Number of Points 5.

Betrachten wir noch einmal die Konvergenzgraphen 5.5. Alle Gitter wurden dabei in Differenz zum feinsten adaptiven Gitter ausgewertet, auch die feinsten uniformen Gitter des Levels 11. Sie besitzen ungefähr halb so viele Zellen wie das feinste adaptive Gitter, so daß auch dieser Vergleich noch gerechtfertigt ist. Man sieht allerdings, daß die Asymptotik noch nicht erreicht ist, aber weitere Rechnungen auf feineren Gittern sollten zeigen, daß die zu erwartende Konvergenzrate von 1 erreicht wird, was die Steigung zwischen den letzten beiden uniformen Meßpunkten bereits andeutet.

5.2. Kontinuitäts-, Impuls- und Zustandsgleichung

Bisher haben wir nur die Kontinuitätsgleichung (2.1)

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

für ein festes Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} gelöst. Nun wollen wir die Impulsgleichung (2.61)

$$(\rho \mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \circ \mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \rho \mathbf{u} + \nabla p = -\rho g \mathbf{k}$$

hinzunehmen, die wir bereits im Kapitel 4.2.3 diskretisiert haben. Es fehlt noch ein Zusammenhang zwischen Dichte und Druck, den uns die Zustandsgleichung (2.9)

$$p = \rho RT$$

liefert. T werden wir im folgenden geeignet fest wählen, um die Temperaturgleichung zunächst außer acht zu lassen.

Lösen werden wir die Gleichungen sequentiell, und zwar pro Zeitschritt zunächst die Kontinuitätsgleichung und dann die Impulsgleichung, in der die neuen Werte von ρ verwendet werden. Der Fehler, der dadurch entsteht, daß man die Gleichungen sequentiell löst, statt in jedem Zeitschritt das gesamte System zu erfüllen, wird durch diese Wahl minimiert. Betrachte dazu die diskretisierten Gleichungen (4.34), (4.39) und (4.45). Zunächst lösen wir die Kontinuitätsgleichung nach ρ^{n+1} , berechnen mit diesen Werten anhand der Zustandsgleichung das neue p^{n+1} und setzen diese neuen Werte in die Impulsgleichung ein, um sie dann nach \mathbf{u}^{n+1} zu lösen. Dies stellt sich als stabilste Wahl einer sequentiellen Lösung heraus.

Außerdem müssen wir uns, wie bereits im Kapitel 4.2.5 erwähnt wurde, Gedanken um die Zeitschrittweite Δt machen, da wir einige Terme explizit diskretisiert haben und daher für eine stabile Zeitdiskretisierung an das CFL-Kriterium (4.59)

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x_{\min}}{|\mathbf{u}|_{\max}}$$

gebunden sind. Dabei können wir wie bereits motiviert als kleinste Maschenweite Δx_{\min} für jedes Gitter die Breite der Höhenschicht und für die maximale Geschwindigkeit $|\mathbf{u}|_{\max} = 180$ m/s wählen. Damit ergeben sich die Zeitschrittweiten der Tabelle 5.3, die wir im folgenden für unsere Gitter verwenden werden. Leicht höhere Zeitschrittweiten als die angegebenen machten die Rechnungen instabil.

Außerdem sei erwähnt, daß man prinzipiell größere Zeitschrittweiten wählen kann, wenn man ein Zeitdiskretisierungsverfahren höherer Ordnung verwendet, allerdings nur, wenn das Problem glatt genug ist. Daher haben wir einige Tests mit dem Crank-Nicolson-Verfahren 2. Ordnung gemacht, die jedoch gezeigt haben, daß dieses Verfahren deutlich instabiler im Vergleich zur impliziten Euler-Methode 1. Ordnung ist. Unser Problem ist also nicht glatt genug. Dies wird insbesondere bei Atmosphärenströmungen häufig mit einer künstlich eingeführten Diffusion ausgeglichen [44], was jedoch zu anderen Arten von Gleichungen führt, die nicht wirklichkeitsgetreu sind. Wir belassen es daher in dieser Arbeit bei einem Verfahren 1. Ordnung.

Gitter	1	3	5	7	9	11
Δx_{\min} in m	24000	12000	6000	3000	1500	750
CFL Δt in s	133,33	66,67	33,33	16,67	8,33	4,17
gewähltes Δt in s	100	50	25	10	5	1

Tabelle 5.3.: Die Zeitschrittweite Δt nach der CFL-Bedingung (4.59) und das letztlich gewählte Δt je Gitter.

5.2.1. Hoch- und Tiefdruckgebiete

Soviel zu einigen prinzipiellen Überlegungen. Es stellt sich nun die Frage, mit welchen Anfangswerten wir das Gleichungssystem konkret lösen wollen. Wir benötigen Daten für die Dichte, den Druck, die Geschwindigkeit und ein fest gewähltes Temperaturprofil. Die Idee ist nun, kreisförmige Hoch- und Tiefdruckgebiete als Anfangsdaten zu wählen, so daß sich horizontal ausgleichende Strömungen einstellen. Die Vertikale sollte dabei im hydrostatischen Gleichgewicht sein, das die Druckgradientkraft und Gravitation balanciert. Um dieses hydrostatische Gleichgewicht

$$\nabla_{\perp} p = -\rho g \mathbf{k} \quad (5.25)$$

zu erhalten, ist es nötig, daß sich Druck und Dichte in der Höhe um eine Ordnung unterscheiden. Das heißt, wenn p von n ter Ordnung mit der Höhe abfällt, sollte ρ von $(n - 1)$ ter Ordnung abfallen. Daher wählen wir für den Druck einen linearen Verlauf mit der Höhe von 10^5 auf 10^4 Pa und für ρ eine konstante Schichtung. Realistischer wäre die barometrische Höhenformel, auf die wir im Ausblick noch näher eingehen werden. Bei ihr führt die Berechnung des Druckgradienten zu Schwierigkeiten, so daß wir hier als erste Näherung den linearen Abfall im Druck postulieren. Dies führt zu der Formel

$$p(h) = -3,75h + 10^5 \text{ Pa}, \quad (5.26)$$

bei der am Boden 10^5 Pa und in der Stratosphäre in 24 km Höhe 10^4 Pa erreicht werden. Wählen wir nun ρ als

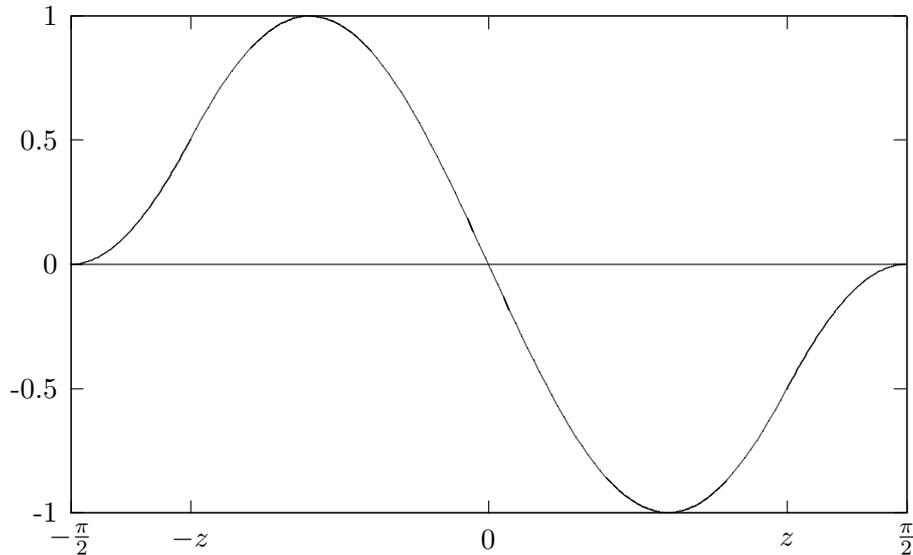
$$\rho(h) = \frac{3,75}{g} \text{ kg/m}^3 \approx 0,3824 \text{ kg/m}^3, \quad (5.27)$$

so gilt das hydrostatische Gleichgewicht (5.25), und über die Zustandsgleichung (2.9) ergibt sich für die Temperatur ein linearer Abfall der Form

$$T(h) = \frac{g}{3,75R} (-3,75h + 10^5) \text{ K}. \quad (5.28)$$

Dies bedeutet eine völlig unrealistische Schwankung von T zwischen 911,09 K und 91,109 K, allerdings wird nach T auch nicht gelöst, so daß sie nur ihren passenden Beitrag zur Zustandsgleichung leisten muß. Erwähnt sei außerdem, daß mit der Höhe h in unseren Formeln stets die Höhe über dem Grundpolyeder, wie sie im Kapitel 4.2.7 eingeführt wurde, gemeint ist.

Mit dieser Wahl ist nun also die Atmosphäre im hydrostatischen Gleichgewicht. Es fehlen uns noch die horizontalen Hoch- und Tiefdruckgebiete, die wir am Boden anlegen und dann p

Abb. 5.6.: Die glatt auslaufende Sinusfunktion $s(\beta)$.

und ρ darüber wie gerade ausgeführt schichten werden.

Sei dazu $\alpha \in [0, 2\pi[$ der Längengrad und $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ der Breitengrad. Eine Funktion der Form $f(\alpha, \beta) = \sin(2\alpha) \sin(2\beta)$ würde je zwei kreisförmige Hoch- und Tiefdruckgebiete auf der Nord- und auf der Südhalbkugel erzeugen. In Polnähe führt diese Funktion allerdings zu großen Gradienten, so daß wir den Sinus über dem Breitengrad besser glatt zu den Polen hin auslaufen lassen sollten.

Dazu konstruieren wir uns zunächst Sinusfunktionen der Form $\sin(\beta+a)+1$ und $\sin(\beta+b)-1$, die in den Berührungspunkten $\pm z$ in 0. und 1. Ableitung mit $\sin(\beta)$ übereinstimmen. Die so zusammengesetzten Funktionen müssen dann noch geeignet verschoben und gestaucht werden, um im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ den Graph der Abbildung 5.6 zu bilden. Die Funktion dazu lautet

$$s(\beta) := \begin{cases} \sin\left(\frac{2n}{\pi}\beta + \pi - 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) + 1 & \text{falls } \beta < -z \\ \sin\left(\frac{2n}{\pi}\beta - \pi + 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) - 1 & \text{falls } \beta > z \\ \sin\left(\frac{2n}{\pi}\beta + \pi\right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.29)$$

mit

$$n := \frac{3\pi}{2} - 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

und dem Berührungspunkt

$$z := -\frac{\pi}{2n} \left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \pi \right).$$

Mit Hilfe dieser Funktion erzeugen wir nun Gebiete hoher und niedriger Dichte als Anfangsbe-

dingung über die Formel

$$\rho^0 = \frac{3,75}{g} + \frac{1}{100}(\sin(2\alpha)s(\beta)) \text{ kg/m}^3 \quad (5.30)$$

und entsprechende Hoch- und Tiefdruckgebiete über die Zustandsgleichung

$$p^0 = \rho^0 RT, \quad (5.31)$$

wobei T höhenabhängig wie in (5.28) zu wählen ist. Bei den Geschwindigkeiten starten wir mit

$$\mathbf{u}^0 = \vec{0} \text{ m/s.} \quad (5.32)$$

Als Randbedingungen wählen wir erneut für \mathbf{u} Slip-Bedingungen und für ρ und T Neumann-0, während der Gradient von p am Rand auf die Gravitationskraft gesetzt wird. Vergleiche dazu das Kapitel 2.5.

Betrachten wir uns den Druckgradienten noch genauer. Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla p &= \nabla(\rho RT) \\ &= RT\nabla\rho + \rho R\nabla T. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Der Gradient von T ist analytisch gegeben, und zwar als

$$\nabla T = -\frac{g}{R}\mathbf{k}. \quad (5.34)$$

Damit ist der zweite Term in (5.33) genau gleich der Gravitationskraft, und der erste Term treibt wegen des Dichtegradienten die Strömung in horizontaler Richtung an. Es läßt sich also

$$\begin{aligned} \nabla p &= \nabla_{\parallel} p + \nabla_{\perp} p \\ &= RT\nabla\rho - \rho g\mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.35)$$

schreiben, so daß es genügt, in jedem Zeitschritt den Dichtegradienten über die Methode der kleinsten Quadrate aus dem Kapitel 4.2.3 zu berechnen, die für einen rein horizontalen Gradienten gute Näherungen liefert, und den Druckgradienten dann mit der Formel (5.35) zusammensetzen.

Erwähnt sei außerdem, daß der Massenfluß φ in der Kontinuitäts- und Impulsgleichung jeweils mit Hilfe unserer Erdinterpolation des Kapitels 4.2.4 berechnet wird.

Außerdem verwenden wir zunächst die uniformen Gitter ohne Gelände. Dabei passen wir die Zeitschrittweite Δt wie in der Tabelle 5.3 an das jeweilige Gitter an und rechnen stets bis

$$t_{\text{end}} = 43000 \text{ s} \approx 12 \text{ Stunden.}$$

Betrachten wir nun die Abbildung 5.7. Sie zeigt die Entwicklung der Dichte ρ mit der Zeit. Unsere anfänglichen Gebiete hoher und niedriger Dichte gleichen sich zunächst aus und erreichen bei 8000 s eine annähernd gleichförmige Verteilung. Danach bauen sich wegen der Trägheit des Systems die Hochs und Tiefs in umgekehrter Weise wieder auf, gleichen sich anschließend erneut aus, bauen sich wieder auf etc. Dieser periodische Wechsel zwischen Gebieten hoher und

niedriger Dichte, für die wir wegen der Kopplung von Druck und Dichte (5.31) auch die Begriffe Hoch- und Tiefdruckgebiete als Synonyme verwenden können, ist charakteristisch für unser hyperbolisches Gleichungssystem. Es enthält keine diffusiven Terme, so daß ein einmal durch den Druckgradienten angeregter Zustand sich nicht mit der Zeit abschwächen wird, sondern vielmehr zu periodischen Schwingungen führt, wie wir sie in der Abbildung 5.7 beobachten können. Eine Periode besteht dabei in unserem Fall aus 28000 s, also ca. 8 Stunden. Außerdem zeigt sich mit der Zeit noch eine Wanderung der Hoch- und Tiefdruckgebiete gegen den Uhrzeigersinn und eine Verlagerung in Richtung des Äquators, was den Effekten der Erdrotation zuzuschreiben ist.

Auch bei der Geschwindigkeit \mathbf{u} beobachten wir eine periodische Entwicklung, wie sie in der Abbildung 5.8 für den Betrag von \mathbf{u} zu sehen ist. Die größten Geschwindigkeiten treten dabei in Bodennähe auf, so daß wir diesmal die Erde am Äquator aufgeschnitten haben, um so auf die unterste Schicht der Nordhalbkugel zu blicken. Die Geschwindigkeiten schwanken periodisch zwischen 3 m/s und 16 m/s und bauen sich zunächst bis zum ausgeglichenen Zustand von ρ bei 8000 s auf, bilden dabei insbesondere zwischen den Hoch- und Tiefdruckgebieten starke Strömungen und bauen sich dann wieder ab. Auch hier liegt die Periode bei etwa 28000 s.

Betrachte nun die Abbildung 5.9, in der das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} zusammen mit der Dichte ρ für einige Zeitpunkte dargestellt ist und in der sich die Entwicklung der Strömung sehr schön verfolgen läßt. Zu Beginn bilden sich direkte Strömungen von den Hoch- zu den Tiefdruckgebieten, wie in dem Bild zum Zeitpunkt 4000 s zu sehen ist, die dazu führen, daß sich die Hochs und Tiefs ausgleichen. Im ausgeglichenen Zustand verschwindet der horizontale Druckgradient, treibt also das System nicht weiter an. Allerdings haben sich die Geschwindigkeiten bis zu diesem Zeitpunkt aufgebaut, so daß sie nicht sofort auf das Fehlen äußerer Kräfte mit $\mathbf{u} = \vec{0}$ m/s reagieren, sondern wegen des konvektiven Terms neue umgekehrte Hochs und Tiefs ausbilden. Das System ist also träge. Dies zeigt sich dann auch im Bild zum Zeitpunkt 11000 s. Die Strömung läßt neue Hoch- und Tiefdruckgebiete entstehen, wird jedoch schon leicht von dem sich erneut aufbauenden horizontalen Druckgradienten abgelenkt. Bei 14000 s haben sich dann kreisförmige Strudel gebildet, und der Wendepunkt ist erreicht. Die Strömung führt nun wieder wie beim Zeitpunkt 18000 s zu sehen vom Hoch zum Tief. Die späteren Bilder bei 40000 s und 43000 s zeigen außerdem den mit der Zeit immer deutlicher werdenden Einfluß der Corioliskraft, die zur Ablenkung und Wirbelbildung der Strömung führt.

Die Auswirkungen der Corioliskraft sind dann auch noch einmal deutlicher in der Abbildung 5.10 dargestellt. Man erkennt sehr schön die unterschiedliche Drehrichtung auf der Nord- und auf der Südhalbkugel, die bereits im Modellierungskapitel 2.3.1 diskutiert wurde.

Alle diese Bilder der folgenden Seiten zeigen das uniforme Gitter des Levels 9. Gerechnet wurde dabei die Spanne von 12 Stunden innerhalb einer Rechenzeit von 100 Minuten auf einem Intel(R) Pentium(R) 4 Prozessor mit 3,2 GHz und 1 GB RAM unter dem Betriebssystem Ubuntu Dapper Drake 6.06 LTS und mit der 32-bit OpenFOAM Version 1.3.

Um nun die Konvergenz des Verfahrens zu untersuchen, rechnen wir denselben Fall auch auf den übrigen uniformen Gittern, wobei wir die Lösung auf dem feinsten Gitter des Levels 11 als Referenzlösung betrachten. Den Fehler von ρ definieren wir dann über

$$e_\rho := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_i^{\text{ref}})^2}, \quad (5.36)$$

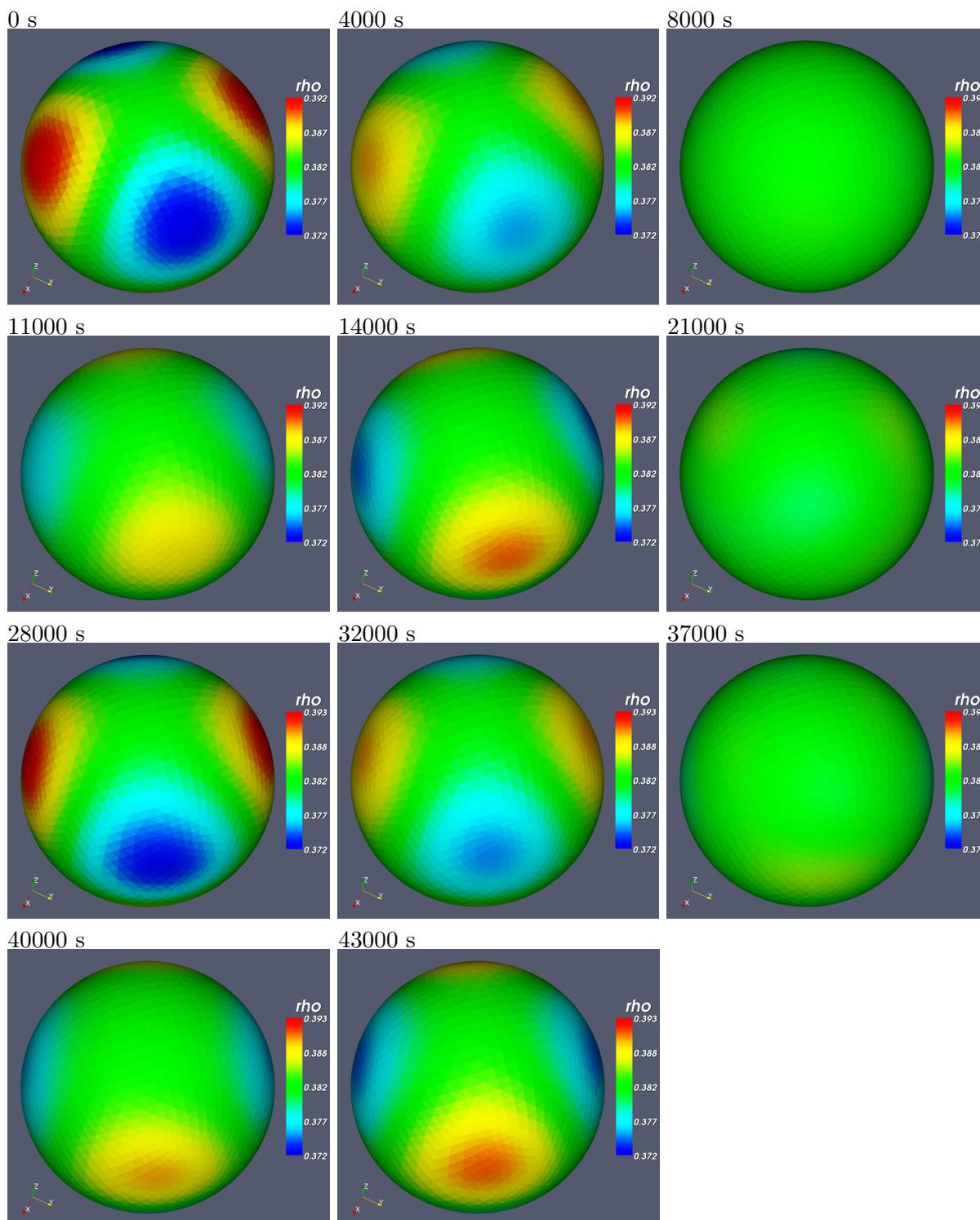


Abb. 5.7.: Entwicklung von ρ . Blick auf die oberste Schicht der Nordhalbkugel zu den jeweiligen Zeitpunkten.

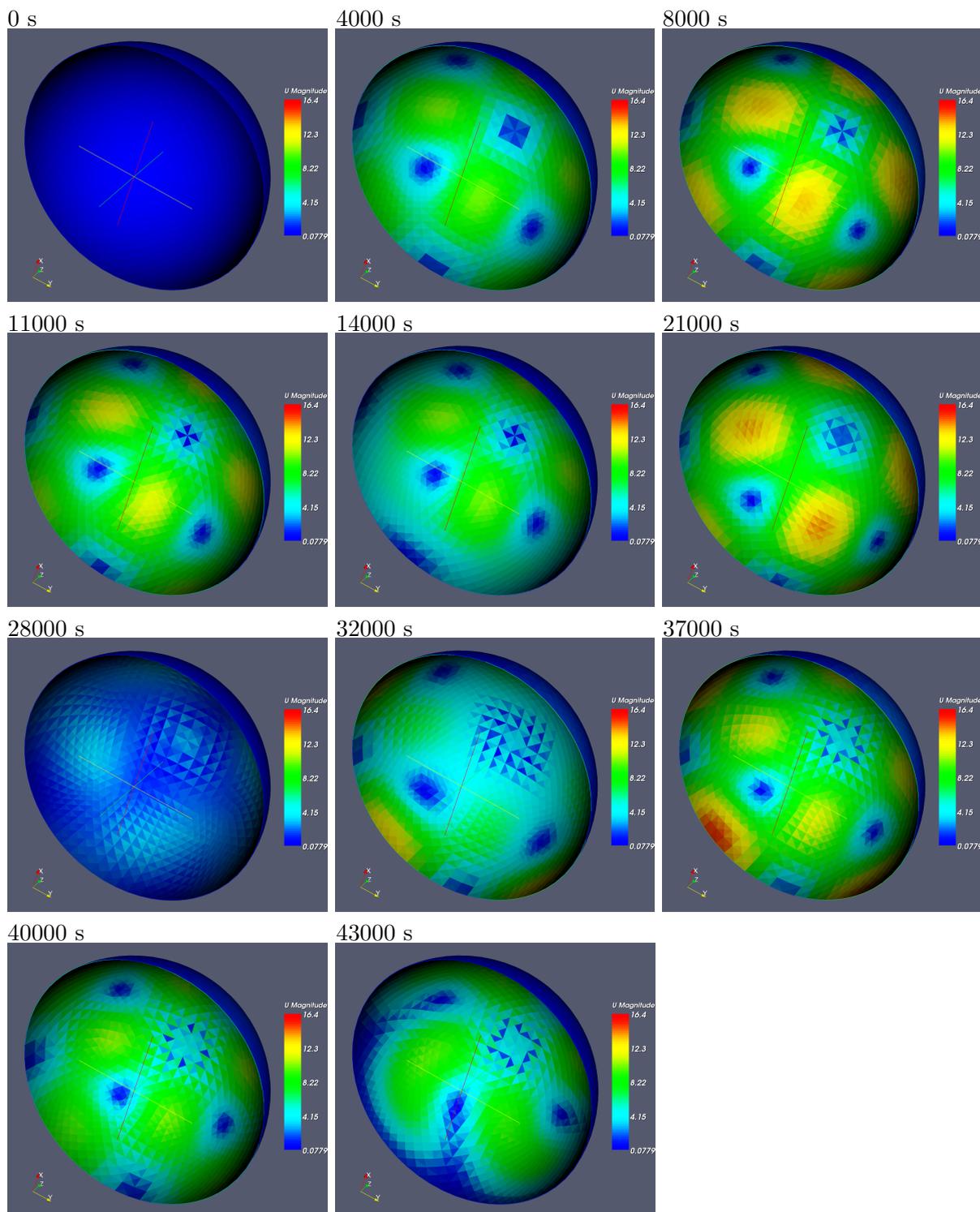
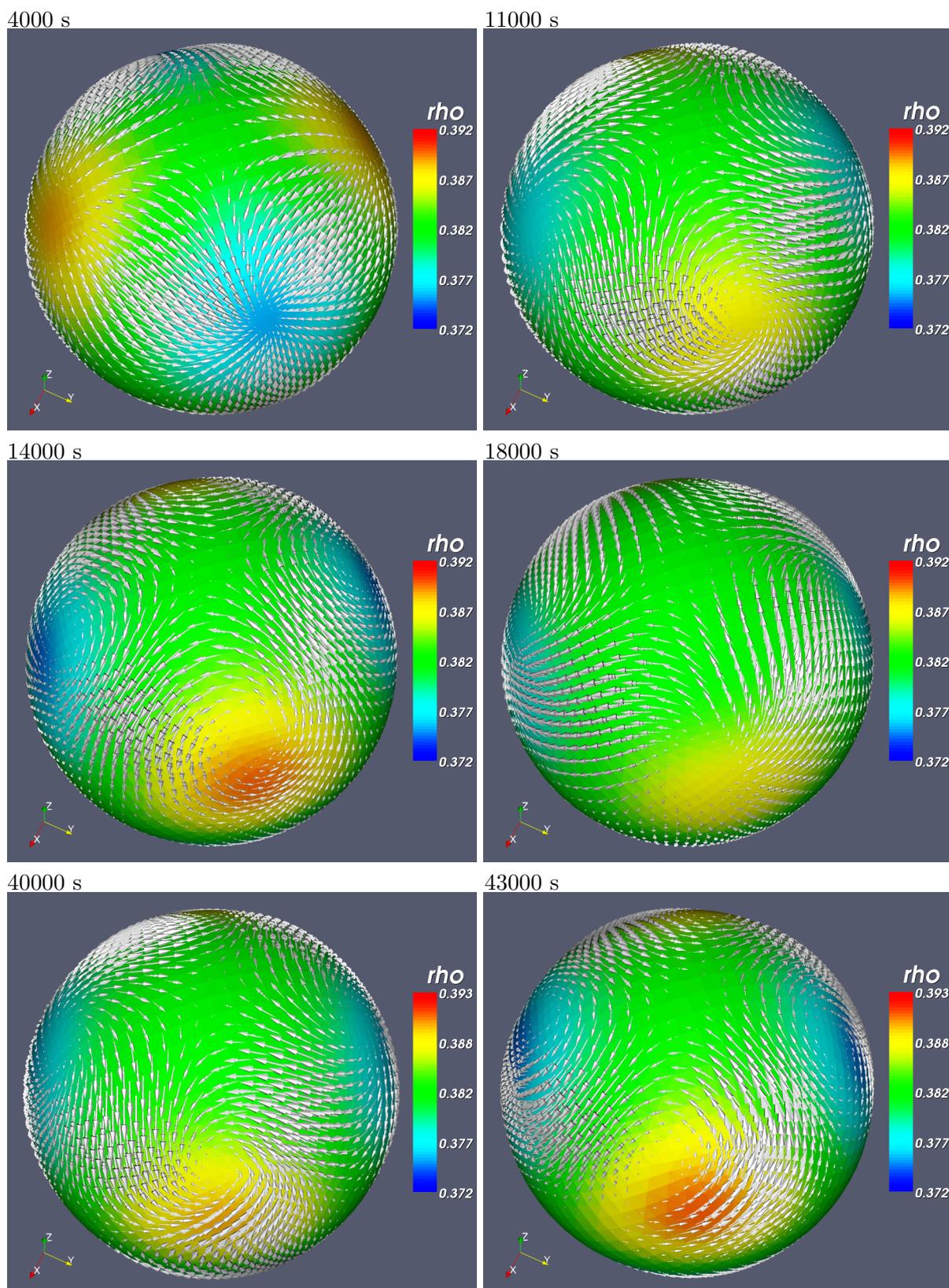
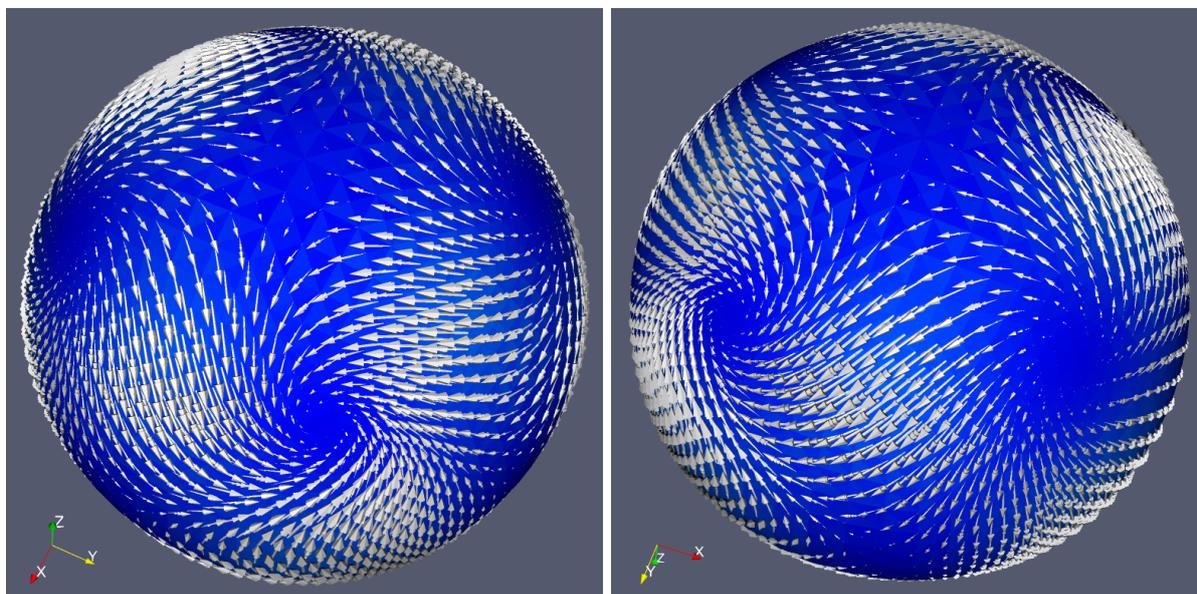


Abb. 5.8.: Entwicklung von $|\mathbf{u}|$. Blick auf die unterste Schicht der Nordhalbkugel zu den jeweiligen Zeitpunkten.

Abb. 5.9.: ρ und \mathbf{u} zu den angegebenen Zeitpunkten.



Nordhalbkugel

Südhalbkugel

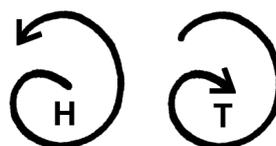
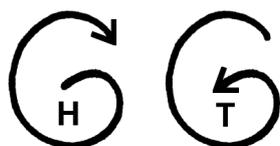


Abb. 5.10.: Auswirkungen der Corioliskraft auf der Nordhalbkugel und der Südhalbkugel zum Zeitpunkt 40000 s und die entsprechenden Wirbelrichtungen.

wobei ρ_i der Wert von ρ in der Zelle i und ρ^{ref} die Referenzlösung des feinsten Gitters ist. Analog sei der Fehler von \mathbf{u}

$$\begin{aligned}
 e_{\mathbf{u}} &:= \sqrt{\frac{1}{3N} \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ref}}, \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ref}} \rangle} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{3N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 (u_{ij} - u_{ij}^{\text{ref}})^2} \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

mit der Referenzlösung \mathbf{u}^{ref} und dem Vektor $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})^T$ in der Zelle i .

Ausgewertet wurden diese Fehler stets zu drei charakteristischen Zeitpunkten, und zwar bei 8000, 28000 und 43000 s. 8000 s stellt den Wendepunkt dar, in dem ρ ausgeglichen ist und die Geschwindigkeiten ihr lokales Maximum erreicht haben. Bei 28000 s beginnt eine neue Periode, und daher ist zu diesem Zeitpunkt die Spanne von ρ maximal, während die Geschwindigkeiten im lokalen Minimum sind. 43000 s ist dann schließlich unser spätester gerechneter Zeitpunkt,

in dem sich ρ im Aufbau und \mathbf{u} im Abbau befindet.

Betrachte nun die Konvergenzgraphen der Abbildungen 5.11 und 5.12. Bei der Gesamtkomplexität wurde die Zeitschrittweite Δt stets an das jeweilige Gitter wie in der Tabelle 5.3 angepaßt, während bei der Ortskomplexität alle Gitter mit $\Delta t = 1$ s gerechnet wurden. Zunächst einmal fällt auf, daß die versetzten Graphen der drei verschiedenen Zeitpunkte den jeweiligen Zustand von ρ und \mathbf{u} widerspiegeln. So ist die Spanne von ρ bei 8000 s minimal und daher auch die Fehler geringer als etwa bei 28000 s, wo die Spanne von ρ maximal wird. Genau umgekehrt verhält sich dies bei den Fehlern der Geschwindigkeit \mathbf{u} .

Die Steigung dieser doppeltlogarithmischen Graphen wurde in der Tabelle 5.4 festgehalten und dabei stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten ausgewertet. Während bei der Ortskomplexität maximale Steigungen zwischen 0,6 und 1,0 erreicht werden, liegen diese bei der Gesamtkomplexität lediglich bei 0,4 bis 0,5. Allerdings lassen die Tendenzen und insbesondere die zunehmenden Steigungen bei der Geschwindigkeit \mathbf{u} vermuten, daß die Asymptotik noch nicht erreicht wurde. Weitere Rechnungen auf feineren Gittern sollten da einen deutlicheren Abfall der Graphen zeigen.

Um abschließend auch noch die Zeitkomplexität zu untersuchen, wählten wir das mittlere Gitter des Levels 5 und rechneten mit verschiedenen Zeitschrittweiten zwischen 25 s und 1 s. Der Fehler wurde dann in Differenz zur Rechnung mit $\Delta t = 1$ s ausgewertet, und es ergibt sich der Graph der Abbildung 5.13 mit den zugehörigen Steigungen der Tabelle 5.4. Vergleicht man zunächst die Graphen für die drei Zeitpunkte 8000, 28000 und 43000 s untereinander, so fällt ein leichter Anstieg des Fehler mit der Zeit auf, was man auch vermuten würde. Ansonsten verlaufen die Graphen sehr ähnlich auf annähernd einer Geraden mit Steigungen, die deutlich größer als 1 sind. Eine Steigung von 1 war auch zu erwarten, da wir für die Zeitdiskretisierung das implizite Euler-Verfahren verwendet haben.

Zusammenfassend ist es uns gelungen, die Kontinuitäts-, Impuls- und Zustandsgleichung stabil auf unseren Gittern zu diskretisieren und anhand der Strömung, die sich für ein Anfangsfeld von Hoch- und Tiefdruckgebieten entwickelt, den Einfluß der Druckgradientkraft, der Konvektion und der Corioliskraft zu beobachten.

An dieser Stelle sei noch ein kleiner Ausblick auf weitere Rechnungen gegeben. Die vorangegangenen Untersuchungen gelten alle für uniforme Gitter ohne Gelände. Nimmt man das Gelände bei ihnen hinzu, so hat man insbesondere wegen der geländefolgenden Zellen, die nicht mehr in horizontaler Richtung entlang der Strömung und in vertikaler Richtung entlang der Gravitationskraft und des Druckgradienten ausgerichtet sind, mit Schwierigkeiten zu rechnen, siehe dazu auch [5].

Diese Problematik zeigt sich bei unseren Rechnungen dann auch ab dem Gitter des Levels 9. Nach kurzer Zeit erhält man in einzelnen Zellen in der Gegend des Himalaya, wo die Polyeder besonders schräg ausgerichtet sind, lokal große Geschwindigkeiten, die das System instabil machen. In der Abbildung 5.14 a) ist dies dargestellt. Bei den gröberen Gittern bis einschließlich des Levels 7 zeigt sich dieses Problem noch nicht. Hier können wir genau wie bei den Gittern ohne Gelände eine Schwingung der Hoch- und Tiefdruckgebiete und die entsprechenden ausgleichenden Strömungen beobachten.

Auch die adaptiven Gitter mit Gelände lassen sich prinzipiell verwenden. Bei den Gittern 1 und 3 treten keinerlei Schwierigkeiten auf, während sich bei dem Gitter 5 wie zuvor höhere Geschwindigkeiten in kleinen Zellen entwickeln. Diese Geschwindigkeiten treten diesmal in den

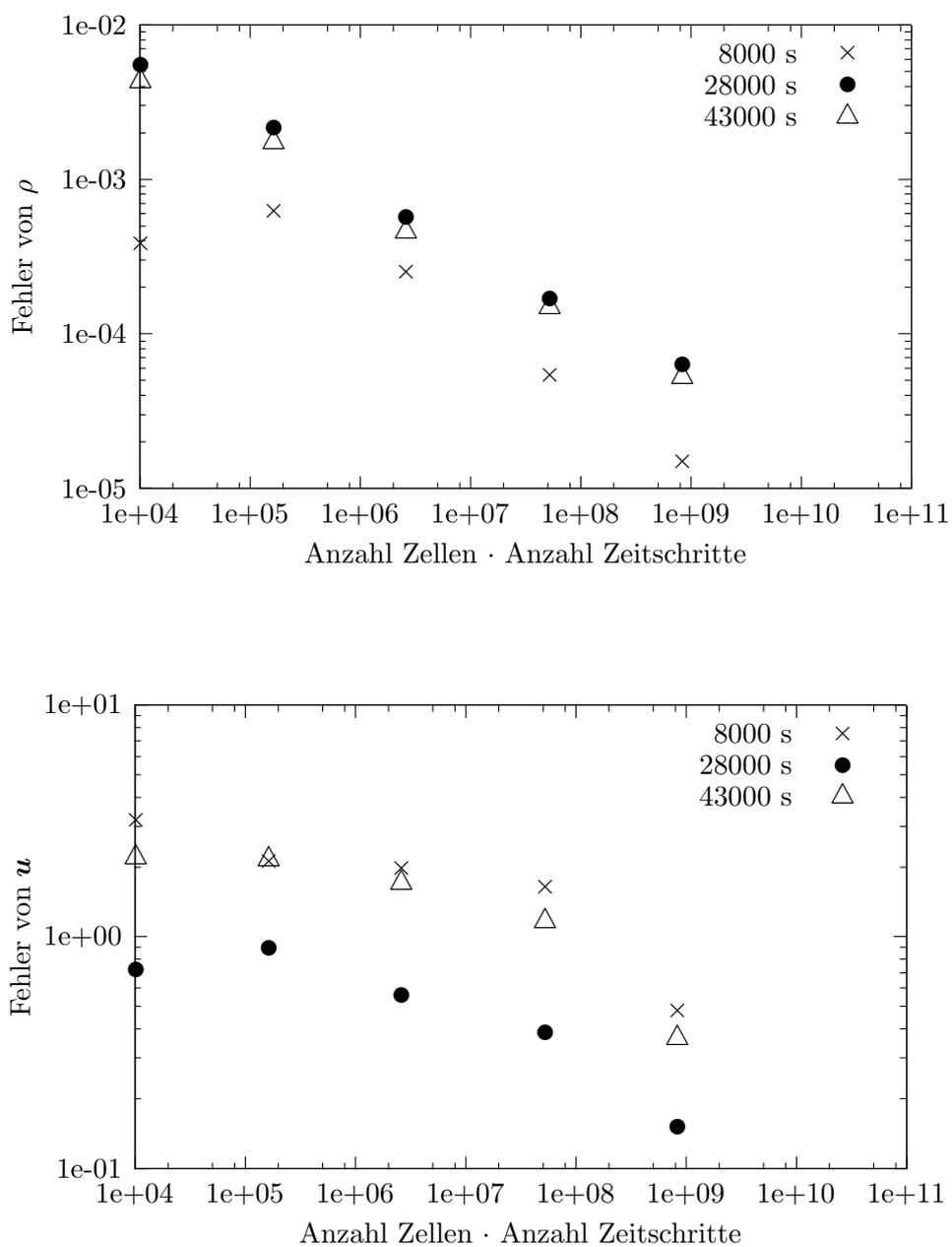


Abb. 5.11.: Gesamtkomplexität von ρ und u in doppeltlogarithmischer Darstellung. Der Fehler ist jeweils in Differenz zum feinsten Gitter des Levels 11 zu verstehen. Die Anzahl der Zeitschritte wurde an die Gitter angepaßt.

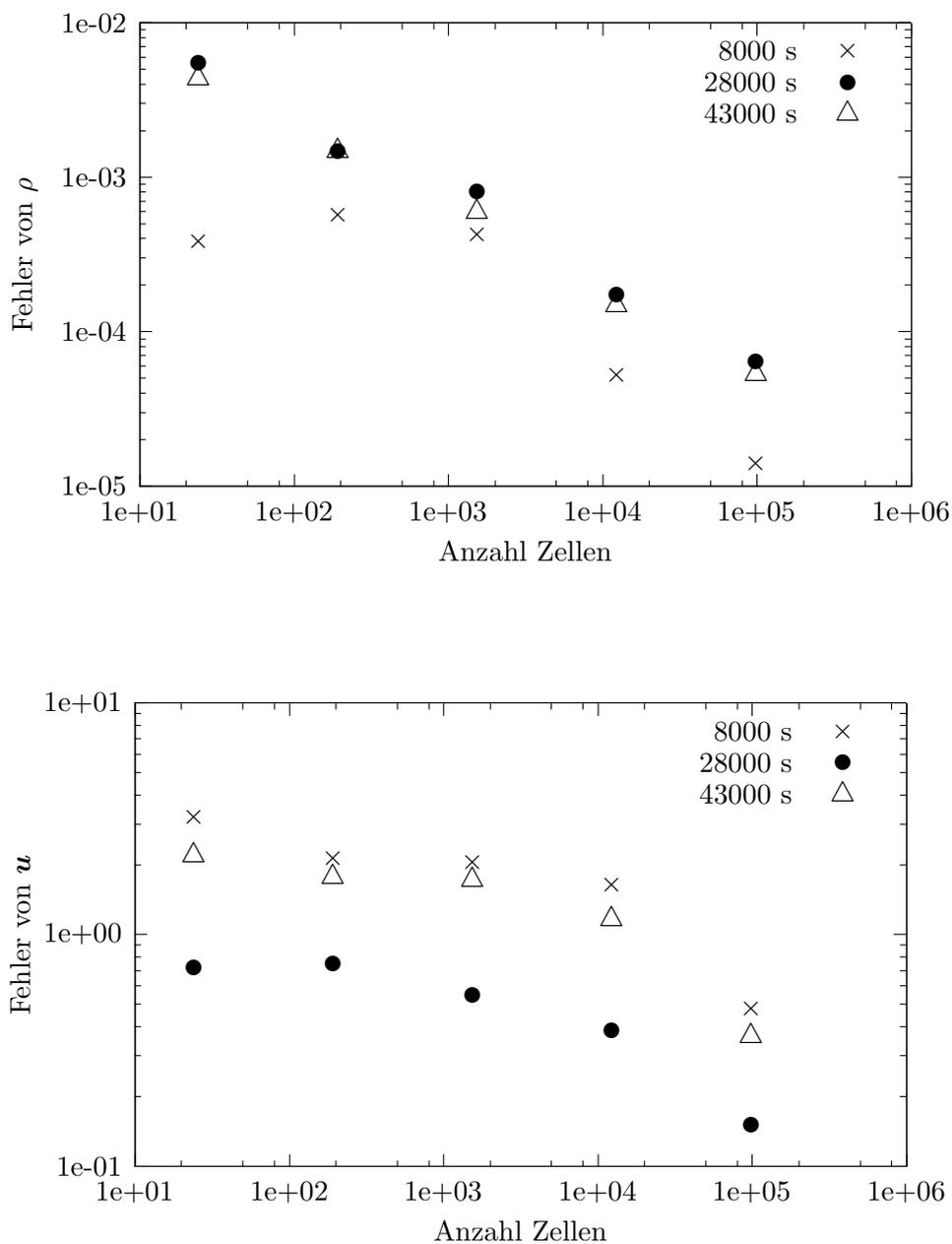


Abb. 5.12.: Ortskomplexität von ρ und u in doppeltlogarithmischer Darstellung. Alle Gitter wurden mit einer Zeitschrittweite von 1 s gerechnet, und der Fehler ist jeweils in Differenz zum feinsten Gitter des Levels 11 zu verstehen.

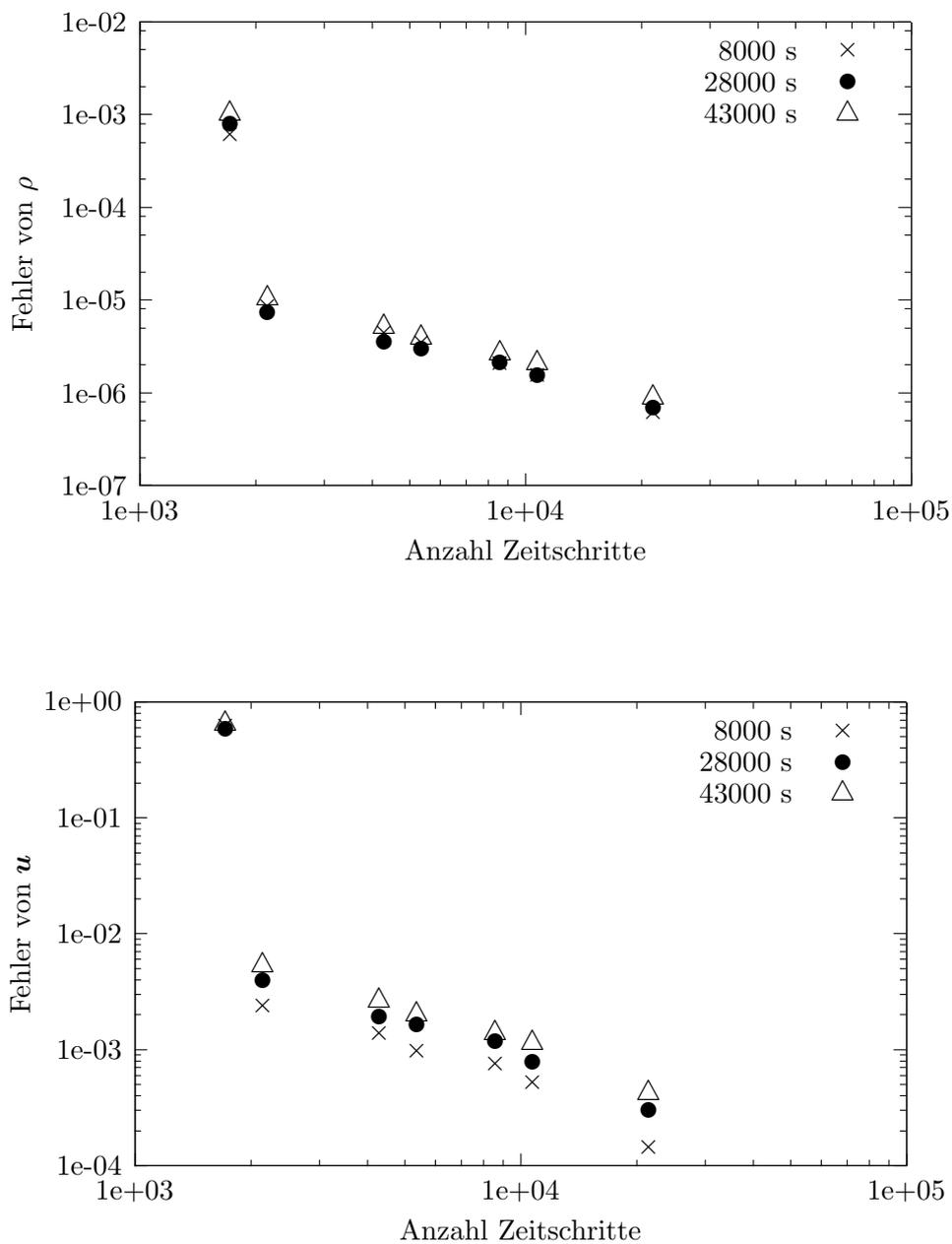


Abb. 5.13.: Zeitkomplexität von ρ und u in doppeltlogarithmischer Darstellung. Gerechnet wurde auf dem Gitter des Levels 5 mit $\Delta t = 25, 20, 10, 8, 5, 4, 2$ und 1 s, und der Fehler ist jeweils in Differenz zur Rechnung mit $\Delta t = 1$ s zu verstehen.

Gesamtkomplexität							
Steigung des Fehlers von ρ				Steigung des Fehlers von \mathbf{u}			
Gitter	8000 s	28000 s	43000 s	Gitter	8000 s	28000 s	43000 s
1 - 3	0,18	-0,34	-0,33	1 - 3	-0,15	0,08	-0,01
3 - 5	-0,33	-0,48	-0,48	3 - 5	-0,02	-0,17	-0,09
5 - 7	-0,51	-0,40	-0,37	5 - 7	-0,06	-0,13	-0,13
7 - 9	-0,47	-0,36	-0,38	7 - 9	-0,44	-0,34	-0,42

Ortskomplexität							
Steigung des Fehlers von ρ				Steigung des Fehlers von \mathbf{u}			
Gitter	8000 s	28000 s	43000 s	Gitter	8000 s	28000 s	43000 s
1 - 3	0,19	-0,64	-0,52	1 - 3	-0,19	0,02	-0,11
3 - 5	-0,14	-0,29	-0,43	3 - 5	-0,02	-0,15	-0,02
5 - 7	-1,01	-0,74	-0,67	5 - 7	-0,11	-0,17	-0,19
7 - 9	-0,63	-0,48	-0,50	7 - 9	-0,59	-0,45	-0,56

Zeitkomplexität							
Steigung des Fehlers von ρ				Steigung des Fehlers von \mathbf{u}			
Δt in s	8000 s	28000 s	43000 s	Δt in s	8000 s	28000 s	43000 s
25 - 20	-19,05	-20,92	-20,54	25 - 20	-24,93	-22,45	-21,47
20 - 10	-0,96	-1,05	-1,03	20 - 10	-0,78	-1,03	-1,02
10 - 8	-1,11	-0,83	-1,22	10 - 8	-1,52	-0,67	-1,29
8 - 5	-1,10	-0,72	-0,82	8 - 5	-0,53	-0,70	-0,79
5 - 4	-1,23	-1,37	-1,12	5 - 4	-1,68	-1,88	-0,84
4 - 2	-1,35	-1,18	-1,22	4 - 2	-1,85	-1,39	-1,43

Tabelle 5.4.: Steigung der Konvergenzgraphen für die Gesamt-, Orts- und Zeitkomplexität für ρ und \mathbf{u} zu den Zeitpunkten 8000, 28000 und 43000 s. Die Steigung wird dabei immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten berechnet.

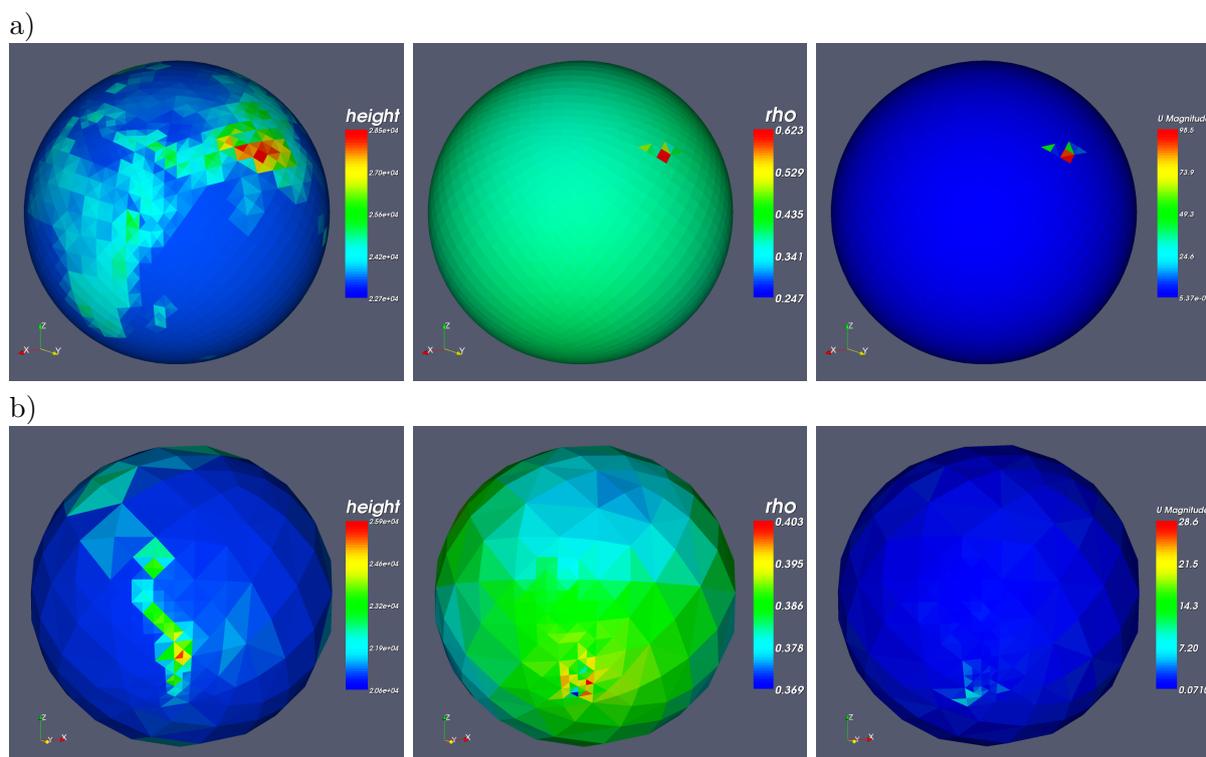


Abb. 5.14.: Problem hoher Dichten und Geschwindigkeiten in schrägen Zellen a) im Himalaya auf dem uniformen Gitter 9 mit Gelände nach 300 s und b) in den Anden auf dem adaptiven Gitter 5 nach 43000 s. Dargestellt sind jeweils die Höhenwerte, ρ und $|\mathbf{u}|$ für die oberste Schicht.

Anden auf, allerdings erst nach mehr als einer Periode, wie in der Abbildung 5.14 b) zu sehen ist. Dies dürfte an ähnlichen Effekten wie bei den uniformen Gittern mit Gelände liegen.

Eine Lösung dieses Problems könnte darin bestehen, nicht-geländefolgende Vertikalkoordinaten, wie wir sie im Kapitel 3.2.1 beschrieben haben, zu verwenden, da sie nur bei den Randzellen zu Änderungen gegenüber den Gittern ohne Gelände führen und so deren günstige Eigenschaften größtenteils bewahren. Es wird noch eine interessante Aufgabe sein, dies zu untersuchen und so den Einfluß des Geländes und der Schräge der Gitterzellen genauer zu studieren.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

In dieser Arbeit beschäftigten wir uns mit der Modellierung und der Simulation globaler Atmosphärenströmungen. Dafür leiteten wir zunächst die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen aus physikalischen Gesetzmäßigkeiten her und reduzierten diese durch eine ausführliche Dimensionsanalyse für klein- und großskalige Bewegungen in der Atmosphäre auf die kompressiblen Euler-Gleichungen. Anschließend wandten wir uns der Turbulenzmodellierung zu, da man aus Gründen der Rechenzeit und des Speicheraufwandes die turbulenten Wirbel in der Atmosphäre nicht fein genug auflösen kann und daher gezwungen ist, die Gleichungen zu mitteln.

Es stellte sich nun die Frage nach der Gittergenerierung und wie man ein Rechengebiet mit einem Volumen von 10^{19} m^3 mit vertretbarem Speicheraufwand durch ein Gitternetz darstellen kann. Dabei erwies sich eine Technik zur Konstruktion adaptiver Gitter, in denen bestimmte für die Strömungssimulation relevante Regionen feiner aufgelöst sind als andere, als entscheidend, da sich so eine Reduzierung des Speicheraufwands erreichen läßt, ohne die Genauigkeit der numerischen Verfahren in wichtigen Gebieten zu gefährden. Aus dem GTOPO30-Datensatz [48], einer frei verfügbaren Vermessung der Erdoberfläche, konstruierten wir uns so uniforme und adaptive Triangulierungen des Erdbodens, wobei die Adaptivität geländeabhängig gewählt war. Dieses Dreiecksnetz ließ sich dann geländefolgend zu Atmosphäregittern bestehend aus Tetraederstümpfen erweitern.

Es könnten selbstverständlich auch andere Adaptivitätskriterien gewählt werden, durch welche beispielsweise Europa feiner aufgelöst würde als die übrige Erde. Dies stellt eine Kombination der beiden Gitter dar, die beim Deutschen Wetterdienst für Wettervorhersagen zum Einsatz kommen. Der Deutsche Wetterdienst schachtelt nämlich ein feiner aufgelöstes lokales Modell LM [11] von Mitteleuropa in ein grob aufgelöstes globales Modell GME [36, 9], das die Randwerte für das lokale Modell liefert. Die Bewahrung der Erhaltungseigenschaften, die in der Atmosphäre von großer Wichtigkeit sind, können durch eine solche Trennung zweier Rechengebiete allerdings leicht verletzt werden. Daher ist unser adaptives Gitter diesem Ansatz deutlich vorzuziehen. Auch beim Deutschen Wetterdienst gibt es bereits Bestrebungen, die unter dem Begriff ICON-Projekt [3] zusammengefaßt werden, ein kombiniertes globales Modell zu entwickeln, in dem bestimmte Gebiete feiner aufgelöst sind als andere und für das Finite-Volumen-Methoden statt wie bisher Finite Differenzen verwendet werden. Es wurden darauf allerdings erst die 2D-Flachwassergleichungen getestet [4].

Auch wir wählten Finite-Volumen-Methoden zur Ortsdiskretisierung unseres zuvor hergeleiteten Gleichungssystems, da sie zum einen unstrukturierte flexible Geometrien erlauben und zum anderen Erhaltungseigenschaften bewahren. Wir nutzten dabei das Open Source Strömungspaket OpenFOAM [40, 41] und verwendeten als Zeitdiskretisierung das implizite Euler-Verfahren. Außerdem konstruierten wir uns ein eigenes an die Ergeometrie angepaßtes Interpolationsverfahren für die Geschwindigkeit, bei dessen Verwendung sich deutliche Verbesserungen

der Simulationsqualität im Vergleich zu Standardinterpolationsverfahren feststellen ließen.

Eine große Problematik bestand im weiteren darin, daß sich für globale Atmosphärenströmungen noch keine Standardtestfälle wie etwa für die Lösung der Flachwassergleichungen [52] etabliert haben. Auch für langfristige Klimaberechnungen findet man Standardtests [27, 2], während für kurzfristige 3D-Atmosphärenströmungen erst in den letzten Jahren Vorschläge gemacht wurden [29, 44]. Diese beinhalten zum einen stationäre Anfangsdaten, die eine analytische Lösung der hydrostatischen primitiven Gleichungen sind und die etwa zehn Tage lang erhalten bleiben sollten. Zum anderen werden diese Anfangsdaten so gestört, daß sie die Entwicklung einer baroklinen Welle auslösen. Dies sind jedoch bereits sehr anspruchsvolle Simulationen, die gerade für den Anfang als erste Tests ungeeignet sind. Es wäre vielmehr eine nach Schwierigkeitsgrad gestaffelte Serie von Testfällen wie bei den Flachwassergleichungen [52] nötig. Daher war es uns in dieser Arbeit wichtig, die Schwierigkeit unserer numerischen Simulationen schrittweise zu erhöhen.

Wir begannen mit der Lösung der Kontinuitätsgleichung und simulierten so die Dichteentwicklung unter dem Einfluß verschiedener Geschwindigkeitsfelder wie etwa der Kreisströmung oder der Rossby-Haurwitz-Welle. Dies diente der Beurteilung der Qualität unseres neuen Interpolationsverfahrens. Anschließend ließen wir einen \cos^2 -Zylinder um die Erde transportieren und analysierten die Konvergenzraten auf unseren unterschiedlichen Gitterhierarchien.

Weitere erfolgreiche Simulationen ließen sich mit der Lösung des Systems aus Kontinuitäts-, Impuls- und Zustandsgleichung für ein Anfangsfeld von Hoch- und Tiefdruckgebieten erreichen. So konnten eine periodische Schwankung der Gebiete hohen und niedrigen Drucks und entsprechende ausgleichende Strömungen beobachtet werden, bei denen der wirbelbildende Einfluß der Corioliskraft deutlich zutage trat. Auch für adaptive Gitter konnten schon erste motivierende Ergebnisse erzielt werden.

Zusammenfassend kombinierte diese Arbeit eine ausführliche Modellierung von Atmosphärenströmungen mit einer Generierung adaptiver Gitter, die für lokale und globale Wettervorhersagen geeignet sind und für die wir das Erhaltungseigenschaften bewahrende Finite-Volumen-Diskretisierungsverfahren einsetzen konnten. Erste Testsimulationen mit steigendem Schwierigkeitsgrad zeigten dabei aussichtsreiche Ergebnisse.

Ausblick

Es verbleiben noch viele interessante Ansatzpunkte für weitere Arbeiten. Zum einen müßte die Temperaturgleichung zur Lösung des Systems hinzugenommen werden, was kein prinzipielles Problem darstellen sollte, da es sich um eine weitere Transportgleichung handelt, die wir bereits im Kapitel 4.2.2 diskretisiert haben. Zum anderen fehlt noch die Umsetzung eines Turbulenzmodells aus dem Kapitel 2.8, das wir bisher außer acht gelassen haben. Generell sollten allerdings auch Rechnungen auf feineren Gittern zu besseren numerischen Resultaten führen und die Notwendigkeit der Turbulenzmodellierung auf immer kleinere Wirbel beschränken.

Die Gitter selber bedürfen auch noch einer genaueren Untersuchung in bezug auf den Einfluß der unterschiedlichen Zellgrößen und der Schräge und Anisotropie auf die Güte der Lösungen. Einige Testrechnungen führten zu Problemen in kleinen besonders schrägen Zellen, was deutlich machte, wie sehr die geländefolgenden Koordinaten die Qualität der Gitter beeinflussen. Daher könnte hier die Wahl der nicht-geländefolgenden Vertikalkoordinaten des Kapitels 3.2.1 Abhilfe schaffen, da sie nur bei den Randzellen zu Änderungen gegenüber den Gittern ohne Gelände

führen und so deren günstige Eigenschaften größtenteils bewahren.

Außerdem sollte der Schwierigkeitsgrad der Testsimulationen weiter erhöht werden, wofür die Berücksichtigung der barometrischen Höhenformel für den Druck und die Dichte als nächster Schritt geeignet wäre. Bisher haben wir die Dichte konstant und den Druck linear in der Höhe abfallen lassen. Realistischer ist dagegen für die Standardatmosphäre [49] und für einen linearen Temperaturverlauf

$$T(h) = (288,15 - 0,0065h) \text{ K} \quad (6.1)$$

die barometrische Höhenformel für den Druck

$$p(h) = 101325 \left(1 - \frac{0,0065h}{288,15}\right)^{5,255} \text{ Pa} \quad (6.2)$$

und die Dichte

$$\rho(h) = 1,225 \left(1 - \frac{0,0065h}{288,15}\right)^{4,255} \text{ kg/m}^3. \quad (6.3)$$

Mit dieser Wahl ist sowohl das hydrostatische Gleichgewicht als auch die Zustandsgleichung erfüllt. Erste Testläufe mit diesen Anfangsfeldern haben gezeigt, daß die Berechnung des Druckgradienten sowohl über den Gaußschen Integralsatz als auch über die Methode der kleinsten Quadrate zu Problemen führt. Im Prinzip ist nämlich wieder eine Interpolation auf die Seitenflächen nötig, die wegen unserer anisotropen schrägen Zellen und der hohen Ordnung von (6.2) mit Standardverfahren keine zufriedenstellenden Ergebnisse liefert.

Ein Ansatz wäre zum einen, gradierte Gitter zu verwenden, auf denen (6.2) besser interpoliert werden kann, oder aber ein eigenes Interpolationsschema zu konstruieren. Dies könnte wie folgt aussehen. Sei dazu \tilde{p} ein „idealer“ barometrischer Druck, der sowohl in den Zellen als auch auf den Seitenflächen über die barometrische Höhenformel berechnet werden kann. Betrachte nun die Differenzen der tatsächlichen Zellwerte zu den idealen, interpoliere diese linear und addiere den so erzeugten Korrekturterm auf den idealen Wert der Seitenfläche, d.h.

$$p_F = \tilde{p}_F + \frac{d_N}{d_P + d_N}(p_P - \tilde{p}_P) + \frac{d_P}{d_P + d_N}(p_N - \tilde{p}_N) \quad (6.4)$$

für zwei übereinander liegende Zellen mit $d_P := |h_F - h_P|$ und $d_N := |h_F - h_N|$. So läßt sich eine lineare Interpolation in barometrischer Modelldifferenz konstruieren. Erste Testläufe erscheinen vielversprechend.

Prinzipiell erweist sich die diskrete Berechnung des Gradienten einer Größe auf unseren Gittern allerdings als schwierig, da Standardverfahren wie die Methode von Gauß oder die der kleinsten Quadrate aufgrund der Anisotropie und Schräge der Gitterzellen keine zufriedenstellenden Resultate liefern. Es zeigen sich vielmehr Artefakte in Form von Würfelstrukturen und Schachbrettmustern. Nur mit Zusatzinformationen über das zugrundeliegende Feld wie etwa obige barometrische Höhenformel oder die Eigenschaft (5.35) bei unserer Simulation von Hoch- und Tiefdruckgebieten waren wir bisher in der Lage, eine gute Approximation des Druckgradienten zu berechnen. Es wäre also notwendig, dies noch weiter zu untersuchen und eine Gradientenberechnung unabhängig von den verwendeten Anfangsdaten zu konstruieren, die an unsere Gitter und die Erdgeometrie angepaßt ist.

So verbleiben noch viele interessante Fragestellungen für künftige Arbeiten.

A. Anhang

A.1. Elementare Sätze

- **Transporttheorem:** Sei $\varphi : \Omega_0 \times [0, t_{\text{end}}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ einmal stetig differenzierbar und $\varphi(\cdot, t)$ für alle t injektiv. Dann gilt für eine differenzierbare skalare Funktion $f : \Omega_t \times [0, t_{\text{end}}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} f + \nabla \cdot (f\mathbf{u}) \right) (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}. \quad (\text{A.1})$$

Dabei ist $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) := \partial_t \varphi(\mathbf{x}, t)$, siehe [25].

- **Gaußscher Integralsatz:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit abschnittsweise glattem Rand, $\mathbf{n} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenfeld und $U \supset \Omega$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (\text{A.2})$$

siehe [16].

- **Kettenregel für partielle Ableitungen:** Sei $f = f(x_1, \dots, x_n)$ und $x_i = x_i(t)$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad (\text{A.3})$$

siehe [7].

- **Rechenregeln für den Nablaoperator:** Seien v, v_1, v_2 skalarwertige Funktionen, $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ vektorwertige Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$\nabla(v_1 + v_2) = \nabla(v_1) + \nabla(v_2), \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla(cv) = c\nabla v, \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla(v_1 v_2) = v_1 \nabla v_2 + v_2 \nabla v_1, \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + \nabla \cdot \mathbf{u}_2, \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \cdot (c\mathbf{u}) = c\nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \cdot (v\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla v + v \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \nabla \times \mathbf{u}_1 + \nabla \times \mathbf{u}_2, \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \times (c\mathbf{u}) = c\nabla \times \mathbf{u}, \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \times (v\mathbf{u}) = v\nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \nabla v, \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times (\nabla v) = \vec{0}, \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot (\nabla v) = \Delta v, \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}, \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_1) - \mathbf{u}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_2), \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2) = (\nabla \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_2 \quad (\text{A.18})$$

mit $\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2 := \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2^T$, siehe [7].

A.2. Konstanten

Wir verwenden nach [23, 42] folgende Konstanten:

- $G = 6,6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ Gravitationskonstante,
- $M = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ Masse der Erde,
- $a = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$ Radius der Kugel, die dasselbe Volumen wie die Erde hat,
- $|\boldsymbol{\Omega}| = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation,
- $g = 9,807 \text{ m s}^{-2}$ Erdbeschleunigung auf Meeresniveau,
- $\rho_0 = 1,225 \text{ kg m}^{-3}$ Standarddichte auf Meeresniveau,
- $p_0 = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ Standarddruck auf Meeresniveau,
- $T_0 = 288,15 \text{ K}$ Standardtemperatur auf Meeresniveau,
- $\mu_{\text{Luft}} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$ dynamische Viskosität,
- $\lambda_{\text{Luft}} = 0,023 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ thermische Leitfähigkeit,
- $R_{\text{Luft}} = 287,04 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ Gaskonstante für trockene Luft,
- $c_p = 1005 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ spezifische Wärmekapazität von Luft bei konstantem Druck,
- $c_v = 718 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ spezifische Wärmekapazität von Luft bei konstantem Volumen,
- $\gamma = c_p/c_v = 1,4$.

Literaturverzeichnis

- [1] ADELSBERGER, J.: *Interaktive Visualisierung von globalen Höhendaten unter Verwendung verbesserter Bounding Shapes*. Technischer Bericht, Institut für Numerische Simulation, Universität Bonn, 2005.
- [2] BOER, B.J. und B. DENIS: *Numerical Convergence of the Dynamics of a GCM*. *Climate Dynamics*, 13(5):359–374, 1997.
- [3] BONAVENTURA, L.: *The ICON Project: Development of a Unified Model Using Triangular Geodesic Grids*. Seminar at ECMWF, 2004. <http://icon.enes.org>.
- [4] BONAVENTURA, L., L. KORNBLUEH, M. GIORGETTA, E. ROECKNER, T. HEINZE, D. MAJEWSKI, P. RIPODAS, B. RITTER, T. RINGLER und J. BAUDISCH: *The ICON Shallow Water Model: Scientific Documentation and Benchmark Tests*. Technischer Bericht, Max Planck Institute for Meteorology and Deutscher Wetterdienst, 2004. <http://icon.enes.org>.
- [5] BOTTA, N., R. KLEIN, S. LANGENBERG und S. LÜTZENKIRCHEN: *Well Balanced Finite Volume Methods for Nearly Hydrostatic Flows*. *Journal of Computational Physics*, 196:539–565, 2004.
- [6] BREUER, M.: *Direkte Numerische Simulation und Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen auf Hochleistungsrechnern*. Shaker Verlag, Aachen, 2002. Habilitationsschrift, Universität Erlangen-Nürnberg.
- [7] BRONSTEIN, I.N., K.A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 5. Auflage, 2001.
- [8] DAHLSTRÖM, S.: *Large Eddy Simulation of the Flow Around a High-Lift Airfoil*. Doktorarbeit, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2003.
- [9] DEUTSCHER WETTERDIENST: *Quarterly Report of the German NWP-System. Part 2: Description of the German NWP-System*, 2004.
- [10] DOMS, G., J. FÖRSTNER, E. HEISE, H.-J. HERZOG, M. RASCHENDORFER, R. SCHRODIN, T. REINHARDT und G. VOGEL: *A Description of the Nonhydrostatic Regional Model LM, Part II: Physical Parameterization*. Consortium for Small-Scale Modelling, 2. Auflage, 2005. <http://www.cosmo-model.org>.
- [11] DOMS, G. und U. SCHÄTTLER: *A Description of the Nonhydrostatic Regional Model LM, Part I: Dynamics and Numerics*. Consortium for Small-Scale Modelling, 2. Auflage, 2002. <http://www.cosmo-model.org>.

-
- [12] DUTTON, J.A.: *The Ceaseless Wind, An Introduction to the Theory of Atmospheric Motion*. Dover Publications, New York, 1986.
- [13] ERLEBACHER, G., M.Y. HUSSAINI, C.G. SPEZIALE und T.A. ZANG: *Toward the Large-Eddy Simulation of Compressible Turbulent Flows*. Journal of Fluid Mechanics, 238:155–185, 1992. ICASE Report No. 90-76, 1990.
- [14] ETLING, D.: *Theoretische Meteorologie, eine Einführung*. Springer, Berlin, 2. Auflage, 2002.
- [15] FOKEN, T.: *Angewandte Meteorologie, Mikrometeorologische Methoden*. Springer, Berlin, 2003.
- [16] FORSTER, O.: *Analysis 3*. Vieweg Verlag, Braunschweig, 3. Auflage, 1999.
- [17] GALMARINI, S., F. MICHELUTTI und P. THUNIS: *Estimating the Contribution of Leonard and Cross Terms to the Subfilter Scale from Atmospheric Measurements*. Journal of the Atmospheric Sciences, 57(17):2968–2976, 2000.
- [18] GALMARINI, S. und P. THUNIS: *On the Validity of Reynolds Assumptions for Running-Mean Filters in the Absence of a Spectral Gap*. Journal of the Atmospheric Sciences, 56(12):1785–1796, 1999.
- [19] GARRATT, J.R.: *The Atmospheric Boundary Layer*. Cambridge Atmospheric and Space Science Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [20] GERMANO, M., U. PIOMELLI, P. MOIN und W.H. CABOT: *A Dynamic Subgrid Scale Eddy Viscosity Model*. Physics of Fluids A, 3(7):1760–1765, 1991.
- [21] GERSTNER, T.: *Multiresolution Visualization and Compression of Global Topographic Data*. GeoInformatica, 7(1):7–32, 2003. Shortened Version in Proceedings of Spatial Data Handling, IGU/GISc, 14-27, 2000.
- [22] GERSTNER, T.: *Top-Down View-Dependent Terrain Triangulation using the Octagon Metric*. Technischer Bericht, Institut für Numerische Simulation, Universität Bonn, 2003.
- [23] GILL, A.E.: *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Band 30 der Reihe *International Geophysics Series*. Academic Press, Orlando, 1982.
- [24] GRIEBEL, M.: *Wissenschaftliches Rechnen 1 und 2*. Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Institut für Numerische Simulation, 2003. Vorlesungsskript.
- [25] GRIEBEL, M., T. DORNSEIFER und T. NEUNHOEFFER: *Numerical Simulation in Fluid Dynamics, A Practical Introduction*. SIAM, Philadelphia, 1998.
- [26] HEINZE, T.: *Ein numerisches Verfahren zur Lösung der Flachwassergleichungen auf einer rotierenden Kugel mittels der Lagrange-Galerkin-Methode*. Diplomarbeit, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn, 1998.

- [27] HELD, I.M. und M.J.SUAREZ: *A Proposal for the Intercomparison of the Dynamical Cores of Atmospheric General Circulation Models*. Bulletin of the American Meteorological Society, 75(10):1825–1830, 1994.
- [28] HENSE, A.: *Theoretische Meteorologie 1*. Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Fachbereich Meteorologie, 2005. Vorlesungsskript.
- [29] JABLONOWSKI, C. und D.L. WILLIAMSON: *A Baroclinic Instability Test Case for Atmospheric Model Dynamical Cores*. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 132(621C):2943–2975, 2006.
- [30] JASAK, H.: *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*. Doktorarbeit, Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, 1996.
- [31] KAAZEMPUR-MOFRAD, M.R. und C.R. ETHIER: *An Efficient Characteristic Galerkin Scheme for the Advection Equation in 3-D*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191(46):5345–5363, 2002.
- [32] KLEIN, R. und S. VATER: *Mathematische Modellierung in der Klimaforschung*. Freie Universität Berlin, Fachbereich Mathematik und Informatik, 2003. Vorlesungsskript.
- [33] LANGE, H.-J.: *Die Physik des Wetters und des Klimas*. Reimer, Berlin, 2002.
- [34] LILLY, D.K.: *A Proposed Modification of the Germano Subgrid-Scale Closure Method*. Physics of Fluids A, 4(3):633–635, 1992.
- [35] LINDSTROM, P. und V. PASCUCCI: *Terrain Simplification Simplified: A General Framework for View-Dependent Out-of-Core Visualization*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 8(3):239–254, 2002.
- [36] MAJEWSKI, D., D. LIERMANN, P. PROHL, B. RITTER, M. BUCHHOLD, T. HANISCH, G. PAUL, W. WERGEN und J. BAUMGARDNER: *The Operational Global Icosahedral-Hexagonal Gridpoint Model GME: Description and High-Resolution Tests*. Monthly Weather Review, 130:319–338, 2002.
- [37] MIEGHEM, J. VAN: *Atmospheric Energetics*. Oxford University Press, Oxford, 1973.
- [38] MOIN, P., K. SQUIRES, W.H. CABOT und S. LEE: *A Dynamic Subgrid-Scale Model for Compressible Turbulence and Scalar Transport*. Physics of Fluids A, 3(11):2746–2757, 1991.
- [39] O'BRIEN, J.J.: *A Note on the Vertical Structure of the Eddy Exchange Coefficient in the Planetary Boundary Layer*. Journal of Atmospheric Sciences, 27(8):1213–1215, 1970.
- [40] OPENFOAM: *The Open Source CFD Toolbox, User Guide 1.3*, 2006. <http://www.opencfd.co.uk>.
- [41] OPENFOAM: *The Open Source CFD Toolbox, Programmer's Guide 1.4*, 2007. <http://www.opencfd.co.uk>.

- [42] PICHLER, H.: *Dynamik der Atmosphäre*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 3. Auflage, 1997.
- [43] PIELKE, R.A.: *Mesoscale Meteorological Modeling*, Band 78 der Reihe *International Geophysics Series*. Academic Press, San Diego, 2. Auflage, 2002.
- [44] POLVANI, L.M., R.K. SCOTT und S.J. THOMAS: *Numerically Converged Solutions of the Global Primitive Equations for Testing the Dynamical Core of Atmospheric GCMs*. *Monthly Weather Review*, 132:2539–2552, 2004.
- [45] SPEZIALE, C.G., G. ERLEBACHER, T.A. ZANG und M.Y. HUSSAINI: *The Subgrid-Scale Modeling of Compressible Turbulence*. *Physics of Fluids*, 31(4):940–942, 1988.
- [46] STULL, R.B.: *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Atmospheric Sciences Library. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [47] TECPLOT: *Tecplot 360 User's Manual*, 2006. <http://www.tecplot.com>.
- [48] U.S. GEOLOGICAL SURVEY: *GTOPO30, Global Digital Elevation Model*, 1996. <http://edc.usgs.gov/products/elevation/gtopo30/gtopo30.html>.
- [49] U.S. STANDARD ATMOSPHERE: *U.S. Standard Atmosphere*, 1976. U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.
- [50] VREMAN, B., B. GEURTS und H. KUERTEN: *On the Formulation of the Dynamic Mixed Subgrid-Scale Model*. *Physics of Fluids*, 6(12):4057–4059, 1994.
- [51] VREMAN, B., B. GEURTS und H. KUERTEN: *Large-Eddy Simulation of the Turbulent Mixing Layer*. *Journal of Fluid Mechanics*, 339:357–390, 1997.
- [52] WILLIAMSON, D.L., J.B. DRAKE, J.J. HACK, R. JAKOB und P.N. SWARZTRAUBER: *A Standard Test Set for Numerical Approximations to the Shallow Water Equations in Spherical Geometry*. *Journal of Computational Physics*, 102:211–224, 1992.
- [53] ZANG, Y., R.L. STREET und J.R. KOSEFF: *A Dynamic Mixed Subgrid-Scale Model and its Application to Turbulent Recirculating Flows*. *Physics of Fluids A*, 5(12):3186–3196, 1993.
- [54] ZDUNKOWSKI, W. und A. BOTT: *Dynamics of the Atmosphere, A Course in Theoretical Meteorology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.