Institut Für Angewndte Mathematik
Der
Universität Bonn

Ein Wavelet–basiertes Kompressionsverfahren zur numerischen Lösung der Halbgruppenformulierung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen

Diplomarbeit

Christoph Bürvenich

Referent: Prof. Dr. M. Griebel

Bonn, Februar 2000

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

In den Natur– und Ingenieurwissenschaften führt die Modellbildung häufig zu komplexen Differential– oder Integralgleichungen, für die es keine explizite Lösung gibt. An dieser Stelle setzt die numerische Simulation an. Ihr Ziel ist es, die näherungsweise Lösung der Gleichungen mit Hilfe des Computers zu berechnen. Ein notwendiger Approximationsprozeß liefert ein lineares Gleichungssystem, welches die Lösung der Differential– bzw. Integralgleichung näherungsweise bestimmt. Damit befinden wir uns im Bereich der linearen Algebra und können wohlbekannte Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme einsetzten.
Eine quadratische Matrix besitzt N^2 Einträge. Sowohl der Speicher– als auch der Rechenaufwand steigen also quadratisch mit der Anzahl der Freiheitsgrade. In mehreren Dimensionen verschärft sich die Situation noch. Es ist daher sinnvoll, Kompressionsverfahren einzusetzen, um die Anzahl der Koeffizienten zu reduzieren. Ein übliches Verfahren besteht darin, die Basis der darstellenden Matrix so zu wählen, daß möglichst viele Koeffizienten nahe bei Null liegen. Die Einträge, die kleiner als eine festgesetzte Abschneidegenauigkeit sind, werden nicht abgespeichert. Dadurch reduziert sich sowohl der Speicherplatzbedarf als auch der Gesamtaufwand der Matrix–Vektor–Multiplikation erheblich.
In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der numerischen Lösung nichtlinearer, zeitabhängiger Differentialgleichungen. Wir wollen ein *Wavelet–Kompressionsverfahren* für Operatoren vorstellen und untersuchen, daß mit dem optimalen Aufwand von $\mathcal{O}(N)$ in einer bzw. mit $\mathcal{O}\left(N \log^{d-1} N\right)$ in d Dimensionen arbeitet. Diese Technik wurde zuerst in [Bey91] vorgestellt und später in [Kei95] auf die Halbgruppendarstellung der Lösung übertragen. Weitere Arbeiten in diesem Zusammenhang sind [Bey93, Bey95]. Die Differentialgleichung wird mit Hilfe der Halbgruppentheorie in eine Integralgleichung transformiert. Zur numerischen Lösung wird eine *gemischte Petrov–Galerkin* Approximation benutzt, deren Ansatz– und Testfunktionen sowohl Wavelets als auch deren Skalierungsfunktionen sind. Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, daß in einer Mehrskalendarstellung die einzelnen Skalen nicht miteinander koppeln. Die Steiffigkeitsmatrix besteht aus Toeplitz–Matrizen, deren Koeffizienten effizient mit der schnellen Fourier–Transformation berechnet werden können. Die Einträge der Matrix fallen von der Diagonalen her schnell ab, so daß ein großer

Kompressionseffekt erreicht wird.
Die oben erwähnten Arbeiten behandeln nur den eindimensionalen periodischen Fall. Wir zeigen in dieser Arbeit, wie man die Steiffigkeitsmatrizen für Dirichlet– und Neumann–Randbedingungen modifizieren muß und führen Berechnungen periodischer Modellbeispiele in ein, zwei und drei Dimensionen durch, wobei in drei Dimensionen nur lineare Gleichungen behandelt werden. Außerdem gehen wir auf die Möglichkeit der Vorkonditionierung ein und zeigen, wie die Navier–Stokes Gleichung in diesen Ansatz eingebettet werden kann. Damit soll die Vorarbeit geleistet werden, tubulente Strömungen mit Hilfe dieses Wavelet–Kompressionsverfahrens zu analysieren. Der Ansatz ist hierfür gut geeignet, da Wavelets gerade hohe Frequenzen scharf lokalisieren und das Spektrum turbulenter Strömungen viele hochfrequente Anteile aufweist.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile: Im ersten stellen wir die mathematische Theorie vor und diskutieren die zugrundeliegenden Konzepte, im zweiten werden die Algorithmen hergeleitet und im dritten Teil präsentieren wir numerische Ergebnisse.

1. Teil: Die mathematische Theorie

- Kapitel 1: Halbgruppen

  Die partielle Differentialgleichung(PDE) wird mittels des Halbgruppenansatzes in eine Integralgleichung transformiert, wodurch man eine Darstellung der Lösung erhält. In diesem Kapitel stellen wir die Halbgruppentheorie soweit vor wie es nötig ist, um die Existenz und die Eindeutigkeit des semilinearen Cauchyproblems zu zeigen.

- Kapitel 2: Wavelets

  Die in der Integralgleichung auftretenden Operatoren werden mittels eines *gemischten Petrov–Galerkin* Schemas approximiert, deren Ansatz– und Testfunktionen sowohl Wavelets als auch deren Skalierungsfunktionen sind. Um die Multiskalenstruktur der Waveleträume auszunutzen, werden die Lösungsoperatoren auf verschiedenen, ineinander verschachtelten Gittern diskretisiert. Dieses Kapitel stellt einige wesentliche Aussagen der Waveletttheorie zusammen, welche zum Verständnis des hier behandelten Verfahrens benötigt werden.

- Kapitel 3: Pseudo–Differentialoperatoren

  Der Kompressionseffekt beruht im wesentlichen auf der Art der beteiligten Operatoren und auf der Anzahl der verschwindenden Momente der Waveletbasis. Die Koeffizienten der Operatoren müssen jenseits der Diagonale ein bestimmtes Abklingverhalten aufweisen. Typischerweise wird es sich dabei um Pseudo–Differentialoperatoren handeln. Kapitel 3 geht in aller Kürze auf einige Aspekte der Pseudo–Differentialoperatoren ein, die wir in Kapitel 4 brauchen werden.

2. Teil: Herleitung der Algorithmen

Beylkin bezeichnet seine Methode der Operatorenkompression mittels Wavelets als Nicht–Standard–Form, kurz NS–Form, eines Operators.

- Kapitel 4: Die NS–Form eines Operators

  In diesem Kapitel leiten wir die NS–Form eines Operators her.

- Kapitel 5: Datenstrukturen

  Die Datenstrukturen und Algorithmen, die im Programm verwendet werden, sollen an dieser Stelle kurz vorgestellt werden.

3. Teil: Numerische Ergebnisse

- Kapitel 6: Präsentation der Ergebnisse

  Der letzte Teil der Arbeit gilt der numerischen Analyse der in Kapitel 5 vorgestellten Algorithmen. Dazu berechnen wir verschiedene Modellbeispiele und untersuchen die Ergebnisse.

- Kapitel 7: Ausblick

  Das letzte Kapitel enthält ein Fazit der Arbeit und gibt einen Ausblick auf noch offene Fragen.

0.1 Die mathematische Idee

Der Ausgangspunkt ist das **abstrakte semilineare Anfangswertproblem:** Sei X ein Banachraum und $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator. Finde eine Lösung $u(t)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}u(t) + Au(t) &= f(u(t)) \qquad \text{auf } [t_0,\, t_1], \\ u(t_0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Unter bestimmten Voraussetzungen an $f(t,x)$ — siehe dazu Kapitel 2.10 — liefert die *Halbgruppentheorie* die Lösung von (1) als **Integralgleichung:**

$$u(t) = \mathrm{H}(t-t_0)\, u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{H}(t-\tau)\, f(u(\tau))\, d\tau, \tag{2}$$

wobei A der *infinitesimale Erzeugende der Halbgruppe* $\mathrm{T(t)} = e^{-t\,\mathrm{A}}$ ist.

Betrachten wir als ein mögliches Beispiel die **Burgers–Gleichung**:

$$\begin{aligned} u_t &= \nu \triangle u - u \cdot u_x, \qquad \text{auf } [0,\, t_1], \\ u(0,x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (1) und (2) erhalten wir die Lösung der Burgers–Gleichung durch

$$u(t,x) = e^{t\nu\triangle} u_0(x) - \int_0^t e^{(t-\tau)\nu\triangle} \left(u \cdot u_x\right)(\tau, x)\, d\tau,$$

wobei $\mathrm{A} = \nu\triangle$, $f(t,u) = -\frac{1}{2}\partial_x u^2$ und $\mathrm{H}(t) = e^{t\nu\triangle}$. Wir diskretisieren nun das Zeitintegral in (2), indem wir eine beliebige Quadraturformel wählen. [Kei95] schlägt die folgende **Approximation zweiter Ordnung** vor:

$$\begin{aligned} u(t_1) = {} & \mathrm{H}(\delta t)\, u_0 \\ & + \tfrac{1}{2}\, \mathrm{N}(\delta t)\ \big[f(u(t_0)) + f(u(t_1))\big] \\ & + \mathcal{O}\big((\delta t)^2\big). \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $\delta t = t_1 - t_0$. Der Operator $\mathrm{N}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \big(I - \mathrm{H}(t)\big)\, \mathrm{A}^{\text{-}1}$ kontrolliert den nichtlinearen Anteil der Gleichung. Für die Lösung der Burgers–Gleichung ergibt sich also folgendes Approximationschema:

$$\begin{aligned} u(t_1,x) = {} & \mathrm{H}(\delta t)\, u_0(x) \\ & + \tfrac{1}{2}\, \mathrm{N}(\delta t)\ \big(u(0,x)u_x(0,x) + u(t_1,x)u_x(t_1,x)\big) \\ & + O\big((\delta t^2)\big) \end{aligned}$$

mit $\mathrm{N}(t) = \frac{1}{\nu}\big(I - e^{t\nu\triangle}\big)\triangle^{-1}$ und $\delta t = t_1$.

Die **Grundidee der Nicht–Standard–Form** ist recht einfach:
Man wähle eine orthogonale Multiskalen Analyse

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \cdots,$$

deren Teilräume aufgespannt werden durch Translationen und Diletationen einer einzigen Skalierungsfunktion $\varphi(x)$:

$$V_j \ = \ \mathrm{span}\big\{\varphi_k^j(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\big\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Mit Hilfe der Skalierungsräume konstruiert man die Waveleträume

$$W_j \ = \ \mathrm{span}\big\{\psi_k^j(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

als deren orthogonales Komplement:

$$W_j \ = \ V_j \ominus V_{j+1}.$$

Die Waveleträume besitzen die sogenannte *Approximationseigenschaft*, d. h. sie zerlegen den ganzen $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ in orthogonale Unterräume:

$$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j.$$

Mit einem Finite–Element–Ansatz diskretisiert man nun Gleichung (4.3) bzgl. einer Basis aus Skalierungsfunktionen $\varphi_k^0(x)$ und erhält die **Finite–Element–Gleichung**

$$\mathbf{x}_{t_j} = \mathrm{A}_0\,\mathbf{x}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{A}_1\,\left[f(t_j,\mathbf{x}_{t_j}) + f(t_{j+1},\mathbf{x}_{t_{j+1}})\right], \tag{4}$$

wobei A_0 die Steiffigkeitsmatrix der Halbgruppe $\mathrm{T(t)}$ und A_1 die Steiffigkeitsmatrix der operatrorwertigen Funktion $\mathrm{N}(t)$ ist. Die Steiffigkeitsmatrizen A_i sind in der Regel voll besetzt. Mit einer orthogonalen Basiswechselmatrix W transformieren wir (4) in ein **dünnbesetztes Gleichungssystem**

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t_j} = \tilde{\mathrm{A}}_0\,\tilde{\mathbf{x}}_0 + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathrm{A}}_1\,\left[f(t_j,\,\tilde{\mathbf{x}}_{t_j}) + f(t_{j+1},\,\tilde{\mathbf{x}}_{t_{j+1}})\right]. \tag{5}$$

wobei $\tilde{\mathrm{A}}_i = \mathrm{W}\,\mathrm{A}_i\,\mathrm{W}^*$ und $\tilde{\mathbf{x}}_{t_j} = \mathrm{W}\,\mathbf{x}_{t_j}$. Um (5) zu berechnen, benutzen wir in jedem Zeitschritt eine **Picard–Iteration**. Das Ergebnis erhält man dann mit

$$\mathbf{x}_{t_j} = \mathrm{W}^*\,\tilde{\mathbf{x}}_{t_j}. \tag{6}$$

In unserem Fall wählen wir W als eine Wavelet–Transformation.

Kapitel 1

Halbgruppen

1.1 Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist die numerische Behandlung des semilinearen Anfangsrandwertproblems. In diesem Kapitel stellen wir die wesentlichen Aussagen über Halbgruppen zusammen die notwendig sind, um den Existenz– und Eindeutigkeitsbeweis des semilinearen Cauchy–Problems führen zu können. Dieser Beweis legt die theoretische Grundlage für den Rest der Arbeit.
Das Kapitel gliedert sich in drei **Hauptthemen**, die jeweils aufeinander aufbauen:

1.4 Das homogene Cauchy–Problem,

1.6 Das inhomogene Cauchy–Problem,

1.8 Das semilineare Cauchy–Problem.

Die Definitionen und Sätze, welche zum Beweis des jeweiligen Cauchy–Problems erforderlich sind, werden in den Abschnitten zuvor behandelt. Die ersten beiden Abschnitte 1.2 und 1.3 bereiten das homogene Cauchy–Problem vor, der Abschnitt 1.5 das inhomogene und der Abschnitt 1.7 das semilineare Cauchy–Problem. Der vorletzte Abschnitt 1.9 gibt als ausführliches Anwendungsbeispiel den Existenz– und Eindeutigkeitsbeweis der dreidimensionalen Navier–Stokes–Gleichung an. Im letzten Abschnitt zeigen wir, daß die Lösung des semilineare Cauchy–Problems, wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, als Grenzwert einer Picard–Iteration bestimmt werden kann. Das Beispiel der Navier–Stokes–Gleichung zeigt, daß auch Turbulenz–Simulation mit dem von uns vorgestellten Verfahren möglich ist. Im folgenden wollen wir eine kurze Einführung in die Problemstellung der Halbgruppentheorie geben.

Die Halbgruppentheorie erlaubt es, kurz gesagt, partielle Differentialgleichungen als gewöhnliche Differentialgleichungen über einen entsprechend zu wählenden Funktionenraum zu behandeln. Die Lösung eines gewöhnlichen Anfangswertproblems erster

Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \alpha\, y(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

wird gegeben durch

$$y(t) = y_0\, e^{\alpha\, t}. \tag{1.2}$$

Wir wollen die **Wärmeleitungsgleichung** so umschreiben, daß sie genauso wie (1.1) gelöst werden kann. Die Gleichung wird gegeben durch

$$\begin{aligned} u_t(t,\, x) &= \triangle u(t,\, x), && x \in (0,1),\, t > 0, \\ u(t,\, 0) &= 0, && t > 0, \\ u(t,\, 1) &= 0, && t > 0, \\ u(0,\, x) &= u_0(x), && x \in (0,1). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Wir fassen (6.25) als ein gewöhnliches Anfangswertproblem in $X = L^2(0,1)$ auf

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= A\, v(t), \qquad v(t) \in \mathcal{D}\,(A) \\ v(0) &= v_0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

wobei $A = \frac{d^2}{dx^2}$ der zweite Ableitungsoperator mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) = H_0^2(0,1)$ ist. Die Lösung wird gemäß (1.2) formal gegeben durch

$$v(t) = e^{tA} v_0. \tag{1.5}$$

Ein wesentliches Ziel der Halbgruppentheorie besteht nun darin, den formalen Ausdruck e^{tA} streng zu definieren. Wir wollen noch ein zweites Beispiel angeben, um zu zeigen , daß die Halbgruppentheorie nicht nur für elliptische Differentialgleichungen interessant ist. Dazu betrachten wir die **Wellengleichung**

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \triangle u, && t > 0,\, x\, \in\, \Omega, \\ u(x,t) &= 0 && x\, \in\, \partial\Omega, \\ u(0,\, x) &= u_0(x), \\ u_t(0,\, x) &= u_1(x). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Wir schreiben (1.6) wieder als

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= Av(t), \qquad v(t) \in \mathcal{D}(A), \\ v(0) &= v_0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

mit $v = (u, u_t)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ \triangle & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_0 = (u_0, u_1)$. A ist dabei ein Operator über $X = H_0^1(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.

Es ist zunächst nicht klar, wie man e^{tA} für unbeschränkte Operatoren A definieren soll. Um eine Vorstellung von einer adäquaten Vorgehensweise zu erhalten, betrachten wir verschiedene Möglichkeiten im Endlichdimensionalen eine operatorwertige Exponentialfunktion zu definieren:

- **Der Potenzreihen–Ansatz:** Die Exponentialfunktion einer Matrix A wird üblicherweise über eine Potenzreihe definiert

$$e^{zA} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n A^n}{n!}. \tag{1.8}$$

  Dies ist aus zwei Gründen für unbeschränkte lineare Operatoren $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ nicht möglich: zum einen muß die Potenzreihe (1.8) für beliebige Operatoren nicht konvergieren, zum anderen bildet A seinen Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ im allgemeinen nicht auf sich selbst ab. Das bedeutet aber, daß $\mathcal{D}(e^{zA}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ sehr klein werden kann, insbesondere für nilpotente Operatoren sogar verschwindet.

- **Die Spektralmethode:** Ist A diagonalisierbar, z.B. $A = T^{-1}DT$ mit einer Diagonalmatrix D, dann ist

$$e^A = T^{-1} e^D T. \tag{1.9}$$

  Nach dem Spektralsatz können wir die Exponentialfunktion für selbstadjungierte Operatoren durch (1.9) definieren.

- **Resolventen–Ansatz:** Aus der Analysis ist bekannt, daß

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, x,\ |x| < n \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \le e^x \le \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n.$$

  Für ein fest gewähltes x konvergieren beide Seiten gegen e^x. Die linke Seite ist aus den gleichen Gründen wie die Potenzreihe für eine Verallgemeinerung auf unbeschränkte lineare Operatoren nicht geeignet. Die rechte Seite vermeidet dieses Problem, da sie anstelle der Potenzen von A die Potenzen der Resolvente benutzt und diese ihren Definitionsbereich auf sich selbst abbildet. Wir definieren also

$$e^{tA} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} (id - \frac{t}{n}A)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t} R(\frac{n}{t}; A)\right]^n. \tag{1.10}$$

Das *Hille–Yosida Theorem* besagt gerade, daß für bestimmte Operatoren A der Grenzwert in (1.10) existiert und e^{tA} somit wohldefiniert ist.

- **Laplace–Transformation:** Ein anderer Ansatz nutzt die Tatsache aus, daß die Resolvente eines Operators gleich der Laplace–Transformierten der Exponentialfunktion des Operators ist, d. h.

  $$R(\lambda; A) = \int_0^\infty e^{At} e^{-\lambda t}\, dt.$$

  Invertieren wir die Transformation, so erhalten wir

  $$e^{At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda; A)\, d\lambda,$$

  wobei γ größer als der Realteil des maximalen Eigenwertes von A sein muß: $\mathrm{Re}\, \lambda_{max} < \gamma$. Dieser Ansatz wird bei der Behandlung analytischer Halbgruppen relevant, welche wir zur Herleitung des Existenz– und Eindeutigkeitssatzes des semiliniaren Cauchy–Problems benötigen.

Die zwei wesentlichen Resultate dieses Kapitels sind die Eindeutigkeits– und Existenzsätze für das inhomogene und das semilineare Cauchy–Problem in den Abschnitten 1.6 und 1.8. Als interessantes Anwendungsbeispiel beweisen wir in Abschnitt 1.9 die lokale Existenz– und Eindeutigkeit der Lösung der Navier–Stokes–Gleichung in drei Dimensionen. Alle drei Beweise stammen aus [DH], wobei die Navier–Stokes Gleichung wesentlich ausführlicher in [FK] behandelt wird. Dort findet man auch weitere Literaturangaben zu diesem Thema. Mit der Halbgruppentheorie werden wir uns nur soweit beschäftigen, wie es nötig ist, um diese Beweise zu verstehen. Die meisten Aussagen habe wir [PA] entnommen, welches als Standardwerk über die Theorie der Halbgruppen gilt. Der Schwerpunkt bei [DH] ist die Anwendung der Halbgruppentheorie auf PDEs.

1.2 Stark–stetige Halbgruppen

In diesem Abschnitt führen wir Halbgruppen ein. Wir konzentrieren uns dabei auf eine Untergruppe, die sogenannten $\mathcal{C}_0$–Halbgruppen, die als Lösungsoperatoren für zeitabhängige lineare Differentialgleichungen benutzt werden können. Dazu muß eine $\mathcal{C}_0$–Halbgruppen $T(t)$ jedoch bestimmte Bedingungen erfüllen, die in den folgenden Sätzen dieses Abschnitts festgehalten werden:

- Satz 1.1: $T(t)$ ist beschränkt,

- Satz 1.2: $t \longrightarrow T(t)$ ist stetig,

- Satz 1.3: $T(t)$ ist differenzierbar.

Wir beginnen mit der Definition der Halbgruppe.

1.1. Definition (Halbgruppe linearer Operatoren). Sei X ein Banachraum. Eine Schar $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{LC}(\mathrm{X})$ stetig linearer Funktionen von X nach X heißt *Halbgruppe*, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind

1. $T(0) = id$,
2. $T(t+s) = T(t)T(s) \quad$ für alle $t, s \geq 0$.

Unser Ziel ist es, eine Halbgruppe als operatorwertige Exponentialfunktion $T(t) = e^{tA}$ darzustellen. Die Eigenschaften der Halbgruppe würden dann durch die Eigenschaften des sie erzeugenden Operators A bestimmt. Wir definieren also den erzeugenden Operator durch die Ableitung der Halbgruppe im Punkte 0.

1.2. Definition (infinitesimaler Erzeuger). Es seien $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ eine Halbgruppe und $A: \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ eine lineare Abbildung mit

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \left\{ x \in X : \exists\, y \in X \quad \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = y \right\}, \quad \text{und} \\ Ax &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \\ &= \left. \frac{d\,T(t)x}{dt} \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Dann heißt A der *infinitesimale Erzeuger* der Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Eine wichtige Frage ist nun, welche Operatoren eine Halbgruppe erzeugen. Dazu unterscheiden wir gleichmäßig stetige und punktweise stetige Halbgruppen.

1.3. Definition (gleichmäßig stetige bzw. stark stetige Halbgruppen). Eine Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ heißt

1. *gleichmäßig stetig*, wenn $\lim_{t\downarrow 0} \parallel T(t) - id \parallel = 0$ ist;
2. *stark stetig oder $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe*, wenn $lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$ für alle $x \in X$ ist.

Gleichmäßig stetige Halbgruppen $T(t) = e^{tA}$ sind zum Lösen partieller Differentialgleichungen ungeeignet, da ihre infinitesimalen Erzeugenden A beschränkte Operatoren sind [PA] S. 2, Theorem 1.2. Insbesondere können Differentialoperatoren keine gleichmäßig stetige Halbgruppen erzeugen. Die Lösung des *homogenen Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= A\,v(t), \\ v(0) &= v_0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

wird gegeben durch $v(t) = T(t)v_0 = e^{tA}v_0 \in \mathcal{D}(A) \subset X$. Im Folgenden sei X stets ein Banachraum. Wir wollen eine $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ als Lösungsoperator einer zeitabhängigen Differentialgleichung interpretieren, also muß $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ beschränkt sein. Diese Aussage ist Bestandteil des folgenden Satzes.

1.1. Satz. *Sei $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ eine $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe. Dann gibt es Konstanten $\omega \geq 0$ und $M \geq 1$, so daß*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad t \geq 0.$$

Beweis. Als erstes zeigen wir, daß $\|T(t)\| \leq M$ für $0 \leq t \leq \gamma$. Unter der Annahme, daß dies nicht gilt, gibt es eine Folge $\{t_n\}_n$, $t_n \geq 0$, so daß $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ und $\|T(t_n)\| \geq n$. Nach dem Satz von Banach–Steinhaus folgt dann die Existenz eines $x \in X$ mit $\|T(t_n)x\| \geq n$ für alle n. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Definition der stark–stetigen Halbgruppe (1.2.2).
Da $\|T(0)\| = 1$ ist $M \geq 1$. Für $t \geq 0$ zerlegen wir nun t in $t = n\gamma + \delta$ wobei $0 \leq \delta < \gamma$; außerdem sei $\omega = \gamma^{-1}\log M \geq 0$. Dann folgt die Behauptung aus der Halbgruppeneigenschaft

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\gamma)^n\| \leq M^{n+1} \leq MM^{t/\gamma} = Me^{\omega t}.$$

□

Satz 1.1 findet im Satz von Hille–Yosida und in den Abschätzungen analytischer Halbgruppen Verwendung, die wiederum in den Existenz– und Eindeutigkeitssatz des semilinearen Cauchy–Problems eingehen. Der folgende Satz zeigt nun die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten, eine Tatsache, die in allen Existenz– und Eindeutigkeitssätzen benutzt wird.

1.2. Satz. *Sei $T(t)_{t\geq 0}$ eine $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe. Dann ist für jedes $x \in X$, $t \to T(t)x$ eine stetige Funktion von $\mathbb{R}^n_+$ nach X.*

Beweis. Für t, $h \geq 0$ gilt

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\| \, \|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega t} \|T(h)x - x\|.$$

und für $t \geq h \geq 0$ gilt

$$\|T(t-h)x - T(t)x\| \leq \|T(t-h)\| \, \|x - T(h)x\| \leq Me^{\omega t} \|x - T(h)x\|.$$

Die Behauptung folgt nun aus der starken Stetigkeit der Halbgruppe. □

Wir zeigen noch die Differenzierbarkeit der Halbgruppe und den Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung für Halbgruppen. Diese Aussagen spielen eine wichtige Rolle in den Beweisen der Lösbarkeit der Cauchy–Probleme.

1.3. Satz. *A sei der infinitesimale Erzeugende der $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $T(t)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Für $x \in X$ ist*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\,ds = T(t)x.$$

2. *Für $x \in X$ ist $\int_0^t T(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A)$ und*

$$A\left(\int_0^t T(s)x\,ds\right) = T(t)x - x.$$

3. *Differenzierbarkeit*
Für $x \in \mathcal{D}(A)$ ist $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ und

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t) = T(t)Ax.$$

4. *Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung*
Für $x \in \mathcal{D}(A)$ ist

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\,d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\,d\tau.$$

Beweis siehe Anhang A.1.
Als wichtige Folgerung, die in den Satz von Hille–Yosida einfließt und die Definition nicht klassischer Lösungen der Cauchy–Probleme ermöglicht, erhalten wir das folgende Korollar.

1.1. Korollar. *Sei A der infinitesimale Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe, dann liegt $\mathcal{D}(A)$ dicht in X und A ist ein abgeschlossener Operator.*

Beweis.

- *Dichte:* Für jedes $x \in X$ sei $x_t \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds$. Nach 1.3.2 liegt $x_t \in \mathcal{D}(A)$ für $t > 0$ und nach 1.3.1 konvergiert $x_t \to x$, wenn $t \downarrow 0$. Also ist $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

- *Abgeschlossenheit:* Sei $x_n \in \mathcal{D}(A)$, $x_n \to x$ und $Ax_x \to y$ für $n \to \infty$. Nach 1.3.4 ist

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\,ds.$$

$T(s)Ax_n \longrightarrow T(s)Ax$ konvergiert gleichmäßig auf beschränkten Intervallen. Für $n \to \infty$ ergibt sich also

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ay\, ds.$$

Dividiert man beide Seiten durch $t > 0$, so erhält man mit $t \downarrow 0$ aus 1.3.1 die Behauptung: $Ax = y$ mit $x \in \mathcal{D}(A)$.

$\square$

In der Einleitung wurde darauf hingewiesen, daß der Definitionsbereich der Exponentialfunktion eines unbeschränkten Operators $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ möglicherweise sehr klein sein kann. Der folgende Satz besagt, daß dies für Erzeugende einer $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe nicht der Fall ist.

1.4. Satz. *Sei A der infinitesimale Erzeugende einer $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ und $\mathcal{D}(A^n)$ sei der Definitionsbereich von A^n. Dann liegt $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ dicht in X.*

Beweis siehe [PA] S. 6, Theorem 2.7. Insbesondere ist $\mathcal{D}(A^n) = \overline{X}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir benötigen diesen Satz in Abschnitt 7, um die Abgeschlossenheit einer gebrochenen Potenz eines Operators zu zeigen: $\mathcal{D}(A^\alpha) = \overline{X}$, $\alpha > 0$.

1.3 Das Hille–Yosida Theorem

In der Einleitung haben wir die Möglichkeit angesprochen, die Exponentialfunktion eines unbeschränkten Operators mit Hilfe seiner Resolvente zu definieren:

$$e^{tA} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} (id - \frac{t}{n}A)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t} R(\frac{n}{t}; A)\right]^n. \tag{1.12}$$

Es muß also gezeigt werden, daß der Grenzwert existiert. Dies ist zum Beispiel der Fall, falls die Resolvente folgendermaßen beschränkt ist:

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Der Satz von Hille und Yosida bestätigt diese Abschätzung zunächst für kontrahierende Halbgruppen, eine Untergruppe der $\mathcal{C}_0$–Halbgruppen. Im nächsten Abschnitt wird dann diese Aussage auf alle $\mathcal{C}_0$–Halbgruppen ausgedehnt. Nach Satz 1.1 ist eine $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe beschränkt: $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Für $\omega = 0$ ist $T(t)$ gleichmäßig beschränkt und für $M = 1$ liegt $T(t)$ innerhalb oder auf dem Rand der Einheitssphäre in X. Solche Halbgruppen heißen kontrahierend.

1.4. Definition (kontrahierende $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe). Eine $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $K(t)$ heißt kontrahierende $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe, wenn

$$\|K(t)\| \leq 1.$$

Der Satz von Hille–Yosida ist von grundlegender Bedeutung für die Halbgruppentheorie und wird im folgenden häufig benutzt werden. Die Exponentialformel (1.12) ist nur eine der möglichen Folgerungen.

1.5. Satz (Hille–Yosida). *Ein linearer Operator $A: \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ist genau dann der infinitesimale Erzeugende einer kontrahierenden $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $\{K(t)\}_{t\geq 0}$, wenn gilt*

1. *A ist abgeschlossen und $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$;*
2. *die Resolventenmenge $\rho(A) \supset \mathbb{R}^+$ von A beinhaltet die positiven reelen Zahlen und für jedes $\lambda > 0$ ist*

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Beweis siehe Anhang A.2.
Der Beweis der Notwendigkeit zeigt, daß die Resolvente von A gleich der Laplace–Transformierten der von ihr erzeugten Halbgruppe $T(t)$ ist:

1.2. Korollar (Laplace–Transformation). *Sei A der infinitesimale Erzeugende einer kontrahierenden $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $\{K(t)\}_{t\geq 0}$. Dann ist die Resolvente von A gleich der Laplace–Transformierten von $T(t)$:*

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(\lambda;\, A)x = \mathcal{L}T(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} K(t)x\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA} x\, dt \end{aligned}$$

für $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Zur Erinnerung: Die Laplace–Transformierte einer Funktion $f(t)$ wird gegeben durch

$$\mathcal{L}\, f(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

und es gilt $\mathcal{L}\, e^{at} = \frac{1}{s-a}$ für $s > a$
Damit läßt sich nun den Satz von Hille und Yosida auf die ganze rechte Halbebene ausdehnen.

1.3. Korollar. *Sei A der infinitesimale Erzeugende einer Kontraktionshalbgruppe $\{K(t)\}_{t\geq 0}$. Dann liegt die ganze rechte Halbebene in der Resolventenmenge , $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}\lambda > 0\}$, und es gilt*

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Beweis. Nach Korollar 1.2 ist $\mathrm{R}(\lambda;\, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} K(t)x\, dt$ für $\operatorname{Re}\lambda > 0$ wohldefiniert. Daraus folgt $\rho(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}\lambda > 0\}$. Der zweite Teil der Behauptung ist klar. □

Korollar 1.3 läßt sich nun ohne Schwierigkeiten auf alle $\mathcal{C}_0$–Halbgruppen $T(t)$, die durch $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ beschränkt sind, verallgemeinern. Sei $T(t) = e^{tA}$ eine solche Halbgruppe. Dann ist $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$ eine kontrahierende $\mathcal{C}_0$ –Halbgruppe, die von $A - \omega I$ erzeugt wird. Sei umgekehrt A der infinitesimale Erzeugende einer Kontraktionshalbgruppe $S(t)$, dann ist $A - \omega I$ der infinitesimale Erzeugende einer $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$. Damit erhält man die folgende Aussage.

1.4. Korollar. *Ein linearer Operator $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ist genau dann der infinitesimale Erzeugende einer $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ mit $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, wenn gilt*

1. *A ist abgeschlossen und $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$;*
2. *$\rho(A) \supset \{\lambda | \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$ und für ein solches $\lambda > 0$ ist*

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

Der nächste Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Hille–Yosida für beliebige $\mathcal{C}_0$–Halbgruppen. Der Beweis für diesen allgemeinen Fall führt hier jedoch zu weit.

Das Hille–Yosida Theorem für $\mathcal{C}_0$–Halbgruppen

1.6. Satz (Hille–Yosida für $\mathcal{C}_0$–Halbgruppen). *Ein linearer Operator $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ist genau dann der infinitesimale Erzeugende einer $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, wenn folgende zwei Aussagen gelten*

1. *A ist abgeschlossen und $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$;*
2. *$\rho(A) \supset \{\lambda | \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$ und für jedes solche λ ist*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Beweis siehe [PA] S. 17 ff..

Die Exponentialformel

Mit Satz 1.6 können wir jetzt auch eine Halbgruppe $T(t)$ durch die Exponentialfunktion darstellen.

1.5. Korollar (Exponentialformel). *Sei $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ eine $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe auf X und A dessen infinitesimaler Erzeugender. Dann gilt folgende Darstellung*

$$\begin{aligned} T(t)x &= \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t}R(\frac{n}{t};A)\right]^{n} x \\ &= e^{tA}x. \end{aligned}$$

Beweis siehe [PA] S. 33 ff.
Mit dem dargestellten Material läßt sich das homogene Cauchy–Problem lösen.

1.4 Das homogene Cauchy–Problem

Die Behandlung der Cauchy–Probleme mit Hilfe der Halbgruppentheorie wird in [DH] übersichtlicher dargestellt als in [PA]. Deshalb beziehen wir uns in diesen Abschnitten auch auf [DH]. Wir formulieren zunächst das **abstrakte homogene Cauchy–Problem:** Sei X ein Banachraum und $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator. Finde eine Lösung $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}u(t) &= Au(t), & t &> 0, \\ u(0) &= u_0, & u_0 &\in X. \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.5. Definition (klassische Lösung). Eine Funktion $u : [0,T) \to X$ heißt klassische Lösung von (1.13), wenn $u \in \mathcal{C}([0,T[;X) \cap \mathcal{C}^1(]0,T[;X)$ und $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ für $0 < t < T$.

Mit den Ergebnissen der Halbgruppentheorie finden wir nun schnell eine klassische Lösung von (1.13).

1.7. Satz (Existenz– und Eindeutigkeit). *Sei A der infinitesimale Erzeugende einer $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $T(t)$, dann besitzt (1.13) genau eine klassische Lösung: $u(t) = T(t)u_0 = e^{tA}u_0$ für $u_0 \in \mathcal{D}(A)$.*

Beweis. Nach Satz 1.2 ist $u(t) = T(t)x$ stetig für jedes $x \in X$ und nach Satz 1.3 liegt $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ für $x \in \mathcal{D}(A)$ und ist differenzierbar. Es gilt $\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$ für $x \in \mathcal{D}(A)$. Es muß somit nur noch die Eindeutigkeit gezeigt werden: Sei $y(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} T(t-s)v(s)$ für $0 \le s \le t < T$, wobei v eine beliebige Lösung von (1.13) ist. Dann ist $s \to y(t,s)$ stetig auf $0 \le s \le t < T$ und stetig differenzierbar auf $0 < s < t < T$ mit

$$\partial_s y(t,s) = T(t-s)\frac{d}{ds}v(s) - AT(t-s)v(s) = 0.$$

$s \to y(t,s)$ ist also konstant, insbesondere ist $y(t,0) \equiv y(t,t)$. Daraus folgt die Behauptung:

$$T(t)u_0 = v(t).$$

□

Als ein mögliches Beispiel betrachten wir noch einmal die lineare Wärmegleichung aus (6.25). Das abstrakte Anfangswertproblem über dem Banachraum $X = L^2(0,1)$ wird gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= A\,v(t), \qquad v(t) \in \mathcal{D}(A) \\ v(0) &= v_0, \end{aligned} \tag{1.14}$$

wobei $A = \frac{d^2}{dx^2}$ der zweite Ableitungsoperator mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) = H_0^2(0,1)$ ist. Nach Satz 1.7 besitzt (1.14) die eindeutige Lösung $v(t) = e^{tA}v_0$. Da $v(t) \in H_0^2(0,1)$, wird die Lösung der linearen Wärmegleichung gegeben durch

$$v(t,x) = e^{t\frac{d^2}{dx^2}}v_0(x) \qquad \text{für } x \in (0,1). \tag{1.15}$$

Sei A der infinitesimale Erzeugende einer $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $T(t)$, dann hat das homogene Anfangswertproblem im allgemeinen für $u_0 \notin \mathcal{D}(A)$ keine klassische Lösung. $t \to T(t)u_0$ kann dann als eine verallgemeinerte Lösung von (1.13) betrachtet werden.

1.6. Definition (nicht klassische Lösung – mild solution).
$u(t) \in \mathcal{C}([0,\infty[;X)$ ist eine verallgemeinerte Lösung von (1.13), wenn es eine Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{D}(A)$ gibt, so daß $x_n \to u(0)$ und $T(t)x_n \to u(t)$ gleichmäßig für $n \to \infty$ auf beschränkten Intervallen gilt.

Ist A der infinitesimale Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $T(t)$, dann liegt nach Korollar 1.1 der Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ dicht in X, und es gibt eine eindeutige, nicht klassische Lösung $u(t) = T(t)x$ für alle $x \in X$.

1.5 Analytische Halbgruppen

Der letzete Abschnitt hat gezeigt, daß die Differenzierbarkeit der Halbgruppe eine wichtige Voraussetzung zur Lösung des abstrakten homogenen Cauchy–Problems ist. Das reicht für das inhomogene Problem jedoch nicht aus. Hier sollte die Halbgruppe holomorph sein. Dazu erweitern wir den Parameterbereich der Halbgruppe auf Gebiete in der komplexen Ebene, welche die reele positive Achse umfaßt. Solche Halbgruppen heißen *analytisch*. In diesem Abschnitt geben wir Kriterien dafür an, wann eine $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe zu einer analytischen fortgesetzt werden kann. Die Resultate dieses Abschnitts werden wiederum aus [PA] entnommen.

1.7. Definition (analytische Halbgruppe). Sei $\{T(z)\}_{z\in\Lambda} \in \mathcal{CL}(X)$ mit $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < arg\, z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$. Die Schar $\{T(z)\}_{z\in\Lambda}$ heißt *analytische Halbgruppe*, wenn folgende Aussagen gelten

1. die Abbildung $z \to T(z)$ ist analytisch in Λ;
2. $T(0) = I$ und $\lim_{z\to 0} T(z)x = x$ für $x \in X$;
3. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ für $z_1,\ z_2 \in \Lambda$.

Die Einschränkung einer analytischen Halbgruppe auf die reele Achse ist offensichtlich wieder eine $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe. Im Folgenden untersuchen wir die Möglichkeit, eine $\mathcal{C}_0$– Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ zu einer analytischen Halbgruppe fortzusetzen. Da sich durch die Multiplikation von $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ mit $e^{-\omega t}$ an der Fortsetzungsmöglichkeit nichts ändert, beschränken wir uns o.B.d.A. auf gleichmäßig beschränkte $\mathcal{C}_0$–Halbgruppen. Nach Satz 1.1 ist jede $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $T(t)$ beschränkt durch $\|T(t)\| \leq Me^{t\omega}$, wobei $M \geq 1$ und $\omega \geq 0$. Für $\omega = 0$ ist $T(t)$ gleichmäßig beschränkt. Ist $\omega > 0$, dann ist $e^{-t\omega}T(t)$ gleichmäßig beschränkt. Außerdem nehmen wir an, daß $0 \in \rho(A)$ in der Resolventenmenge von A liegt, wobei A der infinitesimale Erzeugende von $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ist. Die meisten Beweise greifen auf diese zusätzliche Voraussetzung nicht zurück, einige aber vereinfachen sich dadurch. Man kann dies stets dadurch erreichen, daß man $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ mit $e^{-\delta t}$ für $\delta > 0$ multipliziert, was gleichbedeutend mit einer Verschiebung der Eigenwerte von A um δ ist: $A - \delta id$.
Der folgende Satz ist die Kernaussage dieses Abschnitts. Er gibt Bedingungen an, unter denen sich eine $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe zu einer analytischen Halbgruppe fortsetzen läßt.

1.8. Satz. *Seien $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{CL}(X)$ eine gleichmäßig beschränkte $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe und A dessen infinitesimaler Erzeuger, außerdem sei $0 \in \rho(A)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ kann fortgesetzt werden zu einer analytischen Halbgruppe in einen Winkel $\Lambda_\delta = \{\ z \in \mathbb{C} : |\ |arg\, z| < \delta\ \}$ und $\|T(z)\|$ ist gleichmäßig beschränkt in jedem abgeschlossenen Teilgebiet $\overline{\Lambda}_{\delta'}$, $\delta' < \delta$ von Λ_δ.*

2. *Es gibt eine Konstante C, so daß für jedes $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$ gilt*

$$\|R(\sigma + i\tau; A)\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

3. *Es gibt Konstanten $0 < \delta < \pi/2$ und $M > 0$, sodaß gilt*

$$\rho(A) \supset \sum = \left\{ \lambda : |arg\, \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\}$$

   und

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \qquad \textit{für } \lambda \in \sum, \, \lambda \neq 0.$$

4. *$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ist differenzierbar und es gibt eine Konstantev C, so daß*

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t} \qquad \textit{für } t > 0.$$

Beweis siehe Anhang A.3.
In der Praxis wird meistens die 3. Bedingung überprüft, um zu entscheiden, ob eine $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe zu einer analytischen Halbgruppe fortgesetzt werden kann. Da wir aber in der Regel an $-A$ und nicht an A selbst interessiert sind, bilden wir das Komplement $\Sigma^+ \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}/\Sigma$ von Σ in $\mathbb{C}$.

1.8. Definition (sektoraler Operator). $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ sei ein dicht definierter, abgeschlossener, linearer Operator mit

$$\rho(A) \supset \sum\nolimits^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \omega \leq |arg\, \lambda| \leq \pi\} \cup V,$$

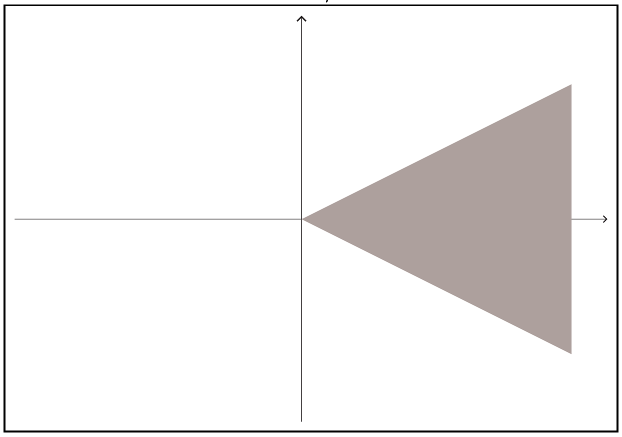
wobei V eine Umgebung von 0 ist, $\omega \in (0, \pi/2]$ und

$$\|R(\lambda :\ A)\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}$$

für $\lambda \in \sum^+$.

A sei sektoraler Operator, dann erzeugt $-A$ für $\omega = \pi/2$ nach Satz 1.6 eine $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe und für $\omega < \pi/2$ läßt sich die von $-A$ erzeugte Halbgruppe nach Satz 1.8 zu einer analytische Halbgruppe fortsetzen.

Teilmenge der Resolventenmenge von $-A$:
$\Sigma = \mathbb{C}/\Sigma^+$



Wir geben noch drei Beispiele für sektorale Operatoren an.

1.1. Beispiel.

1. Ein stetig linearer Operator ist sektoral. Sei $A \in \mathcal{CL}(X)$ wobei X ein Banachraum ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist A abgeschlossen. Außerdem gilt: $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A)$. Diese Behauptung sowie die Resolventenabschätzung folgen aus dem Satz über die Neumannsche Reihe angewendet auf $A - \lambda = -\lambda\,(id - K)$ mit $K \stackrel{\text{def}}{=} A/\lambda$ und $\|K\| < 1$.

2. Ein nach unten beschränkter, dicht definierter, symmetrischer oder selbstadjungierter Operator ist sektoral. Sei A ein nach unten beschränkter, d. h. $\langle Ax, x\rangle \geq \|x\|^2$, dicht definierter, symmetrischer Operator. Dann besteht das Spektrum $\sigma(A)$ aus einer abgeschlossenen Teilmenge der positiven reellen Achse. A ist also ein sektoraler Operator. Außerdem besitzt A eine eindeutige selbstadjungierte Fortsetzung F, die sog. Friedrichssche Fortsetzung, mit der gleichen unteren Schranke.

3. $A = -\triangle$ ist sektoral, da er die Voraussetzungen von 2. erfüllt. Der negative Laplace Operaror erzeugt also eine analytische Halbgruppe.

Mit Satz 1.7 ist jetzt auch das inhomogene Cauchy–Problem lösbar.

1.6 Das inhomogene Cauchy–Problem

Das **abstrakte inhomogene Cauchy–Problem** lautet folgendermaßen: Sei X ein Banachraum und $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator. Finde eine Lösung

$u(t) \in \mathcal{D}(A)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}u(t) + Au(t) &= f(t), \qquad & t &> 0, \\ u(0) &= u_0, \qquad & u_0 &\in X, \end{aligned} \tag{1.16}$$

wobei $f : [0,T[\to X$. Wir übertragen den Begriff der klassischen Lösung des homogenen Problems, siehe dazu Definition 1.5, und formulieren dazu analog die folgende Definition.

1.9. Definition (klassische Lösung). Eine Funktion $u : [0,T) \to X$ heißt klassische Lösung von (1.16), wenn $u \in \mathcal{C}([0,T[;X) \cap \mathcal{C}^1(]0,T[;X)$ und $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ für $0 < t < T$.

Ist $u(t)$ eine klassische Lösung von (1.16), dann ist die X–wertige Funktion $g(s) = T(t-s)u(s)$ mit $T(t) = e^{-tA}$ für $0 < s < t$ differenzierbar und nach Satz 1.3 gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}g(s) &= AT(t-s)u(s) + T(t-s)\frac{d}{ds}u(s) \\ &= AT(t-s)u(s) - T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Für $f \in L^1([0,T];X)$ ist $T(t-s)f(s)$ integrierbar und

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

ist eine Lösung von (1.16). Die Umkehrung dieses Schlusses gilt jedoch nicht. Für $u_0 \notin \mathcal{D}(A)$ besitzt (1.16) keine klassische Lösung. Der Lösungsbegriff kann wie im homogenen Fall verallgemeinert werden.

1.10. Definition (nicht klassische Lösung – mild solution). Seien A der infinitesimale Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ und $f \in L^1([0,T];X)$. Die durch

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds, \qquad u_0 \in X$$

gegebene Funktion $u \in \mathcal{C}([0,T];X)$ heißt *nicht klassische Lösung (mild solution)* des Anfangswertproblems (1.16). Ist $u_0 \notin \mathcal{D}(A)$, so approximieren wir $T(t)u_0$ genau wie im homogenen Fall, siehe Definition 1.6.

Offensichtlich besitzt das inhomogene Anfangswertproblem für $f \in L^1([0,T];X)$ eine eindeutige, nicht klassische Lösung. Der folgende Satz gibt an, unter welchen Bedingungen man eine klassische Lösung erhält.

1.9. Satz (Existenz- und Eindeutigkeit). *Sei A ein sektoraler Operator in X, $f : (0,T) \to X$ sei lokal Hölder–stetig und $f \in L^1([0,\rho];X)$ für ein $\rho > 0$. Dann existiert genau eine klassische Lösung $u(t)$ des inhomogenen Cauchy–Problems* (1.16) *mit folgender Darstellung*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds, \qquad x \in X,\ 0 \le t \le T.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten:

1. Wir zeigen, daß
$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$
eine klassische Lösung der Differentialgleichung (1.16) ist mit $v(t) \to 0$ für $t \to 0^+$.

2. Mittels des Superpositionsprinzips schließen wir dann, daß auch
$$\begin{aligned} u(t) &= T(t)u_0 + v(t) \\ &= T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \end{aligned}$$
eine klassische Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems (1.16) ist.

□

Wir müßen also die erste Aussage zeigen. Dazu formulieren wir diese als Lemma.

1.1. Lemma. *Sei A ein sektoraler Operator, $f : (0,T) \to X$ lokal Hölder–stetig mit $f \in L^1([0,\rho];X)$ für ein $\rho > 0$. Dann ist*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$

eine klassische Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1.16) *und es gilt $v(t) \to 0$ für $t \to 0^+$.*

Beweis siehe Anhang A.4.

Zum Schluß wollen wir das **semilineare Problem**

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}u(t) + Au(t) &= f(t,u(t)), \qquad t > 0, \\ u(t_0) &= u_0, \end{aligned} \tag{1.17}$$

auf das inhomogene Problem zurückführen. Dazu muß gezeigt werden, daß die Funktion $t \to f(t,u(t))$ Hölder–stetig ist. Wir suchen also einen Banachraum $(X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, in dem diese Bedingung erfüllt ist. Der folgende Abschnitt ist wieder [PA] entnommen.

1.7 Gebrochene Potenzen von Operatoren

In diesem Abschnitt werden wir mit Hilfe von gebrochenen Potenzen von Operatoren spezielle Banachräume $X^\alpha = \mathcal{D}(A^\alpha)$ mit der Norm $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$ definieren. Bezüglich dieser Norm ist die Abbildung $t \to f(t, u(t))$ Hölder–stetig. Somit liefert Satz (1.9) die Lösung des semilinearen Anfangswertproblems bezüglich der X^α Räume.

1.11. Definition (gebrochene Potenzen eines Operators). Sei A ein sektoraler Operator mit $\omega < \pi/2$, d. h. -A erzeugt eine analytische Halbgruppe $T(t) = e^{-At}$. Dann definieren wir für beliebige $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t)\, dt,$$

wobei $\Gamma(\alpha)$ die Gamma Funktion ist.

$A^{-\alpha}$ ist beschränkt, da das Integral für $\alpha > 0$ gleichmäßig in der Operatortopologie konvergiert: $\|A^{-\alpha}x\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} C e^{-\omega t}\, dt\, \|x\| = C_\alpha \|x\|$. Im Folgenden werden wir zeigen, daß $A^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (A^{-\alpha})^{-1}$ ein abgeschlossener, dicht definierter, invertierbarer linearer Operator ist. Das ermöglicht es uns, die Banachräume $X^\alpha = \mathcal{D}(A^\alpha)$ mit der Norm $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$ zu definieren, die wir als Lösungsräume für das semilineare Cauchy–Problem verwenden wollen.

1.2. Lemma. *Sei A ein sektoraler Operator in X und $\beta > 0$. Dann ist $A^{-\beta}$ ein Isomorphismus auf X.*

Beweis. Nach Voraussetzung liegt 0 in $\rho(A)$, d. h. A^{-n} ist für $n \geq 1$ bijektiv. Sei nun $A^{-\alpha}x = 0$. Dann ist auch $A^{-n}x = A^{-n+\alpha}A^{-\alpha}x = 0$ für $n \geq \alpha$. Daraus folgt $x = 0$, somit ist auch $A^{-\alpha}$ bijektiv.

□

Wir können also A^α definieren als die Inverse von $A^{-\alpha}$.

1.12. Definition. Sei A ein sektoraler Operator. Dann definieren wir für $\beta > 0$

$$A^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \left(A^{-\beta}\right)^{-1}.$$

Für $\beta = 0$ sei $A^\beta = id$.

Der nächste Satz zeigt, daß A^α ein abgeschlossener, dicht definierter Operator mit $\mathcal{D}(A^\alpha) = \mathcal{R}(A^{-\alpha})$ ist. Vorher benötigen wir doch noch folgendes Lemma.

1.3. Lemma. *Für α, $\beta \geq 0$ ist*

$$A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1}s^{\beta-1}T(t)T(s)\,dt\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \int_t^\infty (u-t)^{\beta-1}T(u)\,du\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(\int_0^u t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}\,dt\right) T(u)\,du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\,dv \cdot \int_t^\infty u^{\alpha+\beta-1}T(u)\,du \\
&\stackrel{*}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}T(u)\,du = A^{-(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

Die Gleichung $(*)$ ergibt sich aus

$$\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}\,dz = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

□

1.10. Satz. *Sei A ein sektoraler Operator. Dann gelten folgende Aussagen*

1. *A^α ist ein abgeschlossener Operator, dessen Definitionsbereich gleich dem Bild von $A^{-\alpha}$ ist: $\mathcal{D}(A^\alpha) = \mathcal{R}(A^{-\alpha})$.*
2. *Aus $\alpha \geq \beta > 0$ folgt $\mathcal{D}(A^\alpha) \subset \mathcal{D}\left(A^\beta\right)$.*
3. *$\overline{\mathcal{D}(A^\alpha)} = X$ für alle $\alpha \geq 0$.*

Beweis.

1. Da $A^{-\alpha}$ beschränkt und damit stetig ist, folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen die Abgeschlossenheit von A^α. Da A^α für $\alpha > 0$ invertierbar ist, gilt $\mathcal{D}(A^\alpha) = \mathcal{R}(A^{-\alpha})$. Die Abgeschlossenheit kann man auch folgendermaßen sehen: Für $\alpha > 0$ ist A^α invertierbar, also liegt $0 \in \rho(A^\alpha)$. Also ist $A^{-\alpha}$ stetig. Ist die Inverse eines linearen Operators jedoch stetig, so ist dieser abgeschlossen.
2. Nach Lemma 1.3 ist $A^{-\alpha} = A^{-\beta} \cdot A^{-(\alpha-\beta)}$, also ist $\mathcal{R}(A^{-\alpha}) \subset \mathcal{R}\left(A^{-\beta}\right)$ und mit 1. folgt die Behauptung.

3. Nach Satz 1.4 ist $\overline{\mathcal{D}(A^n)} = X$ für $n \in \mathbb{N}$ und nach 2. ist für $\alpha \leq n$ $\mathcal{D}(A^\alpha) \supset \mathcal{D}(A^n)$. Daraus folgt die Behauptung.

□

Sei A ein sektoraler Operator. Fassen wir die obigen Aussagen zusammen, dann ist A^α ein abgeschlossener, dicht definierter, invertierbarer linearer Operator. Aus der Abgeschlossenheit von A^α folgt, daß $\mathcal{D}(A^\alpha)$ ausgestattet mit der Graphennorm $|||x||| = \|x\| + \|A^\alpha x\|$ ein Banachraum ist. Da A^α invertierbar und $A^{-\alpha}$ stetig ist, ist die Norm $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$ äquivalent zur Graphennorm. Sei $y = A^{-\alpha}x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$, dann gilt folgende Abschätzung: $\|y\|_\alpha \leq |||y||| = \|y\| + \|A^\alpha y\| = \|A^{-\alpha}x\| + \|x\| \leq C\|x\| + \|x\| \leq (C+1)\|y\|_\alpha$. Also ist $\mathcal{D}(A^\alpha)$ ausgestattet mit der α–Norm $\|\cdot\|_\alpha$ ein Banachraum. Wir sind nun in der Lage, die Lösungsräume für das semilineare Cauchy–Problem anzugeben.

1.13. Definition. Sei A ein sektoraler Operator. Für $\alpha \geq 0$ definieren wir die Banachräume

$$X^\alpha = \mathcal{D}(A^\alpha) \quad \text{mit der Norm } \|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|.$$

Der folgende Satz enthält die wesentlichen Aussagen über gebrochene Potenzen von Operatoren, die wir in dem Existenz– und Eindeutigkeitsbeweis des semilinearen Anfangswertproblems benutzen werden.

1.11. Satz. *Sei A ein sektoraler Operator mit $\omega < \pi/2$ und $T(t)$ die von $-A$ erzeugte analytische Halbgruppe. Dann gelten für $\beta \geq 0$ folgende Aussagen:*

1. $T(t) : X \to \mathcal{D}(A^\alpha)$ *für* $t > 0$ *und* $\alpha \geq 0$.
2. $A^\beta T(t)x = T(t)A^\beta x$ *für* $x \in \mathcal{D}\left(A^\beta\right)$, $t > 0$.
3. $\left\|A^\beta T(t)\right\| \leq C_\beta t^{-\beta} e^{-\delta t}$, $t > 0$.
4. $\|(T(t) - id)\,x\| \leq C_\beta t^\beta \left\|A^\beta x\right\|$ *für* $0 < \beta \leq 1$, $x \in \mathcal{D}\left(A^\beta\right)$.

Beweis.

1. Da $T(t)$ analytisch ist, gilt: $T(t) : X \to \cap_{n=0}^\infty \mathcal{D}(A^n) \subset \mathcal{D}(A^\alpha)$ für $\alpha \geq 0$.
2. Sei $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$. Dann gibt es ein $y \in X$, so daß $x = A^{-\alpha}y$ und

$$\begin{aligned} T(t)x &= T(t)A^{-\alpha}y = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s)T(t)y\,ds \\ &= A^{-\alpha}T(t)y = A^{-\alpha}T(t)A^\alpha x. \end{aligned}$$

   Daraus folgt die Behauptung.

3. Nach Voraussetzung erzeugt $-A$ eine analytische Halbgruppe. Da $0 \in \rho(A)$ gibt es eine Konstante $\delta > 0$, so daß auch $-A+\delta$ eine analytische Halbgruppe erzeugt. Zusammen mit Satz 1.8 gelten dann folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &\le Ce^{-\delta t}, \\ \|AT(t)\| &\le C_1 t^{-1} e^{-\delta t} \quad \text{und} \\ \|A^m T(t)\| &\le C_m t^{-m} e^{-\delta t} \end{aligned}$$

für $m \in \mathbb{N}$.
Die letzte Abschätzung erhält man durch Iteration der zweiten:

$$\begin{aligned} \|A^m T(t)\| &= \left\| \left(AT\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m \right\| \le \left\| AT\left(\frac{t}{m}\right)\right\|^m \\ &\le \left(C_1 t^{-1} e^{-\delta t/m}\right)^m = C_m t^{-m} e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\|A^\beta T(t)\right\| &= \left\|A^{\beta-n} A^n T(t)\right\| \\ &\le \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int\limits_0^\infty \tau^{n-\beta-1} \left\|A^n T(t+\tau)\right\| d\tau \\ &\le \frac{C_n}{\Gamma(n-\beta)} \int\limits_0^\infty \tau^{n-\beta-1} (t+\tau)^{-n} e^{-\delta(t+\tau)}\, d\tau \\ &\le \frac{C_n e^{-\delta t}}{\Gamma(n-\beta) t^\beta} \int\limits_0^\infty \xi^{n-\beta-1}(1+\xi)^{-n}\, d\xi \\ &= \frac{C_\beta}{t^\beta} e^{-\delta t} \end{aligned}$$

für $n-1 < \beta \le n$. Die letzte Abschätzung ergibt sich durch Substitution mit $\xi = \frac{\tau}{t}$.

4.

$$\begin{aligned} \|T(t)x - x\| &= \left\| \int\limits_0^t AT(\tau)x\, d\tau \right\| = \left\| \int\limits_0^t A^{1-\beta} T(\tau) A^\beta x\, d\tau \right\| \\ &\le C \int\limits_0^t \tau^{\beta-1} \left\|A^\beta x\right\| d\tau = C_\beta t^\beta \left\|A^\beta x\right\|. \end{aligned}$$

$\square$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die Lösung des semilinearen Anfangswertproblems geben.

1.8 Das semilineare Cauchy–Problem

Das **abstrakte semilineare Anfangswertproblem** lautet folgendermaßen: Sei X ein Banachraum und $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein sektoraler Operator. Finde eine Lösung $u(t) \in X^\alpha$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}u(t) + Au(t) &= f(t, u(t)), \qquad t > 0, \\ u(t_0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Wir wollen das semilineare auf das inhomogene Cauchy–Problem zurückführen, um dann Satz 1.9 anwenden zu können. Dazu müssen die Voraussetzungen an f so gestellt werden, daß die Funktion $t \to f(t, u(t))$ lokal Hölder–stetig ist.

Voraussetzung (F). *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^+ \times X^\alpha$. Die Funktion $f : U \to X$ erfüllt die* **Voraussetzung(F)** *genau dann, wenn sie bezüglich des ersten Arguments Hölder–stetig ist und bezüglich des zweiten Arguments Lipschitz–stetig ist, das heißt, daß es für jedes $(t, x) \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ gibt, so daß folgende Abschätzung*

$$\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \leq L\left(|t_1 - t_2|^\theta + \|x_1 - x_2\|_\alpha\right)$$

für alle $(t_i, x_i) \in V$ und $L \geq 0$, $0 < \theta \leq 1$ gilt.

Wir spalten den Beweis des Existenz– und Eindeutigkeitssatzes in zwei Teile auf. Das folgende Lemma zeigt die Existenz einer Lösung.

1.4. Lemma. *f erfülle die Voraussetzung(F) und sei lokal $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ integrierbar. $v : (0, t_1) \to X^\alpha$ sei stetig und erfülle die Integralgleichung*

$$v(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, v(s))\, ds, \tag{1.19}$$

wobei $T(t)$ die von $-A$ erzeugte analytische Halbgruppe ist. Außerdem sei $t \to f(t, v(t))$ auf $[0, t_1]$ beschränkt: $\|f(t, v(t))\| \leq N$ für $t \in [0, t_1]$. Dann ist v auch eine Lösung von (1.18).

Beweis siehe Anhang A.5.
Der nächste Satz stellt die Voraussetzungen von Lemma 1.4 her und zeigt gleichzeitig die Eindeutigkeit der Lösung.

1.12. Satz (Existenz und Eindeutigkeit). *Sei A ein sektoraler Operator mit $\omega < \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \alpha < 1$. $f : U \to X$, $U \subset \mathbb{R}^+ \times X^\alpha$ erfülle die Voraussetzung(F). Dann gibt es zu jedem $(0, u_0) \in U$ ein $t_1 = t_1(0, u_0)$, so daß (1.18) eine eindeutige Lösung u auf $(0, t_1)$ besitzt.*

Beweis siehe Anhang A.6.
Als ein mögliches Beispiel betrachten wir die **Burgers–Gleichung:**

$$\begin{aligned} u_t(t,\,x) &= \nu \cdot \triangle u(t,\,x) + u(t,\,x) \cdot u_x(t,\,x), \\ u(0,\,x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Die Halbgruppe wird gegeben durch $T(t) = e^{t\nu\cdot\triangle}$, wobei $A = \nu \cdot \triangle$ der infinitesimale Erzeugende ist. -A ist ein sektoraler Operator, da selbstadjungiert, dicht definiert und nach unten beschränkt. Die Lösung lautet also

$$u(t,\,x) = e^{t\nu\cdot\triangle}u_0(x) + \int_0^t e^{(t-\tau)\nu\cdot\triangle}u(\tau,\,x)\cdot u_x(\tau,\,x)\,d\tau.$$

Zum Abschluß des Kapitels führen wir noch ein etwas aufwendigeres Beispiel vor und zeigen, daß auch die Navier–Stokes–Gleichung in dem Rahmen der von uns vorgestellten Theorie behandelt werden kann.

1.9 Die Navier–Stokes–Gleichung

Dieser Abschnitt ist [DH] entnommen.

Die Navier–Stokes–Gleichung wird gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \triangle u - \nabla p - \big(u\cdot\nabla\big)\,u + f, && \text{auf } [t_0,\infty[\times\Omega, \\ \nabla\!\cdot\! u &\equiv div\,u = \textstyle\sum_{j=1}^3 \partial_j u_j = 0, && \text{auf } [t_0,\infty[\times\Omega, \\ u(t,x) &= 0, && \text{auf } [t_0,\infty[\times\partial\Omega, \\ u(t_0,x) &= u_0, && \text{auf } \Omega, \end{aligned} \tag{1.20}$$

wobei $u = u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$ das Geschwindigkeitsfeld ist, $p = p(t,x)$ der Druck, $u_0 = u_0(x)$ die Anfangsgeschwindigkeit und $f = f(t,x)$ eine äußere Kraft ist. Ω ist ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^3$ mit $\mathcal{C}^3$–Rand. Da weder der Druck p noch die Erhaltungsgleichung $div\,u = 0$ eine Zeitableitung besitzen, ist Satz 1.12 nicht direkt anwendbar. Deshalb zerlegen wir den Lösungsraum $L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ in die orthogonale Summe zweier Teilräume H_σ und H_π die so eingerichtet sind, daß die Projektion einer Funktion aus $L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ auf H_σ sowohl die Erhaltungsgleichung erfüllt, als auch den Druckgradienten ∇p verschwinden läßt und damit das Gleichungssystem (1.20) entkoppelt. P sei die orthogonale Projektion von $L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ auf H_σ, dann erhalten wir das **abstraktes Anfangswertproblem:**

$$\begin{aligned} \partial_t v &= Av + N(v) + Pf, \qquad v \in H_\sigma \\ v(t_0) &= v_0, \end{aligned} \tag{1.21}$$

wobei $\mu = \frac{1}{Re}$, $A = \mu P \triangle$ und $N(v) = -P\left(v \cdot \nabla\right) v$.
Eine genaue Definition der orthogonalen Unterräume ergibt sich mit $u \in \mathcal{C}^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ und $\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\Omega, \mathbb{R}\right)$ aus der Erhaltungsgleichung:

$$\int_\Omega u \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega div\, u \, \varphi \, dx = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} div\, u &= 0 \text{ auf } \Omega \\ u_n &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei u_n die Normalenableitung bezeichnet. Wir definieren nun die Unterräume:

$$H_\pi \overset{\text{def}}{=} \overline{\left\{ f = \nabla\varphi \middle| \varphi \in \mathcal{C}^1\left(\Omega, \mathbb{R}\right), < \cdot, \cdot >_{L^2\langle\Omega, \mathbb{R}^3\rangle} \right\}},$$

$$H_\sigma \overset{\text{def}}{=} \overline{\left\{ \varphi \in \mathcal{C}^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right) \middle| div\, \varphi = 0 \text{ auf } \Omega,\ \varphi_n = 0 \text{ auf } \partial\Omega, < \cdot, \cdot >_{L^2\langle\Omega, \mathbb{R}^3\rangle} \right\}}$$

als Vervollständigungen bzgl. des $\mathrm{L}^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$–Skalarproduktes. H_π besteht also aus allen vektorwertigen Funktionen, die gleich dem Gradienten einer skalaren Funktion sind. Der Druckterm ∇p der Navier–Stokes–Gleichung liegt zum Beispiel in H_π. H_σ beinhaltet bereits die Erhaltungsgleichung, so daß eine Lösung des abstrakten Problems gleichzeitig auch diese Nebenbedingung erfüllt. Es muß noch die orthogonale Zerlegung des $L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ in die beiden Teilräume nachgewiesen werden, d. h.

$$L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right) = H_\pi \oplus H_\sigma.$$

Es genügt zu zeigen, daß jedes glatte $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $u = 0$ nahe dem Rand $\partial\Omega$ die Form $u = v + \nabla\varphi$ hat, wobei $v \in H_\sigma$ und $\nabla\varphi \in H_\pi$. Wir wählen φ nun als Lösung von

$$\begin{aligned} \triangle\varphi = div\, u = 0 \qquad & \text{auf } \Omega, \\ \varphi_n = u_n = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann sind φ und $v \equiv u - \nabla\varphi$ glatt mit $div\, v = 0$ auf Ω und $v_n = 0$ auf $\partial\Omega$. Das war zu zeigen.
Wir wollen jetzt Satz 1.12 auf das abstrakte Anfangswertproblen anwenden. Dazu zeigen wir als erstes, daß -A ein sektoraler Operator ist: $\mathcal{C}_0^3\left(\Omega\right) \cap H_\sigma$ ist ein dichter Unterraum von H_σ. Seien u, $v \in \mathcal{C}_0^3\left(\Omega\right) \cap H_\sigma$, dann ist $-Au \in H_\sigma$ und

$$\begin{aligned} \left\langle -Au, v \right\rangle &= \left\langle u, -Av \right\rangle, \\ \left\langle -Au, u \right\rangle &= \left\langle -\triangle u, u \right\rangle = \left\langle \nabla u, \nabla u \right\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

-A ist also symmetrisch und halbbeschränkt auf einem dichten Teilraum von H_σ, d. h. es gibt eine Friedrichssche Fortsetzung von -A auf diesen dichten Teilraum, somit ist A ein selbstadjungierter, dicht definierter Operator in H_σ. Nach Beispiel 1.1 ist -A also sektoral und A erzeugt die analytische Halbgruppe $T(t) = e^{tA}$. Wir müßen noch die Voraussetzungen von Lemma 1.4 für $F(t, v(t)) = N(v(t)) + Pf(t)$ herstellen. Dazu reicht es, wenn $f(t, x)$ der Voraussetzung (F) erfüllt und $N(v)(t)$ beschränkt ist. In [OQ] wird gezeigt, daß $X = \mathcal{D}\left(A\right) = H_\sigma$ ist und nach [FK] ist für $v : U \subseteq \mathbb{R}^+ \times X^\alpha \longrightarrow X$ mit $3/4 < \alpha < 1$ die nichtlineare Funktion $N(v)(t)$ beschränkt: $\|N(v)\| \leq C \|v\|_\alpha^2$. Daraus ergibt sich der folgende Satz:

1.13. Satz. *Es sei* $v_0 \in X^\alpha$ *und* $Pf : U \subseteq \mathbb{R}^+ \times X^\alpha \longrightarrow X$, $3/4 < \alpha < 1$ *sei Hölder–stetig bzgl. des ersten Arguments und Lipschitz–stetig bzgl. des zweiten Arguments und* $\|Pf\|$ *ist integrierbar auf* $[0,T]$, $T \equiv T(v_0, Pf)$. *Dann besitzt das abstrakte Anfangswertproblem 1.21 eine eindeutige klassische Lösung* $t \longrightarrow v(t) \in X^\alpha$ *auf* $[0,T]$. *Diese Lösung wird gegeben durch die Integralgleichung*

$$v(t) = e^{At}v_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(\tau, v(\tau))\, d\tau.$$

wobei $A = \frac{1}{Re} P\triangle$ *und* $F(t, v(t)) = N(v(t)) + Pf(t)$.

Die Voraussetzungen an Pf werden beispielsweise erfüllt, wenn f einmal Hölder–stetig differenzierbar ist, d. h. $f \in \mathcal{C}^{1+\delta}(\mathbb{R}^+ \times X^\alpha; X)$. Es bleibt zu zeigen, daß $v(t)$ auch eine Lösung der Navier–Stokes–Gleichung ist. Dazu wird das abstrakte Problem leicht umformuliert:

$$P\left\{\partial_t v(t,\cdot) - \mu\triangle v(t,\cdot) - (v\cdot\nabla)v + f(t,\cdot)\right\} = 0.$$

Da P die orthogonale Projektion auf H_σ ist, liegt der Ausdruck in den Klammern in H_π und ist also gleich dem Gradienten einer skalaren Funktion $p(t,\cdot)$. Also erfüllt die abstrakte Lösung $v(t,x)$ auch die Navier–Stokes–Gleichung.
Für weitere Informationen wird auf [FK] verwiesen. Der folgende Satz stammt ebenfalls aus [FK], S.311, Satz 7.6, er gibt eine explizite Darstellung des Druckterms an.

1.14. Satz. *Seien* $v_0 \in \mathcal{D}(A^\alpha) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, $\|Pf(t)\| = \mathcal{O}(t^{-1+\alpha})$ *für* $\alpha > 1/4$ *und* $\|f(t)\| = \mathcal{O}(t^{-\nu})$ *für ein* $\nu < 1/4$. *Außerdem sei* $Pf \in \mathcal{C}^\delta([0,T]; H_\sigma)$ *für ein* $1/2 < \delta < 1$, $f \in \mathcal{C}^\theta([0,T]; \mathrm{L}^2(\Omega))$ *für* $0 < \theta < 1$ *und* $f(t,x)$ *sei Hölder–stetig auf* $[0,T] \times \Omega$. *Dann ist jede Lösung des abstrakten Problems auch eine klassische Lösung der Navier–Stokes–Gleichung und der Druck p wird gegeben durch folgende Integralformel:*

$$p(t,x) = \int_\Omega g(x,y) w(t,y)\, dy \qquad \text{auf } [0,T] \times \Omega,$$

wobei $w = -u_t - (u\cdot\nabla)u + f$ *und g die Druckkomponente der Greenschen Funktion der stationären Stokes–Gleichung ist. Außerdem ist der Druck Hölder–stetig in* $[0,T] \times \Omega$.

Zum Schluß zeigen wir noch, daß man die Lösung des inhomogenen bzw. semilinearen Cauchy–Problems, ähnlich den gewöhnlichen Differentialgleichungen, als Grenzwert einer Picard–Iteration erhält.

1.10 Picard–Iteration

Der Satz von Picard–Lindelöf aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen besagt, daß das **Anfangswertproblem**

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x,\, y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1.22}$$

genau eine Lösung hat, wenn f eine stetige und bezüglich des zweiten Arguments Lipschitz–stetige Funktion ist. Die Lösung kann für einen beliebigen Startwert $u_0 \in B_\epsilon(y_0)$ aus einer Umgebung von y_0 iterativ berechnet werden durch:

$$u_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_n(t))\, dt \longrightarrow y. \tag{1.23}$$

Für genauere Informationen siehe [Heu91], S.138. Der folgende Satz zeigt, daß die Lösung des **semilinearen Anfangswertproblems** (1.18) genauso berechnet werden kann. Zunächst erinnern wir jedoch an die Lösungsvoraussetzung.

Voraussetzung (F). *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^+ \times X^\alpha$. Die Funktion $f : U \to X$ erfüllt die* **Voraussetzung(F)** *genau dann, wenn sie bezüglich des ersten Arguments Hölder–stetig ist und bezüglich des zweiten Arguments Lipschitz–stetig ist, das heißt, daß es für jedes $(t,\, x) \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ gibt, so daß folgende Abschätzung*

$$\|f(t_1,\, x_1),\, f(t_2,\, x_2)\| \le L \left(|t_1 - t_2|^\theta + \|x_1 - x_2\|_\alpha \right)$$

für alle $(t_i,\, x_i) \in V$ und $L \ge 0$, $0 < \theta \le 1$ gilt.

1.1. Satz. *A sei ein sektoraler Operator mit $\omega < \frac{\pi}{2}$ und $0 \le \alpha < 1$, und $f : U \to X$, $U \subset \mathbb{R}^+ \times X^\alpha$ erfülle die Voraussetzung(F). Dann gibt es zu jedem Startwert $(0,\, u_0) \in U$ ein $T = T(0,\, u_0)$, so daß (1.18) eine eindeutige Lösung u auf $J = (0,\, T)$ besitzt. Die Lösung kann iterativ bestimmt werden. Setzt man*

$$A(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} T(t)u_0 + \int_0^t T(t-\tau) f(\tau, v(\tau))\, d\tau, \qquad t \in J,$$

so strebt $\tilde{u}_n \stackrel{\text{def}}{=} A^n \tilde{u}_0 \to u(t)$, $n \to \infty$ gleichmäßig auf J für eine beliebige Funktion $\tilde{u}_0 \in B_\rho(u_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in \mathcal{C}\left([0,T]; X^\alpha\right) \,\middle|\, \|v(t) - u_0\|_\alpha \le \rho \text{ auf } [0,T] \right\}$ und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u(t) - \tilde{u}_n\|_\alpha \le 2^{-(n-1)} \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0\|_\alpha .$$

Beweis: siehe Anhang A.7.

In Kapitel 5 geben wir einen Algorithmus an, wie man mit der Picard–Iteration die Lösung einer nichtlinearen Gleichung berechnet. Mit diesem praktischen Ausblick beenden wir dieses Kapitel.

Kapitel 2

Wavelets und Multiskalen–Analyse

2.1 Einleitung

Dieses Kapitel gibt eine kurze Einführung in die Theorie der Wavelets. Wir stellen die grundlegenden Konzepte vor und zeigen von einem abstrakten Standpunkt aus die Konstruktion von Waveleträumen mit Hilfe einer *Multiskalen–Analyse*. In Kapitel 4 werden wir den Kern eines Integraloperators nach einer zweidimensionalen Waveletbasis entwickeln und auf diese Weise die Standard– und die Nicht–Standard–Form eines Operators herleiten.
In diesem Abschnitt geben wir einen kurzen Überblick über die Geschichte der Wavelets an, um diese in einen allgemeinen mathematischen Rahmen einzubetten. Im nächsten Abschnitt 2.2 leiten wir die Definition der Wavelets mit Hilfe der Fourier–Transformation her. Abschnitt 2.3 beschäftigt sich mit der *Multiskalen–Analyse* bzw. *Multi–Resolution–Analysis (MRA)*, welche die Voraussetzung für eine systematische Konstruktion von Waveleträumen ist. Im wesentlichen handelt es sich dabei um eine Unterraumfiltrierung des $L^2(\mathbb{R})$, deren Vereinigung in diesem dicht liegt. Die Waveleträume werden dann als orthogonale Komplemente der einzelnen Unterräume konstruiert. Die Abschnitte 2.4 und 2.5 zeigen die Herleitung univariater und multivariater Waveleträume unter Ausnutzung einer zugrundeliegenden MRA. Die letzten beiden Abschnitte beschäftigen sich mit der Analyse bzw. der Synthese von Funktionen und der Gewinnung einer Startapproximation.

Anmerkungen zur Geschichte

Die mathematischen Grundlagen der Theorie reichen bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts zurück. 1807 stellt Joseph Fourier seine Theorie der Frequenzanalyse vor, die das Fundament einer Entwicklung legte, aus der heraus sich die moderne *Wavelettheorie* entwickelt hat. Wie in der *Fourieranalysis* geht es auch dort um die Analyse hochfrequenter Singnale und um die Entwicklung *geeigneter* Orthonormalbasen (ONB) von Funktionenräumen. Im 19. Jahrhundert wurde der Konvergenzbegriff

der Fourierreihen weiterentwickelt und vertieft. Hier ist vor allem K. Weierstraß zu nennen, der 1885 seinen berühmten Approximationssatz bewies. E.T. Whittaker verwendet zum ersten Mal den Begriff der *kardinalen Reihen*. Insbesondere beweist er den später nach Shannon benannten Abtastsatz und stellt die Rolle der Sinc–Funktionen herraus. Whittaker inspirierte I.R. Schoenberg zu seiner Pionierarbeit auf dem Gebiet der *Splinetheorie*, die später zur Theorie der *translationsinvarianten Räume* führte. Die Idee besteht darin, eine ONB aus Translaten $\varphi(x-b)$ einer einzigen Funktion $\varphi(x)$ zu erzeugen. 1909 verwendete A.Haar in einem Anhang zu seiner Dissertation [Haa10] zum ersten Mal das Prinzip der Skalierung zur Konstruktion eines Orthonormalsystems. Dazu wird neben der Translation die *Dilatation* als neuer Parameter a eingeführt: $\varphi(a(x-b))$, so daß Basisfunktionen auf verschiedenen Skalen erzeugt werden. Waveletbasen $a^{n/2}\psi(a^n x - b)$ werden durch Translation und Dilatation aus einem *Mutterwavelet* $\psi(x)$ erzeugt. Unter dem Eindruck dieser Arbeit veränderte sich der Blickwinkel von der Frequenzanalyse hin zur *Skalenanalyse*. Eine weitere wichtige Eigenschaft des Haar–Wavelets ist sein *kompakter Träger*. Die nichtstetige Differenzierbarkeit des Haar–Wavelets schränkt seine Anwendbarkeit jedoch erheblich ein. In den dreißiger Jahren wurde das Konzept der *verschiedenskaligen Basisfunktionen* von mehreren Gruppen unabhängig von einander wieder aufgegriffen. Der Physiker Paul Levy benutzte solche Basen zur Analyse kleiner, komplizierter Details der brownschen Bewegung und die Mathematiker Littlewood, Paley und Stein untersuchten damit die Energie von Funktionen. Zwischen 1960 und 1980 arbeiteten G. Weiss und R. R. Coifman an der Darstellung der einfachsten Elemente eines Funktionenraumes, den sogenannten *Atomen*, um aus ihnen alle Elemente des Raumes zu konstruieren. 1980 definierten der Physiker Grossman und der Ingenieur Morlet Wavelts im Rahmen der Quantenphysik. Im Jahre 1985 trieb S. Mallat die Untersuchung der Wavelets mit seiner Arbeit über digitale Signalverarbeitung voran und 1989 veröffentlichte er eine Arbeit [Mal89], in der er den Zusammenhang zwischen einer Multiskalen–Analyse und der Konstruktion orthonormaler Wavelets erläutert. Angeregt von diesen Ergebnissen konstruierte Y. Meyer die ersten nicht–trivialen Wavelets [Mey90]. Die Meyer–Wavelets sind stetig differenzierbar, haben aber keinen kompakten Träger. I. Daubechies benutzte einige Jahre später die Arbeit von Mallat, um eine Reihe orthonormaler Wavelet–Basen mit kompakten Trägern zu konstruieren [Daub88].
Eine ausführliche Betrachtung der Geschichte der Wavelets findet man in [Mey93]. Diese Kurzdarstellung ist [Sch99] entnommen. Als Übersichtsartikel seien [Kai94] und [JS94] empfohlen. Folgende Bücher gehören zur Standardliteratur über Wavelets: [Chu92a], [Chu92b], [Daub92], [Mey90], [MC90] und [Mey93]. Wer an der neueren Entwicklung der Theorie interssiert ist, sei auf das Internet verwiesen. Bücher, die sich im Schwerpunkt mit der Programmierung beschäftigen, sind selten. [Wic96] beschreibt die diskrete Wavelet–Trabsformation mit Hilfe von diskreten Filteranwendungen. Dort findet man auch Pseudo–Code für die wichtigsten Routinen. Besonders empfehlenswert ist die 2. Auflage von Numerical Recipes in C [PTVF92].
Zum Schluß wollen wir einige wichtige Aspekte der Waveletttheorie anhand der Einschränkungen der Fourieranalyse motivieren. Eine ausführliche Darstellung der eu-

klidischen Fourieranalysis findet man in [SW71]. Im folgenden achten wir vor allem auf die Schlagworte

Translation, Dilatation und Lokalisierung.

Jede 2π–periodische Funktion $f \in \mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ besitzt eine Darstellung als **Fourier–Reihe** :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{2.1}$$

wobei $c_n = \langle f, e^{inx} \rangle$ die Fourierkoeffizienten sind. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne stets das L^2–Skalarprodukt. f wird also zerlegt nach Frequenzen einer einzigen Basisfunktion

$$\omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{ix}.$$

Deshalb spricht man auch von einer Frequenzanlyse. Die Familie von ganzzahligen Dilatationen von $\omega(x)$ bildet eine Orthonormalbasis(ONB) $\{\omega_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ des $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ mit $\omega_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(nx)$. Wir würden gerne die Idee einer ONB, die durch Dilatationen aus einer *Mutterfunktion* $\omega(x)$ erzeugt wird, auf den $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ übertragen. Da jede Funktion aus $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ im Unendlichen verschwindet, kann $\omega(x)$ jedoch nicht den ganzen Raum erzeugen. Wir suchen also nach Funktionen, die genügend schnell abfallen, im günstigsten Falle sogar einen endlichen Träger besitzen. Um aus einer solchen Funktion eine Basis des $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ zu konstruieren, müssen wir diese regelmäßig über den Raum verschieben, d. h. wir brauchen die Translation als zweiten Parameter neben der Dilatation. Zusammenfassend kann man also sagen:

Wir suchen eine Orthonormalbasis $\{\omega_{d,t}(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ des $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, die durch Dilatation und Translation von einer Mutterfunktion $\omega(x)$ erzeugt wird.

Wenden wir uns nun der **kontinuierlichen Fourier–Transformation**

$$\hat{f}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{F}f)(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\omega} f(t)\, dt, \tag{2.2}$$

einer Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, zu. Um das Spektrum $\hat{f}(\omega)$ einer Funktion f in nur einer einzigen Frequenz ω zu bestimmen, müssen wir sämtliche vergangenen und sämtliche zukünftigen Informationen von f kennen. Das ist für viele Anwendungen, z.B. die Signalverarbeitung, eine große Einschränkung. Wir suchen nun nach geeigneten lokalen Basisfunktionen, die auf einem Zeitintervall leben, und bezüglich dieser die Fourier–Transformation die Spektralinformationen eines Frequenzbandes liefert. Man spricht auch von einer *lokalisierten Fourier–Transformation.* Dies kann auch folgendermaßen ausgedrückt werden.

Wir suchen eine Fouriertransformation, die sowohl im physikalischen Raum als auch im Frequenzraum gut lokalisiert ist.

2.2 Wavelets

2.2.1 Gefensterte Fourier–Transformation

Die Idee der *gefensterten Fourier–Transformation* — windowed fourier transform (WFT) besteht darin, die zu transformierende Funktion punktweise mit einer Abschneidefunktion, die von einem Translationsparameter abhängt, zu multiplizieren. Für eine solche *Fensterfunktion* $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ definieren wir

$$f_t(u) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{g(u-t)}f(u).$$

Damit erhalten wir die WFT als Fourier–Transformation von $f_t(u)$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega,t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_t(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_t(u)e^{-i\omega u}\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(u-t)}f(u)e^{-i\omega u}\,du.\end{aligned}$$

$\tilde{f}(\omega,t)$ liegt in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Nach der *Parseval Gleichung* kann $\tilde{f}(\omega,t)$ auch bezüglich des Spektrums von f dargestellt werden:

$$\tilde{f}(\omega,t) = \langle f, g_{\omega,t}\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}_{\omega,t}\rangle \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \tag{2.3}$$

wobei $g_{\omega,t}(u) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\omega u}g(u-t)$. Es stellt sich nun die Frage, wann eine Fensterfunktion gut lokalisiert ist und welche Funktionen überhaupt als Fensterfunktionen geeignet sind. Es ist klar, daß nur solche Funktionen $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ in Betracht kommen, die schnell genug abfallen.

2.1. Definition (Fensterfunktion). Eine Funktion $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ heißt *Fensterfunktion*, wenn mit

$$tg(t) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$$

auch $|t|^{1/2}g(t) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ist.

Diese Definition ist sinnvoll, wenn man die Breite eines Fensters g als die Standardabweichung Δ_g von seinem Zentrum g^* verstehen will.

2.2. Definition (Zentrum und Breite eines Fensters). $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ sei eine Fensterfunktion. Dann heißt

$$g^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\|g\|_2}\int_{-\infty}^{\infty} t\,|g(t)|^2\,dt$$

das *Zentrum* und

$$\triangle_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\|g\|_2}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(t-g^*)^2\,|g(t)|^2\,dt}$$

die *Breite* bzw. die Standardabweichung des Fensters $g(t)$.

2.1. Bemerkung. g sei eine Fensterfunktion. Dann ist $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ und $\hat{g}(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Wenden wir die Hölder–Ungleichung auf $(1+|t|)^{-1}$ und $(1+|t|)\,g(t)$ an, so folgt $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Nach dem Satz von Riemann–Lebesgue ist dann $\hat{g}(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

2.1. Beispiel.

- Die Gauss–Funktion $g_\alpha(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$, $\alpha > 0$ und deren Fourier–Transformierte $\hat{g}_\alpha(\omega) = e^{-\alpha\omega^2}$ sind Fensterfunktionen. Das Fenster hat die Breite $\triangle_{g_\alpha} = \sqrt{\alpha}$ s. [Chu92a] S. 51.

- Die kardinalen B–Splines $N_m = N_1 * \cdots * N_1$ der Ordnung $m \geq 1$ sind Fensterfunktionen, da sie kompakte Träger haben. Die N_m gehen dabei durch m–fache Faltung aus den N_1 hervor und $N_1(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ ist die Charakteristische Funktion auf $[0,1]$. Für $m > 1$ sind auch die Fourier–Transformierten $\hat{N}_m(\omega) = e^{-im\omega/2}\left(\frac{\sin\omega/2}{\omega/2}\right)^2$ Fensterfunktionen. Nehmen wir an, $\hat{N}_1$ sei eine Fensterfunktion. Dann wären N und $\hat{N}$ aus $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ und $\hat{N}$ wäre stetig. Das Anwenden der inversen Fourier–Transformation liefert die Stetigkeit von N, was ein Widerspruch ist.

Sei g nun eine Fensterfunktion. Dann liefert $\tilde{f}(\omega,t)$ Frequenzinformationen von f in dem *Zeitfenster*

$$[g^* + t - \triangle_g,\; g^* + t + \triangle_g].$$

Ist auch $\hat{g}$ eine Fensterfunktion, so besitzt $\tilde{f}(\omega,t)$ auch ein *Frequenzfenster*

$$[\hat{g}^* + \omega - \triangle_{\hat{g}},\; \hat{g}^* + \omega + \triangle_{\hat{g}}].$$

Insgesammt erhält man also die Zeit–Frequenz Informationen von f in einem Fenster

$$[g^* + t - \triangle_g,\; g^* + t + \triangle_g] \times [\hat{g}^* + \omega - \triangle_{\hat{g}},\; \hat{g}^* + \omega + \triangle_{\hat{g}}] \tag{2.4}$$

der Weite $2\triangle_g$ und einer konstanten Fläche von $4\triangle_g\triangle_{\hat{g}}$. Um eine ausreichend genaue Zeit–Frequenz–Lokalisierung zu erhalten, wird man eine Fensterfunktion wählen, deren Zeit–Frequenz–Fenster eine möglichst kleine Fläche besitzt . Dies ist jedoch nur bedingt möglich, da es ein *Unschärfeprinzip* gibt, nach dem die Fläche eines solchen Fensters nicht beliebig klein werden kann, anders formuliert: ein Signal kann nicht beliebig scharf sowohl im Zeit– als auch im Frequenzbereich lokalisiert werden.

2.1. Satz (Unschärfe–Prinzip). *Es seien sowohl* $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *als auch dessen Fourier–Transformierte* $\hat{g}$ *Fensterfunktionen. Dann ist der Flächeninhalt des Zeit–Frequenz–Fensters durch 2 nach unten beschränkt:*

$$4 \triangle_g \triangle_{\hat{g}} \geq 2.$$

Die Gleichheit wird genau dann erreicht, wenn

$$g(t) = ce^{iat} g_\alpha(t-b),$$

wobei $g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$ *eine Gauß-Funktion ist,* $c \neq 0$, $\alpha > 0$, *und* $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis s. [Chu92a] S. 56 ff. Der Nachteil der WFT ist die Starrheit des Zeit–Frequenz–Fensters, das sich weder hohen noch niedrigen Frequenzen adäquat anpassen kann. Um diesen Mangel zu beheben, werden wir im nächsten Abschnitt eine neue Klasse von Funktionen einführen, die sogenannten *Mutterwavelets*. Die wesentliche Eigenschaft, die ein Mutterwavelet ψ von einer Fensterfunktion unterscheidet, ist sein *verschwindendes 0–tes Moment*:

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx = 0. \tag{2.5}$$

Diese Eigenschaft gibt uns den zusätzlichen Freiheitsgrad, den wir brauchen, um einen Dilatationsparameter einführen zu können und damit das Zeit–Frequenz–Fenster flexibel zu gestalten. Die Transformation, die wir im Zusammenhang mit dieser Funktionenklasse untersuchen werden, heißt *kontinuierliche Wavelet–Transformation(integral wavelet transform — IWT)*.

2.2.2 Kontinuierliche Wavelet–Transformation

2.3. Definition (Mutterwavelet und kontinuierliche Wavelet–Transformation). Sei $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ und erfülle die *Zulässigkeitsbedingung:*

$$C_\psi \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|}\, d\omega < \infty. \tag{2.6}$$

Dann heißt ψ *Mutterwavelet*. Bezüglich eines Mutterwavelets ψ wird die *kontinuierlich Wavelet–Transformation(IWT)* auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ definiert durch

$$\left(W_\psi f\right)(b,a) \stackrel{\text{def}}{=} |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\, dt, \qquad f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \tag{2.7}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

ψ sei ein Mutterwavelet. Sind außerdem ψ und $\hat{\psi}$ Fensterfunktionen, so ist $\hat{\psi}$ stetig und aus der Endlichkeit von C_ψ folgt nun die Momentenbedingung, $\hat{\psi}(0) = 0$, d. h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt = 0. \tag{2.8}$$

Im Folgenden seien ψ und $\hat{\psi}$ Fensterfunktionen. Der Name *Wavelet*, kleine Welle, wird durch die Bedingung (2.8) motiviert. Da der Mittelwert von ψ verschwindet, muß ψ wenigstens einen Vorzeichenwechsel haben, d. h. aber, ψ hat Wellencharakter. Wie die WFT können wir auch die IWT als Skalarprodukt schreiben

$$(W_\psi f) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle = \langle \hat{f}, \tilde{\psi}_{b,a} \rangle, \tag{2.9}$$

mit

$$\begin{aligned} \psi_{b,a}(t) &\overset{\text{def}}{=} |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\tfrac{t-b}{a}\right), \\ \tilde{\psi}_{b,a}(t) &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{a}{2\pi} e^{-ib\omega} \hat{\psi}(a\omega). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Durch den Dilatationsparamter a erhalten wir ein flexibles *Zeit–Frequenz–Fenster*

$$[a\psi^* + b - a\triangle_\psi,\, a\psi^* + b + a\triangle_\psi] \times \left[\frac{\hat{\psi}^*}{a} - \frac{1}{a}\triangle_{\hat{\psi}},\, \frac{\hat{\psi}^*}{a} + \frac{1}{a}\triangle_{\hat{\psi}}\right] \tag{2.11}$$

s. [Chu92a] S61 f. Das Fenster verengt sich automatisch bei hohen Frequenzen und weitet sich bei niedrigen Frequenzen. Eine Funktion f läßt sich aus den Werten seiner IWT rekonstruieren.

2.2. Satz (Rekonstruktionsformel). *Sei ψ ein Mutterwavelet und W_ψ die dazugehörige IWT. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(W_\psi f)\,(b,a) \overline{(W_\psi g)\,(b,a)} \right] \frac{da\, db}{a^2} = C_\psi (f, g), \tag{2.12}$$

für alle $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Außerdem gilt für jedes $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, das in $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, die Rekonstruktionsformel

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(W_\psi f)\,(b,a)]\, \psi_{b,a}(x) \frac{da\, db}{a^2}. \tag{2.13}$$

Beweis s. [Chu92a] S.62 f. Ohne die Zulässigkeitsbedingung (2.6) wäre Gleichung (2.12) nicht definiert. Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Aussage über die Abbildungseigenschaft der IWT.

2.3. Satz. *Die IWT ist eine wohldefinierte und — bis auf einen Skalierungsfaktor — isometrische Abbildung von $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ nach $\mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}^2; \frac{da\,db}{a^2}\right)$; dabei bezeichnet $\frac{da\,db}{a^2}$ das mit $\frac{1}{a^2}$ gewichtete Lebesgue–Maß .*

Beweis s. [Sch99] S.114 f.

2.2.3 Diskrete Wavelet–Transformation

Wir kommen nun zur diskreten Wavelet–Transformation. Dazu diskretisieren wir die kontinuierlichen Parameter a, b der IWT $(W_\psi f)(a, b) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle$:

$$
\begin{aligned}
b &= b_{j,k} \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{k}{2^j} b_0, && j,\, k \in \mathbb{Z}, \\
a &= a_j \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-j}, && j \in \mathbb{Z},
\end{aligned}
$$

wobei die Konstante $b_0 > 0$ die *Abtastrate* bezeichnet. Setzen wir diese in $\psi_{b,a}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ ein, so erhalten wir mit

$$
\psi_{b_0;j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k b_0)
$$

die **diskrete Wavelet–Transformation DWT**

$$
(W_\psi f)(b_{j,k}, a_j) = \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle, \qquad j,\, k \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}
$$

Im folgenden wollen wir annehmen, daß die Abtastrate $b_0 = 1$ ist und schreiben $\psi_{j,k} = \psi_{1;j,k}$. Wie im kontinuierlichen Fall sind wir an einer Rekonstruktionsformel interessiert, die es erlaubt, ein beliebiges $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ aus den Werten seiner DWT wiederherzustellen. Wir werden sehen, daß eine solche Rekonstruktion dann möglich ist, wenn es positive Konstanten A und B mit $0 < A \leq B < \infty$ gibt, so daß folgende **Stabilitätsbedingung** erfüllt ist:

$$
A \|f\|_2^2 \leq \sum_{j,\, k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq B \|f\|_2^2, \qquad f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}). \tag{2.15}
$$

2.2. Bemerkung. Die Stabilitätsbedingung (2.15) besagt, daß die Funktionenfolge $\{\psi_{j,k}\}$ l_2–stabil ist. $\boldsymbol{l_2}$**–Stabilität** bedeutet, daß es positive Konstanten C und D mit $0 < C \leq D < \infty$ gibt, sodaß für alle Folgen $\{c_{j,k}\} \subset l^2(\mathbb{Z})$ die Abschätzungen

$$
C \, \|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2 \leq \left\| \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2^2 \leq D \, \|\{c_{j,k}\}\|_{l^2}^2 \tag{2.16}
$$

gelten.

In der englischsprachigen Waveletliteratur findet man für die Abschätzung (2.15) den Begriff des *Frames*.

2.4. Definition (Frame). Eine Funktion $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ erzeugt einen *Frame* $\{\psi_{b_0;j,k}\}_{j,k}$ auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ mit der Abtastrate $b_0 > 0$, wenn für positive Konstanten A und B die Stabilitätsbedingung (2.15) gilt. A und B selbst heißen *Frame bounds*. Gilt zusätzlich, daß $A = B$, dann heißt die Familie $\{\psi_{b_0;j,k}\}_{j,k}$ *tight Frame*.

$\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ erzeuge einen Frame und T sei ein linearer Operator auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, der folgendermaßen definiert ist:

$$Tf \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k} = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} d_k^j \psi_{j,k}.$$

Die Abschätzung nach oben aus (2.15) impliziert nun, daß T ein injektiver, beschränkter linearer Operator ist und die Abschätzung nach unten, daß T eine beschränkte lineare Inverse besitzt. f läßt sich also eindeutig schreiben als

$$f = T^{-1}Tf = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} d_k^j T^{-1}\psi_{j,k}.$$

Setzen wir

$$\psi^{j,k} \stackrel{\text{def}}{=} T^{-1}\psi_{j,k}, \qquad j,\, k \in \mathbb{Z},$$

dann lautet die **Rekonstruktionsformel**:

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} d_k^j \psi^{j,k}. \tag{2.17}$$

Zu jedem Frame $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ gibt es also ein eindeutig bestimmtes *duales Frame* $\{\psi^{j,k}\}_{j,k}$, sodaß für ein beliebiges $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ die Rekonstruktionsformel (2.17) gilt. Das ist ein wichtiges Ergebnis. Eine wesentliche Forderung an die Wavelets erfüllen die Frames jedoch nicht: sie bilden im allgemeinen keine Basis. Fügen wir diese Bedingung den Voraussetzungen eines Frames hinzu, so erhalten wir eine Riesz–Basis des $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ und sind damit der Definition der Wavelets schon sehr nahe gekommen.

2.2.4 Wavelets und Prewavelets

2.5. Definition (Riesz–Basis des $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$). Eine Familie von Funktionen $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ des $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ heißt *Riesz–Basis*, wenn die Funktionen $\psi_{j,k}$ linear unabhängig sind und die Stabilitätsbedingung (2.15) erfüllen, d. h. es gibt positive Konstanten A und B mit $0 < A \leq B < \infty$, so daß folgende Abschätzungen gelten:

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{j,\,k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \leq B\|f\|_2^2, \qquad f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}).$$

Im Falle, daß $A = B = 1$ ist, geht die Riesz–Basis in eine ONB über. Aus dem bisher Gesagten folgt nun, daß es zu jeder Riesz–Basis $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ eine eindeutig bestimmte *duale Riesz–Basis* $\{\psi^{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ gibt, die orthogonal zueinander sind, d. h. sie erfüllen die **Dualitätsbedingung**:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi^{l,m}\rangle = \delta_{j,l}\delta_{k,m}, \tag{2.18}$$

wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker–Symbol ist. Dies ergibt sich, indem man das Skalarprodukt einer Funktion f mit einer Basisfunktion $\psi_{l,m}$ bildet und dann für f die Rekonstruktionsformel einsetzt. Erstaunlicherweise wird eine duale Riesz–Basis $\{\psi^{j,k}\}_{j,k}$ nicht auf dieselbe Weise von einer Funktion $\tilde{\psi} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ erzeugt, wie die Riesz–Basis $\{\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j,k}$ von einer *Mutterfunktion* $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Ein Gegenbeispiel findet man in [Chu92a] auf Seite 13. Diese Eigenschaft ist aber von zentraler Bedeutung für ein Wavelet und muß deshalb explizit gefordert werden. Damit kann nun schließlich die vollständige Definition eines Wavelets angeben werden:

2.6. Definition (Wavelet). Eine Funktion $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ heißt *Wavelet*, wenn es eine duale Funktion $\tilde{\psi} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ gibt, so daß die von ihnen erzeugten Riesz–Basen $\{\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ und $\{\psi^{j,k} = 2^{j/2}\tilde{\psi}(2^j x - k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ die Dualitätsbedingung (2.18) erfüllen.

Diese Definition ist symmetrisch, d. h. wenn ψ ein Wavelet mit der dualen Funktion $\tilde{\psi}$ ist, dann ist auch $\tilde{\psi}$ ein Wavelet mit der dualen Funktion ψ. Man kann also sagen, $\tilde{\psi}$ ist das duale Wavelet zu ψ und umgekehrt. Im allgemeinen ist es schwer, das duale Wavelet zu bestimmen. Für zwei Unterklassen der Riesz–Basen kann man jedoch die dualen Wavelets leicht angeben.

2.7. Definition (orthogonale und semi–orthogonale Wavelets). Es sei $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Dann nennt man ψ ein

1. *orthogonales Wavelet*, wenn es eine ONB $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ erzeugt, d. h. es gilt die Orthogonalitätsbedingung

$$\left\langle \psi_{j,k},\, \psi_{l,m} \right\rangle = \delta_{j,l}\delta_{k,m}, \qquad j,\, k,\, l,\, m \in \mathbb{Z}, \tag{2.19}$$

2. *semi–orthogonales Wavelet bzw. ein Prewavelet*, wenn es eine Riesz–Basis $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ erzeugt, und zusätzlich die Bedingung gilt:

$$\left\langle \psi_{j,k},\, \psi_{l,m} \right\rangle = 0, \qquad j \neq l;\, j,\, k,\, l,\, m \in \mathbb{Z}. \tag{2.20}$$

Es ist offensichtlich, daß ein orthogonales Wavelet *selbstdual* ist, d. h. $\psi_{j,k} = \psi^{j,k}$ für $j,\, k \in \mathbb{Z}$. Für semi–orthogonale Wavelets kann man folgenden Satz zeigen (s. [Chu92a] S. 77).

2.4. Satz. *Sei $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ein semi–orthogonales wavelt und $\tilde{\psi}$ sei über dessen Fourier–Transformierte gegeben:*

$$\hat{\tilde{\psi}}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\psi}(\omega + 2\pi k) \right|^2}. \tag{2.21}$$

Dann erfüllen ψ und $\tilde{\psi}$ die Dualitätsrelation

$$\left\langle \psi_{j,k},\, \tilde{\psi}_{l,m} \right\rangle = \delta_{j,l}\delta_{k,m}, \qquad j,\, k,\, l,\, m \in \mathbb{Z}, \tag{2.22}$$

wobei

$$\tilde{\psi}_{l,m}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{2/l}\tilde{\psi}\left(2^l x - m\right). \tag{2.23}$$

Die duale Basis $\left\{\psi^{j,k}\right\}$ von $\{\psi_{j,k}\}$ wird also durch eine Mutterfunktion $\tilde{\psi}$ erzeugt: $\psi^{j,k} = \tilde{\psi}_{j,k}$.

Sei ψ ein Wavelet und $\tilde{\psi}$ das dazugehörige duale Wavelet. Dann kann jedes $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ eindeutig als **Wavelet–Reihe** geschrieben werden

$$f(x) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}(x) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}\tilde{\psi}_{j,k}(x), \tag{2.24}$$

wobei die Koeffizienten gegeben werden durch

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \left\langle f, \psi_{j,k} \right\rangle = (W_\psi f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right), \\ d_{j,k} &= \left\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \right\rangle = \left(W_{\tilde{\psi}} f\right)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right). \end{aligned}$$

2.3 Multiskalen–Analyse

Eine *Multi–Resolution–Analysis*(MRA), oder auch *Multiskalen–Analyse*, kann als ein abstrakter Rahmen zur Konstruktion von Waveleträumen betrachtet werden, genauer gesagt handelt es sich um eine Reihe von Axiomen, die von S. Mallat in [Mal89] aufgestellt wurden. Die hier verwendeten Axiome aus [Sch99] sind eine leichte Modifikation der Orginalaxiome.

2.8. Definition (MRA). Unter einer *Multiskalen–Analyse* des $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ versteht man eine Familie $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ von abgeschlossenen linearen Unterräumen des $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, die folgende Axiome erfüllen:

(R1) V_0 ist ein translationsinvarianter Raum,

(R2) V_0 wird von einer Riesz–Basis erzeugt, d. h. es gibt ein $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, für das gilt

$$V_0 = \overline{\operatorname{span}\left\{\varphi(x-k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}^n}}$$

und $\left\{\varphi(x-k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ ist l_2–stabil, (R3) $V_j \subseteq V_{j+1}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}_0,$

(R4) $f(x) \in V_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(2x) \in V_{j+1},$

(R5) $\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ liegt dicht in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

S. Mallat hat ursprünglich auch negative Indizes für die Unterräume $\{\mathrm{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ zugelassen und ein sechstes Axiom postuliert

(R6) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{V}_j = \{0\}$.

Für die Approximationseigenschaft (R5) ist dies jedoch nicht notwendig. Die Waveleträume W_j werden als orthogonale Komplemente der Skalierungsräume definiert: $\mathrm{W}_j = \mathrm{V}_{j+1} \ominus \mathrm{V}_j$. Darauf gehen wir aber erst im nächsten Abschnitt genauer ein. Eine MRA wird von einer Funktion $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ erzeugt. Daher ist es sinnvoll, ihr einen eigenen Namen zu geben.

2.9. Definition (Skalierungsfunktion). Eine Funktion $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ heißt *Skalierungsfunktion*, wenn sie eine MRA erzeugt.

Aus den Axiomen (R3) und (R4) erhält man eine wichtige Funktionalgleichung zur Berechnung der Skalierungsfunktion.

2.5. Satz (Verfeinerungs– oder Skalierungsgleichung). *φ sei eine Skalierungsfunktion. Dann gibt es eine Folge $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \subset l_2(\mathbb{R}^n)$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} h_k \varphi(2x-k). \tag{2.25}$$

Die Funktionalgleichung (2.25) *wird als Verfeinerungsgleichung oder Skalierungsgleichung bezeichnet.*

Damit kann man den Übergang eines Skalierungsraumes in einen anderen als *Faltungs–Dezimation* bezüglich einer Filterfolge $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ beschreiben:

$$\varphi_k^j(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} h_l \varphi_k^j(2x-l) = 2^{-1/2} \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} h_l \varphi_{2k+l}^{j+1}(x). \tag{2.26}$$

Wir wollen nun die Aussage des Satzes (2.5) umkehren: Gegeben sei die Folge $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ und $\varphi(x)$ sei eine Lösung der Verfeinerungsgleichung (2.25) bzgl. dieser *Maske*, dann erzeugt φ unter Hinzunahme einer schwachen Zusatzvoraussetzung eine MRA. Auf diese Weise werden wir später auch die Waveleträume erzeugen. Folgenden Satz findet man in [Sch99] S.119 f.

2.6. Satz. *Gegeben seien eine Folge* $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \subset l_1(\mathbb{R}^n)$ *und eine Funktion* $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$*, die der Verfeinerungsgleichung* (2.25) *bezüglich dieser Maske genügt. Außerdem gelte* $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$ *und* $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ *sei eine* l_2*–stabile Basis. Dann bilden die Räume*

$$V_j \stackrel{\text{def}}{=} \overline{span\,\{\varphi\,(2^j(\cdot - 2^{-j}l))\}} \tag{2.27}$$

eine MRA des $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Waveleträume werden als orthogonale Komplemente der Skalierungsräume einer MRA definiert. Da wir Wavelets als Ansatzfunktionen in einer Petrov–Galerkin Approximation einer Anfangsrandwertaufgabe verwenden wollen, interessieren wir uns für MRAs über beschränkten Gebieten. Im Folgenden stellen wir kurz die Konstruktion einer periodischen MRA über $\mathbb{T} = \mathbb{R}/[0,1]$ und einer nichtperiodischen MRA über $[0,1]$ vor.

2.3.1 Periodische Randbedingungen auf $\mathbb{T} = \mathbb{R}/[0,1]$

Eine periodische MRA über $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ kann man leicht aus einer MRA über $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ durch Periodisierung der Basisfunktionen $\varphi_k^j(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$ erhalten [Mey90]. Zu diesem Zweck projizieren wir den $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x+k).$$

Die Skalierungsfunktion $\tilde{\varphi}$ erzeugt dann eine periodische MRA. Die Periodisierung überträgt sich auf alle Basisfunktionen:

$$\tilde{\varphi}_k^j(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi_k^j(x+m) \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{\varphi}_k^j = \tilde{\varphi}_{k+l2^j}^j,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Identifizieren wir $\mathbb{T}$ mit $[0,1]$, d. .h $\mathbb{T} \cong [0,1]$, so erhalten wir mit (2.25) $\tilde{\varphi}_k^j$ als periodische Faltungs–Dezimation aus den $\left\{\tilde{\varphi}_l^{j+1}\right\}_l$:

$$\tilde{\varphi}_k^j(x) = \sum_{l=0}^{2^j-1} h_l \tilde{\varphi}_k^j(2x-l) = \sum_{l=0}^{2^j-1} h_l \tilde{\varphi}_{2k+l}^{j+1}(x).$$

2.3.2 Nichtperiodische Randbedingungen auf $[0,1]$

Eine periodische MRA unterscheidet sich nicht wesentlich von einer MRA über dem ganzen Raum. Interessanter ist da schon eine nichtperiodische MRA über $[0,1]$. Wir konzentrieren uns hier auf orthogonale MRAs, d. h. die Sklaierungsräume werden von einer ONB erzeugt. Die Idee läßt sich kurz darstellen[Mey92]: Ausgehend von einer orthogonalen MRA verwendet man nur solche Basisfunktionen, deren Träger $[0,1]$ schneiden. Diese teilt man dann in drei Mengen auf: die Funktionen, deren Träger ganz im Inneren des Intervalls liegen und solche, deren Träger den linken bzw. den rechten Rand enthalten. Die Randfunktionen werden auf $[0,1]$ eingeschränkt. Man stellt fest, daß die von den Basisfunktionen erzeugten Unterräume orthogonal zueinander sind. Zum Schluß muß man nur noch die Randräume orthogonalisieren und erhält eine orthogonale MRA auf $[0,1]$.
$\varphi(x)$ sei eine orthogonale Skalierungsfunktion mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}\{\varphi\} = [0, 2M-1]$, wobei M die Anzahl der verschwindenden Momente ist. Es bietet sich eine Daubechies–Skalierungsfunktion an [Daub92].

2.1. Definition (verschwindendes k–tes Moment). Eine Funktion $\varphi(x)$ hat ein *verschwindendes k–tes Moment* im Punkte t_0, wenn folgende Gleichung gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} (t-t_0)^k \varphi(t)\, dt = 0. \tag{2.28}$$

Aus der Skalierungsrelation (2.25) folgt für die Basisfunktionen $\overline{\operatorname{supp}\left\{\varphi_k^j\right\}} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+2M-1)]$. Das bedeutet, daß es einen Level j^* gibt, sodaß die Randpunkte des Intervalls in jeweils disjunkten Trägern liegen. Wir definieren nun die Skalierungsräume $\mathrm{V}_j^{[0,1]}$ als Einschränkung der Funktionen aus V_j auf $[0,1]$:

$$\mathrm{V}_j^{[0,1]} \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{f(x) = g|_{[0,1]}(x)\, für\ g \in V_j} \right\}.$$

Die Axiome (R1) bis (R5) einer MRA sind offensichtlich erfüllt. Wir zerlegen die Indexmenge $\Delta_j = \left\{ k \in \mathbb{Z} \,|\, \varphi_k^j \in \mathrm{V}_j^{[0,1]} \right\}$ in drei Teilmengen

$$\begin{aligned}
\Delta_j^1 &= \left\{ k \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \in \operatorname{supp}\left\{\varphi_k^j\right\}\right\} &&= \left\{ k \in \mathbb{Z} \,|\, -2M+2 \le k \le -1 \right\}, \\
\Delta_j^2 &= \left\{ k \in \mathbb{Z} \,|\, \operatorname{supp}\left\{\varphi_k^j\right\} \subset (0,1)\right\} &&= \left\{ k \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \le k \le 2^j-2M+1 \right\}, \\
\Delta_j^3 &= \left\{ k \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \in \operatorname{supp}\left\{\varphi_k^j\right\}\right\} &&= \left\{ k \in \mathbb{Z} \,|\, 2^j-2M+2 \le k \le 2^j-1 \right\}.
\end{aligned}$$

Da wir eine orthogonale MRA auf $[0,1]$ erzeugen wollen, müßen wir die Basisfunktionen am Rand $\varphi_k^j|_{[0,1]}$ mit $k \in \Delta_j^1 \cup \Delta_j^3$ noch orthogonalisieren. Man kann dazu das Gram–Schmidtsche Verfahren benutzten.

2.4 Univariate Waveleträume

$\varphi(x)$ erzeuge eine orthogonale MRA. Die zu den Wavelets führende Idee besteht nun darin, die Schachtelung der Räume V_j zur effektiven Konstruktion einer ONB für den ganzen $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ zu benutzen. Anstatt in jedem Raum von neuem eine eigene ONB zu konstruieren, kann man die bereits bestimmte Basis von V_j zu einer Basis von V_{j+1} ergänzen, d. h.

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \qquad W_j \perp V_j,\ j = 0,\ 1,\ \cdots \tag{2.29}$$

wobei W_j das orthogonale Komplement von V_j in V_{j+1} ist. Das sukzessive Fortführen des Argumentes ergibt

$$V_{j+1} = V_0 \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_j = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{j} W_i \right), \tag{2.30}$$

und Axiom (R5) liefert die Zerlegung des ganzen Raumes:

$$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}) = \mathrm{V}_0 \oplus \mathrm{W}_0 \oplus \cdots \oplus \mathrm{W}_\infty = \mathrm{V}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\mathrm{i}=0}^{\infty} \mathrm{W}_\mathrm{i} \right). \tag{2.31}$$

Aus der Forderung (2.29) folgt, daß die W_j–Räume zueinander orthogonal sind, d. h. $W_j \perp W_{j+1}$. Falls es eine Funktion $\psi(x)$ gäbe, deren Translate $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j - k)$ eine ONB bildeten, dann wären die $\psi_{j,k}$ zueinander orthogonal: $\left\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \right\rangle = \delta_{j,l}\delta_{k,m}$. Nach Definition 2.7.1 wäre ψ also ein orthogonales Wavelet und die Waveleträume würden von einer Mutterfunktion $\psi(x) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ erzeugt werden:

$$W_j = \overline{\operatorname{span}\left\{ 2^{j/2}\psi\left(2^j x - l\right)_{l=-\infty}^{\infty} \right\}}. \tag{2.32}$$

Mit dem bisher Gesagten kann man nun ein orthogonales Wavelet mit Hilfe einer MRA definieren.

2.10. Definition (orthogonales Wavelet). Gegeben sei eine MRA. Dann heißt eine Funktion ψ des orthogonalen Komplements W_0 zu V_0 ein *orthogonales Wavelet*, wenn seine Translate eine ONB von W_0 bilden.

Bilden die Translate $\psi_{j,k}$ nur eine Riesz–Basis, so ist nach Definition 2.7.2 ψ ein Prewavelet. Es ergibt sich also analog folgende Definition:

2.11. Definition (Prewavelet). Gegeben sei eine MRA. Dann heißt eine Funktion ψ des orthogonalen Komplements W_0 zu V_0 ein *Prewavelet*, wenn seine Translate eine Riesz–Basis von W_0 bilden.

Im Folgnden sind stets orthogonale Wavelets gemeint, wenn von Wavelets gesprochen wird. Die Approximation einer Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ mittels Wavelet– oder Prewaveleträumen kann mit Hilfe von Orthogonalprojektionen auf diese Räume realisiert werden. Seien also $\mathrm{P}_j : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{V_j}$ und $\mathrm{Q}_j : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{W_j}$ zwei Orthogonalprojektionen. Wegen der eindeutigen Zerlegung der Differenzräume in (2.29) wird die Projektion Q_j ebenfalls durch die Differenz der Projektionen P_{j+1} und P_j gegeben:

$$\mathrm{Q}_j = \mathrm{P}_{j+1} - \mathrm{P}_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{P}_{j+1} = \mathrm{P}_j + \mathrm{Q}_j . \tag{2.33}$$

Diese *additive Zerlegung der Projektionen* ist für die Effizienz der Approximationsalgorithmen wichtig. Um $\mathrm{P}_{j+1} f$ in V_{j+1} zu berechnen, genügt es, die gegenüber $\mathrm{P}_j f$ neu hinzukommenden Informationen $\mathrm{Q}_j f$ auf dem kleineren Unterraum W_j zu bestimmen. Für die $(j+1)$te Projektion ergibt sich somit folgende Darstellung:

$$\mathrm{P}_{j+1} f = \mathrm{P}_0 f + \sum_{i=0}^{j} \mathrm{Q}_j f. \tag{2.34}$$

Im Grenzfall $j \to \infty$ erhalten wir die Funktion f:

$$f = \mathrm{P}_0 f + \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Q}_j f. \tag{2.35}$$

Genau so gut kann man mit einer periodischen MRA über $\mathbb{T} \cong [0,1]$ bzw. einer nichtperiodischen MRA über $[0,1]$ starten und erhält dann die entsprechenden Wavelets über $[0,1]$ siehe dazu auch [AHJP92], [CDJV93], [CDV93a], [CDV93b], [CQ92] und [Mey92]. Zur Konstruktion spezieller Wavelets für Dirichlet– und Neumann–Randbedingungen wird auf [Aus92] und [MP95] verwiesen.

2.5 Multivariate Waveleträume

In diesem Abschnitt wollen wir auf die Tensorproduktkonstruktion mehrdimensionaler Waveleträume eingehen[Daub92],[Mey90]. $\varphi(x)$ erzeuge eine orthogonale MRA $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ und $\psi(x)$ sei die Mutterfunktion der dazugehörigen Waveleträume $\{W_j\}_{j=0}^{\infty}$. Aus den eindimensionalen Waveleträumen erzeugen wir durch Tensorproduktbildung eine zweidimensionale Waveletbasis $\mathbf{W}_{j,j'} = W_j \otimes W_{j'}$ des $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Die Basisfunktionen werden gegeben durch

$$\psi_{k,k'}^{j,j'}(x,y) = \psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(x). \tag{2.36}$$

Die Galerkin–Approximation eines Operators bzgl. einer Waveltbasis wird nach Beylkin [BCR91] *Standard–Form* (S–Form) genannt. Man bezeichnet die Tensorproduktbasis daher auch als *Standard–Form–Basis*. Der Nachteil der Tensorproduktkonstruktion ist, daß die Waveleträume $\mathbf{W}_{j,j'}$ nicht mehr als orthogonale Komplemente einer MRA erzeugt werden, da sie von zwei Dilatationsparametern abhängen.

Die Skalen einer zweidimensionalen Funktion f sind bezüglich der S–Form–Basis nicht getrennt, sie koppeln untereinander. Interessanter ist eine zweidimensionale MRA. Dazu definiert man die Skalierungsräume $\mathbf{V}_j$ durch

$$\mathbf{V}_j \stackrel{\text{def}}{=} V_j \otimes V_j. \tag{2.37}$$

Die Struktur der Waveleträume $\mathbf{W}_j$ kann man problemlos ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{j+1} &= V_{j+1} \otimes V_{j+1} \\
&= (V_j \oplus W_j) \otimes (V_j \oplus W_j) \\
&= (V_j \otimes V_j) \oplus ((W_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes W_j)) \\
&= \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j.
\end{aligned}$$

Die Waveleträume werden also gegeben durch

$$\mathbf{W}_j = (W_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes W_j)\,. \tag{2.38}$$

Die Basisfunktionen lauten

$$^{n}\psi^{j}_{i,k} = \begin{cases} \psi_{j,i}(x)\psi_{j,k} & \text{für } n = 1 \\ \varphi_{j,i}(x)\psi_{j,k} & \text{für } n = 2 \\ \psi_{j,i}(x)\varphi_{j,k} & \text{für } n = 3. \end{cases} \tag{2.39}$$

Eine Art hybride Petrov–Galerkin–Approximation eines Operators mit einer Skalierungsbasis und einer Waveletbasis jeweils als Ansatz– und Testfunktionen wird nach Beylkin [BCR91] *Nicht–Standard–Form* (NS–Form) genannt. Man bezeichnet die Basis (2.39) daher auch als *Nicht–Standard–Form Basis.* Die d–dimensionalen Wavelet- bzw. Skalierungsräume berechnen sich analog. Wir definieren die Skalierungsräume durch

$$\mathbf{V}^{d+1}_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{V}^d_j \otimes \mathbf{V}^1_j.$$

Die Waveleträume ergeben sich durch Einsetzen der Definition:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^{d+1}_j &= \mathbf{V}^d_j \otimes \mathbf{V}^1_j = \left(\mathbf{V}^d_{j+1} \otimes \mathbf{W}^d_{j+1}\right) \oplus \left(\mathbf{V}^1_{j+1} \otimes \mathbf{W}^1_{j+1}\right) \\
&= \left(\mathbf{V}^d_{j+1} \otimes \mathbf{V}^1_{j+1}\right) \oplus \left[\left(\mathbf{W}^d_{j+1} \otimes \mathbf{V}^1_{j+1}\right) \oplus \left(\mathbf{V}^d_{j+1} \otimes \mathbf{W}^1_{j+1}\right) \oplus \left(\mathbf{W}^d_{j+1} \otimes \mathbf{W}^1_{j+1}\right)\right].
\end{aligned}$$

Man erhält folgendes rekursives Schema zur Berechnung einer multivariaten MRA:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^{d+1}_j &= \mathbf{V}^d_j \otimes \mathbf{V}^1_j, \\
\mathbf{W}^{d+1}_j &= \left(\mathbf{W}^d_{j+1} \otimes \mathbf{V}^1_{j+1}\right) \oplus \left(\mathbf{V}^d_{j+1} \otimes \mathbf{W}^1_{j+1}\right) \oplus \left(\mathbf{W}^d_{j+1} \otimes \mathbf{W}^1_{j+1}\right).
\end{aligned}$$

2.6 Analyse– und Rekonstruktionsalgorithmen

Sei $\varphi \in V_0 \subset V_1$ eine Skalierungsfunktion, deren Translate eine ONB bilden. Sowohl φ als auch das dazugehörige Wavelet $\psi \in W_0 \subset V_1$ liegen in V_1, d. h. es gibt Masken $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset l_2(\mathbb{R})$ und $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset l_2(\mathbb{R})$, so daß folgende Funktionalgleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \varphi(2x-k), \\ \psi(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \varphi(2x-k). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Umgekehrt gibt es auch ein *Zerlegungsfilterpaar* $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{q_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset l_2(\mathbb{R})$, so daß $\varphi(2x-l) \in V_1 = W_0 \oplus V_0$ die Gleichung

$$\varphi(2x-l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} [q_{l-2k}\psi(x-k) + p_{l-2k}\varphi(x-k)] \tag{2.41}$$

für $l \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Wir benutzen nun die Wavelet–Zerlegung der Skalierungsräume

$$V_N = V_{N-J} \oplus W_{N-J} \oplus \cdots \oplus W_{N-1}$$

zur Konstruktion eines hierarchischen, adaptiven Algorithmus zur Analyse und Rekonstruktion einer Funktionen $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Dazu projizieren wir f in die Wavelet–Zerlegung:

$$\mathrm{P}_N\, f = \mathrm{Q}_{N-1}\, f + \cdots + \mathrm{Q}_{N-J}\, f + \mathrm{P}_{N-J}\,. \tag{2.42}$$

Die Projektionen P_j und Q_j werden gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_j\, f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^j \varphi(2^j x - k), \\ \mathrm{Q}_j\, f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k^j \psi(2^j x - k). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Sind die Wavelets und die Skalierungsfunktionen orthogonal, so kann man die Koeffizienten als Skalarprodukt $c_k^j = \langle f, \varphi(2^j x - k)\rangle$ bzw. $d_k^j = \langle f, \psi(2^j x - k)\rangle$ schreiben. Gleichung (2.42) kann nun von links nach rechts oder umgekehrt gelesen werden, was der Analyse bzw. der Synthese einer Funktion f entspricht. Bei der **Analyse** einer Funktion startet man mit einer relativ genauen Approximation $\mathrm{P}_N\, f$ und zerlegt diese in immer gröbere Details $\mathrm{Q}_{N-1}, \cdots, \mathrm{Q}_{N-J}, \mathrm{P}_{N-J}$. Die **Synthese** einer Funktion beginnt hingegen mit einer groben Approximation P_{N-J} und fügt dieser immer genauere Details $\mathrm{Q}_{N-J}, \cdots, \mathrm{Q}_{N-1}$ hinzu. Beginnen wir mit der Analyse. Wir suchen einen effizienten Algorithmus, der die Datenabbildung $\mathbf{c}^j \to \{\mathbf{c}^{j-1}, \mathbf{d}^{j-1}\}$ beschreibt, wobei $\mathbf{c}^j = \left\{c_k^j\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ und $\mathbf{d}^j = \left\{d_k^j\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ist. Setzen wir Gleichung (2.41) in $\mathrm{P}_j\, f$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_j\, f(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^j \varphi(2^j x - k) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{j-1}x - l) \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-2l} c_k^j + \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi(2^{j-1}x - l) \sum_{k\in\mathbb{Z}} q_{k-2l} c_k^j \\
&= \mathrm{P}_{j-1}\, f(x) + \mathrm{Q}_{j-1}\, f(x).
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert uns nun den gesuchten **Zerlegungsalgorithmus:**

$$\begin{aligned}
c_k^{j-1} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} p_{l-2k} c_l^j = \left(\mathbf{p} * \mathbf{c}^j\right)(2k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_j\, \mathbf{c}^j, \\
d_k^{j-1} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} q_{l-2k} c_l^j = \left(\mathbf{q} * \mathbf{c}^j\right)(2k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_j\, \mathbf{c}^j.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Wir erhalten also die Waveletkoeffizienten d_k^{j-1} und die Skalierngskoeffizienten c_k^{j-1} durch eine diskrete Faltung von $\mathbf{c}^j$ mit den Masken $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ bzw. $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ in den geraden Indizes. In der Signalverarbeitung nennt man dies *Downsampling*. Die Operaroren $\mathbf{P}_j$ und $\mathbf{Q}_j$ werden *Filter* genannt. Man kann die Koeffizienten der Zerlegung (2.42) also nach folgendem Schema berechnen:

Schema des Zerlegungsalgorithmus

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{c}^N \arrow[r, "\mathbf{P}_N"] \arrow[dr, "\mathbf{Q}_N"'] & \mathbf{c}^{N-1} \arrow[r, "\mathbf{P}_{N-1}"] \arrow[dr, "\mathbf{Q}_{N-1}"'] & \mathbf{c}^{N-2} & \cdots & {} \arrow[r, "\mathbf{P}_{N-J-1}"] \arrow[dr, "\mathbf{Q}_{N-J-1}"'] & \mathbf{d}^{N-J} \\
 & \mathbf{d}^{N-1} & \mathbf{d}^{N-2} & \cdots & & \mathbf{d}^{N-J}
\end{tikzcd}$$

Interpretieren wir die Funktion f als ein analoges Signal, dann ist die Startapproximation $\mathbf{P}_N f$ häufig mit mehr oder weniger starkem Rauschen behaftet. Da das Rauschen aber ein hochfrequentes Phänomen ist, bietet es sich an, für $\mathbf{P}_N$ einen *Tiefpassfilter* zu verwenden, der die hohen Frequenzen des Signals herausschneidet. Der Filter $\mathbf{Q}_N$ soll die niedrigen Frequenzen ausblenden, weshalb man hier einen *Hochpassfilter* nimmt. Wendet man abwechselnd Hoch– und Tiefpassfilter an, so erhält man einen *Bandpassfilter*, der sowohl die hohen als auch die niedrigen Frequenzen ausblendet. Weitergehende Informationen zur *Signalverarbeitung* findet man in [Mar82] und [Pap77].

Bei der Synthese gehen wir genau umgekehrt vor. Wir beginnen mit dem Endprodukt, der Zeglegung P_{j-1} und Q_{j-1}, und setzen die Gleichungen (2.40) ein.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{j-1}\, f(x) + \mathrm{Q}_{j-1}\, f(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^j \varphi(2^{j-1}x - k) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k^j \psi(2^{j-1}x - k) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2^j x - l) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(h_{l-2k} c_k^{j-1} + g_{l-2k} d_k^{j-1}\right) \\
&= \mathrm{P}_j\, f(x).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der **Rekonstruktionsalgorithmus:**

$$
\begin{aligned}
c_k^j &= \textstyle\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(h_{k-2l} c_l^{j-1} + g_{k-2l} d_l^{j-1}\right) \\
&\overset{\text{def}}{=} \mathbf{H}_j^* \, \mathbf{c}^{j-1} + \mathbf{G}_j^* \, \mathbf{d}^{j-1},
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

wobei $\mathbf{H}_j^*$ und $\mathbf{G}_j^*$ die adjungierten Filter von $\mathbf{H}_j$ und $\mathbf{G}_j$ sind. Für eine orthogonale MRA stimmen die Filter $\mathbf{H} = \mathbf{P}$ und $\mathbf{G} = \mathbf{Q}$ überein. Bei der Faltung werden nur die geraden Indizes der Filterfolgen berücksichtigt, was in der Signalverarbeitung *Upsampling* heißt. Im Rahmen der Mehrgitterverfahren könnte man anstelle von Downsampling auch von *Restriktion* und statt Upsampling auch von *Prolongation* sprechen, s. [Hac85], Abschnitte 3.4 und 3.5. Aus (2.45) erhält man das folgende

Schema des Rekonstruktionsalgorithmus

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{c}^{N-J} \arrow[r, "\mathbf{H}^*_{N-J}"] & \mathbf{c}^{N-J+1} \arrow[r, "\mathbf{H}^*_{N-J+1}"] & \mathbf{c}^{N-J-2} & \cdots & \mathbf{c}^{N-1} \arrow[r, "\mathbf{H}^*_{N-1}"] & \mathbf{c}^{N} \\
\mathbf{d}^{N-J} \arrow[ur, "\mathbf{G}^*_{N-J}"] & \mathbf{d}^{N-J+1} \arrow[ur, "\mathbf{G}^*_{N-J+1}"] & & & \mathbf{d}^{N-1} \arrow[ur, "\mathbf{G}^*_{N-1}"] &
\end{tikzcd}
$$

Da wir an orthogonalen Wavelets interessiert sind, liegt es nahe, nach orthogonalen Filtern mit endlicher Maske $\{p_k\}_{k=0}^{2M-1}$ zu suchen, wobei M die Anzahl der verschwindenen Momente ist. Die Erste, die solche Filter konstruierte, war I. Daubechies in [Daub88]. Setzt man ein orthogonales Filterpaar $\mathbf{P}_j$, $\mathbf{Q}_j$ zu einer Transformation $\mathbf{W}_j = \binom{\mathbf{P}_j}{\mathbf{Q}_j}$ zusammen, so wird die Rücktransformation durch die Adjungierte beschrieben: ${\mathbf{W}^*}_j = \left(\mathbf{P}_j^* \; \mathbf{Q}_j^*\right)$. Außerdem berechnet sich $\mathbf{Q}_j$ aus $\mathbf{P}_j$: $q_k = (-1)^k \bar{p}(2M-1-k)$ für $k = 0, \cdots, 2M-1$. Die Transformationen $\mathbf{W}_j$ beschreiben einen Schritt im Zerlegungsalgorithmus: $\mathbf{W}_j \, \mathbf{c}^j = \binom{\mathbf{c}^{j-1}}{\mathbf{d}^{j-1}}$ und die adjungierte Transformation ${\mathbf{W}^*}_j$ einen Schritt im Rekonstruktionsalgorithmus: ${\mathbf{W}^*}_j \binom{\mathbf{c}^{j-1}}{\mathbf{d}^{j-1}} = \mathbf{c}^j$. Verknüpft man die einzelnen Transformationen $\mathbf{W}_j$ zu einer einzigen hierarchischen Transformation $\mathbf{W}$, so erhält man die *diskrete Wavelettransformation*. Für eine effiziente Implementierung in C siehe [PTVF92] Kapitel 13.

2.7 Ausgangsapproximation

Bisher haben wir uns noch keine Gedanken darüber gemacht, wie wir die Skalierungskoeffizienten $\mathbf{c}^N$ der Startapproximation erhalten, welche den Ausgangspunkt des Zerlegungsalgorithmus (2.44) bilden. Um keine Randwavelets einführen zu müßen, nehmen wir an, daß $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ eine periodische MRA erzeugt. $G_j = \{x_{j,k} = k2^{-j} | 0 \le k < 2^j\}$ sei eine Folge ineinander verschachtelter, äquidistanter Gitter mit der Schrittweite $h_j = 2^{-j}$ auf dem j–ten Level. Am einfachsten wäre es, eine kardinale, interpolierende Skalierungsfunktion zu wählen:

$$\varphi(l) = \delta_{0l}. \tag{2.46}$$

Mit der Projektion

$$\mathrm{P}_N\, f(x) = \sum_{k\in\mathbb{T}} c_k^N \varphi(2^N x - k), \qquad c_k^N = f(x_{N,k}),$$

folgt daraus sofort die *Interpolationseigenschaft*:

$$\mathrm{P}_N\, f(x_{N,l}) = \sum_{k\in\mathbb{T}} c_k^N \varphi(l-k) = c_l^N = f(x_{N,l}).$$

Eine mögliche Wahl für $\varphi(x)$ wären interpolatorische Spline–Prewavelets (s. [Chu92a]). Allerdings erfüllen orthogonale Skalierungsfunktionen die Bedinung (2.46) nicht. Es ist also sinnvoll, von der Interpolation zur Bestapproximation von $\mathrm{P}_N\, f(x)$ in V_N überzugehen, d. h. wir bestimmen φ derart, daß

$$f(x_{N,k}) \approx \langle f, \varphi_{k,N}\rangle$$

mit möglichst kleiner Abweichung gilt, wobei $\varphi_{k,j} = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$ eine ONB des V_j ist. Dazu entwickeln wir das Skalarprodukt formal in eine Taylorrheihe um den Punkt $x_{N,k} = k2^{-N}$:

$$\begin{aligned}
\langle f, \varphi_{k,N}\rangle &= 2^{-N/2}\int_{\mathbb{R}} f(2^{-N}(x+k))\varphi(x)\,dx \\
&= 2^{-N/2} f(x_{N,k})\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx + 2^{-3N/2} f'(x_{N,k})\int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)\,dx \\
&\quad + \cdots + \frac{2^{-\frac{N(2M-1)}{2}}}{(M-1)!} f^{(M-1)}(x_{N,k})\int_{\mathbb{R}} x^{M-1}\varphi(x)\,dx \\
&\quad + \frac{2^{-\frac{N(2M+1)}{2}}}{M!}\int_{\mathbb{R}} x^M f^{(M)}(\zeta(x))\varphi(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Die Gleichung (2.47) existiert, wenn f M–mal stetig differenzierbar ist und die M–te Ableitung beschränkt ist: $\left|f^{(M)}\right| \le C < \infty$. Ist außerdem die *Momentenbedingung*

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}} x^d\varphi(x) = 0, \quad \text{für } d = 1,\cdots,M-1$$

erfüllt, dann haben wir eine Startapproximation der Ordnung $\mathcal{O}\left(h_N^{M+\frac{1}{2}}\right)$:

$$\left|\langle f, \varphi_{k,N}\rangle - 2^{-N/2} f(x_{N,k})\right| = \mathcal{O}\left(h_N^{M+\frac{1}{2}}\right).$$

Je höher die Anzahl der verschwindenden Momente ist, desto höher ist auch die Ordnung der Startapproximation. Um eine Funktion f in eine Waveletraumzerlegung zu projizieren, beginnt man mit einer Startapproximation

$$c_k^N = 2^{-N/2} f(k2^{-N}).$$

Dann fährt man mit dem Zerlegungsalgorithmus (2.44) fort.

Damit beenden wir diese Einführung in die Wavelettheorie. Das nächste Kapitel geht kurz auf Pseudo–Differentialoperatoren ein und

Kapitel 3

Pseudo–Differential Operatoren

In diesem Kapitel stellen wir eine spezielle Klasse von Integraloperatoren vor, die wir im nächsten Kapitel zur Herleitung und zur Kompression der Standard– und der Nicht–Standard–Form einer Halbgruppe benötigen. Ein **Pseudo–Differentialoperator** mit einem Symbol $\sigma(x,\, y)$ und einem Distributionskern $K(x,y)$ wird gegeben durch

$$\begin{aligned}\sigma(x,\, D)\, f(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\, \xi)\, \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Das Symbol muß dabei ein bestimmtes Abklingverhalten aufweisen, auf das wir im folgenden noch genauer eingehen werden. Dieses Thema wird ausführlich behandelt in [TY] und [Hoe]. Differentialoperatoren können bezüglich einer geeigneten Funktion f stets als Integraloperatoren der Form (3.1) geschrieben werden. Unter der Voraussetzung, daß für f die Fourier–Transformation definiert ist, gilt die Rekonstruktionsformel

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi. \tag{3.2}$$

Der gemischte Ableitungsoperator $D^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ mit $D_j = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$ kann bezüglich f als Integraloperator dargestellt werden:

$$D^\alpha f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi. \tag{3.3}$$

In diesem Fall hängt der Operator $\sigma(x,\, D)\, f(x) \equiv \sigma(D) f(x) = D^\alpha f(x)$ nicht mehr vom ersten Argument des Symbols ab. Für Differentialoperatoren mit variablen

Koeffizienten

$$\sigma(x,\, D) \;=\; \sum_{|\alpha|\leq n} c_\alpha(x) D^\alpha \tag{3.4}$$

erhält man die Darstellung (3.1)

$$\sigma(x,\, D)\, f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\, \xi)\, \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi \tag{3.5}$$

mit dem Symbol $\sigma(x,\, y) \;=\; \sum_{|\alpha|\leq n} c_\alpha(x) y^\alpha$. Wir benutzen nun die Fourierintegral–Darstellung (3.5) zur Definition von Pseudo–Differentialoperatoren bezüglich unterschiedlicher Symbolklassen [Hoe].

3.1. Definition (Pseudo–Differential Operatoren und Symbolräume). Es seinen $\rho,\, \delta \in [0,1]$ und $m \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$S^m_{\rho,\delta} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sigma(x,\, y) \;\in \mathcal{CL}^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \mid \left| D^\beta_x D^\alpha_y \sigma(x,\, y) \right| \leq C_{\alpha\beta}\, (1+|y|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\,,\; \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n_0 \right\}$$

Symbolraum der Ordnung (m, ρ, δ). Die Integraloperatoren (3.5) bzgl. der Symbole aus $S^m_{\rho,\delta}$ werden *Pseudo–Differential Operatoren* der Ordnung (m, ρ, δ) genannt.

Von besonderem Interesse sind für uns die Symbolräume $S^m_{1,0}$. Insbesondere liegen die Symbole $\sigma(x,\, y) \equiv \sigma(y)$ der Operatoren mit konstanten Koeffizienten in $S^m_{1,0}$.

3.1. Beispiel.

1. Laplaceoperator: $\triangle u = \partial^2_{x_1} u + \cdots + \partial^n_{x_n} u$

$$\sigma(y) = |y|^2 \in S^m_{1,0},\; m \geq 2.$$

2. Halbgruppe der Wärmegleichung: $e^{t\nu\triangle}$

$$\begin{aligned} \sigma(y) \;&=\; e^{-t\nu|y|^2} \in S^m_{1,0},\; m \in \mathbb{R} \\ D^\alpha \sigma(y) \;&=\; (-1)^{\alpha_1} H_{\alpha_1}\left(\sqrt{2t\nu}y_1\right) \cdots (-1)^{\alpha_n} H_{\alpha_n}\left(\sqrt{2t\nu}y_n\right) \sigma(y) \end{aligned}$$

dabei sind $H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$ Hermite–Polynome.

3. Operatorwertige Funktion: $\left(1 - e^{-t\nu\triangle}\right) \frac{1}{\nu\triangle}$

$$\sigma(y) = \frac{1 - e^{-t\nu|y|^2}}{\nu y^2} \in S^m_{1,0},\; m \in \mathbb{R}.$$

Wegen des exponentiellen Abfalls der Symbole $\sigma(x,\, y) \in S^m_{\rho,\delta}$ bilden die Pseudo–Differentialoperatoren $\sigma(x,\, D)$ für $\rho,\, \delta \in [0,1]$ den Raum der Schwarzschen Funktionen $S(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \,|\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \quad p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\beta \partial^\alpha f(x) \right| < \infty \right\}$ auf sich selbst ab, vgl. [TY], S.3:

$$\sigma(x,\, D) \;:\; S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n). \tag{3.6}$$

Ist außerdem $\delta < 1$, so operiert $\sigma(x,\, D)$ auf dem Raum der temperierten Distributionen, vgl. [TY], S.3:

$$\sigma(x,\, D) \;:\; S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n). \tag{3.7}$$

Wir wenden uns jetzt dem anfangs angesprochenen Distributionskern $K(x,y)$ zu. Eine einfache Umformung ergibt

$$\begin{aligned} \sigma(x,\, D)\, f(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\, \xi)\, \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Der Kern wird dabei gegeben durch die Funktion

$$K(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\, \xi)\, e^{-i(y-x)\cdot\xi}\, d\xi. \tag{3.9}$$

Für Symbole mit nur einem Argument gilt: $K(x,y) = \hat{\sigma}(x-y)$.
Der folgende Satz trifft eine Aussage über die Regularität des Kerns. Wir werden diese im nächsten Kapitel zur Herleitung der Standard– und der Nicht–Standard–Form verwenden.

3.1. Satz. *Der Schwarz Kern $K(x,y)$ eines Pseudo–Differentialoperators der Ordnung (m,ρ,δ) ist für $\rho > 0$ außerhalb der Diagonalen $\triangle = \{(x,x) \,|\, x \in \mathbb{R}^n\}$ eine $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$–Funktion.*

Beweis siehe [TY], Satz 2.1.

Kapitel 4

Hybride Petrov–Galerkin Approximation

4.1 Einleitung

In diesem Kapitel stellen wir die Standard–Form und die Nicht–Standard–Form Approximation des semilinearen Anfangsrandwertproblems vor. Wir behandeln die NS–Form eines Operators in einer und in mehreren Dimensionen, sowohl mit periodischen als auch mit nicht periodischen Randbedingungen. Diese entspricht einer hybriden Petrov–Galerkin Approximation, deren Ansatz– und Testfunktionen jeweils aus Wavelets und den dazugehörigen Skalierungskoeffizienten bestehen. Wir bevorzugen die NS–Form, da hier die Matrixkoeffizienten effizient mit der schnellen Fouriertransformation(FFT) berechnet werden können.
Betrachten wir zunächst das **semilineare Anfangswertproblem:** Sei X ein Banachraum und $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator. Finde eine Lösung $u(t) \in X$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}u(t) + Au(t) &= f(t, u(t)), \qquad t > 0 \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die *Halbgruppentheorie* liefert die Lösung von (4.1) als **Integralgleichung**, falls die Funktion $f(t,x)$ hölderstetig bezüglic des ersten und Lipschitz–stetig bezüglich des zweiten Arguments ist:

$$u(t) \;=\; \mathrm{H}(t)\, u_0 + \int_0^t \mathrm{H}(t-\tau)\, f(\tau,\, u(\tau))\, d\tau, \tag{4.2}$$

dabei ist A der *infinitesimale Erzeugende der Halbgruppe* $\mathrm{T(t)} = e^{-t\,\mathrm{A}}$. Wir diskretisieren nun das Zeitintegral mit der Trapezregel und erhalten dadurch eine

Zeit–Approximation zweiter Ordnung von (4.2):

$$\begin{aligned} u(\delta t_j) = {} & \mathrm{H}(\delta t_j)\, u_0 \\ & + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{N}(\triangle t_j)\ \big[f(\delta t_j, u(\delta t_j)) + f(\delta t_{j+1}, u(\delta t_{j+1}))\big] \\ & + \mathcal{O}\big((\delta t_j)^2\big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Der Operator $\mathrm{N}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \big(Id - \mathrm{H}(t)\big)\,\mathrm{A}^{-1}$ kontrolliert den nichtlinearen Anteil der Gleichung. Im letzten Kapitel wurde gezeigt, daß sowohl die Halbgruppe T(t) als auch der Operator $\mathrm{N}(t)$ Pseudo–Differential Operatoren sind, d. h. sie besitzen eine Darstellung als Integraloperatoren mit einem Kern $K(x, y)$. Der Kern eines Pseudo–Differential Operators $\sigma(D)(f)(x)$ mit $\rho > 0$ ist außerhalb der Diagonalen $\{(x,\, x) : x \in \mathbb{R}\}$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion. Wir können also $K(x, y)$ nach einer S–Form bzw. nach einer NS–Form Basis entwickeln.

4.2 Die Standard–Form eines Operators

Der univariate periodische Fall

Nach Satz 3.1 ist der Kern eines **Pseudo–Differential Operators mit konstanten Koeffizienten**

$$\mathrm{T}(f)(x) = \sigma(D)\,(f)\,(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,\, y) f(y)\, dy \tag{4.4}$$

außerhalb der Diagonalen $\{(x,\, x) : x \in \mathbb{R}\}$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion. Die **Idee der S–Form** besteht darin, den Kern $K(x, y)$ des Operators nach einer S–Form Basis, d. h. einer zweidimensionalen Waveletbasis, zu entwickeln. Dies ist gleichbedeutend damit, den Operator T auf einen Skalierungsraum V_0 zu projizieren: $\mathrm{P}_0\ \mathrm{T}\,\mathrm{P}_0^*$.
Wir definieren die Skalierungs– und Waveleträume des $\mathrm{L}^2\,(\mathbb{R}^2/[0,1]^2)$ als das Tensorprodukt zweier eindimensionaler orthogonaler Räume:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_j &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{V}_j \otimes \mathrm{V}_j, \\ \mathbf{W}_{j'}^{j} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{W}_j \otimes \mathrm{W}_{j'}\,. \end{aligned}$$

Man kann nun den feinsten Skalierungsraum $\mathrm{V}_0 = \mathrm{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{W}_J \oplus \mathrm{V}_J$ in J Differenzräume und einen Detailraum aufspalten. Damit erhält man die folgende Zerlegung von $\mathbf{V}_0$:

$$\mathbf{V}_0 = \left(\bigoplus_{j,\,j'=1}^{J} \mathbf{W}_{j'}^{j}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{J} \mathrm{W}_j \otimes \mathrm{V}_J\right) \oplus \left(\bigoplus_{j'=1}^{J} \mathrm{V}_J \otimes \mathrm{W}_{j'}\right) \oplus \mathbf{V}_J. \tag{4.5}$$

Entsprechend setzen sich auch die Orthogonalprojektionen $\mathbf{P}_j \ : \ \mathrm{L}^2\,(\mathbb{R}^2/[0,1]^2) \longrightarrow \mathbf{V}_j$ und $\mathbf{Q}^j_{j'} \ : \ \mathrm{L}^2\,(\mathbb{R}^2/[0,1]^2) \longrightarrow \mathbf{W}^j_{j'}$ aus den eindimensionalen Projektionen zusammen. Die Indizes x, y geben dabei an, in welche Richtung die Projektionen wirken.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{P}^x_0 \otimes \mathrm{P}^y_0 \\ &= \sum_{j,j'=1}^{J} \underbrace{\mathrm{Q}^x_j \otimes \mathrm{Q}^y_{j'}}_{\mathbf{Q}^j_{j'}} + \sum_{j=1}^{J} \mathrm{Q}^x_j \otimes \mathrm{P}^y_J + \sum_{j=1}^{J} \mathrm{P}^x_J \otimes \mathrm{Q}^y_j + \mathbf{P}_J\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Wir bezeichnen die zweidimensionale mehrskalige Waveletbasis als **S–Form Basis**:

$$\left\{ \psi^j_k(x)\psi^{j'}_{k'}(y),\ \psi^j_k(x)\varphi^J_{k'}(y),\ \varphi^J_k(x)\psi^{j'}_{k'}(y),\ \varphi^J_k(x)\varphi^J_{k'}(y) \right\}^{j,j'=1,\cdots,J}_{k\in\mathbb{T}j,k'\in\mathbb{T}j'}. \tag{4.7}$$

Dabei ist $\mathbb{T}_j = \{0, \cdots, 2^{n-j}-1\}$ die Indexmenge der Basisfunktionen auf Level j. Wir projizieren nun den Operatorkern auf den feinsten Skalierungsraum $\mathbf{V}_0$. Mit der abkürzenden Schreibweise $\Delta_j = 2^{n+1-j} - 1$ erhalten wir so die Projektion von $K(x,y)$ in die S–Form Basis.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_0\,K(x,\,y) = &\\ &\sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathbb{T}_j}\psi^j_k(x)\sum_{k'\in\mathbb{T}_j}\alpha^{jj}_{kk'}\psi^j_{k'}(y) + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathbb{T}_j}\psi^j_k(x)\sum_{j'=j+1}^{J}\sum_{k'\in\mathbb{T}_{j'}}\beta^{jj'}_{kk'}\psi^{j'}_{k'}(y)\\ &+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathbb{T}_j}\psi^j_k(x)\sum_{j'=1}^{j-1}\sum_{k'\in\mathbb{T}_{j'}}\gamma^{jj'}_{kk'}\psi^{j'}_{k'}(y) + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathbb{T}_j}\psi^j_k(x)\sum_{k'\in\mathbb{T}_J}\varepsilon^{jJ}_{k\,k'}\varphi^J_{k'}(y)\\ &+\sum_{k\in\mathbb{T}_J}\varphi^J_k(x)\sum_{j'=1}^{J}\sum_{k'\in\mathbb{T}_{j'}}\zeta^{Jj}_{k'k}\psi^{j'}_{k'}(y) + \sum_{k\in\mathbb{T}_J}\varphi^J_k(x)\sum_{k'\in\mathbb{T}_J}\delta^{JJ}_{k\,k'}\varphi^J_{k'}(y).\end{aligned}$$

Die Matrixkoeffizienten werden gegeben durch

$$\begin{aligned}\alpha^{jj}_{k\,k'} &= \left\langle K,\ \psi^j_k\psi^j_{k'}\right\rangle, \beta^{j\,j'}_{k\,k'} = \left\langle K,\ \psi^j_k\psi^{j'}_{k'}\right\rangle, \gamma^{j\,j'}_{k\,k'} = \left\langle K,\ \psi^{j'}_{k'}\psi^j_k\right\rangle,\\ \delta^{JJ}_{k\,k'} &= \left\langle K,\ \varphi^J_k\varphi^J_{k'}\right\rangle, \varepsilon^{j\,J}_{k\,k'} = \left\langle K,\ \psi^j_k\varphi^J_{k'}\right\rangle,\ \zeta^{J\,j}_{kk'} = \left\langle K,\ \varphi^J_{k'}\psi^j_k\right\rangle.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Wir setzen die rechte Seite von $\mathbf{P}_0\,K(x,y)$ in (4.4) ein. Dadurch erhalten wir die

Projektion des Pseudo–Differential Operators $\mathrm{T}(f)(x)$ in die Zerlegung (4.5):

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P}_0\ \mathrm{T}\,\mathrm{P}_0^*)\,(\mathrm{P}_0\,f)(x) = & \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}_{N+1}\,K(x,\,y)f(y)\,dy \\
& \sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathbb{T}_j}\psi_k^j(x)\sum_{k'\in\mathbb{T}_j}\alpha_{k\,k'}^{j\,j}d_{k'}^j+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathbb{T}_j}\psi_k^j(x)\sum_{j'=j+1}^{J}\sum_{k'\in\mathbb{T}_{j'}}\beta_{k\,k'}^{j\,j'}d_{k'}^{j'} \\
& +\sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathbb{T}_j}\psi_k^j(x)\sum_{j'=1}^{j-1}\sum_{k'\in\mathbb{T}_{j'}}\gamma_{k\,k'}^{j\,j'}d_{k'}^{j'}+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathbb{T}_j}\psi_k^j(x)\sum_{k'\in\mathbb{T}_J}\varepsilon_{k\,k'}^{j\,J}s_{k'}^J \\
& +\sum_{k\in\mathbb{T}_J}\varphi_k^J(x)\sum_{j'=1}^{J}\sum_{k'\in\mathbb{T}_{j'}}\zeta_{k'\,k}^{J\,j}d_{k'}^{j'}(y)+\sum_{k\in\mathbb{T}_J}\varphi_k^J(x)\sum_{k'\in\mathbb{T}_J}\delta_{k\,k'}^{J\,J}s_{k'}^J \\
& \overset{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathbb{T}_j}\psi_k^j(x)\tilde{d}_k^j+\sum_{k\in\mathbb{T}_J}\varphi_k^J(x)\tilde{s}_k^J.
\end{aligned}
$$

Die $d_k^j=\left\langle f,\psi_k^j\right\rangle$ sind die Waveletkoeffizienten von f und $s_k^j=\left\langle f,\varphi_k^j\right\rangle$ die Skalierungskoeffizienten. $\tilde{d}_j$ und $\tilde{s}_j$ werden gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}_k^j &= \sum_{j'=1}^{j-1}\sum_{k'\in\mathbb{T}_{j'}}\gamma_{k\,k'}^{jj'}d_{k'}^{j'}+\sum_{k'\in\mathbb{T}_j}\alpha_{k\,k'}^{j\,j}d_{k'}^j+\sum_{j'=j+1}^{J}\sum_{k'\in\mathbb{T}_{j'}}\beta_{k\,k'}^{j\,j'}d_{k'}^{j'}+\sum_{k'\in\mathbb{T}_J}\varepsilon_{k\,k'}^{j\,J}s_{k'}^J, \\
\tilde{s}_k^J &= \sum_{j'=1}^{J}\sum_{k'\in\mathbb{T}_{j'}}\zeta_{k'k}^{Jj}d_{k'}^{j'}(y)+\sum_{k'\in\mathbb{T}_J}\delta_{k\,k'}^{J\,J}s_{k'}^J.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Wir erhalten die **S-Form eines Operators** mit 2^{2n} Freiheitsgraden, wenn wir (4.9) als Matrix–Vektor Multiplikation schreiben:

$$
\underbrace{\begin{array}{|c|}\hline A^1 \\ \hline C_1^2 \\ \hline C_1^3 \\ \hline \vdots \\ \hline C_1^J \\ \hline F^1 \\ \hline\end{array}}_{2^{n-1}}
\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_J^1 & E^1 \\ \hline A^2 & B_2^2 & \cdots & B_J^2 & E^2 \\ \hline C_2^3 & A^3 & \cdots & B_J^3 & E^3 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline C_2^J & C_3^J & \cdots & A^J & E^J \\ \hline F^2 & F^3 & \cdots & F^J & D^J \\ \hline\end{array}}_{\sum_{j=1}^{J}2^{n-1-j}+2^{n-1-J}=2^{n-1}}
\bullet
\begin{array}{|c|}\hline d_1 \\ \hline d_2 \\ \hline d_3 \\ \hline \vdots \\ \hline d_J \\ \hline s_J \\ \hline\end{array}
=
\begin{array}{|c|}\hline \tilde{d}_1 \\ \hline \tilde{d}_2 \\ \hline \tilde{d}_3 \\ \hline \vdots \\ \hline \tilde{d}_J \\ \hline \tilde{s}_J \\ \hline\end{array}
\tag{4.10}
$$

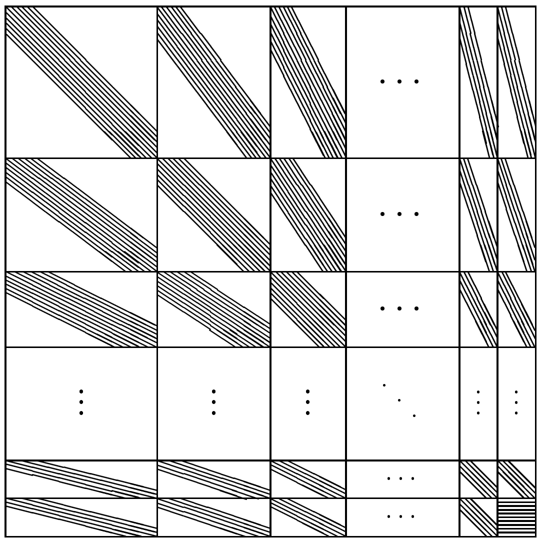
Die Block–Matrizen werden gemäß (4.9) bestimmt durch:

$$
\begin{aligned}
A^j &= \left\{\alpha^{jj}_{kk'}\right\} \ , \ B^j_{j'} = \left\{\beta^{jj'}_{kk'}\right\} \ , \ C^j_{j'} = \left\{\gamma^{jj'}_{kk'}\right\} \ , \\
D^J &= \left\{\delta^{JJ}_{kk'}\right\} \ , \ E^j = \left\{\varepsilon^{jJ}_{kk'}\right\} \ , \ F^j = \left\{\zeta^{Jj}_{k'k}\right\} \ .
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Die S-Form des Operators (4.4) ist eine $(M \times M)$–Matrix, wobei $M = 2^n$ die Anzahl der Skalierungsfunktionen auf dem feinsten Level ist:

$$
\begin{aligned}
\left(2^{n-1} + \sum_{j=1}^{J} 2^{n-1-j} + 2^{n-1-J}\right)^2 &= \left(2^{n-1} + 2^{n-2}\sum_{j=0}^{J-1} 2^{-j} + 2^{n-1-J}\right)^2 \\
&= \left(2^{n-1} + 2^{n-2}\frac{1-2^{-J}}{1-1/2} + 2^{n-1-J}\right)^2 \\
&= \left(2^{n-1} + 2^{n-1}\left(1-2^{-J}\right) + 2^{n-1-J}\right)^2 \\
&= 2^{2(n)}.
\end{aligned}
$$

Haben die Wavelets kompakte Träger, so sind die Blöcke in (4.10) nicht voll besetzt, sondern besitzen Bandstruktur. Es ergeben sich nur dort Einträge, wo sich die Träger überschneiden. Man erhält eine charakteristische *Fingerstruktur* für die Matrix (4.10):



(4.12)

Wir wollen nun die Matrixkoeffizienten (4.8) der S–Form berechnen. Beachte, daß die Basisfunktionen ψ^j_k definiert sind durch $\psi^j_k(x) = 2^{(n-j)/2}\psi(2^{n-j}x - k)$.

Wir beginnen mit den Diagonalmatrizen:

$$\begin{aligned}
\alpha^{jj}_{k\,k'} &= \int_{\mathbb{R}^2} K(x,\,y)\psi^j_k(x)\psi^j_{k'}(y)\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi^j_k(x) \int_{\mathbb{R}} K(x,\,y)\psi^j_{k'}(y)\,dy\,dx \\
&\overset{*}{=} 2^{\frac{n-j}{2}} \int_{\mathbb{R}} \psi^j_k(x) \int_{\mathbb{R}} \sigma(2^{n-j}y)\hat{\psi}(y)e^{i(2^{n-j}x-k')y}\,dy\,dx \\
&= 2^{n-j} \int_{\mathbb{R}} \sigma(2^{n-j}y)\hat{\psi}(y)e^{-ik'y} \int_{\mathbb{R}} \psi(2^{n-j}x-k)e^{i2^{n-j}xy}\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sigma(2^{n-j}y)\hat{\psi}(y)e^{-ik'y} \int_{\mathbb{R}} \psi(z)e^{i(z+k)y}\,dz\,dy \qquad (4.13) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sigma(2^{n-j}y)\hat{\psi}(y)e^{-ik'y}e^{iky}\overline{\int_{\mathbb{R}} \psi(z)e^{-izy}\,dz}\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sigma(2^{n-j}y)\hat{\psi}(y)\overline{\hat{\psi}(y)}e^{iy(k-k')}\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sigma(2^{n-j}y)\left|\hat{\psi}(y)\right|^2 e^{iyl}\,dy \\
&= \alpha^{jj}_l
\end{aligned}$$

mit $l = k - k' \in \mathbb{Z}$. In $(*)$ haben wir ausgenutzt, daß

$$\int_{\mathbb{R}} K(x,\,y)f(\alpha y - k)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \sigma(\alpha y)\hat{f}(y)e^{iy(\alpha x-k)}\,dy. \qquad (4.14)$$

Man kann (4.14) leicht nachrechnen, wenn man beachtet, daß $K(x,y) = \hat{\sigma}(x-y)$ ist. Die Diagonalmatrizen $\left\{\alpha^{jj}_{k-k'}\right\}$ können also mit der schnellen diskreten Fouriertransformation(FFT) berechnet werden. In den Nebendiagonalblöcken verhindert dies die Koppelung der unterschiedlichen Skalen untereinander. Für $\beta^{j\,j'}_{k\,k'}$ erhält man beispielsweise

$$\begin{aligned}
\beta^{j\,j'}_{k\,k'} &= 2^{\frac{j-j'}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sigma(i2^{n-j'}y)\hat{\psi}(y)\overline{\hat{\psi}\,(2^{j-j'}y)}e^{iy(2^{j-j'}k-k')}\,dy. \\
&= 2^{\frac{j+j'}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sigma(i2^{n}z)\hat{\psi}(2^{j'}z)\overline{\hat{\psi}\,(2^{j}z)}e^{iz(2^{j}k-2^{j'}k')}\,dz.
\end{aligned}$$

Es ist also erstrebenswert, die einzelnen Skalen zu entkoppeln, so daß alle Matrixkoeffizienten mit der FFT effizient berechnet werden können. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, wie man die Skalen entkoppeln kann.

4.3 Die Nicht–Standard–Form eines Operators

4.3.1 Der univariate Fall

4.3.1.1 Periodische Randbedingungen auf $\mathbb{T} = \mathbb{R}/[0,1]$

In diesem Abschnitt wollen wir die eindimensionale periodische NS–Form eines Operators vorstellen. Im Gegensatz zur S–Form sind hier die einzelnen Level untereinander entkoppelt und man kann alle Matrixkoeffizienten mit der FFT berechnen.
In Kapitel 2, Abschnitt 5 haben wir gesehen, daß die **Waveleträume der NS–Form**

$$\mathbf{W}_j = (W_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes W_j) \tag{4.15}$$

im Gegensatz zu denen der S–Form als orthogonale Komplemente einer orthogonalen MRA erzeugt werden. Die **NS–Form Basis des $\mathbf{W}_j$** wird durch

$$\left\{\psi_k^j(x)\psi_{k'}^j(y), \psi_k^j(x)\varphi_{k'}^j(y), \varphi_k^j(x)\psi_{k'}^j(y)\right\}_{k,k'\in\mathbb{T}_j}^{j=1,\cdots,J} \tag{4.16}$$

gegeben. In diesem Abschnitt sei die zugrundeliegende MRA orthogonal und periodisch. Wir werden im Folgenden eine umgekehrte Indizierung der Skalierungs- und Waveleträume benutzen. $\mathbb{T}_j = \{0, \cdots, 2^{n-j}-1\}$ sei die Indexmenge der Basisfunktionen auf dem Level j. Der $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}/[0,1])$ wird durch eine absteigende Fahne von Unterräumen gefiltert:

$$\begin{aligned} V_0 \supset\ V_1 \supset \cdots \supset\ V_N \supset \cdots, \qquad & V_j = \left\{\varphi_k^j\right\}_{k\in\mathbb{T}_j} \\ W_0 \supset W_1 \supset \cdots \supset W_N \supset \cdots, \qquad & W_j = \left\{\psi_k^j\right\}_{k\in\mathbb{T}_j}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

wobei V_j die Skalierungsräume und W_j die Waveleträume sind. Wir benutzen normierte Basisfunktionen $\psi_k^j(x) = 2^{(n-j)/2}\psi(2^{n-j}x-k)$ und $\varphi_k^j(x) = 2^{(n-j)/2}\varphi(2^{n-j}x-k)$. Beachte, daß sich durch die Normierung die **Skalierungsgleichungen** (2.40) um den Normierungsfaktor $\sqrt{2}$ verändern:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{T}_0} h_k\varphi(2x-k) \quad &\Longrightarrow \quad \varphi_k^j(x) = \sum_{k'\in\mathbb{T}_{j-1}} h_k\varphi_{2k+k'}^{j-1}(x), \\ \psi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{T}_0} g_k\psi(2x-k) \quad &\Longrightarrow \quad \psi_k^j(x) = \sum_{k'\in\mathbb{T}_{j-1}} g_k\varphi_{2k+k'}^{j-1}(x). \end{aligned} \tag{4.18}$$

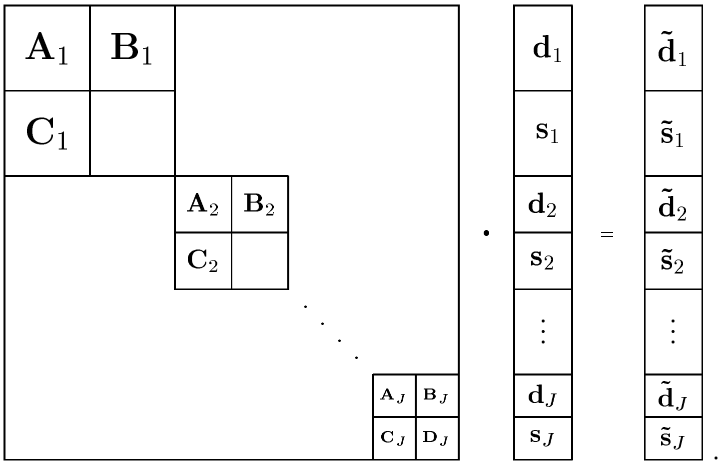
Genauso verändert sich auch die **Zerlegungsgleichung** (2.41) um den Normierungsfaktor $2^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} & \varphi(2x-l) = 2^{-1/2}\sum_{k\in\mathbb{T}_1}\left[q_{l-2k}\psi(x-k) + p_{l-2k}\varphi(x-k)\right] \\ \Longrightarrow \quad & \varphi_l^{j-1}(x) \quad = \sum_{k\in\mathbb{T}_j}\left[q_{l-2k}\ \psi_k^j(x) + p_{l-2k}\varphi_k^j(x)\right]. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Die NS–Form T_0 eines Pseudo–Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten

$$\mathrm{T}(f)(x) = \sigma(D)(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,\, y) f(y)\, dy \tag{4.20}$$

erhält man genauso wie seine S–Form: Man entwickelt den Kern $K(x, y)$ nach der NS-Form Basis und setzt diesen in (4.20) ein. Die **NS–Form Matrix** des Operators hat die folgende Struktur:



(4.21)

Dabei werden die Blöcke von T_0 gegeben durch die Matrizen

$$\begin{aligned} A_j &= \left\{\alpha^j_{kk'}\right\}_{k,k' \in \mathbb{T}_j}, \quad B_j = \left\{\beta^j_{kk'}\right\}_{k,k' \in \mathbb{T}_j} \\ C_j &= \left\{\gamma^j_{kk'}\right\}_{k,k' \in \mathbb{T}_j}, \quad D_J = \left\{\delta^J_{kk'}\right\}_{k,k' \in \mathbb{T}_J} \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha^j_{kk'} &= \left\langle K, \psi^j_k \psi^j_{k'} \right\rangle = \left\langle T\psi^j_k, \psi^j_{k'} \right\rangle, \quad \beta^j_{kk'} = \left\langle K, \psi^j_k \varphi^j_{k'} \right\rangle = \left\langle T\psi^j_k, \varphi^j_{k'} \right\rangle, \\ \gamma^j_{kk'} &= \left\langle K, \varphi^j_k \psi^j_{k'} \right\rangle = \left\langle T\varphi^j_k, \psi^j_{k'} \right\rangle, \quad \delta^j_{kk'} = \left\langle K, \varphi^j_k \varphi^j_{k'} \right\rangle = \left\langle T\varphi^j_k, \varphi^j_{k'} \right\rangle. \end{aligned}$$

Die $\mathbf{d}_j$ sind die Waveletkoeffizienten von f und die $\mathbf{s}_j$ sind deren Skalierungskoeffizienten.

4.1. Bemerkung. Die NS–Form eines Pseudo–Differential Operators kann also als eine Art hybride Petrov–Galerkin Approximation betrachtet werden, wobei die Wavelets und die Skalierungsfunktionen sowohl Test– als auch Ansatzfunktionen sind.

4.2. Bemerkung. Der Vektor auf der rechten Seite von (4.21) muß noch in eine Basis transformiert werden, da die Koeffizienten $\tilde{\mathbf{d}}_j$, $\tilde{\mathbf{s}}_j$ bezüglich des Erzeugendensystems $\left\{\psi^j_k,\, \varphi^j_{k'}\right\}^{j=1,\cdots,J}_{k,k' \in \mathbb{T}_j}$ dargestellt sind. Nur auf diese Wiese können die Skalen entkoppelt werden. Wir können T_0 entweder durch sukzessives Anwenden der Zerlegungsgleichung (4.19) in die Waveletbasis $\left\{\psi^j_k\right\}^{j=1,\cdots,J}_{k \in \mathbb{T}_j}$ transformieren oder mit Hilfe der

Skalierungsgleichungen (4.18) in die Skalierungsbasis $\{\varphi_k^0\}_{k\in\mathbb{T}_0}$. Dabei sind $\bar{d}_k^j$ und $\bar{s}_k^j$ die Wavelet– bzw. die Skalierungskoeffizienten der rechten Seite der NS–Form (4.21)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_0 \sum_{j=1}^{J} \sum_{k\in\mathbb{T}_j} & \left(\psi_k^j(x) d_{k'}^j + \varphi_k^j(x) s_{k'}^j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{J} \sum_{k\in\mathbb{T}_j} \left(\psi_k^j(x) \tilde{d}_{k'}^j + \varphi_k^j(x) \tilde{s}_{k'}^j\right) \\
&\overset{(4.21)}{=} \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k\in\mathbb{T}_j} \left(\psi_k^j(x) \sum_{k'\in\mathbb{T}_j} \left(\alpha_{kk'}^j d_{k'}^j + \beta_{kk'}^j s_{k'}^j\right) + \varphi_k^j(x) \sum_{k'\in\mathbb{T}_j} \gamma_{kk'}^j d_{k'}^j\right) \\
&\quad + \sum_{k\in\mathbb{T}_J} \left(\psi_k^J(x) \sum_{k'\in\mathbb{T}_J} \left(\alpha_{kk'}^J d_{k'}^J + \beta_{kk'}^J s_{k'}^J\right) + \varphi_k^J(x) \sum_{k'\in\mathbb{T}_J} \left(\gamma_{kk'}^J d_{k'}^J + \delta_{kk'}^J s_{k'}^J\right)\right) \\
&\overset{(4.19)}{=} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k\in\mathbb{T}_j} \bar{d}_k^j \psi_k^j(x) + \sum_{k\in\mathbb{T}_J} \bar{s}_k^J \varphi_k^J(x) \\
&\overset{(4.18)}{=} \sum_{k\in\mathbb{T}_0} \bar{s}_k^0 \varphi_k^0(x).
\end{aligned}
$$

Wir verwenden eine leicht modifizierte Wavelet–Transformation (2.44), um die Koeffizienten des Erzeugendensystems in eine Wavelet–Basis zu transformieren bzw. die inverse Transformation, um diese in die Skalierungsbasis abzubilden. Anstatt die Koeffizienten des Erzeugendensystems zu überschreiben, werden die Zwischenvektoren der Wavelet–Transformation zu diesen Koeffizienten hinzuaddiert. Wir erhalten also folgendes

Schema zur Transformation der NS–Basis in eine Wavelet–Basis

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{s}_1 \arrow[r, "\mathbf{H}_2"] \arrow[dr, "\mathbf{G}_2"] & \bar{\mathbf{s}}_2 \arrow[r, "+"] & \bar{\mathbf{s}}_2 + \tilde{\mathbf{s}}_2 = \mathbf{s}_2 \arrow[r, "\mathbf{H}_3"] \arrow[dr, "\mathbf{G}_3"] & \bar{\mathbf{s}}_3 \arrow[r, "+"] & \bar{\mathbf{s}}_3 + \tilde{\mathbf{s}}_3 = \mathbf{s}_3 \arrow[r, "\mathbf{H}_4"] \arrow[dr, "\mathbf{G}_4"] & \cdots & \mathbf{s}_J \\
\tilde{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{d}_1 & \bar{\mathbf{d}}_2 \arrow[r, "+"] & \bar{\mathbf{d}}_2 + \tilde{\mathbf{d}}_2 = \mathbf{d}_2 & \bar{\mathbf{d}}_3 \arrow[r, "+"] & \bar{\mathbf{d}}_3 + \tilde{\mathbf{d}}_3 = \mathbf{d}_3 & \cdots & \mathbf{d}_J
\end{tikzcd}
$$

4.1. Algorithmus. *Transformation der NS–Basis in eine Wavelet–Basis*

1. Setze $\bar{\mathbf{s}}_1 = \bar{\mathbf{d}}_1 = 0$ und

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}_1 &= \bar{\mathbf{s}}_1 + \tilde{\mathbf{s}}_1, \\
\mathbf{d}_1 &= \bar{\mathbf{d}}_1 + \tilde{\mathbf{d}}_1;
\end{aligned}
$$

2. Berechne die Waveletkoeffizienten iterativ:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{s}}_j &= \mathbf{H}_j\, \mathbf{s}_{j-1}, \\ \bar{\mathbf{d}}_j &= \mathbf{G}_j\, \mathbf{s}_{j-1}, \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \mathbf{s}_j &= \bar{\mathbf{s}}_j + \tilde{\mathbf{s}}_j, \\ \mathbf{d}_j &= \bar{\mathbf{d}}_j + \tilde{\mathbf{d}}_j \end{aligned} \qquad j \,=\, 2, \ldots, J.$$

Für die inverse Transformation erhalten wir folgendes

Schema zur Transformation der NS–Basis in eine Skalierungsbasis

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbf{s}}_J = \mathbf{s}_J \arrow[r, "\mathbf{H}^*_{J-1}"] & \bar{\mathbf{s}}_{J-1} \arrow[r, "+"] & \bar{\mathbf{s}}_{J-1} + \tilde{\mathbf{s}}_{J-1} = \mathbf{s}_{J-1} \arrow[r, "\mathbf{H}^*_{J-2}"] & \bar{\mathbf{s}}_{J-2} \arrow[r, "+"] & \cdots \quad s_0 \\ \tilde{\mathbf{d}}_J = \mathbf{d}_J \arrow[ur, "\mathbf{G}^*_{J-1}"'] & & \tilde{\mathbf{d}}_{J-1} = \mathbf{d}_{J-1} \arrow[ur, "\mathbf{G}^*_{J-2}"'] & & \end{tikzcd}$$

4.2. Algorithmus. *Transformation der NS–Basis in eine Skalierungsbasis*

1. Setze $\bar{\mathbf{s}}_J \,=\, 0$ und

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_J &= \tilde{\mathbf{s}}_J + \bar{\mathbf{s}}_J, \\ \mathbf{d}_J &= \tilde{\mathbf{d}}_J; \end{aligned}$$

2. Berechne die Skalierungskoeffizienten iterativ:

$$\bar{\mathbf{s}}_{j-1} = \mathbf{H}^*_{j-1}\, \mathbf{s_j} + \mathbf{G}^*_{j-1}\, \mathbf{d_j}, \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \mathbf{s}_{j-1} &= \tilde{\mathbf{s}}_{j-1} + \bar{\mathbf{s}}_{j-1}, \\ \mathbf{d}_{j-1} &= \tilde{\mathbf{d}}_{j-1}, \end{aligned} \qquad j \,=\, J, \ldots, 1.$$

Wir wollen noch eine alternative Methode zur Herleitung der NS–Form angeben, die nach unserer Auffassung wesentlich übersichtlicher ist und dadurch auch besser geeignet ist, die NS–Form auf nichtperiodische Randbedingungen und Mehrdimensionalität zu verallgemeinern. Wir nennen diese die **Projektionsmethode**. Die orthogonalen Projektionen P_j und Q_j werden gegeben durch

$$\mathrm{P}_j\, f = \sum_{k \in \mathbb{T}_j} s^j_k \varphi^j_k, \qquad \mathrm{Q}_j\, f = \sum_{k \in \mathbb{T}_j} d^j_k \psi^j_k. \tag{4.22}$$

Die Projektionen sind selbstadjungiert, da $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ jeweils eine ONB erzeugen. Man kann leicht nachrechnen, daß $\left\langle \mathrm{P}_j\, f, g \right\rangle = \left\langle f, \mathrm{P}_j\, g \right\rangle$ bzw. $\left\langle \mathrm{Q}_j\, f, h \right\rangle = \left\langle f, \mathrm{Q}_j\, h \right\rangle$ ist. Die Projektionen sind also symmetrisch. Außerdem ist $\mathcal{D}\left(\mathrm{P}_j\right) = \mathcal{D}\left(\mathrm{Q}_j\right) = \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}/[0,1]\right)$, d. h. die Projektionen sind selbstadjungiert. Wir projizieren nun T auf V_0:

$$\mathrm{T}_0 = \mathrm{P}_0\, \mathrm{T}\, \mathrm{P}^*_0 \,:\, \mathrm{V}_0 \to \mathrm{V}_0 \tag{4.23}$$

und entwickeln T_0 in eine Teleskopreihe

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_0 &= \sum_{j=1}^{J} \left(\mathrm{P}_{j-1}\,\mathrm{T}\,\mathrm{P}^*_{j-1} - \mathrm{P}_j\,\mathrm{T}\,\mathrm{P}^*_j\right) + \mathrm{P}_J\,\mathrm{T}\,\mathrm{P}^*_J \\
&= \sum_{j=1}^{J} \Big[\left(\mathrm{P}_{j-1} - \mathrm{P}_j\right) \mathrm{T} \left(\mathrm{P}^*_{j-1} - \mathrm{P}^*_j\right) + \left(\mathrm{P}_{j-1} - \mathrm{P}_j\right) \mathrm{T}\,\mathrm{P}^*_j \\
&\qquad + \mathrm{P}_j\ \mathrm{T} \left(\mathrm{P}^*_{j-1} - \mathrm{P}^*_j\right) \Big] + \mathrm{P}_J\,\mathrm{T}\,\mathrm{P}^*_J\,.
\end{aligned}$$

Einsetzen der Orthogonalprojektion $\mathrm{Q}_j \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{P}_{j-1} - \mathrm{P}_j$ auf die W_j–Räume ergibt die NS–Form T_0 des Operators $\mathrm{T}(f)(x) = \sigma(D)f(x)$:

$$\boxed{\mathrm{T}_0 = \sum_{j=1}^{J} \left(\mathrm{Q}_j\,\mathrm{T}\,\mathrm{Q}^*_j + \mathrm{Q}_j\,\mathrm{T}\,\mathrm{P}^*_j + \mathrm{P}_j\,\mathrm{T}\,\mathrm{Q}^*_j\right) + \mathrm{P}_J\,\mathrm{T}\,\mathrm{P}^*_J} \tag{4.24}$$

mit

$$\begin{aligned}
A_j &= \mathrm{Q}_j\ \mathrm{T}\ \mathrm{Q}^*_j\ : W_j \to W_j, \\
B_j &= \mathrm{Q}_j\ \mathrm{T}\ \mathrm{P}^*_j\ : V_j \to W_j, \\
C_j &= \mathrm{P}_j\ \mathrm{T}\ \mathrm{Q}^*_j\ : W_j \to V_j, \\
D_J &= \mathrm{P}_J\ \mathrm{T}\ \mathrm{P}^*_J\ : V_J \to V_J.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Wir setzen nun die Definition der Orthogonalprojektionen (4.22) in (4.25) ein.

$$\begin{aligned}
A_j\,f_j &= \mathrm{Q}_j \left(\sum_{k'\in\mathbb{T}_j} \langle f, \psi^j_{k'}\rangle T\psi^j_{k'} \right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{T}_j} \sum_{k'\in\mathbb{T}_j} \langle f, \psi^j_{k'}\rangle \langle T\psi^j_{k'}, \psi^j_k\rangle \psi^j_k \\
&= \sum_{k\in\mathbb{T}_j} \psi^j_k \sum_{k'\in\mathbb{T}_j} d^j_{k'}\alpha^j_{kk'}, \\
B_j\,f_j &= \sum_{k\in\mathbb{T}_j} \psi^j_k \sum_{k'\in\mathbb{T}_j} s^j_{k'}\beta^j_{kk'}, \\
C_j\,f_j &= \sum_{k\in\mathbb{T}_j} \varphi^j_k \sum_{k'\in\mathbb{T}_j} d^j_{k'}\gamma^j_{kk'}, \\
D_J\,f_J &= \sum_{k\in\mathbb{T}_j} \varphi^J_k \sum_{k'\in\mathbb{T}_j} s^J_{k'}\delta^J_{kk'},
\end{aligned} \tag{4.26}$$

dabei ist $f_j = P_j f$ die Projektion der Funktion f auf den Ansatzraum V_j. Wir definieren die Blockmatrizen $\mathbf{A}_j = \left\{\alpha^j_{kk'}\right\}$, $\mathbf{B}_j = \left\{\beta^j_{kk'}\right\}$, $\mathbf{C}_j = \left\{\gamma^j_{kk}\right\}$, $\mathbf{D}_J = \left\{\delta^J_{kk}\right\}$ in gewohnter Weise durch

$$
\begin{aligned}
\alpha^j_{kk'} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\langle T\psi^j_{k'}, \psi^j_k\right\rangle = \left\langle K, \psi^j_{k'}\psi^j_k\right\rangle,\\
\beta^j_{kk'} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\langle T\psi^j_{k'}, \varphi^j_k\right\rangle = \left\langle K, \psi^j_{k'}\varphi^j_k\right\rangle,\\
\gamma^j_{kk'} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\langle T\varphi^j_{k'}, \psi^j_k\right\rangle = \left\langle K, \varphi^j_{k'}\psi^j_k\right\rangle,\\
\delta^J_{kk'} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\langle T\varphi^J_{k'}, \varphi^J_k\right\rangle = \left\langle K, \varphi^J_{k'}\varphi^J_k\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Bei der **Berechnung der NS–Form** gehen wir analog der Berechnung der A^j–Blöcke der S-Form (4.13) vor:

$$
\begin{aligned}
\delta^j_{k\,k'} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi^j_k(x)\sigma(D)\varphi^j_{k'}(x)\,dx\\
&= 2^{n-j}\int_{\mathbb{R}} \varphi(2^{n-j}x-k)\int_{\mathbb{R}} \sigma(2^{n-j}y)\hat{\varphi}(y)e^{\left(2^{n-j}x-k'\right)y}\,dy\,dx\\
&= 2^{n-j}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(y)\sigma(2^{n-j}y)e^{-ik'y}\int_{\mathbb{R}} \varphi(2^{n-j}x-k)e^{i2^{n-j}xy}\,dx\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(y)\sigma(2^{n-j}y)e^{-ik'y}\int_{\mathbb{R}} \varphi(z)e^{i(z+k)y}\,dz\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(y)\sigma(2^{n-j}y)e^{-iy(k'-k)}\overline{\int_{\mathbb{R}} \varphi(z)e^{-izy}\,dz}\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}} \sigma(2^{n-j}y)\hat{\varphi}(y)\overline{\hat{\varphi}(y)}e^{-iyl}\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}} \sigma(2^{n-j}y)\left|\hat{\varphi}(y)\right|^2 e^{-iyl}\,dy\\
&\stackrel{\text{def}}{=} \delta^j_l
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

mit $l = k' - k$.

4.3. Bemerkung.

- Falls das **Symbol** $\sigma(x)$ **reell und gerade** ist, d. h. $\sigma(-x) = \sigma(x)$, dann sind die Koeffizienten $\alpha^j_l, \beta^j_l, \gamma^j_l$ und δ^j_l reell und es gilt:

  $$
  \begin{aligned}
  \alpha^j_l &= \alpha^j_{-l}, & \beta^j_l &= \beta^j_{-l},\\
  \gamma^j_l &= \gamma^j_{-l}, & \delta^j_l &= \delta^j_{-l}.
  \end{aligned}
  $$

  Außerdem sieht man gut, daß folgende Symmetrien gelten

  $$
  \begin{aligned}
  \alpha^j_l &= \alpha^j_{N-l}, & \delta^j_l &= \delta^j_{N-l},\\
  \beta^j_l &= -\gamma^j_{-l}, & \gamma^j_l &= -\beta^j_{-l}.
  \end{aligned}
  $$

Die A_j– und die D_j–Blöcke der NS–Form sind *reelle zyklische Toeplitz–Matrizen*: $\mathrm{T} = \left\{ t_l \in \mathbb{R} \mid 0 \leq |l| < N,\, t_l = t_{N-l},\, t_l = t_{-l} \right\}$. Man muß also nur die Koeffizienten $t_0, \cdots, t_{N/2}$ abspeichern. Wegen der Beziehung $\beta_l^j = -\gamma_{-l}^j$ reicht es für die B_j– und die C_j–Blöcke, wenn man sich eine Koeffizientenfolge $\left\{\beta_k^j\right\}$ oder $\left\{\gamma_k^j\right\}$ merkt.

- Falls das **Symbol** $\sigma(x)$ **imaginär und ungerade** ist, d. h. $\sigma(-x) = -\sigma(x)$, dann sind die Koeffizienten $\alpha_l^j, \beta_l^j, \gamma_l^j$ und δ_l^j reell und es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_l^j &= -\alpha_{-l}^j, & \beta_l^j &= -\beta_{-l}^j, \\ \gamma_l^j &= -\gamma_{-l}^j, & \delta_l^j &= -\delta_{-l}^j. \end{aligned}$$

Außerdem gelten folgende Symmetrien

$$\begin{aligned} \alpha_l^j &= -\alpha_{N-l}^j, & \delta_l^j &= -\delta_{N-l}^j, \\ \beta_l^j &= \gamma_{-l}^j, & \gamma_l^j &= \beta_{-l}^j. \end{aligned}$$

Die A_j– und die D_j–Blöcke der NS–Form sind *reelle antizyklische Toeplitz–Matrizen*: $\mathrm{T} = \left\{ t_l \in \mathbb{R} \mid 0 \leq |l| < N,\, t_l = -t_{N-l},\, t_l = -t_{-l} \right\}$. Auch hier müßen nur die Koeffizienten $t_0, \cdots, t_{N/2}$ abgespeichert werden und es reicht, wenn man sich eine Koeffizientenfolge der Blöcke B_j oder C_j merkt.

Die Toeplitz–Matizen haben folgende Struktur:

zyklische Toeplitz–Matrizen **antizyklische Toeplitz–Matrizen**

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{\frac{N}{2}} & \iddots & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_1 & x_2 & \iddots & x_{\frac{N}{2}} & \iddots & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_1 & x_2 & \iddots & x_{\frac{N}{2}} & \iddots \\ \vdots & x_2 & x_1 & x_0 & x_1 & x_2 & \iddots & x_{\frac{N}{2}} \\ x_{\frac{N}{2}} & \iddots & x_2 & x_1 & x_0 & x_1 & x_2 & \vdots \\ \iddots & x_{\frac{N}{2}} & \iddots & x_2 & x_1 & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_2 & \iddots & x_{\frac{N}{2}} & \iddots & x_2 & x_1 & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_1 & \iddots & x_{\frac{N}{2}} & \dots & x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{\frac{N}{2}} & \iddots & -x_2 & -x_1 \\ -x_1 & x_0 & x_1 & x_2 & \iddots & x_{\frac{N}{2}} & \iddots & -x_2 \\ -x_2 & -x_1 & x_0 & x_1 & x_2 & \iddots & x_{\frac{N}{2}} & \iddots \\ \vdots & -x_2 & -x_1 & x_0 & x_1 & x_2 & \iddots & x_{\frac{N}{2}} \\ x_{\frac{N}{2}} & \iddots & -x_2 & -x_1 & x_0 & x_1 & x_2 & \vdots \\ \iddots & x_{\frac{N}{2}} & \iddots & -x_2 & -x_1 & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_2 & \iddots & x_{\frac{N}{2}} & \iddots & -x_2 & -x_1 & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & \iddots & x_{\frac{N}{2}} & \dots & -x_2 & -x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

4.1. Beispiel.

- **Die (2p+1)–te partielle Ableitung**
  Das Symbol $\sigma_{2p+1}(x) = (ix)^{2p+1}$ ist imaginär und ungerade.

- **Die 2p–te partielle Ableitung**
  Das Symbol $\sigma_{2p}(x) = (ix)^{2p}$ ist reell und gerade.
- **Die Halbgruppe der Wärmegleichung**
  Das Symbol $\sigma(x) = e^{tx^2}$ ist reell und gerade.
- **Die operatorwertige Funktion der Burgers–Gleichung**
  Das Symbol $\sigma(x) = \frac{1-e^{tx^2}}{x^2}$ ist reell und gerade.

4.2. Beispiel. Man kann die Eigenwerte $\{\lambda_i\}_i$ einer zyklischen Toeplitz–Matrix X_i leicht mit Hilfe der diskreten Fourier–Transformation angeben [DG58] S.210 f.:

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_i e^{2\pi ijk/N}.$$

Die Koeffizienten der übrigen Block–Matrizen können nun mit Hilfe der Skalierungsgleichungen (4.18) iterativ aus den δ_k^0 berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\alpha_l^j &= \langle \psi_k^j, T\psi_{k'}^j \rangle = \sum_{n,n' \in \mathbb{T}_j} h_n h_{n'} \delta_{2l+n-n'}^{j-1} \\
\beta_l^j &= \langle \psi_k^j, T\varphi_{k'}^j \rangle = \sum_{n,n' \in \mathbb{T}_j} g_n h_{n'} \delta_{2l+n-n'}^{j-1} \\
\gamma_l^j &= \langle \varphi_k^j, T\psi_{k'}^j \rangle = \sum_{n,n' \in \mathbb{T}_j} h_n g_{n'} \delta_{2l+n-n'}^{j-1} \\
\delta_l^j &= \langle \varphi_k^j, T\varphi_{k'}^j \rangle = \sum_{n,n' \in \mathbb{T}_j} g_n g_{n'} \delta_{2l+n-n'}^{j-1}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

In Matrixschreibweise lauten die Gleichungen (4.29) folgendermaßen

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{W}\, D^{j-1}\, \mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^j & \mathbf{B}^j \\ \mathbf{C}^j & \mathbf{D}^j \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, J. \tag{4.30}$$

Dabei ist $\mathbf{W} = \binom{\mathbf{H}}{\mathbf{G}}$ die diskreten Wavelet–Transformation. Die Matrizen der einzelnen Level werden also gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{A^j} &= \mathbf{H}_j\, D^{j-1}\mathbf{H}_j^*, & \mathbf{B^j} &= \mathbf{H}_j\, D^{j-1}\mathbf{G}_j^*, \\
\mathbf{C^j} &= \mathbf{G}_j\, D^{j-1}\mathbf{H}_j^*, & \mathbf{D^j} &= \mathbf{G}_j\, D^{j-1}\mathbf{G}_j^*.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Für *homogene Symbole* $\sigma(x)$, d. h. $\sigma_p(\alpha x) = \alpha^p\sigma(x)$, reduziert sich der Aufwand zur Bestimmung der Matrixkoeffizienten beträchtlich. Aus (4.28) folgt, daß sich die Koeffizienten der Level $j > 1$ durch Skalieren berechnen lassen:

$$\begin{aligned}
\alpha_l^j &= 2^{-pj}\alpha_{2^j l}^1, & \beta_l^j &= 2^{-pj}\beta_{2^j l}^1, \\
\gamma_l^j &= 2^{-pj}\gamma_{2^j l}^1, & \delta_l^j &= 2^{-pj}\delta_{2^j l}^1
\end{aligned} \tag{4.32}$$

für $l \in \mathbb{T}_j$. Am einfachsten ist es, die Koeffizienten α_k^1, β_k^1, γ_k^1 und δ_k^1 mit (4.29) zu bestimmen und dann (4.32) anzuwenden.

4.3. Beispiel.

- **Die p–te partielle Ableitung**
  Das Symbol $\sigma_p(x) = (ix)^p$ ist *homogen*, wir können also die Blöcke der NS–Form durch (4.32) berechnen.

- **Die Halbgruppe der Wärmegleichung**
  Das Symbol $\sigma(x) = e^{tx^2}$ ist *nichthomogen*. Wir müßen also die NS–Form durch (4.29) berechnen.

- **Die operatorwertige Funktion der Burgers–Gleichung**
  Das Symbol $\sigma(x) = \frac{e^{tx^2}-1}{x^2}$ ist ebenfalls *nichthomogen*.

Wir wollen nun die Koeffizienten δ_l^0 der Startmatrix D^0 berechnen. Dazu periodisieren wir die Integranden in (4.28)

$$\begin{aligned}\delta_l^0 &= \int\limits_{\mathbb{R}} \sigma(2^n y)\, |\hat{\varphi}(y)|^2\, e^{-iyl}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma(2^n(y+2\pi k))\, |\hat{\varphi}(y+2\pi k)|^2\, e^{-iyl}\, dy \\ &= \int\limits_0^{2\pi} g_0(y) e^{-iyl}\, dy,\end{aligned}$$

wobei

$$g_j(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma(2^{n-j}(y+2\pi k))\, |\hat{\varphi}(y+2\pi k)|^2 .$$

$|\hat{\varphi}(y)|^2$ kann als eine Abschneidefunktion betrachtet werden, da $\hat{\varphi} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, d. h. $|\hat{\varphi}(y)|^2$ muß im Unendlichen verschwinden. In der Regel wird jedoch das Symbol $\sigma(x)$ wesentlich schneller *abklingen*, da es ja von einem Pseudo–Differential Operator stammt. Wir können $g_0(x)$ also durch eine endliche Summe approximieren:

$$\tilde{g}_0(y) = \sum_{k=-K}^{K} \sigma(2^n(y+2\pi k))\, |\hat{\varphi}(y+2\pi k|^2 . \tag{4.33}$$

Die Fourier–Integrale $\delta_l^0 = \hat{g}_0$ und $\tilde{\delta}_l^0 = \hat{\tilde{g}}_0$ berechnen wir mittels der FFT:

$$\delta_l^0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_0(\xi_k) e^{-i\xi_k l}\, dy, \qquad \tilde{\delta}_l^0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{g}_0(\xi_k) e^{-i\xi_k l}\, dy \tag{4.34}$$

wobei $\xi_k = \frac{2\pi k}{n}$. Im Folgenden wird die Tilde weggelassen, wenn klar ist, daß mit der Approximation gearbeitet wird. Aus dem bisher Gesagten ergeben sich zwei Methoden zur Approximation der NS–Form eines Operators:

4.1. Methode. *Approximation der NS–Form eines Operators mit nichthomogenem Symbol*

1. Berechne die Startmatrix $D^0 = \{\delta_l^0\}_{l\in\mathbb{T}_0}$ mittels (4.34):

$$\delta_l^0 = 2^{-n} \sum_{k\in\mathbb{T}_0} \tilde{g}_0(\xi_k) e^{i\xi_k l}.$$

2. Berechne die $\mathbf{T}_{j+1}$–Blöcke mittels (4.29) oder (4.30):

$$\mathbf{T}_{j+1} = \mathbf{W}\, D^j\, \mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{j+1} & \mathbf{B}^{j+1} \\ \mathbf{C}^{j+1} & \mathbf{D}^{j+1} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} \alpha_k^{j+1} &= \sum_{l,l'\in\mathbb{T}_j} h_l h_{l'} \delta^j_{2k+l-l'}, \\ \beta_k^{j+1} &= \sum_{l,l'\in\mathbb{T}_j} h_l g_{l'} \delta^j_{2k+l-l'}, \\ \gamma_k^{j+1} &= \sum_{l,l'\in\mathbb{T}_j} g_l h_{l'} \delta^j_{2k+l-l'}, \\ \delta_k^{j+1} &= \sum_{l,l'\in\mathbb{T}_j} g_l g_{l'} \delta^j_{2k+l-l'}, \end{aligned}$$

für $j = 0, \cdots, J-1$ und $k \in \mathbb{T}_{j+1}$.

4.2. Methode. *Approximation der NS–Form eines Operators mit homogenem Symbol*

1. Berechne die Startmatrix $D^0 = \left\{\delta_l^j\right\}_{l\in\mathbb{T}_0}$ mittels (4.34):

$$\delta_l^0 = 2^{-n} \sum_{k\in\mathbb{T}_0} \tilde{g}_0(\xi_k) e^{i\xi_k l}.$$

2. Berechne den $\mathbf{T}_1$–Block mittels (4.29) oder (4.30) aus der Startmatrix D^0:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{W}\, D^0\, \mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 & \mathbf{B}^1 \\ \mathbf{C}^1 & \mathbf{D}^1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} \alpha_k^1 &= \sum_{l,l'\in\mathbb{T}_0} h_l h_{l'} \delta^0_{2k+l-l'}, \\ \beta_k^1 &= \sum_{l,l'\in\mathbb{T}_0} h_l g_{l'} \delta^0_{2k+l-l'}, \\ \gamma_k^1 &= \sum_{l,l'\in\mathbb{T}_0} g_l h_{l'} \delta^0_{2k+l-l'}, \\ \delta_k^1 &= \sum_{l,l'\in\mathbb{T}_0} g_l g_{l'} \delta^0_{2k+l-l'}. \end{aligned}$$

3. Berechne die gröberen Level durch Skalieren aus dem ersten Level mittels (4.32):

$$\begin{aligned} \alpha_k^j &= 2^{-p(j-1)}\alpha_{2^{j-1}k}^1, \\ \beta_k^j &= 2^{-p(j-1)}\beta_{2^{j-1}k}^1, \\ \gamma_k^j &= 2^{-p(j-1)}\gamma_{2^{j-1}k}^1, \\ \delta_k^J &= 2^{-p(j-1)}\delta_{2^{j-1}k}^1 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} &j = 2, \dots, J \\ &k \in \mathbb{T}_j. \end{aligned}$$

4.3.1.2 Nichtperiodische Randbedingungen auf $[0, 1]$

Wir betrachten eine orthogonale Multiskalen–Analyse(multiresolution analysis — MRA) auf $\mathrm{L}^2\big([0,1]\big)$ — siehe dazu auch Kapitel 2.3.2:

$$\mathrm{V}_0^{[0,1]} \subseteq \mathrm{V}_1^{[0,1]} \subseteq \mathrm{V}_2^{[0,1]} \dots \tag{4.35}$$

mit

$$\mathrm{V}_j^{[0,1]} = {}^l\mathrm{V}_j^{[0,1]} \oplus {}^m\mathrm{V}_j^{[0,1]} \oplus {}^r\mathrm{V}_j^{[0,1]}, \tag{4.36}$$

dabei wird ${}^l\mathrm{V}_j^{[0,1]}$ von den Skalierungsfunktionen des linken Randes, ${}^m\mathrm{V}_j^{[0,1]}$ von den inneren Skalierungsfunktionen und ${}^r\mathrm{V}_j^{[0,1]}$ von den Skalierungsfunktionen des rechten Randes aufgespannt:

$$\begin{aligned} {}^l\mathrm{V}_j^{[0,1]} &= \operatorname{span}\big\{ {}^l\varphi_k^j : 0 \le k < M-1 \big\} \\ {}^m\mathrm{V}_j^{[0,1]} &= \operatorname{span}\big\{ {}^m\varphi_k^j : M-1 \le k < 2^{N-j} - M \big\} \\ {}^r\mathrm{V}_j^{[0,1]} &= \operatorname{span}\big\{ {}^r\varphi_k^j : 0 \le k < M-1 \big\}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

M ist die Anzahl der verschwindenden Momente. Beachte, daß der feinste Level N groß genug gewählt werden muß, so daß ${}^l\mathrm{V}_j^{[0,1]}$ und ${}^r\mathrm{V}_j^{[0,1]}$ disjunkt sind: ${}^l\mathrm{V}_j^{[0,1]} \bigcap {}^r\mathrm{V}_j^{[0,1]} = \emptyset$ für $j = 1, \dots, J$. Die Waveleträume werden in gewohnter Weise als Differenzräume definiert:

$$\mathrm{W}_{j+1}^{[0,1]} = \mathrm{V}_j^{[0,1]} \ominus \mathrm{V}_{j+1}^{[0,1]}. \tag{4.38}$$

Auch sie besitzen eine orthogonale Zerlegung in Rand– und Innere–Waveleträume. Die Orthogonalprojektionen P_j und Q_j werden in Projektionen auf die einzelnen Teilräume eines Levels aufgespalten:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_j &= \mathrm{P}_j^l + \mathrm{P}_j^m + \mathrm{P}_j^r, \\ \mathrm{Q}_j &= \mathrm{Q}_j^l + \mathrm{Q}_j^m + \mathrm{Q}_j^r \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \mathrm{P}_j^\mu &: \mathrm{L}^2([0,1]) \longrightarrow {}^\mu\mathrm{V}_j^{[0,1]}, \\ \mathrm{Q}_j^\mu &: \mathrm{L}^2([0,1]) \longrightarrow {}^\mu\mathrm{W}_j^{[0,1]} \end{aligned} \tag{4.39}$$

für $\mu = l, m, r$. Die NS–Form eines Pseudo–Differentialoperators T wird gegeben durch

$$\mathrm{T}_0 = \mathrm{P}_0\, \mathrm{T}\, \mathrm{P}_0^* = \sum_{j=1}^{J} \left(\mathrm{A}_j + \mathrm{B}_j + \mathrm{C}_j \right) + \mathrm{D}_J \tag{4.40}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_j &= \mathrm{Q}_j\, \mathrm{T}\, \mathrm{Q}_j^*, \quad & \mathrm{B}_j &= \mathrm{Q}_j\, \mathrm{T}\, \mathrm{P}_j^*, \\ \mathrm{C}_j &= \mathrm{P}_j\, \mathrm{T}\, \mathrm{Q}_j^*, \quad & \mathrm{D}_J &= \mathrm{P}_J\, \mathrm{T}\, \mathrm{P}_J^*. \end{aligned}$$

Einsetzen der Orthogonalprojektionen aus (4.39) ergibt die **NS–Form mit Randbedingungen:**

$$\boxed{\mathrm{T}_0 = \mathrm{P}_0\, \mathrm{T}\, \mathrm{P}_0^* = \sum_{j=1}^{J} \sum_{\mu,\nu \in \Lambda} \left(\mathrm{A}_j^{\mu\nu} + \mathrm{B}_j^{\mu\nu} + \mathrm{C}_j^{\mu\nu} \right) + \sum_{\mu,\nu \in \Lambda} \mathrm{D}_J^{\mu\nu}}$$

mit der Indexmenge $\Lambda = \left\{ l, m, r \right\}$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_j^{\mu\nu} &= \mathrm{Q}_j^{\mu}\, \mathrm{T}\, \mathrm{Q}_j^{\nu\,*}, \quad & \mathrm{B}_j^{\mu\nu} &= \mathrm{Q}_j^{\mu}\, \mathrm{T}\, \mathrm{P}_j^{\nu\,*}, \\ \mathrm{C}_j^{\mu\nu} &= \mathrm{P}_j^{\mu}\, \mathrm{T}\, \mathrm{Q}_j^{\nu\,*}, \quad & \mathrm{D}_J^{\mu\nu} &= \mathrm{P}_J^{\mu}\, \mathrm{T}\, \mathrm{P}_J^{\nu\,*}. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise erhält man für $J = 1$ folgendes Gleichungssystem:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathrm{A}_1^{ll} & \mathrm{A}_1^{lm} & 0 & \mathrm{B}_1^{ll} & \mathrm{B}_1^{lm} & 0 \\ \mathrm{A}_1^{ml} & \mathrm{A}_1^{mm} & \mathrm{A}_1^{mr} & \mathrm{B}_1^{ml} & \mathrm{B}_1^{mm} & \mathrm{B}_1^{mr} \\ 0 & \mathrm{A}_1^{rm} & \mathrm{A}_1^{rr} & 0 & \mathrm{B}_1^{rm} & \mathrm{B}_1^{rr} \\ \hline \mathrm{C}_1^{ll} & \mathrm{C}_1^{lm} & 0 & \mathrm{D}_1^{ll} & \mathrm{D}_1^{lm} & 0 \\ \mathrm{C}_1^{ml} & \mathrm{C}_1^{mm} & \mathrm{C}_1^{mr} & \mathrm{D}_1^{ml} & \mathrm{D}_1^{mm} & \mathrm{D}_1^{mr} \\ 0 & \mathrm{C}_1^{rm} & \mathrm{C}_1^{rr} & 0 & \mathrm{D}_1^{rm} & \mathrm{D}_1^{rr} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} {}^{l}\mathbf{d}^1 \\ {}^{m}\mathbf{d}^1 \\ {}^{r}\mathbf{d}^1 \\ {}^{l}\mathbf{s}^1 \\ {}^{m}\mathbf{s}^1 \\ {}^{r}\mathbf{s}^1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} {}^{l}\tilde{\mathbf{d}}^1 \\ {}^{m}\tilde{\mathbf{d}}^1 \\ {}^{r}\tilde{\mathbf{d}}^1 \\ {}^{l}\tilde{\mathbf{s}}^1 \\ {}^{m}\tilde{\mathbf{s}}^1 \\ {}^{r}\tilde{\mathbf{s}}^1 \end{array}\right]$$

Die Blockmatrizen werden gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_j^{\mu\nu} &= \left\{\left\langle \mathrm{T}\ {}^{\mu}\varphi_k^j,\ {}^{\nu}\varphi_{k'}^j\right\rangle\right\}_{k,\,k'=0}^{2^{N-j}}, & \mathrm{B}_j^{\mu\nu} &= \left\{\left\langle \mathrm{T}\ {}^{\mu}\varphi_k^j,\ {}^{\nu}\psi_{k'}^j\right\rangle\right\}_{k,\,k'=0}^{2^{N-j}}, \\
\mathrm{C}_j^{\mu\nu} &= \left\{\left\langle \mathrm{T}\ {}^{\mu}\psi_k^j,\ {}^{\nu}\varphi_{k'}^j\right\rangle\right\}_{k,\,k'=0}^{2^{N-j}}, & \mathrm{D}_J^{\mu\nu} &= \left\{\left\langle \mathrm{T}\ {}^{\mu}\psi_k^J,\ {}^{\nu}\psi_{k'}^J\right\rangle\right\}_{k,\,k'=0}^{2^{N-j}}.
\end{aligned}$$

4.3.1.3 Kompression der Matrizen

Pseudo–Differential Operatoren lassen sich auf Grund des exponentiellen Abfalls ihres Symbols gut komprimieren. Der folgenden Satz aus [Bey95] stellt nun einen Zusammenhang zwischen der Abfallgeschwindigkeit des Kerns und der Anzahl der verschwindenenden Momente der Waveletbasis her. Siehe dazu auch [DPS93].

4.1. Satz. *Die Waveletbasis habe M verschwindende Momente und für den Operatorkern gelte*

$$\begin{aligned}
|K(x,\,y)| &\le \frac{1}{|x-y|}, \\
\left|\partial_x^M K(x,\,y)\right| + \left|\partial_y^M K(x,\,y)\right| &\le \frac{C_M}{|x-y|^{M+1}}.
\end{aligned}$$

Dann erfüllen die Koeffizienten der NS–Form folgende Abschätzung

$$\left|\alpha_{ik}^j\right| + \left|\beta_{ik}^j\right| + \left|\gamma_{ik}^j\right| \le \frac{C_M}{1+|i-k|^{M+1}}$$

für alle $|i-k| \ge 2M$.

Insbesondere erfüllen Pseudo–Differentialoperatoren die Abschätzungen aus Satz 4.1. Hat die Skalierungsbasis ebenfalls M verschwindende Momente, so gilt die obige Abschätzung auch für die δ_{ik}^j. Wir spalten nun die NS–Form eines Operatos T_0 in einen signifikanten Anteil und in einen nichtsignifikanten Anteil auf:

$$\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0^s + \mathrm{T}_0^{ns}.$$

Der signifikante Operator T_0^s entsteht, indem man die Koeffizienten der Matrizen A_j, B_j, C_j und D_J außerhalb eines Bandes der Breite $B \ge 2M$ um die Diagonale herum auf Null setzt. In [BCR91] wird gezeigt, daß der Fehler in der Zeilensummennorm abgeschätzt werden kann durch

$$\boxed{\|\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_0^s\|_\infty = \|\mathrm{T}_0^{ns}\|_\infty \le \frac{J}{B^M}} \tag{4.41}$$

Wir zeigen die Abschätzung hier nur bis auf einen logarithmischen Faktor. Dabei ist n der feinste Level und J der gröbste. Die Anzahl der Freiheitsgrade auf Level n wird gegeben durch $N = 2^n$.

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_0^s\|_\infty &= \|\mathrm{T}_0^{ns}\|_\infty \\
&\leq \sum_{j=1}^{J-1} \max_i \sum_{k=B+1}^{2^{n-j}} \left(\left|\alpha_{ik}^j\right| + \left|\beta_{ik}^j\right| + \left|\gamma_{ik}^j\right|\right) + \\
&\quad \max_i \sum_{k=B+1}^{2^{n-j}} \left(\left|\alpha_{ik}^J\right| + \left|\beta_{ik}^J\right| + \left|\gamma_{ik}^J\right| + \left|\delta_{ik}^J\right|\right) \\
&= \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=B+1}^{2^{n-j}} \left(\left|\alpha_{0k}^j\right| + \left|\beta_{0k}^j\right| + \left|\gamma_{0k}^j\right|\right) + \\
&\quad \sum_{k=B+1}^{2^{n-j}} \left(\left|\alpha_{0k}^J\right| + \left|\beta_{0k}^J\right| + \left|\gamma_{0k}^J\right| + \left|\delta_{0k}^J\right|\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=B+1}^{2^{n-j}} \frac{C_M}{1 + k^{M+1}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{J} \frac{C_M}{B^M} \\
&\leq \frac{C_M}{B^M} n = \frac{C_M}{B^M} \log_2 N
\end{aligned}$$

Der Fehler wächst also exponentiell mit abnehmender Bandbreite der Teilmatrizen. Die Koeffizienten der NS–Form eines Pseudo–Differentialoperators fallen von der Diagonalen her sehr schnell ab. Es ist deshalb nicht sinnvoll, den Operator sehr stark zu komprimieren und dadurch einen recht großen Kompressionsfehler zu erhalten. Aufgrund der Toeplitz–Struktur der Matrizen muß jeweils nur die erste Zeile der Teilmatrizen abgespeichert werden. Durch den schnellen Abfall des Symbols der Operatoren liegen viele Koeffizienten unterhalb der Maschinengenauigkeit und müssen nicht mehr berücksichtigt werden.

4.3.2 Der multivariate Fall

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der mehrdimensionalen periodischen NS–Form eines Operators. Die Verallgemeinerung auf Dirichlet- bzw. auf Neumann Ränder erfolgt analog dem univariaten Fall.

Periodische Randbedingungen

Wir betrachten zunächst den zweidimensionalen Fall. Die Skalierungsräume einer orthogonalen MRA des $\mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}^2/[0,1]^2\right)$ definieren wir als das Tensorprodukt zweier eindimensionaler Skalierungsräume. Die dazugehörigen Waveleträume haben wir in Kapitel 2, Abschnitt 10 berechnet.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_j &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{V}_j \otimes \mathrm{V}_j, \\
\mathbf{W}_j &= \left(\mathrm{W}_j \otimes \mathrm{V}_j\right) \oplus \left(\mathrm{V}_j \otimes \mathrm{W}_j\right) \oplus \left(\mathrm{W}_j \otimes \mathrm{W}_j\right).
\end{aligned}$$

Die Orthogonalprojektionen $\mathbf{P}_j : \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}^2/[0,1]^2\right) \longrightarrow \mathbf{V}_j$ und $\mathbf{Q}_j : \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}^2/[0,1]^2\right) \longrightarrow \mathbf{W}_j$ setzen sich aus den eindimensionalen Orthogonalprojektionen zusammen. Die Indizes x, y geben dabei an in welche Richtung die Projektionen wirken:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_j &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{P}_j^x \otimes \mathrm{P}_j^y, \\
\mathbf{Q}_j &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Q}_j^x \otimes \mathrm{P}_j^y + \mathrm{P}_j^x \otimes \mathrm{Q}_j^y + \mathrm{Q}_j^x \otimes \mathrm{Q}_j^y.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Wir nehmen zunächst an, daß der zweidimensionale Pseudo–Differential Operator $\mathbf{T}$ Tensorproduktstruktur besitzt. Dann setzen sich die einzelnen Blöcke der NS–Form aus Tensorprodukten der eindimensionalen Blöcke zusammen.

NS–Form eines Pseudo–Differential Operators mit Tensorproduktstruktur

Sei also $\mathbf{T} = \mathrm{T}^x \otimes \mathrm{T}^y$. Insbesondere besitzt die Halbgruppe der Wärmegleichung Tensorprodukt Struktur:

$$\mathrm{T(t)} = e^{t\triangle} = e^{t\partial_{xx}} e^{t\partial_{yy}}.$$

Wie im Eindimensionalen entwickeln wir die NS–Form als Teleskopsumme:

$$\mathbf{P}_0\,\mathbf{T}\,\mathbf{P}_0 = \sum_{j=1}^{J} \left(\mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j + \mathbf{C}_j\right) + \mathbf{D}_J.$$

Werden die Projektionen (4.42) beispielsweise in die B_j–Blöcke eingesetzt, so ergibt sich folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_j &= \mathbf{Q}_j\,\mathbf{T}\,\mathbf{P}_j \\
&= \left(\mathrm{Q}_j^x \otimes \mathrm{P}_j^y + \mathrm{P}_j^x \otimes \mathrm{Q}_j^y + \mathrm{Q}_j^x \otimes \mathrm{Q}_j^y\right)\left(\mathrm{T}^x \otimes \mathrm{T}^y\right)\left(\mathrm{P}_j^x \otimes \mathrm{P}_j^y\right) \\
&= \mathrm{Q}_j^x\,\mathrm{T}^x\,\mathrm{P}_j^x \otimes \mathrm{P}_j^y\,\mathrm{T}^y\,\mathrm{P}_j^y + \mathrm{P}_j^x\,\mathrm{T}^x\,\mathrm{P}_j^x \otimes \mathrm{Q}_j^y\,\mathrm{T}^y\,\mathrm{P}_j^y + \mathrm{Q}_j^x\,\mathrm{T}^x\,\mathrm{P}_j^x \otimes \mathrm{Q}_j^y\,\mathrm{T}^y\,\mathrm{P}_j^y \\
&= \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{D}_j^y + \mathrm{D}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y + \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y.
\end{aligned}$$

Die übrigen Blöcke berechnen sich analog.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_j &= \mathrm{A}_j^x \otimes \mathrm{D}_j^y + \mathrm{C}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y + \mathrm{A}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y + \\
&\quad \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{C}_j^y + \mathrm{D}_j^x \otimes \mathrm{A}_j^y + \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{A}_j^y + \\
&\quad \mathrm{A}_j^x \otimes \mathrm{C}_j^y + \mathrm{C}_j^x \otimes \mathrm{A}_j^y + \mathrm{A}_j^x \otimes \mathrm{A}_j^y \\
\mathbf{B}_j &= \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{D}_j^y + \mathrm{D}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y + \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y \\
\mathbf{C}_j &= \mathrm{C}_j^x \otimes \mathrm{C}_j^y + \mathrm{C}_j^x \otimes \mathrm{D}_j^y + \mathrm{D}_j^x \otimes \mathrm{C}_j^y \\
\mathbf{D}_J &= \mathrm{D}_J^x \otimes \mathrm{D}_J^y \,.
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Ordnen wir die Blöcke von (4.43) in einer Matrix an, so erhalten wir die **zweidimensionale NS–Form $\mathbf{T}_0$** des Operators $\mathbf{T}$:

$$
\begin{pmatrix}
\begin{matrix}
\mathbf{A}_1^1 & \mathbf{A}_1^2 & \mathbf{B}_1^1 & \mathbf{B}_1^2 \\
\mathbf{A}_1^3 & \mathbf{A}_1^4 & \mathbf{B}_1^3 & \mathbf{B}_1^4 \\
\mathbf{C}_1^1 & \mathbf{C}_1^2 & \mathbf{D}_1^1 & \mathbf{D}_1^2 \\
\mathbf{C}_1^3 & \mathbf{C}_1^4 & \mathbf{D}_1^3 &
\end{matrix} & & & \\
& \begin{matrix}
\mathbf{A}_2^1 & \mathbf{A}_2^2 & \mathbf{B}_2^1 & \mathbf{B}_2^2 \\
\mathbf{A}_2^3 & \mathbf{A}_2^4 & \mathbf{B}_2^3 & \mathbf{B}_2^4 \\
\mathbf{C}_2^1 & \mathbf{C}_2^2 & \mathbf{D}_2^1 & \mathbf{D}_2^2 \\
\mathbf{C}_2^3 & \mathbf{C}_2^4 & \mathbf{D}_2^3 &
\end{matrix} & & \\
& & \ddots & \\
& & & \begin{matrix}
\mathbf{A}_J^1 & \mathbf{A}_J^2 & \mathbf{B}_J^1 & \mathbf{B}_J^2 \\
\mathbf{A}_J^3 & \mathbf{A}_J^4 & \mathbf{B}_J^3 & \mathbf{B}_J^4 \\
\mathbf{C}_J^1 & \mathbf{C}_J^2 & \mathbf{D}_J^1 & \mathbf{D}_J^2 \\
\mathbf{C}_J^3 & \mathbf{C}_J^4 & \mathbf{D}_J^3 & \mathbf{D}_J^4
\end{matrix}
\end{pmatrix}
\bullet
\begin{pmatrix}
\mathbf{d}_1^1 \\ \mathbf{d}_1^2 \\ \mathbf{d}_1^3 \\ \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{d}_2^1 \\ \mathbf{d}_2^2 \\ \mathbf{d}_2^3 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_J^1 \\ \mathbf{d}_J^2 \\ \mathbf{d}_J^3 \\ \mathbf{s}_J
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\tilde{\mathbf{d}}_1^1 \\ \tilde{\mathbf{d}}_1^2 \\ \tilde{\mathbf{d}}_1^3 \\ \tilde{\mathbf{s}}_1 \\ \tilde{\mathbf{d}}_2^1 \\ \tilde{\mathbf{d}}_2^2 \\ \tilde{\mathbf{d}}_2^3 \\ \tilde{\mathbf{s}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{d}}_J^1 \\ \tilde{\mathbf{d}}_J^2 \\ \tilde{\mathbf{d}}_J^3 \\ \tilde{\mathbf{s}}_J
\end{pmatrix}
$$

Die einzelnen Blöcke ergeben sich aus (4.43).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_j^1 &= \mathrm{A}_j^x \otimes \mathrm{A}_j^y\,, \ \mathbf{A}_j^2 = \mathrm{A}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y\,, \ \mathbf{A}_j^3 = \mathrm{A}_j^x \otimes \mathrm{C}_j^y\,, \ \mathbf{A}_j^4 = \mathrm{A}_j^x \otimes \mathrm{D}_j^y\,, \\
\mathbf{B}_j^1 &= \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{A}_j^y\,, \ \mathbf{B}_j^2 = \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y\,, \ \mathbf{B}_j^3 = \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{C}_j^y\,, \ \mathbf{B}_j^4 = \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{D}_j^y\,, \\
\mathbf{C}_j^1 &= \mathrm{C}_j^x \otimes \mathrm{A}_j^y\,, \ \mathbf{C}_j^2 = \mathrm{C}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y\,, \ \mathbf{C}_j^3 = \mathrm{C}_j^x \otimes \mathrm{C}_j^y\,, \ \mathbf{C}_j^4 = \mathrm{C}_j^x \otimes \mathrm{D}_j^y\,, \\
\mathbf{D}_j^1 &= \mathrm{D}_j^x \otimes \mathrm{A}_j^y\,, \ \mathbf{D}_j^2 = \mathrm{D}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y\,, \ \mathbf{D}_j^3 = \mathrm{D}_j^x \otimes \mathrm{C}_j^y\,, \ \mathbf{D}_j^4 = \mathrm{D}_j^x \otimes \mathrm{D}_j^y\,.
\end{aligned}
$$

Die Waveletkoeffizienten lauten:

$$
\mathbf{d}_j^1 = \left\{ \left\langle f, \psi_k^j \psi_{k'}^j \right\rangle \right\}_{k,k' \in \mathbb{T}_{n-j}}, \ \mathbf{d}_j^2 = \left\{ \left\langle f, \psi_k^j \varphi_{k'}^j \right\rangle \right\}_{k,k' \in \mathbb{T}_{n-j}}, \ \mathbf{d}_j^3 = \left\{ \left\langle f, \varphi_k^j \psi_{k'}^j \right\rangle \right\}_{k,k' \in \mathbb{T}_{n-j}}.
$$

Die Blockmatrizen auf jedem Level $\mathbf{T}_j$ werden wie in (4.30) iterativ berechnt:

$$\mathbf{T}_{j+1} = \mathbf{W}\,\mathbf{D}_j^4\,\mathbf{W}^* = \left(\mathrm{W}\,\mathrm{D}_j^x\,\mathrm{W}^*\right) \otimes \left(\mathrm{W}\,\mathrm{D}_j^y\,\mathrm{W}^*\right) = \mathrm{T}_{j+1}^x \otimes \mathrm{T}_{j+1}^y$$

In Matrixschreibweise haben die Blockmatrizen $\mathbf{T}_j$ folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_j^x & \mathrm{B}_j^x \\ \mathrm{C}_j^x & \mathrm{D}_j^x \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathrm{A}_j^y & \mathrm{B}_j^y \\ \mathrm{C}_j^y & \mathrm{D}_j^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_j^x \otimes \mathrm{A}_j^y & \mathrm{A}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y & \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{A}_j^y & \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y \\ \mathrm{A}_j^x \otimes \mathrm{C}_j^y & \mathrm{A}_j^x \otimes \mathrm{D}_j^y & \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{C}_j^y & \mathrm{B}_j^x \otimes \mathrm{D}_j^y \\ \mathrm{C}_j^x \otimes \mathrm{A}_j^y & \mathrm{C}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y & \mathrm{D}_j^x \otimes \mathrm{A}_j^y & \mathrm{D}_j^x \otimes \mathrm{B}_j^y \\ \mathrm{C}_j^x \otimes \mathrm{C}_j^y & \mathrm{C}_j^x \otimes \mathrm{D}_j^y & \mathrm{D}_j^x \otimes \mathrm{C}_j^y & \mathrm{D}_j^x \otimes \mathrm{D}_j^y \end{pmatrix}.$$

Damit wird ersichtlich, wie sich die einzelnen Blöcke der NS–Form eines d–Dimensionalen Operators berechnen:

$$\mathbf{T}_j^{d+1} = \mathbf{T}_j^d \otimes \mathrm{T}_j\,.$$

Die Anzahl der Blockmatrizen wächst also exponetiell mit der Dimension:

$$\textit{Anzahl der Blockmatrizen in d Dimensionen} = 2^{2d}.$$

Wir wbetrachten nun Operatoren ohne Tensorproduktstruktur.

NS–Form eines Pseudo–Differential Operators ohne Tensorproduktstruktur

Der Operator, der den nichtlinearen Anteil der Burgers–Gleichung kontrolliert, hat beispielsweise keine Tensorproduktstruktur:

$$N(t) = \left(id - e^{-t\triangle}\right)\triangle^{-1}.$$

Die Form der NS–Form Matrix bleibt erhalten. Die Blockmatrizen müßen jedoch als zweidimensionale Skalarprodukte berechnet werden, was viel aufwendiger ist, als das Tensorprodukt zweier eindimensionaler Matrizen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_j^i &= \left\{\left\langle {}^1\psi_{kk'}^j,\, \mathbf{T}\, {}^i\psi_{ll'}^j \right\rangle\right\}_{\substack{k,k'\in\mathbb{T}_{n-j}\\ l,l'\in\mathbb{T}_{n-j}}}, & \mathbf{A}_j^4 &= \left\{\left\langle {}^1\psi_{kk'}^j,\, \mathbf{T}\,\varphi_{kk'}^j \right\rangle\right\}_{\substack{k,k'\in\mathbb{T}_{n-j}\\ l,l'\in\mathbb{T}_{n-j}}},\\
\mathbf{B}_j^i &= \left\{\left\langle {}^2\psi_{kk'}^j,\, \mathbf{T}\, {}^i\psi_{kk'}^j \right\rangle\right\}_{\substack{k,k'\in\mathbb{T}_{n-j}\\ l,l'\in\mathbb{T}_{n-j}}}, & \mathbf{B}_j^4 &= \left\{\left\langle {}^2\psi_{kk'}^j,\, \mathbf{T}\,\varphi_{kk'}^j \right\rangle\right\}_{\substack{k,k'\in\mathbb{T}_{n-j}\\ l,l'\in\mathbb{T}_{n-j}}},\\
\mathbf{C}_j^i &= \left\{\left\langle {}^3\psi_{kk'}^j,\, \mathbf{T}\, {}^i\psi_{kk'}^j \right\rangle\right\}_{\substack{k,k'\in\mathbb{T}_{n-j}\\ l,l'\in\mathbb{T}_{n-j}}}, & \mathbf{C}_j^4 &= \left\{\left\langle {}^3\psi_{kk'}^j,\, \mathbf{T}\,\varphi_{kk'}^j \right\rangle\right\}_{\substack{k,k'\in\mathbb{T}_{n-j}\\ l,l'\in\mathbb{T}_{n-j}}},\\
\mathbf{D}_j^i &= \left\{\left\langle \varphi_{kk'}^j,\, \mathbf{T}\, {}^i\psi_{kk'}^j \right\rangle\right\}_{\substack{k,k'\in\mathbb{T}_{n-j}\\ l,l'\in\mathbb{T}_{n-j}}}, & \mathbf{D}_j^4 &= \left\{\left\langle \varphi_{kk'}^j,\, \mathbf{T}\,\varphi_{kk'}^j \right\rangle\right\}_{\substack{k,k'\in\mathbb{T}_{n-j}\\ l,l'\in\mathbb{T}_{n-j}}}
\end{aligned}$$

für $i = 1, 2, 3$. Die Basisfunktionen der Waveleträume sind ${}^1\psi^j_{kk'} = \psi^j_k \psi^j_{k'}$, ${}^2\psi^j_{kk'} = \psi^j_k \varphi^j_{k'}$ und ${}^3\psi^j_{kk'} = \varphi^j_k \psi^j_{k'}$.
Der Algorithmus zur Approximation der NS–Form eines d–Dimensionalen Operators ist eine direkte Verallgemeinerung des eindimensionalen Falls. Wir approximieren die Periodisierung der Integranten durch:

$$\tilde{g}_j(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{k_1=-K_1}^{K_1} \cdots \sum_{k_d=-K_d}^{K_d} \sigma(2^{N-j}(x_1 + 2\pi k_1), \ldots, 2^{N-j}(x_d + 2\pi k_d))$$
$$\left|\hat{\varphi}\left(2^{N-j}(x_1 + 2\pi k_1)\right)\right|^2 \ldots \left|\hat{\varphi}\left(2^{N-j}(x_d + 2\pi k_d)\right)\right|^2.$$

4.3. Methode. *Approximation der NS–Form eines d–dimensionalen Operators*

1. Berechne die Startmatrix $D^4_0 = \left\{\delta^0_{l_1, \ldots, l_d}\right\}_{l_1, \ldots, l_d \in \mathbb{T}_n}$ mittels der d–dimensionalen FFT:

$$\delta^0_{l_1, \ldots, l_d} = \frac{1}{N^d} \sum_{m_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{m_d=0}^{N-1} \tilde{g}_0(\xi_{m_1}, \ldots, \xi_{m_d}) e^{-i\xi_{m_1} l_1} \cdots e^{-i\xi_{m_d} l_d},$$

   wobei $\xi_{m_i} = \frac{2\pi i m_i}{N}$ und $N = 2^n$.

2. Berechne die $\mathbf{T}^d_j$–Blöcke mittels einer d–dimensionalen Wavelet–Transformation für $j = 0, \cdots, J-1$. Praktisch wendet man die eindimensionale Wavelet–Transformation d–mal in jede Raumdimension an. Zur Berechnung der eindimensionalen Transformationen siehe den univariaten Fall *Methode* 4.1.

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^d_{j+1} &= \mathbf{W}\,\mathbf{D}^4_j\,\mathbf{W}^* = \underbrace{(\mathrm{W} \otimes \cdots \otimes \mathrm{W})}_{d--mal}\,\mathbf{D}^4_j\,\underbrace{\left(\mathrm{W}^* \otimes \cdots \otimes \mathrm{W}^*\right)}_{d--mal} \\ &= \underbrace{(\mathrm{W} \otimes \cdots \otimes \mathrm{W})}_{(d-1)--mal}\left(\mathrm{W}\,\mathbf{D}^4_j\,\mathrm{W}^*\right)\underbrace{\left(\mathrm{W}^* \otimes \cdots \otimes \mathrm{W}^*\right)}_{(d-1)--mal}.\end{aligned}$$

Kapitel 5

Datenstrukturen und Algorithmen

5.1 Datenstrukturen

In diesem Kapiel stellen wir die Datenstrukturen der NS–Form Matrizen und Vektoren vor und implementiern einige Algorithmen in Pseudo–Code. Da wir keine adaptive Zeitschrittweitensteuerung benutzen, bleiben die Matrixkoeffizienten im Laufe des Programms konstant. Deshalb verwenden wir ein *array*, um diese abzuspeichern. Die Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten verändern sich jedoch von Zeitschritt zu Zeitschritt, sodaß wir zur Darstellung eines NS–Form Vektors eine dynamische Datenstruktur benutzen. In jeder Zeitscheibe müßen neue Koeffizienten eingefügt und alte entfernt werden. Deshalb bietet sich eine *Hash–Tabelle* als mögliche Datenstruktur an. Im Durchschnitt hat diese eine konstante Zugriffsgeschwindigkeit. Ein Binärbaum dagegen ist weniger gut geeignet für derartige Aufgaben, da er eine durchschnittliche Zugriffsgeschwindigkeit von $\mathcal{O}(\log N)$ hat, wenn N die Anzahl der Datensätze ist. Besonders in mehreren Dimensionen würde dies zu einem deutlichen Geschwindigkeitsverlust führen. Im nächsten Abschnitt erläutern wir die Datenstrukturen der NS–Form Marizen und Vektoren. Am Ende des Abschnitts beschreiben wir ganz allgemein Hashing. Im Abschnitt 5.2 leiten wir die Algorithmen zur Berechnung der NS–Form Matrix, der NS–Form Matrix–Vektor Multiplikation und der Picard–Iteration her und geben eine Implementierung in Pseudo–Code an.

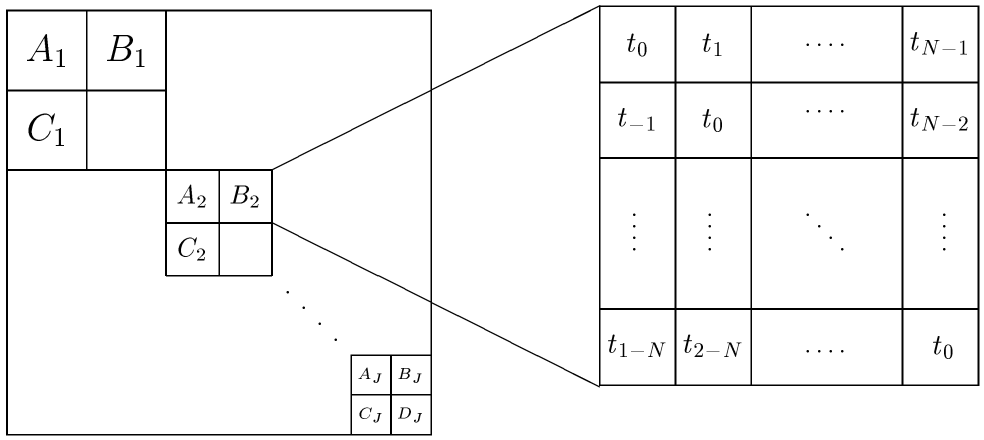
5.1.1 Periodische NS–Form Matrix

In diesem Abschnitt stellen wir die Datenstruktur der periodischen NS–Form–Matrix in d Dimensionen vor. Wir erläutern diese zunächst in ein und zwei Dimensionen, bevor der allgemeine Fall behandelt wird.
Die eindimensionale periodische NS–Form eines Operators ist eine Block–Diagonalmatrix $\mathrm{T} = \mathrm{diag}(\mathrm{T}_1, \cdots, \mathrm{T}_J)$, deren Blöcke sich ihrerseits wieder aus 3 Toeplitz–Matrizen $\mathrm{T}_j = \{\mathrm{A}_j, \mathrm{B}_j, \mathrm{C}_j\}$ auf den Leveln $j = 1, \cdots, J-1$ und aus 4 Toeplitz–Matrizen $\mathrm{T}_J = \{\mathrm{A}_J, \mathrm{B}_J, \mathrm{C}_J, \mathrm{D}_J\}$ auf dem gröbsten Level J zusammensetzen.

Eine Toeplitz–Matrix X hat die Form $X = \{x_{k-k'}\}_{k,k'=0}^{N-1}$. Im folgenden wird die eindimensionale periodische NS–Form–Matrix dargestellt.

eindimensionale periodische NS–Matrix

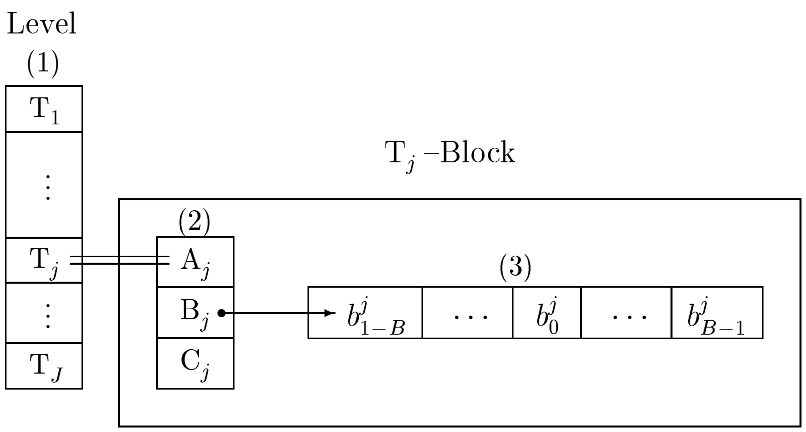
Töplitz–Matrix auf Level 2



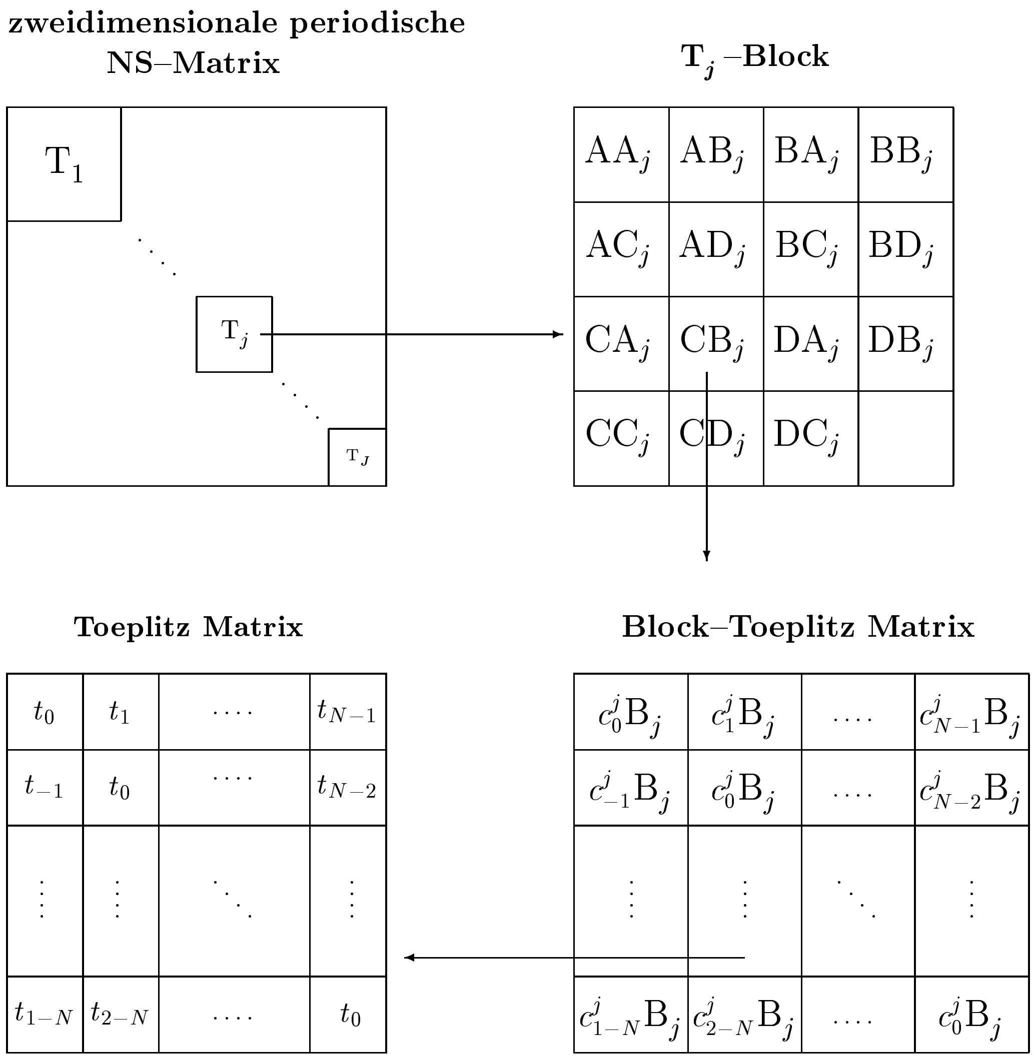
Es genügt offensichtlich, die erste Zeile und die erste Spalte der Toeplitz–Matrizen abzuspeichern. Da die Koeffizienten mit wachsender Entfernung von der Diagonalen abfallen, gibt es zu einer Abschneidegenauigkeit ϵ eine feste Bandbreite $B = B(\epsilon)$. Die Koeffizienten $\{t_{|j|} \,:\, |t_{|j|}| > \epsilon\}_{j=0}^{B}$ sind signifikant. Das folgende Schema soll die Datenstruktur der eindimensionalen periodischen NS–Form Matrix verdeutlichen. Der Vektor symbolisiert dabei einen Zeiger und die schmalen Rechtecke stellen Arrays dar.

Datenstruktur der eindimensionalen

periodischen NS–Form–Matrix

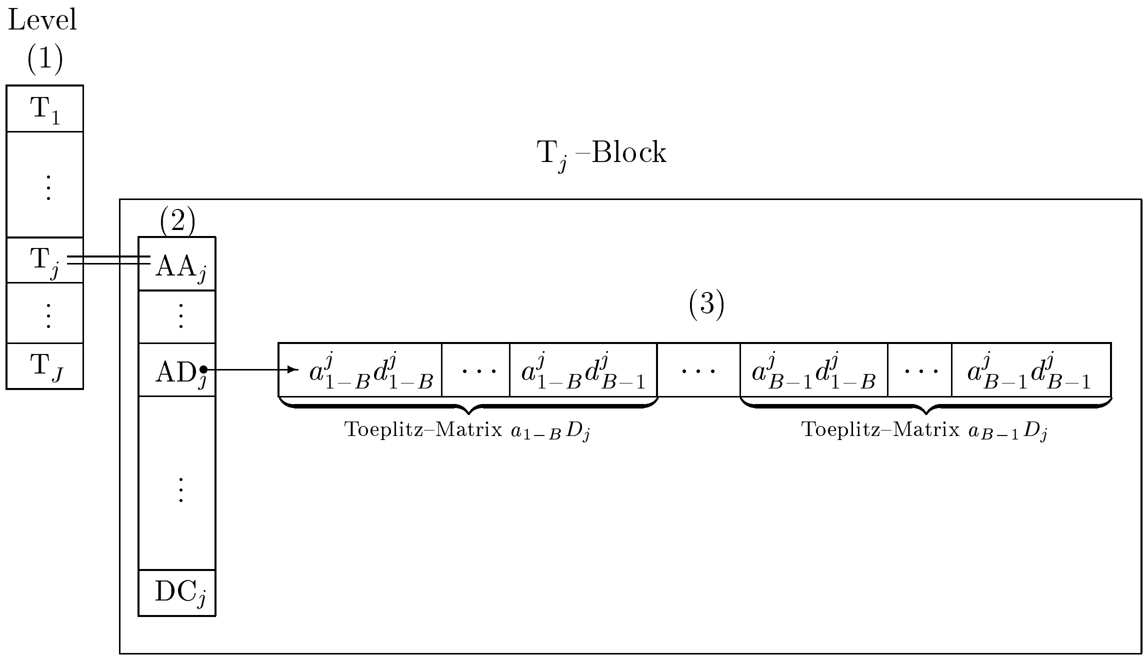


Die zweidimensionale NS–Form Matrix erhält man durch Tensorproduktbildung aus der eindimensionalen Matrix — siehe dazu Kapitel 4.3.2. Die T_j –Blöcke bestehen aus 15 bzw. 16 Block Toeplitz–Matrizen $\mathrm{T}_j = \{\mathrm{AA}_j, \cdots, \mathrm{AD}_j, \mathrm{BA}_j, \cdots, \mathrm{BD}_j, \mathrm{CA}_j, \cdots, \mathrm{CD}_j, \mathrm{DA}_j, \cdots, \mathrm{DC}_j\}$. Die Matrizen $\mathrm{XY_j} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{X_j} \otimes \mathrm{Y_j}$ sind das Tensorprodukt ihrer Teilmatrizen $\mathrm{X_j} = \{\mathrm{x^j_{k-k'}}\}_{\mathrm{k,k'=0}}^{\mathrm{N-1}}$. Die zweidimensionale periodische NS–Form–Matrix hat folgende Struktur.



Zur Darstellung der Matrix verwenden wir das gleiche Schema wir für die eindimensionale Datenstruktur. Zur Vereinfachung wählen wir eine einheitliche Bandbreite B für alle Toeplitz–Matrizen eines T_j–Blocks.

Datenstruktur der zweidimensionalen periodischen NS–Form Matrix



In d Dimensionen verfährt man analog. Es verändern sich nur die **Längen der Vektoren (2) und (3):**

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Vektor}(2)_j &= 2^{2d}-1 \qquad\qquad \text{für } j=1,\cdots,J-1,\\
\dim \mathrm{Vektor}(2)_J &= 2^{2d},\\
\dim \mathrm{Vektor}(3)_j &= \left(2^{n+1-j}-1\right)^d \qquad \text{ohne Kompression.}
\end{aligned}$$

Einige Operatoren, wie zum Beispiel die Halbgruppe des Laplaceoperators, erzeugen **symmetrische Toeplitz–Matrizen** $\mathrm{X_j} = \{\mathrm{x^j_{|k-k'|}}\}^{\mathrm{N-1}}_{\mathrm{k,k'=0}}$. Hier muß nur die erste Zeile abgespeichert werden. In einem solchen Fall wird die Länge des Vektors(3) **ohne Kompression**, d. h. $B = 2^{n-j}$, gegeben durch

$$\dim \mathrm{Vektor}(3)_j = 2^{d(n-j)}.$$

Die Datenstruktur der periodischen NS–Form Matrix besteht also aus einem Vektor aus T_j –Objekten. Wir beschreiben zunächst die T_j –Klasse.

```
// ********************************** class TjBlock *************************
// ** Diese Klasse implementiert einen Tj Block einer d-dimensionalen      **
// ** periodischen NS--Form--Matrix.                                       **
// ************************************************************************
// ** Datenelemente:                                                       **
// ** double** m_Bloecke:   Zeiger Vektor(2) auf Koeffizienten Vektor(3)   **
// ** int m_AnzahlBloecke:  Laenge von Vektor(2)                           **
// ** int m_LaengeTMatrizen: Laenge der Toeplitz--Matrizen in Vektor(3)    **
// ** int m_Bandbreite:     Bandbreite der Toeplitz--Matrizen in Vektor(3) **
// ************************************************************************
// Bemerkung:  Die Laenge des Vektors(3) ergibt sich aus der Bandbreite    **
// der Toeplitz--Matrizen und der Dimension des Problems.  Die Dimension   **
// speichern wir in dieser Klasse nicht mehr ab, da dies bereits in        **
// der Klasse der NS--Form Matrix geschieht.                               **
// ************************************************************************
class TjBlock {
        double** m_Bloecke;
        int m_AnzahlBloecke;
        int m_LaengeTMatrizen;
        int m_Bandbreite
public:
   double* operator [](int i) { return m_Bloecke[i]; }
   int Bandbreite() { return m_Bandbreite; }
   ...
}
```

Mit Hilfe von 'TjBlock' können wir nun die Klasse der periodischen NS–Form Matrix formulieren.

```
// ************************* class PerNSFormMatrix *******************
// ** Diese Klasse implementiert eine d-dimensionale periodische     **
// ** NS--Form--Matrix.                                              **
// *******************************************************************
// ** Datenelemente:                                                **
// ** TjBlock* NSMat:              Vektor(1) von 'TjBlock' Objekten  **
// ** int m_FeinsterLevel:         feinster Level                    **
// ** int m_GroebsterLevel:        groebster Level                   **
// ** double m_Zeit:               Zeit                              **
// ** double m_Ny:                 Diffusionsparameter               **
// ** int m_Dim:                   Dimension                         **
// *******************************************************************
// Bemerkung:  Die Funktionen 'PerNSFormMatrix(...)'  und           **
// '~PerNSFormMatrix()' dienen der Konstruktion und der Destruktion  **
// eines 'PerNSFormMatrix' Objektes.                                **
// *******************************************************************
class PerNSFormMatrix {
 private:  // Datenelemente
           TjBlock* m_NSMat;

           int m_FeinsterLevel;
           int m_GroebsterLevel;
           double m_Zeit;
           double m_Ny;
           int m_Dim;
 public:
           PerNSFormMatrix(int fl, int gl, double t, double ny, int dim)
              :m_FeinsterLevel(fl), m_GroebsterLevel(gl), m_Zeit(t),
               m_Ny(ny), m_Dim(dim) { init(); }
           ~PerNSFormMatrix();
 public:
           TjBlock operator [](int i) { return m_NSMat[i] };
           void init();
           ...
}
```

Im folgenden geben wir ein Beispiel, wie diese Klasse benutzt werden kann. Wir legen zum Zeitpunkt $\delta t = 0.002$ eine zweidimensionale NS–Form–Matrix auf Level 9 mit 3 Vergröberungsleveln und einer Diffusionsstärke von $\nu = 0.001$ an. Dann wählen wir das 10te Element der 11 Toepletz–Matrix von AC_2 aus: $a^2_{(1-N)+10}c^2_{(1-N)+11}$.

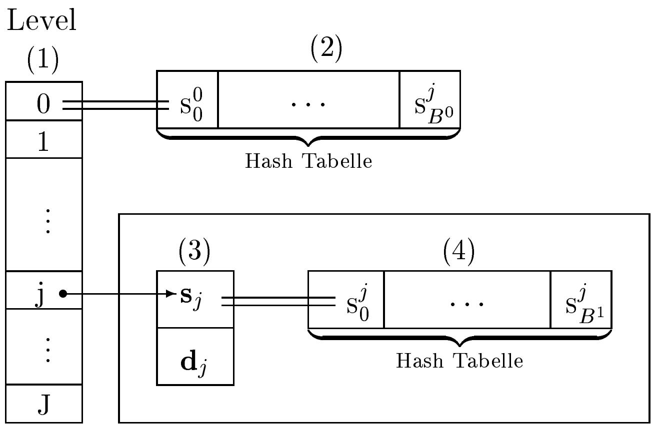
```
// Anlegen eines 'PerNSFormMatrix' Objektes: n = 9, J = 3, δt = 0.002, ν = 0.001, d = 2
PerNSFormMatrix NSMatrix(9, 3, 0.002, 0.001, 2);

// Bandbreite der Toepletz--Matrixen des T_2--Blocks
int bandbreite = NSMatrix[2].Bandbreite();

// tmp = a^2_{(1-N)+10} c^2_{(1-N)+11}, 10tes Element der 11 Toepletz--Matrix von AC_2
double tmp = NSMatrix[2][3][10 + 11*bandbreite];
```

Im folgenden Abschnitt beschreiben wir die Datenstruktur des periodischen NS–Form Vektors.

5.1.2 Periodischer NS–Form–Vektor

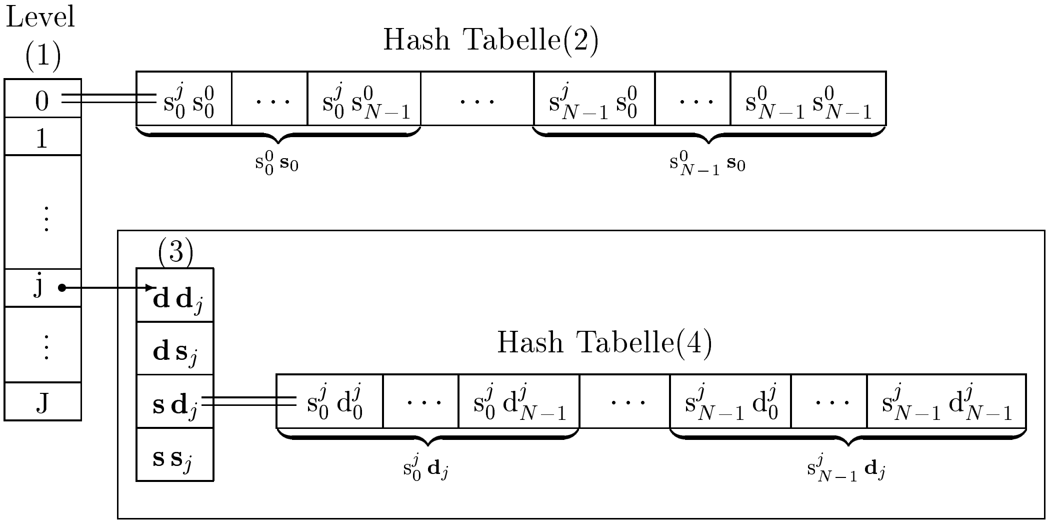
Wie im letzten Abschnitt stellen wir die Datenstruktur des periodischen NS–Form Vektors zunächst in ein und zwei Dimensionen vor, bevor wir den allgemeinen Fall implementieren. Im Gegensatz zu den Koeffizienten der NS–Form Matrix kann die Anzahl der Vektorkoeffizienten von Zeitschritt zu Zeitschritt variieren. Deshalb werden *Hash Tabellen* zur Darstellung der Daten verwendet. Im nächsten Abschnitt erklären wir was Hash Tabellen sind. Bis dahin kann man sie sich als einen dynamischen Vektor vorstellen, der mit seinen Datenelementen wächst oder schrumpft. Die eindimensionale periodische NS–Form einer Funktion besteht aus den signifikanten Koeffizienten der Startapproximation $\{s_k^0 : |s_k^0| > \epsilon\}$ und den signifikanten Skalierungs– und Waveletkoeffizienten $\{s_k^j, d_k^j : \left|s_k^j\right|, \left|d_k^j\right| > \epsilon\}$, die mit Hilfe einer Wavelet–Transformation daraus berechnet werden.

Datenstruktur des eindimensionalen periodischen NS–Form Vektors



Die zweidimensionale Wavelet–Transformation erhält man durch das Tensorprodukt zweier eindimensionaler Transformationen — für eine Implementierung siehe [Num92]. Auf diese Weise entstehen auf jedem Level drei Differenzräume $\mathrm{V}_j \otimes \mathrm{W}_j$, $\mathrm{W}_j \otimes \mathrm{V}_j$, $\mathrm{W}_j \otimes \mathrm{W}_j$ und ein Detailraum $\mathrm{V}_j \otimes \mathrm{V}_j$. Daraus ergibt sich das folgende Schema für die zweidimensionale Datenstruktur. Die zweidimensionalen Vektoren $\mathbf{xy}_\mathrm{j} = \mathbf{x}_\mathrm{j} \otimes \mathbf{y}_\mathrm{j}$ bezeichnen das dyadische Produkt der eindimensionalen Vektoren $\mathbf{x}_\mathrm{j}$ und $\mathbf{y}_\mathrm{j}$. Wir geben die zweidimensionale Datenstruktur der Übersichtlichkeit halber ohne Kompression an. In der Praxis werden nur die signifikanten Koeffizienten abgespeichert.

Datenstruktur des zweidimensionalen periodischen NS–Form Vektors



In d Dimensionen verfährt man analog. Die Klasse des periodischen NS–Form Vektors hat die folgenden Datenelemente.

```
// *************************** class PerNSFormVektor ********************
// ** Diese Klasse implementiert einen periodischen NS--Form Vektor in d**
// ** Dimensionen.                                                     **
// *********************************************************************
// ** Datenelemente:                                                    **
// ** HashTabelle m_Startapproximation:     Startapproximation(2)       **
// ** HashTabelle** m_Vektor:               Zeiger Vektor(1)            **
// ** int m_FeinsterLevel:                  feinster Level              **
// ** int m_GroebsterLevel:                 groebster Level             **
// ** double* m_IntervallAnfang:            Startpunkte der Intervalle  **
// **                                       in jeder Dimension          **
// ** double* m_IntervallEnde:              Endpunkte der Intervalle    **
// **                                       in jeder Dimension          **
// ** int m_Dim:                            Dimension                   **
// ** double m_Eps:                         Abschneidegenauigkeit       **
// **********************************************************************
```

```
class PerNSFormVektor {
        HashTabelle m_Startapproximation;
        HashTabelle** m_Vektor;

        int m_FeinsterLevel;
        int m_GroebsterLevel;
        double* m_IntervallAnfang;
        double* m_IntervallEnde;
        double m_Eps;
        int m_Dim;
public:
        PerNSFormVektor(int fl, int gl, double* a, double* b, double eps, int dim)
           :m_FeinsterLevel(fl), m_GroebsterLevel(gl), m_IntervallAnfang(a),
            m_IntervallEnde(b), m_Eps(eps), m_Dim(dim) { init(); }
        ~PerNSFormVektor();

public:
        HashTabelle* operator [](int i) { return m_Vektor[i]; }
        double operator ()(int j, ini i) { return m_Startapproximation(j, i); }
        void init();
        ...
}
```

Anhand des folgenden Beispiels kann ersehen werden, wie diese Klasse benutzt werden kann. Aus der Definition von 'PerNSFormVektor' geht nicht hervor, wie die Funktion ausgewählt wird, die hier dargestellt werden soll. In meinem Programm habe ich die Klasse als ein Template definiert, dem ich ein Funktionsobjekt übergebe. Die Funktion init() sorgt dann für die korrekte Initialisierung. Ich parametrisiere die Klasse also mit der richtigen Funktion.

```
// Definitionsbereich ist das Einheitsquadrat
double* anfang = {0, 0};
double* ende = {1, 1};

// Anlegen eines 'PerNSFormVektor' Objektes: N = 9, J = 3, d = 2
PerNSFormVektor NSVektor(9, 3, anfang, ende, 2);

// tmp1 = s^0_10 s^0_11, falls vorhanden, ansonsten 0
double tmp1 = NSVektor(10, 11);

// tmp2 = s^2_10 d^2_11, falls vorhanden, ansonsten 0
double tmp2 = NSVektor[2][3](10, 11);
```

5.1.3 Hashing

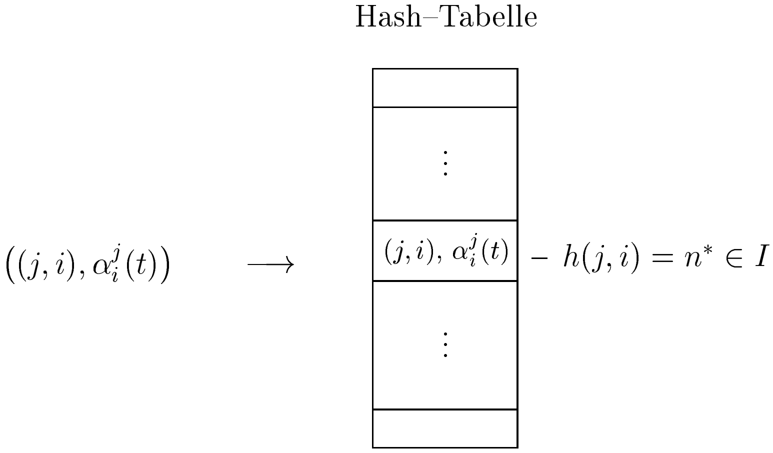
In diesem Abschnitt stellen wir *Hashing* vor, eine dynamische Datenstruktur, die wir zur Implementierung eines NS–Form–Vektors benutzen. Eine ausführliche Darstellung des Themas findet man u. a. in [Sed92a], [Sed92b] und in [Wei94]. Wer sich besonders für die Programmiersprache `C++` interessiet sei auf [Wei94] verwiesen. *Hashing* ermöglicht es, eine unbekannte Anzahl von Daten abzuspeichern und mit einer konstanten Durchschnittsgeschwindigkeit auf diese zuzugreifen. Die Vorteile eines arrays, optimale Speicherplatzausnutzung und konstante Zugriffsgeschwindigkeit, werden kombiniert mit den Vorteilen einer dynamischen Datenstruktur. Man kann sich Hashing als ein dynamisches Array vorstellen, das mit der Datenmenge wächst oder schrumpft. Der Nachteil besteht darin, daß die konstante Zugriffsgeschwindigkeit eine gewisse Redundanz des Speicherplatzes zur Folge hat. Hashing kann als ein Kompromiß zwischen Speicherplatzbedarf einerseits und Zugriffsgeschwindigkeit andererseits betrachtet werden. Ein Hash–Verfahren setzt sich aus zwei Komponeneten zusammen:

- einer *Hash–Tabelle*, die im wesentlichen aus einem Array besteht, in dem Schlüssel, d. h. Elemente eines Datensatzes zur eindeutigen Identifizierung desselben, zusammen mit den dazugehörigen Daten abgespeichert werden und
- einer *Hash–Funktion* $h : K \longrightarrow I$, die eine Menge von Schlüsseln K auf eine Menge von Adressen bzw. Indizes I abbildet. h ist nicht injektiv, d. h. mehrere Elemente des Definitionsbereichs können auf dieselbe Adresse abgebildet werden. Man benötigt deshalb ein Verfahren, um Kollisionen aufzulösen. Die Hash–Funktion sollte die Elemente möglichst gleichmäßig auf dem Wertebereich verteilen, um nicht unnötig viel Zeit für Kollisionsauflösungen zu aufzuwenden.

Wollte man zum Beispiel die Koeffizienten $\alpha_i^j(t)$ einer Funktion

$$f(t,x) \sim f_N(t,x) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{2^j} \alpha_i^j(t) \psi_i^j(x)$$

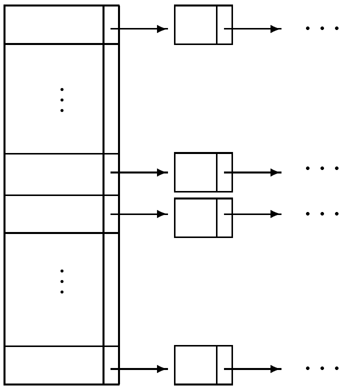
bezüglich einer hierarchischen Basis $\psi_i^j(x)$ in einer Hash–Tabelle abspeichern, so wären die Index–Level Informationen (j,i) die Schlüssel und die Koeffizienten $\alpha_i^j(t)$ die dazugehörigen Daten. Natürlich kann man auch allgemeinere Ausdrücke wie Zeichenfolgen als Schlüssel bzw. als Daten benutzen. Speichert man alle Koeffizienten ab, so ist eine dynamische Datenstruktur überflüssig. Eine Hash–Tabelle macht erst dann Sinn, wenn die Daten komprimiert werden und sich die Anzahl der signifikanten Koeffizienten in jedem Zeitschritt verändert. Das Ziel der Datenkompression ist Speicherplatz einzusparen. Gleichzeitig sollte aber die durchschnittliche Zugriffsgeschwindigkeit auf ein Element in der Tabelle unabhähig von der Auflösungsgenauigkeit und der Dimension des Problems sein. Diese Anforderungen erfüllt eine Hash–Tabelle und das ist auch der Grund, warum wir uns für diese Datenstruktur entschieden haben. Ein Binärbaum hat beispielsweise eine logarithmische Zugriffsgeschwindigkeit. Bildlich kann man sich Hashing folgendermaßen vorstellen:



n^* bezeichnet die Adresse des Datensatzes $\big\{(j,i),\ \alpha_i^j(t)\big\}$. Die Hash–Funktion sollte einfach zu berechnen sein und die Schlüssel gut über den Wertebereich verteilen. In unserem Fall bietet sich folgende Funktion an

$$h(j,i) = \big(2^j + i\big) \bmod \text{H\_SIZE},$$

wobei H_SIZE die Länge der Hash–Tabelle ist. Die Länge einer Hash–Tabelle sollte prim sein [Wei94]. Dadurch wird die gleichmäßige Verteilung der Daten auf die Hash–Tabelle erleichtert. Es gibt verschiedene Methoden zur Auflösung einer Kollision, von denen wir die zwei bekanntesten kurz vorstellen. Eine Strategie besteht darin, die Elemente, die auf dieselbe Adresse abgebildet werden, in eine verkettete Liste einzufügen. Diese Methode wird als **open Hashing** bezeichnet:



Die Zugriffsgeschwindigkeit setzt sich zusammen aus der konstanten Zeit, die benötigt wird, um die Hash–Funktion zu berechnen und der linearen Zeit, die es kostet, die Liste zu durchsuchen. Verteilt eine Hash–Funktion die Adressen annähernd gleichmäßig, so ergeben sich auch ungefähr konstante Zugriffszeiten. Definiert man einen Belegungsfaktor λ, der das Verhältnis der abgespeicherten Elemente zur Gesammtlänge der Tabelle H_SIZE angibt, so ist open Hashing bei einem Belegungsfaktor von $\lambda \approx 1$ am effektivsten.

Eine andere Strategie schiftet nach einer Kollision die Adresse um einen bestimmten Wert, d. h. nach einer Kollision wird solange eine Folge von Adressen $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, $\cdots$ besucht, bis eine frei Zelle gefunden wird. Die Funktionenfolge wird erzeugt durch $h_i(x) = (h(x) + f(i)) \mod H\_SIZE$ mit $f(0) = 0$. Häufige Wahlen von f sind $f(i) = i$ und $f(i) = i^2$. Diese Methode wird als **closed Hashing** bezeichnet. Closed Hashing arbeitet erst ab einem Belegungsfaktor von $\lambda \approx 0.5$ effektiv. Die Hash–Tabelle sollte also in diesem Fall ungefähr doppelt so groß sein wie beim open Hashing.
Wird die Belegung einer Hash–Tabelle zu groß, so wachsen die Zugriffszeiten an und das Hashing wird ineffektiv. Eine Lösung ist das sogenannte **Rehashing**. Dabei wird die alte Hash–Tabelle in eine doppelt so große neue Tabelle umgespeichert. Dieser Vorgang ist teuer, kommt aber auch nur relativ selten vor, so daß die Ordnung der Zugriffsgeschwindigkeit dadurch nicht beeinträchtigt wird.

5.2 Algorithmen

In diesem Abschnitt formulieren wir drei Algorithmen zur Berechnung

- der periodischen NS–Form eines eindimensionalen Operators,
- der periodischen eindimensionalen NS–Form–Matrix–Vektor–Multiplikation,
- der Picard–Iteration.

Der mehrdimensionale Fall kann auf den eindimensionalen zurückgeführt werden. Es wäre jedoch zu aufwendig, dies hier vorzuführen. Der NS–Form Vektor wird mit Hilfe der diskreten Wavelet–Transformation berechnet. Eine gute Darstellung der diskreten Wavelet–Transformation findet man in [Num92]. Wir implementieren die Funktionen in Pseudo Code.

5.2.1 Periodische NS–Form–Matrix

In Kapitel 4, S. 76 haben wir gezeigt, wie man die NS–Form eines Operators mit Hilfe der schnellen Fourier–Transformation näherungsweise berechnet. Die **Approximation** der eindimensionalen periodischen NS–Form eines Pseudo–Differential Operators mit konstanten Koeffizienten

$$\sigma(D)(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(y)\hat{f}(y)e^{-ixy}\,dy$$

setzt sich aus zwei Teilen zusammen:

1. Berechnung der Startapproximation $\tilde{D}^0 = \{\tilde{\delta}^0_{l=k-k'}\}_{k,k'=0}^{2^n-1}$ auf dem feinsten Level n:

$$\tilde{\delta}^0_l = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \tilde{g}_0(\xi_k) e^{i\xi_k l}, \qquad l = -2^n, \cdots, 2^n \tag{5.1}$$

   mit $\xi_k = \frac{2\pi k}{2^n}$ und

$$\tilde{g}_0(y) = \sum_{k=-K}^{K} \sigma(2^n(y + 2\pi k)) \left|\hat{\varphi}(y + 2\pi k)\right|^2. \tag{5.2}$$

   $\sigma(x)$ ist dabei das Symbol des Operators $\sigma(D)(f)(x)$ und $\varphi(x)$ ist die Skalierungsfunktion. Die Summationsgrenze $K \equiv K(\epsilon)$ hängt von der Abschneidegenauigkeit ϵ ab. Die Summe (5.2) wird abgebrochen, wenn der Betrag der Summanden kleiner als ϵ ist.

2. Berechnung der Koeffizienten

$$\begin{aligned}
\alpha^{j+1}_k &= \sum_{l,l'=0}^{2^{n-j}-1} h_l h_{l'} \delta^j_{2k+l-l'}, \quad & \beta^{j+1}_k &= \sum_{l,l'=0}^{2^{n-j}-1} h_l g_{l'} \delta^j_{2k+l-l'}, \\
\gamma^{j+1}_k &= \sum_{l,l'=0}^{2^{n-j}-1} g_l h_{l'} \delta^j_{2k+l-l'}, \quad & \delta^{j+1}_k &= \sum_{l,l'=0}^{2^{n-j}-1} g_l g_{l'} \delta^j_{2k+l-l'},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

   für $j = 0, \cdots, J-1$ und $k = -2^{n-(j+1)}, \cdots, 2^{n-(j+1)}$. Dabei ist J der gröbste Level, $\{h_l\}$ ein Hochpaßfilter und $\{g_l\}$ ein Tiefpaßfilter.

Daraus ergint sich folgender Algorithmus zur Berechnung der NS–Form Matrix:

5.1. Algorithmus. *Approximation der NS–Form eines eindimensionalen periodischen Operators*

1. Berechnung der Startmatrix

   Zur Berechnung der Koeffizienten der Startmatrix $\tilde{D}_0$ in (5.1) müssen eine diskrete und eine inverse diskrete Fouriertransformation ausgeführt werden. Die Ergebnisse werden in den Vektoren `delta1` und `delta2` abgespeichert, die als Paramter der Funktion `startapproximation` übergeben werden. Als dritten Parameter erhält die Funktion das Produkt der zu periodisierenden Funktionen $f(x) = \sigma(2^n x) * |\hat{\varphi}(x)|^2$ aus (5.2). Zum Schluß wird noch eine Abschneidegenauigkeit `eps` benötigt, die angibt, wann die Summe (5.2) abgeschnitten wird. `startapproximation` periodisiert `f`, speichert die Werte in einen Vektor `g` und führt dann die Transformationen aus.

```
startapproximation(delta1, delta2, f, eps) {
      for( i=0; i<2^n; i++ ) {               // Periodisierung von
          g[i] = periodisierung(i, f, eps);  //f = σ(2^n x) * |φ̂(x)|^2
      }
      delta1 = fft(g, 2^n);                  // fast Fourier--Transform FFT
      delta2 = fft(g, -2^n);                 // inverse FFT
}
```

Die Funktion `periodisierung` periodisiert die Funktion f und wertet diese an der i–ten Einheitswurzel aus. Da das Symbol $\sigma(x)$ schnell abfällt, werden die Summanden in (5.2) rasch sehr klein. Die Summe wird abgeschnitten, wenn die Beträge der Summanden kleiner als eine bestimmte Genauigkeit `eps` werden.

```
periodisierung(i, f, eps) {
      y = 2*π*i*2^-n;                              // i--te Einheitswurzel
      summe = f(y)                                 // Periodisierung (5.2)
      for( k=1; k<100; k++ ) {
         tmp1 = f(y+2*π*k);
         tmp2 = f(y-2*π*k);
         summe += tmp1 + tmp2;
         if( abs(tmp1) < eps && abs(tmp2) < eps )  {
            break;
         }
      }
      return summe;
}
```

2. Berechnung der Koeffizienten

   Nachdem die Startkoeffizienten $\tilde{\delta}_l^0$, $|l| = 0, \cdots, 2^n - 1$ berechnet worden sind, werden in einem zweiten Schritt die Koeffizienten α_l^j, β_l^j, γ_l^j und δ_l^j durch eine zweifache periodische Faltung (5.3) bezüglich eines Hochpaßfilters $\{h_j\}_j$ und eines Tiefpaßfilters $\{g_j\}_j$ bestimmt. Die Parameter `alpha, beta, gamma` und `delta` der Funktion `NSMat` werden als zweifaches Array übergeben, wobei der erste Index den Level, der zweite Index die Ansatzfunktion bezeichnet. Außerdem benötigt man einen Startvektor `start=[delta1, delta2]`, der die in 1. berechneten Koeffizienten enthält, den feinsten und den gröbsten Level `feinsterLevel` und `groebsterLevel`, sowie die Hochpaß– und Tiefpaßfilter `hochpass` und `tiefpass`.

```
NSMat(alpha, beta, gamma, delta, start,
      feinsterLevel, groebsterLevel, hochpass, tiefpass) {
```

```
        N = 2^(feinsterLevel-1);       // Länge der Koeffizienten auf Level 1
        for( i=0; i<N; i++ ) { // zweifache periodische Faltung, Level 1
            alpha[1][i] = perFaltung2(i, hochpass, hochpass, start, N);
            beta[1][i] = perFaltung2(i, hochpass, tiefpass, start, N);
            gamma[1][i] = perFaltung2(i, tiefpass, hochpass, start, N);
            delta[1][i] = perFaltung2(i, tiefpass, tiefpass, start, N);
        }
        for( j=1; j<groebsterLevel; j++ ) { // zweifache periodische Faltung,
                                               Level > 1
           N = 2^(feinsterLevel-1-j);      // Länge der Koeffizienten auf Level j-1
           for( i=0; i<N; i++ ) {
               alpha[j+1][i] = perFaltung2(i, hochpass, hochpass, delta[j], N);
               beta[j+1][i] = perFaltung2(i, hochpass, tiefpass, delta[j], N);
               gamma[j+1][i] = perFaltung2(i, tiefpass, hochpass, delta[j], N);
               delta[j+1][i] = perFaltung2(i, tiefpass, tiefpass, delta[j], N);
           }
        }
}
```

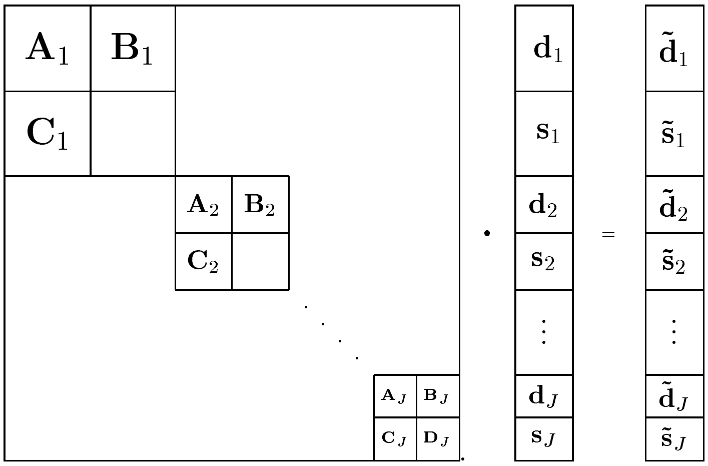
Die Funktion `perFaltung2` imlpementiert eine zweifache periodische Faltung (5.3) eines Vektors `s` der Länge N mit den Filtern `filter1` und `filter2`.

```
perFaltung2(l, filter1, filter2, s, N) {
        summe = 0.0;
        for( j=0; j<filter1.laenge(); j++ ) {     // äußere Filteranwendung
           summand = 0;
           for( i=0; i<filter2.laenge(); i++ ) {  // innere Filteranwendung
              n = 2*l-i+j;;
              n = (n+N)%N;                        // Periodisierung von s
              summand += filter2[j] * s[n];
           }
        summe += filter1[i] * summand;
        }
        return summe;
}
```

Die Berechnung der Matrixkoeffizienten findet in der Funktion init() der Klasse PerNSFormMatrix statt.

5.2.2 Periodische NS–Form Matrix–Vektor–Multiplikation

Die eindimensionale periodische **NS–Form Matrix–Vektor–Multiplikation** hat folgende Form



Blockweise betrachtet, erhält man daraus die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{d}}_j &= \mathrm{A}_j \cdot \mathbf{d}_j + \mathrm{B}_j \cdot \mathbf{c}_j \\ \tilde{\mathbf{c}}_j &= \mathrm{C}_j \cdot \mathbf{d}_j\end{aligned} \qquad j = 1, \cdots, J-1 \quad \text{und} \quad \begin{aligned}\tilde{\mathbf{d}}_J &= \mathrm{A}_J \cdot \mathbf{d}_j + \mathrm{B}_J \cdot \mathbf{c}_j \\ \tilde{\mathbf{c}}_J &= \mathrm{C}_J \cdot \mathbf{d}_j + \mathrm{D}_J \cdot \mathbf{c}_j.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Die einzelnen Blöcke der NS–Form sind Toeplitz–Matrizen. Die **Matrix–Vektor Multiplikation einer Toeplitz–Matrix** wird gegeben durch

Toeplitz–Matrix

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{N-2} & x_{N-1} \\ x_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{N-2} \\ x_{-2} & x_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots \\ \cdots & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_{-N+2} & \cdots & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & x_1 \\ x_{-N+1} & x_{-N+2} & \cdots & x_{-2} & x_{-1} & x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{N-2} \\ \tilde{u}_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Komponentenweise ergibt sich folgende Formel:

$$\tilde{u}_j = \sum_{i=0}^{N-1-j} x_i u_{j+i} + \sum_{i=1}^{j} x_{-i} u_{j-i} \tag{5.5}$$

Aus (5.4) und (5.5) erhält man nun folgenden Algorithmus zur Berechnung der NS–Form–Matrix–Vektor–Multiplikation.

5.2. Algorithmus. *Eindimensionale periodische NS–Form–Matrix–Vektor–Multiplikation*

Die Funktion `NSFormMatrixVektorMultiplikation` berechnet die Gleichungen (5.4) mit Hilfe der zwei Unterfunktionen `matVekMul1` und `matVekMul2`. Die Unterfunktionen berechnen die Matrix–Vektormultiplikation (5.5) für die Gleichungen (5.4).

```
NSFormMatrixVektorMultiplikation(uTilde, alpha, beta, gamma, u,) {
      for( j=0; j<J-1; j++ ) {
         laenge = 2^(n-j);
         for( i=0; i<laenge; i++ ) { // Berechnung von (5.4)
            matVekMul1(uTilde, alpha, beta, gamma, u, laenge, j, i);
         }
      }
      laenge = 2^(n-J);
      for( i=0; i<laenge; i++ ) { // Berechnung von (5.4)
         matVekMul2(uTilde, alpha, beta, gamma, delta, u, laenge, J, i);
      }
}
matVekMul1(v, alpha, beta, gamma, u, N, l, j) { // Berechnung von (5.5) für (5.4)
      offset = N - 1;                          // bestimmt das 0-Element
      for( i=0; i<N-j; i++ ) {
         summeC += alpha[l][offset+i] * u.d[l][j+i] + beta[l][offset+i] * u.c[l][j+i];
         summeD += gamma[l][offset+i] * u.d[l][j+i];
      }
      for( i=1; i<j; i++ ) {
         summeC += alpha[l][offset-i] * u.d[l][j-i] + beta[l][offset-i] * u.c[l][j-i];
         summeD += gamma[l][offset-i] * u.d[l][j-i];
      }
      v.c[l][j] = summeC;
      v.d[l][j] = summeD;
}

matVekMul2(v, alpha, beta, gamma, delta, u, N, l, j) { // Berechnung von (5.5) für (5.4)
      offset = N - 1;                                  // bestimmt das 0-Element
      for( i=0; i<N-j; i++ ) {
         summeC += alpha[l][offset+i] * u.d[l][j+i] + beta[l][offset+i] * u.c[l][j+i];
         summeD += gamma[l][offset+i] * u.d[l][j+i] + delta[l][offset+i] * u.c[l][j+i];
      }
      for( i=1; i<j; i++ ) {
         summeC += alpha[l][offset-i] * u.d[l][j-i] + beta[l][offset-i] * u.c[l][j-i];
         summeD += gamma[l][offset-i] * u.d[l][j-i] + beta[l][offset-i] * u.c[l][j-i];
      }
      v.c[l][j] = summeC;
      v.d[l][j] = summeD;
```

}

5.2.3 Picard–Iteration

Im letzten Abschnitt beschäftigen wir uns mit der iterativen Lösung des **semilinearen Anfangswertproblems**: Sei X ein Banachraum und $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein sektoraler Operator. Finde eine Lösung $u(t) \in X^\alpha$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}u(t) + Au(t) &= f(t, u(t)), \qquad t \in [t_0,\, t_N], \\ u(t_0) &= u_0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

In Kapitel 1.12 haben wir gesehen, daß sich die Lösung von (5.6), wie in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichugnen, mittels einer **Picard–Iteration** bestimmen läßt:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}v)(t) &= T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-\tau) f(\tau, v(\tau))\, d\tau, \\ v_{n+1}(t) &= \mathcal{A}^n v_n(t) \longrightarrow u(t) \quad \text{für } n \longrightarrow \infty, \\ v_0 &\in B_\rho(u_0). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Dabei ist $B_\rho(u_0) = \{v \in \mathcal{C}\left([0,T]; X^\alpha\right) \mid \|v(t) - u_0\|_\alpha \le \rho \text{ auf } [0,T]\}$ eine Umgebung um die Funktion u_0 und $\mathcal{A} : B_\rho(u_0) \longrightarrow B_\rho(u_0)$ ist eine Selbstabbildung, d. h. $v_n \in B_\rho(u_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Wir zerlegen nun das Zeitintervall in äquidistante Schritte $t_i = i \cdot \delta t$ für $i = 0, \cdots, N-1$ mit der Zeitschrittweite $\delta t = \frac{t_N - t_0}{N}$. Anstatt (5.7) auf dem ganzen Intervall $[t_0, t_N]$ zu bestimmen, berechnen wir die **Lösung auf den Teilintervalen** $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} v_{n+1}^i(t) &= T(t-t_i)u_i + \int_{t_i}^{t} T(t-\tau) f(\tau, v_n^i(\tau))\, d\tau \longrightarrow u|_{[t_i,t_{i+1}]}(t), \\ v_0 &\in B_\rho(u_i). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Wir approximieren nun die v_n^i, indem wir das Integral mit einer **Quadraturformel** berechnen. Wir verwenden dazu eine Formel aus [**?**] S.14 ff, welche eine **Approximation der Ordnung 2** liefert:

$$v_n^i = \tilde{v}_n^i + \mathcal{O}\left(\delta t^2\right).$$

Die $\tilde{v}_n^i \in B_{\rho+\epsilon(\delta t)}(u_i)$ liegen in einem etwas größeren Kreis um u_i. Rekonstruiert man das Argument aus Kapitel 1.12 mit einem Operator $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \mathcal{O}\left(\delta t^2\right)$, welcher durch Approximation des Integrals mit einer Quadraturformel aus dem Operator $\mathcal{A}$

hervorgegangen ist, so sieht man, daß die Picard–Iteration auch für die $\tilde{v}_n^i$ gegen die richtige Lösung konvergiert. Beachte, daß die Lösung $u(t) \in X^\alpha$ des Anfangswertproblems in einem Funktionenraum liegt, d. h. $u(t)(x) \in Y$ liegt in einem endlichdimensionalen Raum. Wir schreiben $u(t)(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(t,x)$.

$$\begin{aligned} v_{n+1}^i(t_{i+1},x) \sim \tilde{v}_{n+1}^i(t_{i+1},x) = T(\delta t)u_i(x) + \\ \tfrac{1}{2}N(\delta t)[f(t_i, \underbrace{u(t_i,x)}_{v_n^i(t_i,x)}) + f(t_{i+1}, v_n^i(t_{i+1},x))], \\ v_0^i(t,x) = \tilde{u}(t,x), \end{aligned} \tag{5.9}$$

dabei ist $\tilde{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(t_i) = u_i \in B_\rho(u_i)$ eine konstante Funktion in X^α und $N(t) = (id - T(t))\, A^{-1}$. Um sich von der Abhängigkeit des Zeitpunktes t_{i+1} zu lösen, approximieren wir $\tilde{v}_1^i$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1^i(t_{i+1}) &= T(\delta t)u_i + \tfrac{1}{2}N(\delta t)[f(t_i,u_i) + f(t_{i+1},u_i)] \\ &\sim T(\delta t)u_i + N(\delta t)f(t_i,u_i). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dies vergrößert den Radius von $B_{\rho+\tilde{\epsilon}}(u_i)$ noch ein wenig, doch die Picard–Iteration konvergiert gegen die richtige Lösung . Es gilt die folgende Abschätzung, in welche die Hölderstetigkeit von $f(x,y)$ bezüglich des ersten Arguments und die Lipschitzstetigkeit bezüglich des zweiten eingeht.

$$\begin{aligned} &\|T(\delta t)u_i + N(\delta t)f(t_i,u_i) - u_i\| \\ = &\|T(\delta t)u_i + \tfrac{1}{2}N(\delta t)[f(t_i,u_i) + f(t_{i+1},u_i)] - u_i \\ &+ \tfrac{1}{2}N(\delta t)[f(t_i,u_i) - f(t_{i+1},u_i)]\| \\ \le &\left\|\tilde{v}_1^i(t_{i+1}) - u_i\right\| + \tfrac{1}{2}\|N(\delta t)\|\,\|f(t_i,u_i) - f(t_{i+1},u_i)\| \\ \le &\rho + \epsilon(\delta t) + \tfrac{1}{2}L\,\|N(\delta t)\|\,\delta t^\theta \\ = &\rho + \tilde{\epsilon}(\delta t) \longrightarrow \rho \qquad \text{für } \delta t \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

In einer vektorwertigen Schreibweise $U(t_i) = \{u(t_i,x_0), \cdots, u(t_i,x_{N-1})\}$ erhält man die folgende Iteration zur Bestimmung von $U(t_{i+1})$:

$$\begin{aligned} U_{n+1}(t_{i+1}) &= E(U(t_i)) + I(U(t_i), U_n(t_{i+1})), \qquad n > 1 \\ U_1(t_{i+1}) &= E(U(t_i)) + N(\delta t)f(t_i, U(t_i)), \end{aligned} \tag{5.12}$$

wobei der explizite Anteil E und der implizite Anteil I gegeben werden durch

$$\begin{aligned} E(U(t_i)) &= T(\delta t)U(t_i), \\ I(U(t_i), U(t_{i+1})) &= \tfrac{1}{2}N\left\{f(t_i,U(t_i)) + f(t_{i+1},U(t_{i+1}))\right\}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Damit haben wir den folgenden Algorithmus hergeleitet.

5.3. Algorithmus (Picard–Iteration).

Berechnung des Lösungsvektors $U(t_{i+1})$.

1. Berechnung des Startwertes

$$U_0(t_{i+1}) = E(U(t_i)) + N(\delta t) f(t_i, U(t_i)),$$

2. Picard–Iteration

```
for( k=0;; k++ ) {
   U_{k+1}(t_{i+1}) = E(U(t_i)) + I(U(t_i), U_k(t_{i+1}));
   if( ||U_{k+1}(t_{i+1}) - U_k(t_{i+1})|| <= ε ) {
      break;
   }
}
U(t_{i+1}) = U_{k+1}(t_{i+1});
```

Kapitel 6

Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel stellen wir die numerischen Ergebnisse der Berechnungen einiger Modellbeispiele vor, um anhand dieser die theoretischen Aussagen der Kapitel 1 bis 5 zu illustrieren. Die wesentlichen Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Der *Kompressionsfehler* der NS–Form–Matrizen $\mathbf{A}_J$ hängt linear von der Abschneidegenauigkeit ϵ ab:

$$\|\mathbf{A}_J - \mathbf{A}_J^\epsilon\|_\infty = \mathcal{O}(\epsilon), \quad J \geq 0 \text{ fest;}$$

- Die *Anzahl der signifikanten Koeffizienten der NS–Form* der Halbgruppe $T(t) = e^{t\nu\triangle} = e^{t\nu\partial_{x_1x_1}} \cdots e^{t\nu\partial_{x_dx_d}}$ ist dimensionsunabhängig. In d Dimensionen hat man eine Ordnung von

$$\mathcal{O}\left(N\right),$$

wobei N die Anzahl der Freiheitsgrade in einer Dimension ist. Das liegt an der Tensorproduktstruktur dieser Halbgruppe. Anstatt einen d–dimensionalen Operator aufzustellen, muß man nur d eindimensionale Operatoren berechnen. Für einen quadratischen Definitionsbereich benötigt man sogar nur einen eindimensionalen Operator, der dann in jede Raumdimension einzeln angewendet wird. Die NS–Form des nichtlinearen Operators $\frac{1}{2\nu}\left(id - T(t)\right)\triangle^{-1}$ hat in der Mehrskalendarstellung mit *genügend* vielen Leveln eine Ordnung von

$$\mathcal{O}\left(N(\log N)^{d-1}\right).$$

In der Einskalendarstellung jedoch wächst die Anzahl der signifikanten Koeffizienten exponentiell mit der Dimension: $\mathcal{O}\left(N^d\right)$.

- Die *Ordnung* des Verfahrens hängt von der Anzahl der verschwindenden Momente der Waveletbasis ab. Wir arbeiten mit Daubechies 4 Wavelets und erhalten ein Verfahren der Ordnung 2:

$$\|\mathbf{u}(\triangle t_k) - \mathbf{u}_j(\triangle t_k)\| = e = \mathcal{O}\left(h_j^2\right);$$

- Die Ordnung des *Kompressionsfehlers* der Lösung hängt von der verwendeten Norm ab. Bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$–Norm hängt er linear von der Abschneidegenauigkeit ϵ ab und bezüglich der $2^{-dj}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm hat er die Ordnung 1.5:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\triangle t_k) - \mathbf{u}_J^\epsilon(\triangle t_k)\|_\infty &= e(\epsilon) = \mathcal{O}\left(\epsilon\right), \quad J \geq 0 \text{ fest}, \\ 2^{-dJ}\,\|\mathbf{u}(\triangle t_k) - \mathbf{u}_J^\epsilon(\triangle t_k)\|_{l_2} &= e(\epsilon) = \mathcal{O}\left(\epsilon^{1.5}\right); \end{aligned}$$

- Die ϵ–*Komplexität*(Aufwand zu Genauigkeit) hängt von der Regularität der Lösung zum Zeitpunkt t ab:

$$W\left(e(\epsilon)\right) = \dim u_j^\epsilon = \mathcal{O}\left(e(\epsilon)^{-d/\gamma}\right), \quad d,\,\gamma \geq 0 \text{ fest}.$$

Dabei ist $\mathbf{u}(\delta t_k) = \left(u(\delta t_k,\,\delta x_0),\cdots,u(\delta t_k,\,\delta x_{N_j-1})\right)^T$ die exakte Lösung der Differentialgleichung zum Zeitpunkt $\delta t_k = k\cdot\delta t$ auf dem Gitter $G_j = \{\delta x_i = i\cdot 2^{-j}\,|\,i = 0,\cdots,2^j-1\}$ und $\mathbf{u}_j(\delta t) = \left(u_j(\delta t_k,\,\delta x_0),\cdots,u_j(\delta t_k,\,\delta x_{N_j-1})\right)$ ist die numerische Lösung zum selben Zeitpunkt auf Level j. $N_j = 2^j$ ist die Anzahl der Freiheitsgrade auf Level j. Schneidet man die Koeffizienten von $\mathbf{u}_j$ unterhalb einer vorgegebenen Genauigkeit ϵ ab, so erhält man die ϵ–Approximation $\mathbf{u}_j^\epsilon(\delta t_k)$ der numerischen Lösung.
Wir haben die folgenden **Modellbeispiele** für unsere Berechnungen ausgesucht:

- fünf lineare Wärmeleitungsgleichungen,
- zwei nichtlineare Wärmeleitungsgleichungen,
- eine Konvektions–Diffusions–Gleichung,
- eine Fokker–Plank Gleichung
- zwei burgersartige Gleichungen und
- die Korteweg de–Vries Gleichung.

Die dazugehörigen Anfangsrandwertaufgaben haben alle periodische Randbedingungen. Da wir die Lösung in den meisten Fällen nicht explizit berechnen können, haben wir den Fehler bezüglich einer hoch aufgelösten numerischen Lösung berechnet, die wir dann jeweils auf die entsprechenden Level projiziert haben.
Jeder Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich mit einer Dimension. Als Fokker–Plank Gleichung wählen wir eine eindimensionale Braunsche Bewegung aus, welche in mehreren Dimensionen wegfällt, genauso wie die Korteweg de–Vries Gleichung. In drei Dimensionen behandeln wir nur die linearen Gleichungen, da wir die NS–Form des nichtlinearen Operators nur für die ersten zwei Dimensionen aufgestellt haben.
Als Ansatzfunktionen für die Petrov–Galerkin Approximation wählen wir **Daubechies 4 Wavelets** und als Testfunktionen die dazugehörigen Skalierungsfunktionen.
Die Koeffizienten der Quadraturfilter werden gegeben durch:

Tiefpaßfilter Hochpaßfilter

$$
\begin{aligned}
g_0 &= \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, & g_1 &= \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, & h_0 &= \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, & h_1 &= \frac{\sqrt{3}-3}{4\sqrt{2}}, \\
g_2 &= \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, & g_3 &= \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, & h_2 &= \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, & h_3 &= -\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Sowohl die Wavelets als auch die Skalierungsfunktionen haben zwei verschwindende Momente.
In der folgenden Tabelle 6.1 fassen wir die wesentlichen Abkürzungen dieses Kapitels zusammen.

G_j	$= \{i \cdot 2^{-j} \mid i = 0, \cdots, 2^j - 1\}$, volles Gitter auf Level j
N_j	$= 2^j$, Anzahl der Freiheitsgrade auf Level j
$\mathbf{u}(\delta t_k)$	= exakte Lösung der Differentialgleichung zum Zeitpunkt δt_k auf dem Gitter G_j
$\mathbf{u}_j(\delta t_k)$	= numerische Lösung zum Zeitpunkt δt_k auf dem Gitter G_j
$\mathbf{u}_j^\epsilon(\delta t_k)$	= die mit ϵ komprimierte numerische Lösung $\mathbf{u}_j(\delta t_k)$
$\Vert\mathbf{A}\Vert_\infty$	$= \max_{0 \le i < N_j} \sum_{j=0}^{N_j-1} \vert a_{i\,j}\vert$, Zeilensummenorm der Matrix A
$\Vert\mathbf{u}\Vert_\infty$	$= \max_{0 \le i < N_j} \vert u(\delta x_i)\vert$, Maximumsnorm
$\Vert\mathbf{u}\Vert_{l_2}$	$= \sqrt{\sum_{i=0}^{N_j-1} \vert u(\delta x_i)\vert^2}$, l_2–Norm

Tabelle 6.1: Notation in diesem Kapitel

Im nächsten Abschnitt beginnen wir mit der Diskussion der eindimensionalen Modellbeispiele. N sei im folgenden der feinste Level.

6.1 Der eindimensionale Fall

6.1.1 Lineare Wärmeleitungsgleichung

Die **lineare Wärmegleichung** ist der Prototyp einer parabolischen Differentialgleichung. Das dazugehörige Anfangsrandwertproblem wird gegeben durch

$$\begin{aligned} u_t &= \nu\triangle u + \mu\, f, && x \in (0,1),\, t > 0, \\ u(t,\, 0) &= u(t,\, 1) = 0, && t > 0, \\ u(0,\, x) &= u_0(x), && x \in (0,1). \end{aligned} \tag{6.1}$$

$u(t,\, x)$ beschreibt die Temperaturverteilung in einem Körper. In unserem Fall handelt es sich dabei um einen Stab der Länge 1. Der Stab ist an beiden Enden isoliert, d. h. wir haben die Randwerte 0. Weitere mögliche Randbedingungen wären die Vorgabe zeitabhängiger Temperaturen $u(t,\, 0) = g_0(t)$, $u(t,\, 1) = g_1(t)$ oder eines Wärmeflusses, indem man die normalen Ableitungen vorschreibt: $u_n(t,\, 0) = g_0(t)$, $u_n(t,\, 1) = g_1(t)$. ν und μ sind Materialkonstanten; ν gibt die Leitfähigkeit des Körpers an und μ die spezifische Wärme. $f(t)$ ist eine zeitabhängige Wärmequelle. In diesem Beispiel haben wir $f(t) \equiv 0$ gewählt. Im nächsten Abschnitt betrachten wir eine nichtlineare Wärmegleichung, bei der die Wärmequelle $f(u(t,\, x))$ zusätzlich noch von der Temperatur $u(t,\, x)$ abhängt. Für den einfachen Spezialfall (6.1) kann man die Lösungsfunktion explizit angeben. Die **Startfunktion** sei in eine Fourierreihe entwickelt

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \sin 2\pi kx + b_k \cos 2\pi kx\}\,.$$

Dann wird die **Lösung** von (6.1) gegeben durch

$$u(t,\, x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-4\pi^2 k^2 \nu t} \{a_k \sin 2\pi kx + b_k \cos 2\pi kx\}\,, \quad t \geq 0. \tag{6.2}$$

Die Frequenzen der Startfunktion werden also gedämpft, je höher der Modus ist desto stärker ist die Dämpfung. Man sagt auch, die Lösung sei *dissipativ*. Deshalb wird der Lösungsoperator einer parabolischen Differentialgleichung dissipativ genannt. $\nu\triangle u$ heißt *Diffusionsterm* und ν ist der *Diffusionskoeffizient.*
Wir werden das Anfangsrandwertproblem (6.1) für fünf unterschiedliche **Startfunktionen** lösen, die jeweils schwächeren Glattheitsvoraussetzungen genügen.

- Sinusfunktion: $\sin 2\pi x$ auf $[0,\, 1]$,
- Gaußfunktion: $e^{-\frac{x^2}{4*\alpha}}$ auf $[0 : 1]$,

- Hütchenfunktion: $N_2(x-0.5)$ auf $[0,\,1]$,
- Charakteristische Funktion: $\chi_{[-0.5,\,0.5]} + \frac{1}{2}\delta_{-0.5}(x) + \frac{1}{2}\delta_{0.5}(x)$ auf $[-1:1]$ und
- Wurzel: $\sqrt{|x|}$ auf $[-1:1]$.

Das Verfahren hat bzgl. der ersten beiden Startfunktionen die Ordnung 4. Das liegt daran, daß die Sinusschwingung gerade eine Eigenfunktion des Laplace–Operators ist und die Gaußfunktion eine Eigenfunktion der Halbgruppe $T(t) = e^{\nu t \triangle}$ approximiert. Dadurch fallen die entsprechenden Terme in der Taylorentwicklung der Lösung weg, und man erhält die doppelte Ordnung des Verfahrens. Die dritte und vierte Funktion ergeben die erwartete Ordnung 2. Die letzte Startfunktion, die Wurzel, liefert nur ein Verfahren der Ordnung 1.5, da deren Ableitungen singulär sind.
Zunächst beschäftigen wir uns mit der Kompression der NS–Form der Halbgruppe $T(t) = e^{t\nu\triangle}$ und dem dabei entstehenden Kompressionsfehler.

6.1.1.1 Kompression der Halbgruppe: $T(t) = e^{t\nu\cdot\triangle}$

Wir komprimieren die NS–Form Matrix der Halbgruppe $\mathbf{T} = \left\{A^j,\, B^j,\, C^j,\, D^J\right\}_{j=1}^{J}$, indem wir die Koeffizienten unterhalb einer vorgegebenen Genauigkeit ϵ abschneiden. Den dadurch entstehenden Fehler messen wir in der Zeilensummennorm. In der Einskalendarstellung hängt der **Kompressionsfeher** linear von der Abschneidegenauigkeit ϵ ab.

$$\left\|\mathbf{T} - \mathbf{T}^{\epsilon}\right\|_{\infty} = \mathcal{O}(\epsilon).$$

Dabei ist $\mathbf{T}$ die NS–Form der Halbgruppe in der Einskalendarstellung ($J = 1$) und $\mathbf{T}^{\epsilon}$ die mit ϵ komprimierte NS–Form. Die Abbildung 6.1 zeigt den Kompressionsfehler in doppelt logarithmischer Darstellung.

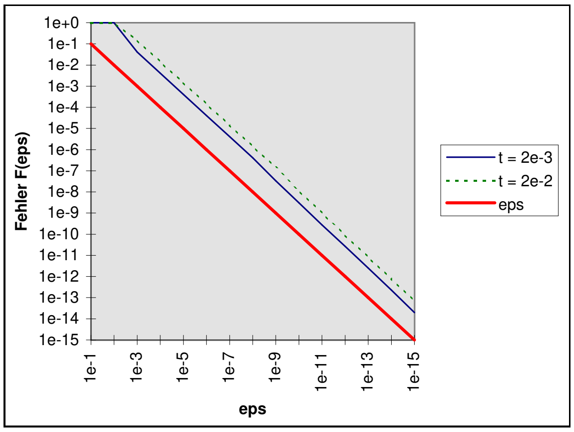


Abbildung 6.1: Kompressionsfehler in der Zeilensummennorm, $\|\mathbf{T} - \mathbf{T}^{eps}\|_{\infty}$, $N = 12$, $J = 1$, $\nu = 1$, $eps = \epsilon$.

Die signifikanten Koeffizienten der NS–Form entwickeln sich ebenfalls mit linearer Ordnung. Abbildung 6.2 zeigt das lineare Wachstum zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten.

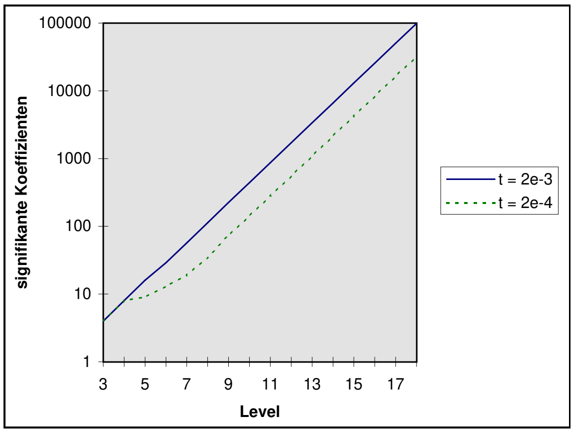


Abbildung 6.2: signifikante Koeffizienten von $\mathbf{T}^{\epsilon}$, $\epsilon = 10^{-14}$, $N = 12$, $J = 1$, $\nu = 1$.

Um sich ein Bild von dem Abklingverhalten der Koeffizienten zu machen, zeigen wir in der nächsten Abbildung 6.3 die Koeffizienten der Blöcke A_1, B_1 und D_1 zu zwei unterschiedlichen Zeitschrittweiten. Je kleiner die Zeitschrittweite ist, desto stärker werden die Koeffizienten um die Diagonale herum lokalisiert, und es entwickelt sich im Grenzwert eine Singularität. Wird der Zeitschritt zu groß gewählt, so verschwinden die Waveletblöcke $\{A^1, B^1, C^1\}$ und eine Mehrskalendarstellung ist nicht mehr möglich. Neben der Zeitschrittweite δt kontrolliert der *Diffusionskoeffizient* ν die Stärke der Singularität der Matrixkoeffizienten. Je kleiner die Diffusion ist, desto ausgeprägter ist die Singularität der Waveletblöcke.

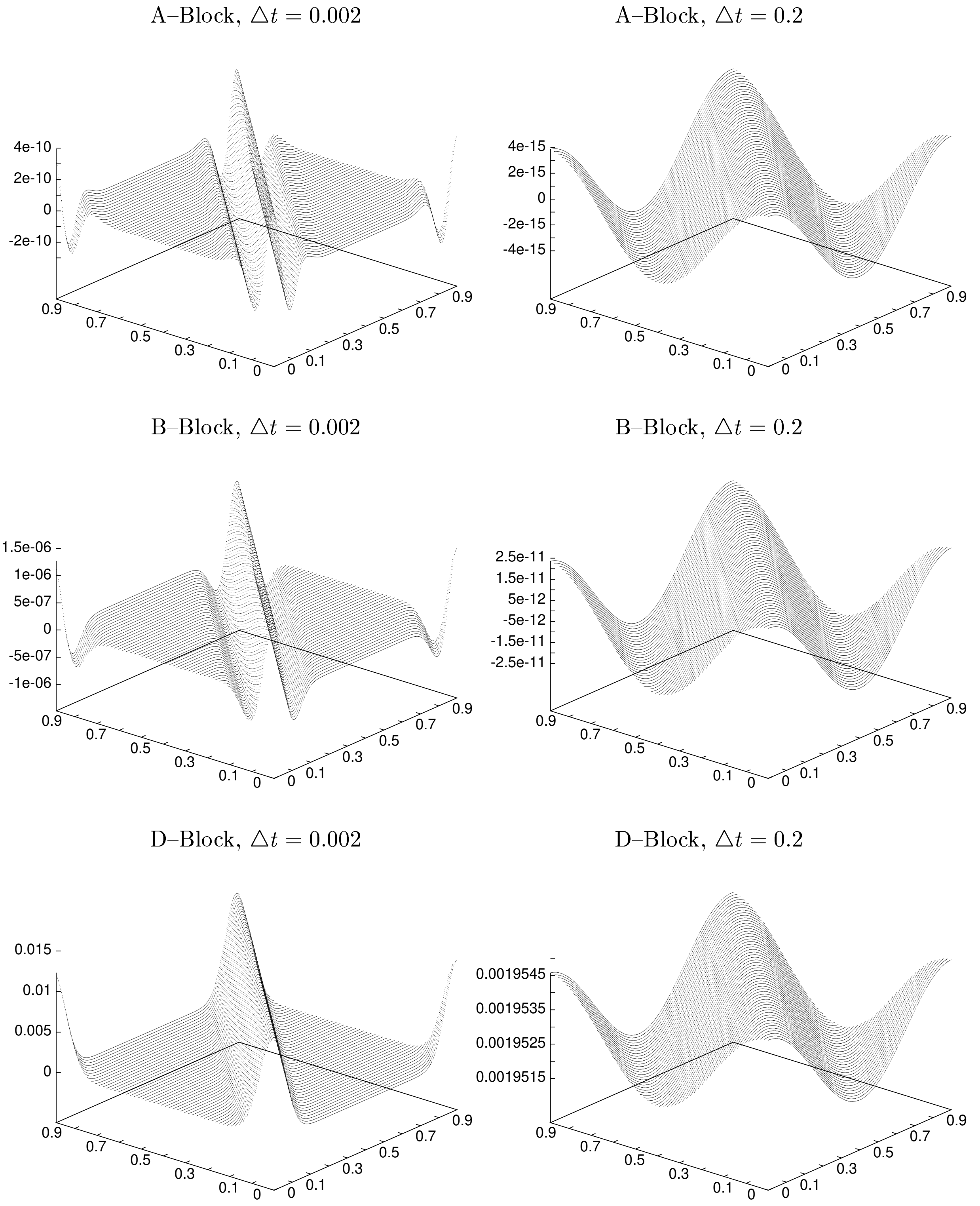


Abbildung 6.3: Koeffizienten der NS–Form der Halbgruppe $e^{t\nu\cdot\triangle}$, $N = 12$, $\nu = 1$.

Um die NS–Form der Halbgruppe bzgl. einer Skalar darzustellen, müßen wir die Koeffizienten $\{\alpha_i^1, \beta_i^1, \gamma_i^1, \delta_i^1\}_{i=0}^{N_1/2}$ abspeichern. Insgesammt sind das $4\frac{N_1}{2} = N_0$ Koeffizienten. Die **relative Kompressionsrate**

$$\kappa_r \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{N_\epsilon}{N_0} = 1 - \alpha, \tag{6.3}$$

gibt das Verhältnis der Anzahl der signifikanten Koeffizienten $N_\epsilon = \alpha N_0$ zu der Anzahl der Koeffizienten an, welche ohne Kompression abgespeichert worden wären. $N_j = 2^j$ bezeichnet die Anzahl der Freiheitsgrade auf Level j in einer Dimension.

Abbildung 6.4 zeigt die relative Kompressionsrate zu unterschiedlichen Zeitschrittweiten und Leveln. Je kleiner der Zeitschritt und je größer der Level ist, desto stärker fällt die Kompression aus.

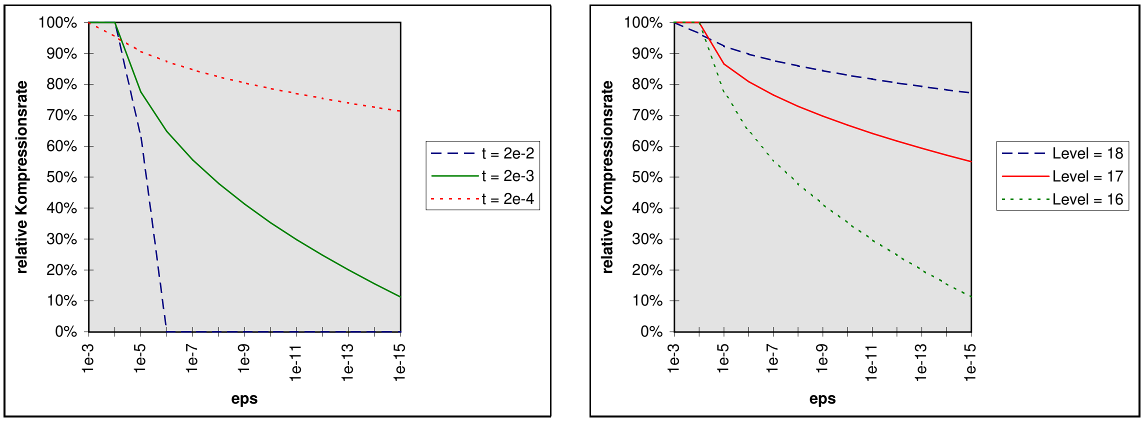


Abbildung 6.4: Relative Kompressionsrate, $\kappa_r = 1 - \alpha$.

Wir kommen nun zu den numerischen Ergebnissen unserer Berechnungen.

6.1.1.2 Startfunktion: $sin(2\pi x)$ auf $[0:1]$

Abbildung 6.5 zeigt die zeitliche Entwicklung der Lösung der Anfangswertaufgabe (6.1) bzgl. der Startfunktion $u_0(x) = sin(2\pi x)$ auf $[0:1]$. Man sieht deutlich den dissipativen Einfluß des Diffusionsterms. Im folgenden haben wir den Diffusionskoeffizienten auf $\nu = 1$ gesetzt.

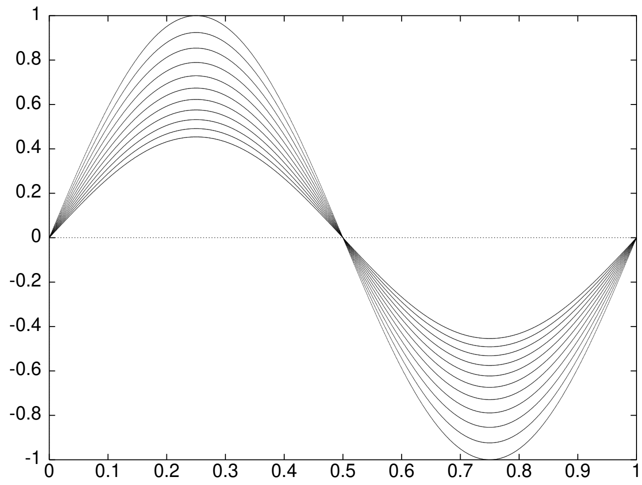


Abbildung 6.5: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

In der nächsten Abbildung 6.6 beschäftigen wir uns mit der Entwicklung des Vollgitterfehlers bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$–Norm bzw. der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm. Dabei ist $u(\delta t)$ die exakte Lösung zum Zeitpunkt δt und $u_j(\delta t)$ ist die numerische Lösung auf dem j–ten Level. Man erhält ein Verfahren vierter Ordnung, obwohl die Anzahl der verschwindenden Momente nur ein Verfahren zweiter Ordnung erwarten läßt. Das liegt daran, daß der Sinus genau eine Eigenschwingung des Laplace–Operators ist. Der Fehler wird kleiner, wenn der Zeitschritt größer gewählt wird, da die Lösung dissipativ ist.

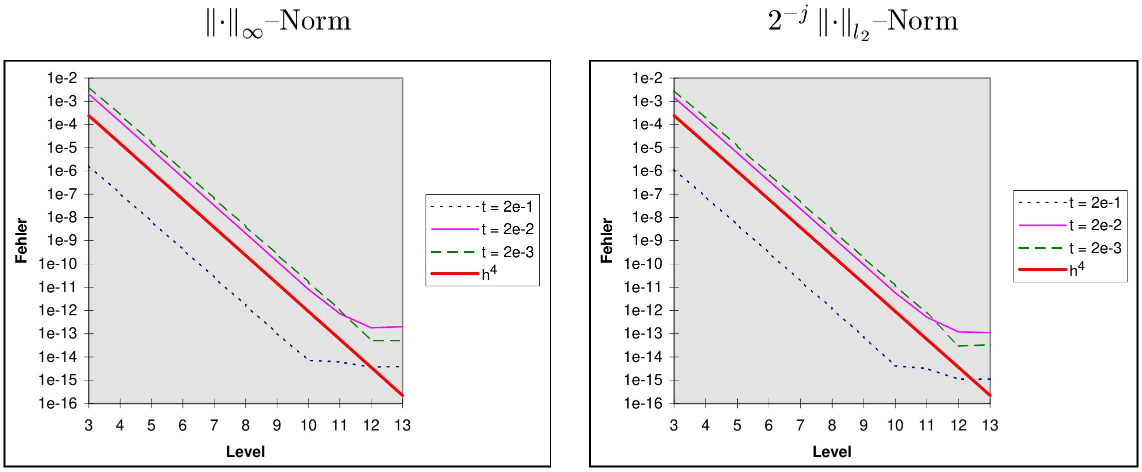


Abbildung 6.6: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf den vollen Gittern $G_j = \{i \cdot 2^{-j} \,|\, i = 0, \cdots, 2^j - 1\}$, $\nu = 1$.

Die folgende Abbildung 6.7 zeigt im linken Bild die Waveletkoeffizienten $\{d_i^{12}\}_i$ auf Level 12 und im rechten Bild das Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten G_{12}^ϵ bzgl. der Abschneidegenauigkeit $\epsilon = 10^{-6}$. Da die Lösung glatt ist, verteilen sich die Waveletkoeffizienten gleichmäßig über das ganze Intervall. An der Entwicklung des Gitters sieht man, wie stark die Lösung mit der Zeit gedämpft wird.

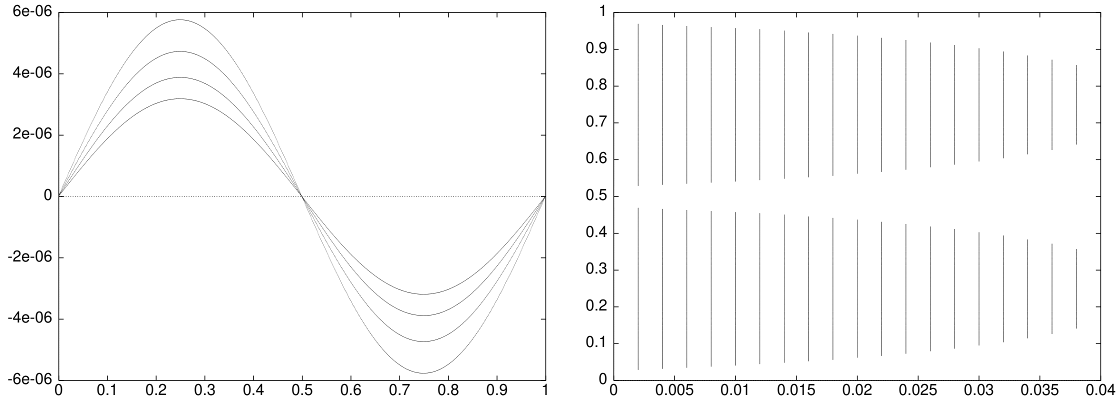


Abbildung 6.7: links Waveletkoeffizienten für $\delta t_{0,1,2,3}$, rechts Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten $G^{\epsilon}_{12} = \{i \cdot 2^{-12} \,|\, \left|d^{12}_i\right| > \epsilon,\, i = 0, \cdots, 2^{12} - 1\}$, $\delta t = 0.002$, $\epsilon = 10^{-6}$.

In Abbildung 6.8 wird die zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten auf Level $N = 12$ dargestell. Die Diffusion reduziert die Koeffizienten relativ schnell und es ergibt sich ein charakteristisches *Diffusionsprofil*.

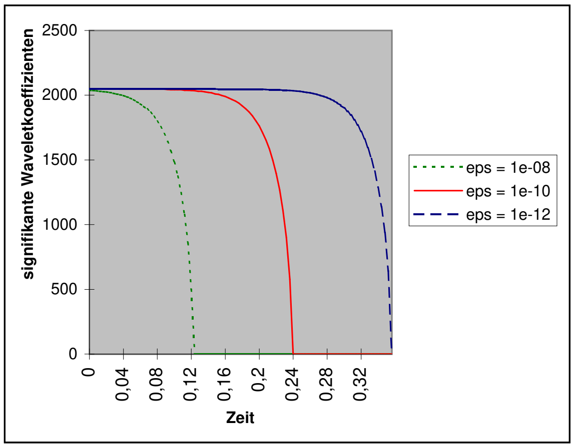


Abbildung 6.8: Zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $t = 0.002$, $\nu = 1$.

Schneidet man die Waveletkoeffizienten der Lösung in jedem Zeitschritt mit einer vorgegebenen Genauigkeit ϵ ab, so entwickelt sich ein adaptives Gitter $G^{\epsilon}_j = \{i \cdot 2^{-j} \,|\, \left|d^j_i\right| > \epsilon,\, i = 0, \cdots, 2^j - 1\}$. Uns interessiert nun das Verhältnis der Abschneidegenauigkeit ϵ zum Kompressionsfehler $F(\epsilon) = \left\|u(\delta t) - u^{\epsilon}_j(\delta t)\right\|$. Dabei ist $u(\delta t)$ die exakte Lösung zum Zeitpunkt δt und $u^{\epsilon}_j(\delta t)$ ist die mit ϵ komprimierte numerische Lösung auf Level j. Das linke Bild in Abbildung 6.9 zeigt den Fehler $F(\epsilon)$ bzgl. der

$\|\cdot\|_\infty$–Norm und das rechte Bild bzgl. der $2^{-j} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm. Im ersten Fall reduziert sich der Fehler mit linearer Ordnung $F(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$, im zweiten Fall mit der Ordnung 1.5.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad\qquad$ $2^{-14} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm

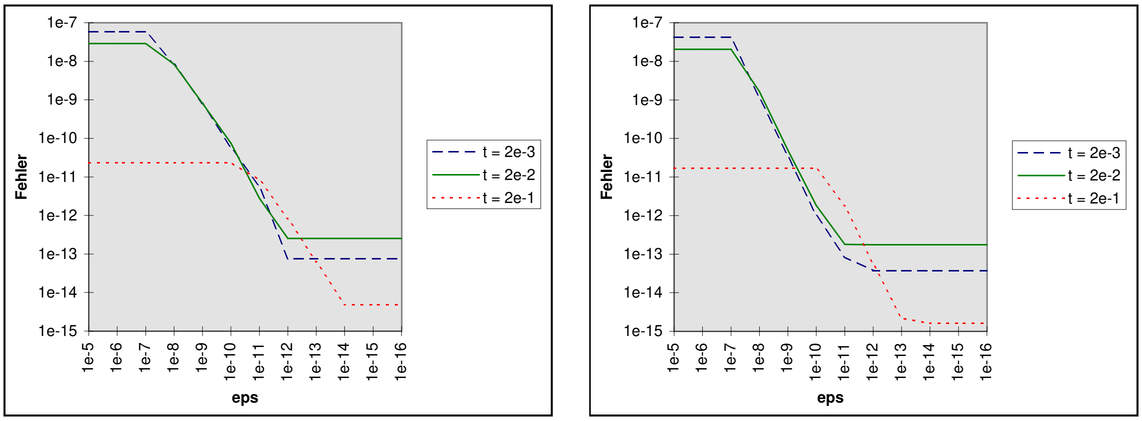


Abbildung 6.9: Kompressionsfehler $\|u(\delta t) - u_{14}^{\epsilon}(\delta t)\|$ auf dem adaptiven Gitter $G_{14}^{\epsilon} = \{i \cdot 2^{-14} \mid |d_i^{14}| > \epsilon,\ i = 0, \cdots, 2^{14} - 1\}$, $eps = \epsilon$, $N = 14$, $\nu = 1$.

Die letzte Abbildung 6.10 zeigt die ϵ–*Komplexität* der Lösung zu einem festen Zeitpunkt. Diese gibt das Verhältnis von Aufwand zu Genauigkeit an. Wir interessieren uns nun für die ϵ–Komplexität auf einem adaptiven Gitter. Je höher die Regularität der Funktion ist, desto näher liegt die ϵ–Komplexität, an der des vollen Gitters. Da die Startfunktion analytisch war, erhalten wir auf dem adaptiven Gitter die gleiche Ordnung wie auf dem vollen Gitter.

Wir betrachten die Ordnung des Fehlers

- auf einem vollen Gitter: $\quad e = \|u(\triangle t) - u_j(\triangle t)\| = \mathcal{O}(N^{-4})$ und
- auf einem adaptiven Gitter: $e(\epsilon) = \left\|u(\triangle t) - u_j^{\epsilon}(\triangle t)\right\| = \mathcal{O}(N_\epsilon^{-\alpha})$.

Der Aufwand(*Work*) $W(e)$ setzt den Fehler e in Beziehung zur Anzahl der signifikanten Koeffizienten. Diese lassen sich wiederum leich durch den Fehler ausdrücken — auf diese Weise erhält man die ϵ–*Komplexität* der Lösung.

$$
\begin{aligned}
W(e) = \dim u_j = N \quad &\Longrightarrow \quad W(e) \qquad = \mathcal{O}\left(e^{-1/4}\right) \\
W(e(\epsilon)) = \dim u_j^{\epsilon} = N_\epsilon \quad &\Longrightarrow \quad W(e(\epsilon)) = \mathcal{O}\left(e(\epsilon)^{-1/\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

In der nächsten Abbildung 6.10 sieht man im linken Bild die ϵ–Komplexität bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$–Norm und im rechten Bild bezüglich der $2^{-j} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm. Da die Startfunktion sehr glatt ist, entspricht die Komplexität der eines vollen Gitters ($\alpha = 4$).

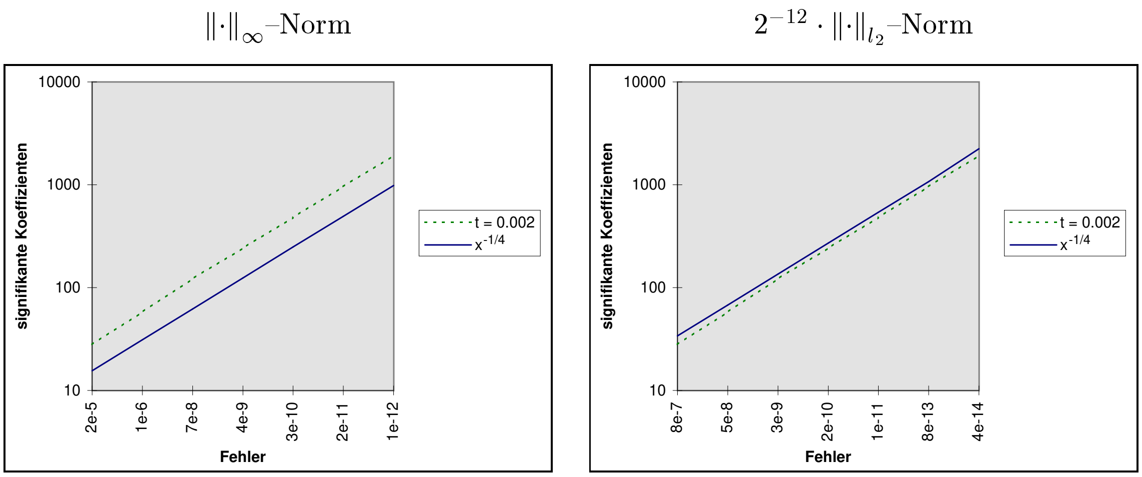


Abbildung 6.10: ε–Komplexität $W\left(e(\epsilon)\right) = \mathcal{O}\left(e(\epsilon)^{-1/4}\right)$, $N = 12$, $\nu = 1$

In dem folgenden Experiment haben wir eine stark lokalisierte Gaußfunktion als Startfunktion gewählt. In diesem Fall ist die ϵ–Komplexität bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$–Norm etwas geringer als im letzten Beispiel.

6.1.1.3 Startfunktion: $e^{-\frac{(x-0.5)^2}{4*\alpha}}$ auf $[0:1]$

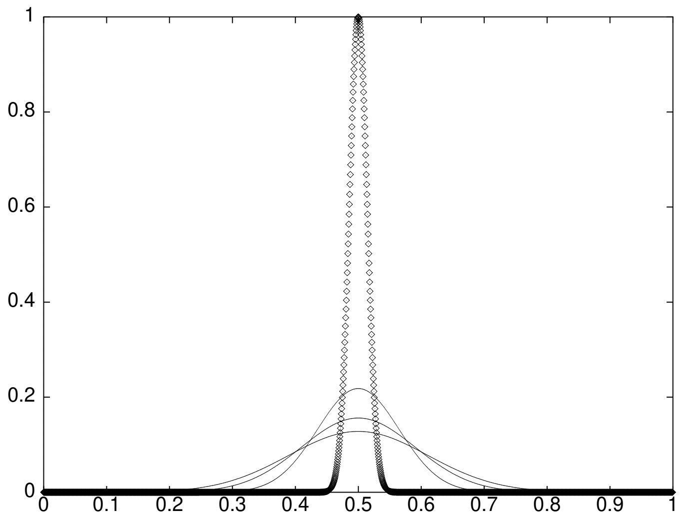


Abbildung 6.11: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $\alpha = 0.001$, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

In Abbildung 6.11 sieht man deutlich den Einfluß der Diffusion auf die Lösung. Die Temperatur nimmt zunächst schnell, dann immer langsammer ab und dehnt sich über den ganzen Stab aus. Obwohl die Startfunktion $u_0(x) = e^{-\frac{(x-0.5)^2}{4*\alpha}}$ keine Eigenschwingung des Laplace–Operators ist, haben wir einen Vollgitterfehler der

Ordnung vier, wie die nächste Abbildung 6.12 zeigt. Das liegt daran, daß die Gaußfunktion eine Eigenfunktion der Halbgruppe approximiert. Es ist bekannt, daß die Gaußfunktion folgende Fouriertransformierte besitzt:

$$
\begin{aligned}
g_\alpha(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \\
\hat{g}_\alpha(\omega) &= e^{-\alpha\omega^2}.
\end{aligned}
$$

Die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe (6.1) auf $[-1,1]$ bezüglich der Startfunktion $u_0(x) = g_\alpha(x)$ wird gegeben durch $u(t,x) = e^{t\triangle} g_\alpha(x)$. Die Halbgruppe wirkt folgendermaßen auf die Gaußfunktion

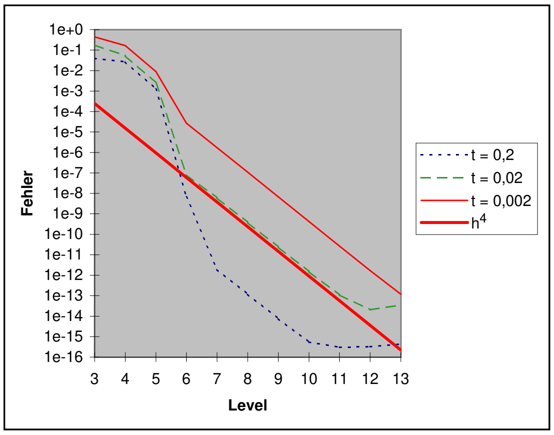
$$
\begin{aligned}
e^{t\triangle} g_\alpha(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ty^2} \hat{g}_\alpha(y) e^{ixy}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-(t+\alpha)y^2} e^{ixy}\, dy \\
&= g_{t+\alpha}(x).
\end{aligned}
$$

Je näher die Zeit t bei 0 ist, desto besser wird eine Eigenfunktion der Halbgruppe approximiert. In unserm Fall ist die Gaußfunktion nicht skaliert und die Gleichung wird auf $[0,1]$ gelöst, so daß wird den Mittelpunkt der Funktion auf $\frac{1}{2}$ verschieben müßen. Insgesamt erhält man dann die folgende Lösung:

$$
u(t,x) = e^{t\triangle} e^{-\frac{(x-0.5)^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\alpha}{t+\alpha}}\, e^{-\frac{(x-0.5)^2}{4(t+\alpha)}}.
$$

Für kleinere Zeiten t kommt man also näher an eine Eigenfunktion der Halbgruppe heran. Abbildung 6.12 zeigt, daß man im wesentlichen ein Verfahren der Ordnung 4 erhält. Je größer allerdings der Zeitschritt ist, desto feiner muß die Auflösung sein. Auf Level 3 und 4 beginnt man mit einer quadratischen Ordnung, es erfolgt dann ein schneller Übergang zur Ordnung 4.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm



$2^{-j}\, \|\cdot\|_{l_2}$–Norm

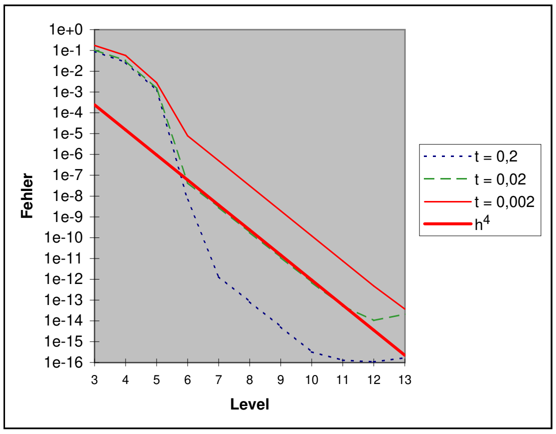


Abbildung 6.12: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf dem vollen Gitter, $N = 12$, $\nu = 1$.

In Abbildung 6.13 sieht man, wie gut sich die Wavelettransformation an die Lösung anpaßt und lokal Informationen über diese gibt. Je stärker die Lösung lokalisiert ist, desto stärker sind auch deren Waveletkoeffizienten lokalisiert.

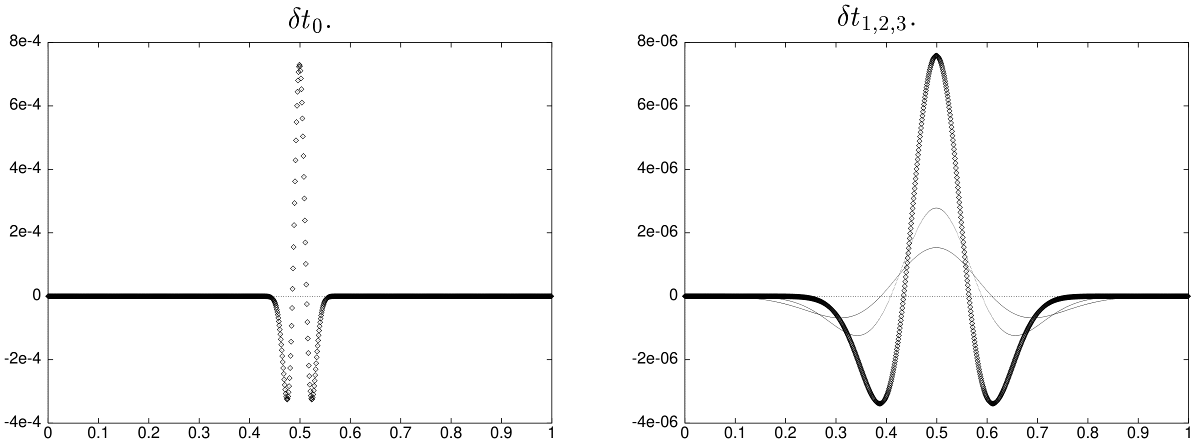


Abbildung 6.13: Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Die signifikanten Waveletkoeffizienten konzentrieren sich in der Intervallmitte. Zuerst nehmen diese zu, da die Träger sich verbreitern, bis die Koeffizienten mehr und mehr gedämpft werden und verschwinden. In der nächsten Abbildung 6.14 kann man die zeitliche Entwicklung des adaptiven Gitters G_{12}^{ϵ} sehen.

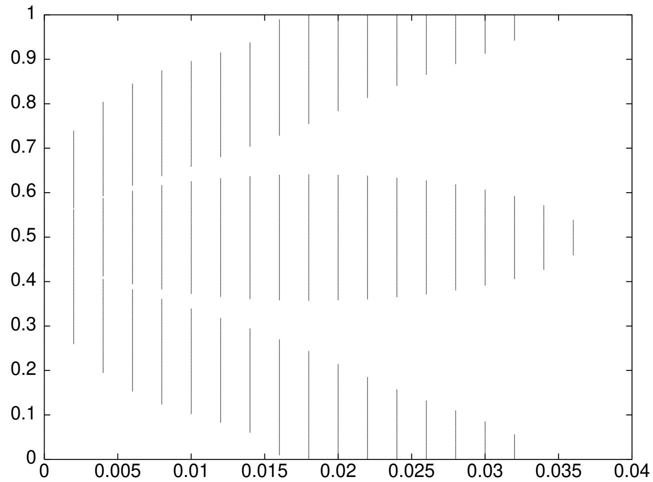


Abbildung 6.14: Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\epsilon = 10^{-6}$, $\nu = 1$.

Die Kompressionsfehler $\left\| u(\triangle t) - u_j^{\epsilon}(\triangle t) \right\|$ hat die gleiche Ordnung wie im letzten Abschnitt: bzgl. der $\|\cdot\|_{\infty}$–Norm reduziert sich der Fehler mit linearer Ordnung, und bzgl. der $2^{-j} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm mit der Ordnung 1.5.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\quad$ $2^{-14} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm

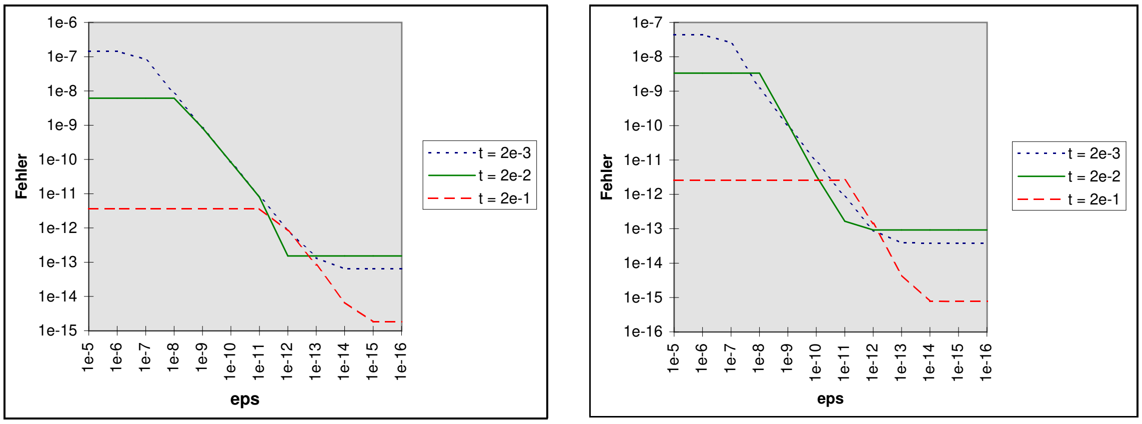


Abbildung 6.15: Kompressionsfehler $\|u(\delta t) - u_{14}^{\epsilon}(\delta t)\|$, $N = 14$, $\nu = 1$, $eps = \epsilon$.

Die Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, dargestellt in Abbildung 6.16, ergibt wieder das uns bekannte Profil, das die Dämpfungseigenschaft des Diffusionsterms wiederspiegelt.

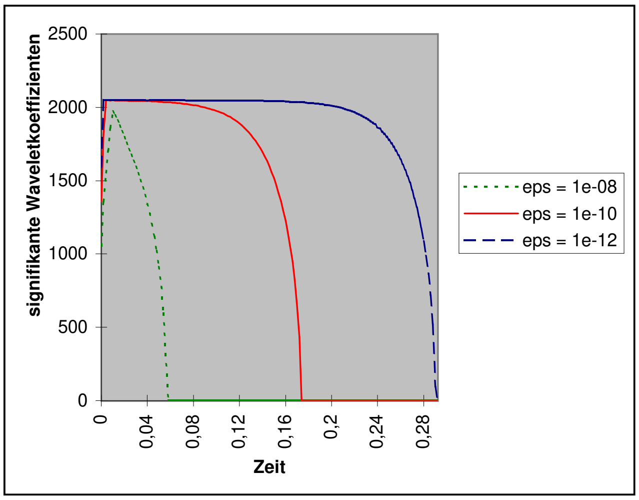


Abbildung 6.16: Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Die ε–Komplexität fällt bzgl. der einzelnen Normen unterschiedlich aus. Die $\|\cdot\|_\infty$–Norm reagiert sensibler auf die starke Lokalisierung der Startfunktion als die $\|\cdot\|_{l_2}$–Norm. Diese erreicht noch die Vollgitterordnung $\alpha = 4$, wogegen die $\|\cdot\|_\infty$–Norm nicht mehr ganz so groß ist $\alpha = 3.7$. Hätten wir die ε–Komplexität zu einem späteren Zeitpunkt gemessen, so würden beide Normen die volle Ordnung liefern, da die Diffusion die Lösung bis dahin stark genug geglättet hätte. Abbildung 6.17 zeigt die ε–Komplexität bzgl. der beiden Normen.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-14} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm

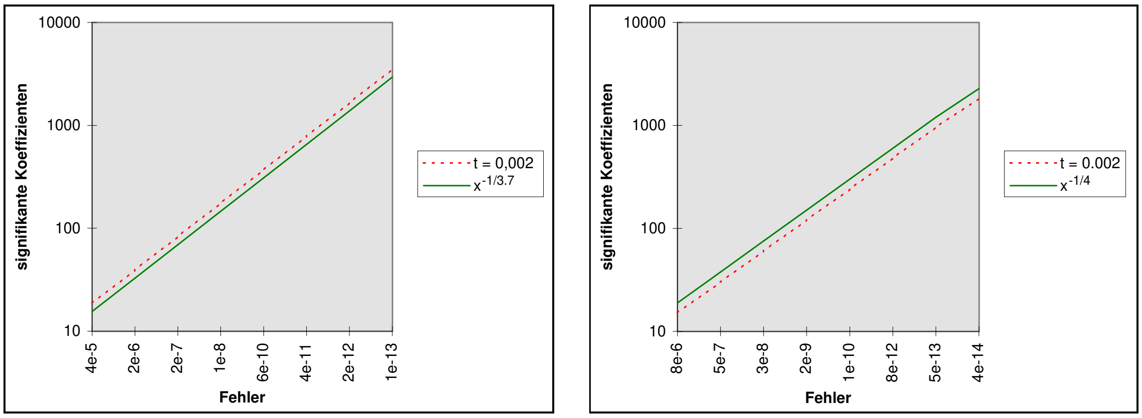


Abbildung 6.17: ε–Komplexität, $\delta t = 0.002$, $N = 14$, $\nu = 1$

Im nächsten Abschnitt reduzieren wir die Regularität der Startfunktion. Wir setzen nicht mehr globale Differenzierbarkeit voraus. Als Startfunktion haben wir eine Hütchen Funktion $u_0(x) = \frac{1}{2}N_2(x - 0.5)$ gewählt. Man erhält einen Vollgitterfehler der Ordnung zwei, wie es von der Anzahl der verschwindenden Momente der Waveletbasis auch zu erwarten ist.

6.1.1.4 Startfunktion: $\frac{1}{2}N_2(x - 0.5)$ auf $[0:1]$

Es ist typisch für parabolische Gleichungen, daß die Lösung im Laufe der Zeit immer glatter wird. In Abbildung 6.18 sieht man deutlich, wie schnell der Knick der Startfunktion herausgeglättet wird.

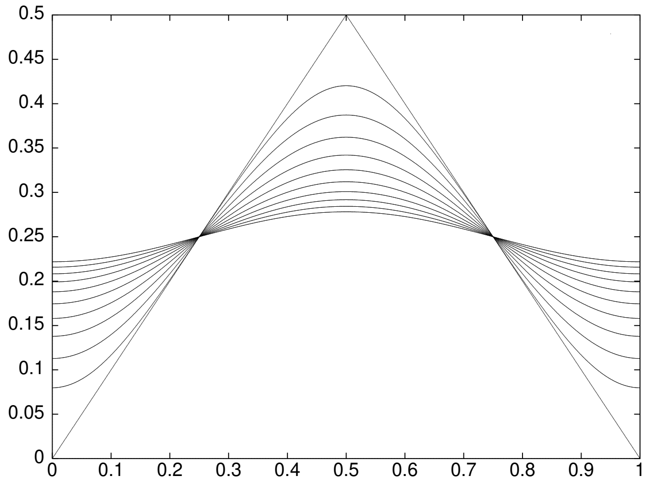


Abbildung 6.18: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Da die Startfunktion diesmal keine Eigenschwingung ist, können wir auch nich mit einem Verfahren vierter Ordnung rechnen. Wir benutzen Daubechie 4 Filter mit zwei verschwindenen Momeneten und erhalten deshalb ein Verfahren der Ordnung 2. Die nächste Abbildung 6.19 zeigt die Fehlerordnung auf dem vollen Gitter bezüglich der bereits bekannten Normen. Da wir die Lösung nicht mehr explizit berechnen können, haben wir den Fehler bezüglich einer hoch aufgelösten numerischen Lösung berechnet, die wir dann jeweils auf die entsprechenden Level projiziert haben.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad\qquad$ $2^{-j} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm

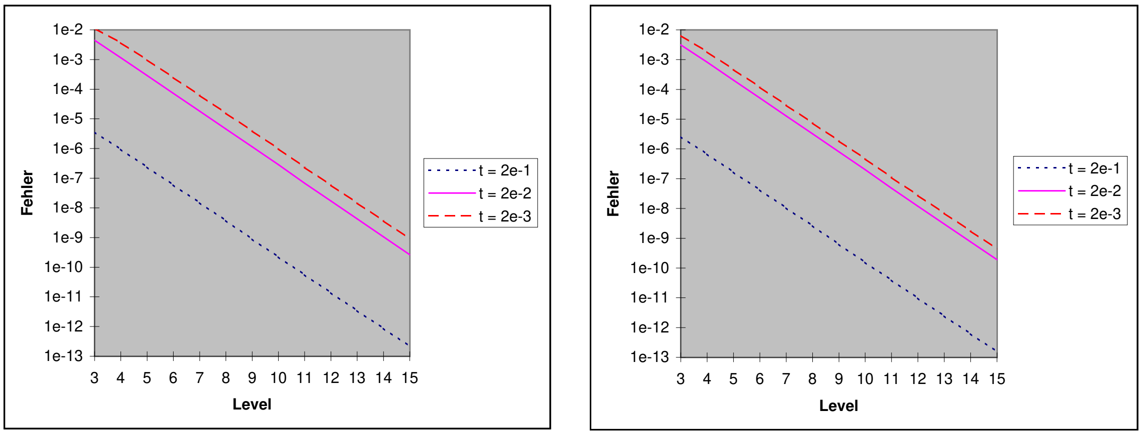


Abbildung 6.19: Fehler $\|u(\delta t_k) - u_j(\delta t_k)\|$ auf den vollen Gittern, $\nu = 1$.

Die Startfunktion ist stückweise linear und die von uns verwendete Waveletbasis hat zwei verschwindende Momente. Deshalb liefert nur der Waveletkoeffizient in der Mitte des Intervalls einen Beitrag. Abbildung 6.20 zeigt die Waveletkoeffizienten auf Level 12 für die ersten drei Zeitschritte. Man sieht gut, wie die Spitze herausgeglättet wird. Schon nach wenigen Zeitschritten ist die Lösung so glatt, als wäre man mit einer analytischen Funktion gestartet.

δt_0 $\qquad\qquad$ $\delta t_{1,2}$

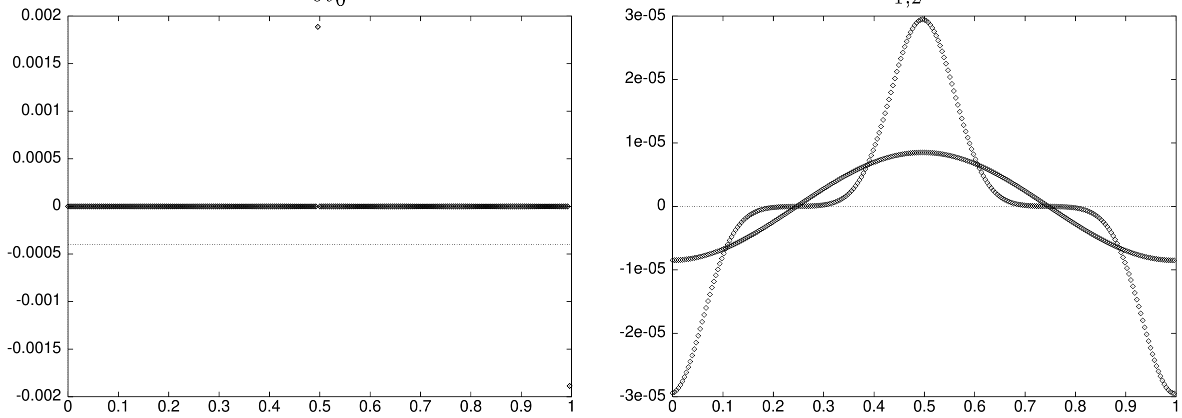


Abbildung 6.20: Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Die Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten nimmt am Anfang sprungartig zu, da die Startfunktion nur einen signifikanten Waveletkoeffizienten besitzt. Ansonsten entwickelt sich das bereits bekannte diffusionsbedingte Profil. Abbildung 6.21 stellt die zeiliche Entwicklung der signifikanten Waveletkoeffizienten dar.

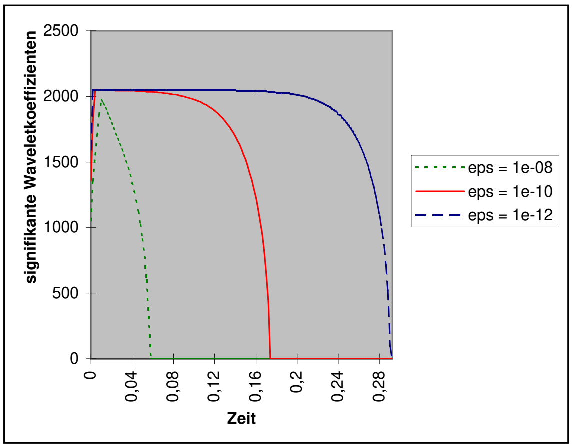


Abbildung 6.21: Signifikante Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Räumlich konzentrieren sich die signifikanten Waveletkoeffizienten in der Mitte des Intervalls, wo auch die Spitze der Startfunktion liegt. Abbildung 6.22 zeigt das adaptive Gitter auf Level $N = 12$.

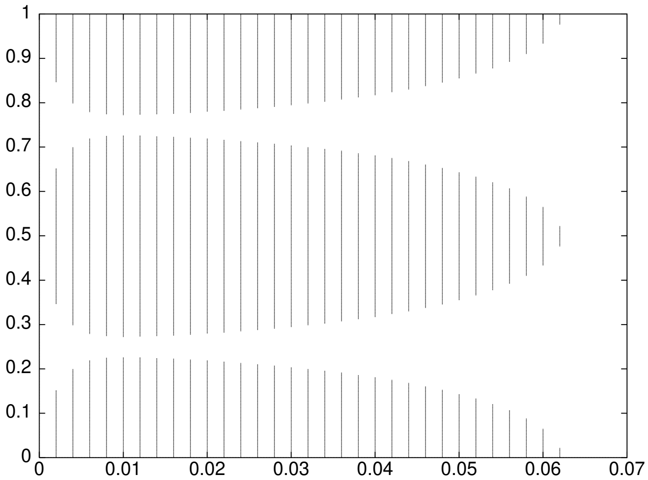


Abbildung 6.22: Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$, $\epsilon = 10^{-6}$.

Der Kompressionsfehler, dargestellt in Abbildung 6.23, verhält sich wie gewohnt: bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$–Norm reduziert er sich linear und bzgl. der $2^{-j} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm mit der Ordnung 1.5. Da der Vollgitterfehler jedoch nur eine quadratisch Ordnung besitzt, wird der Vollgitterfehler schneller erreicht als in den beiden letzten Beispiele.

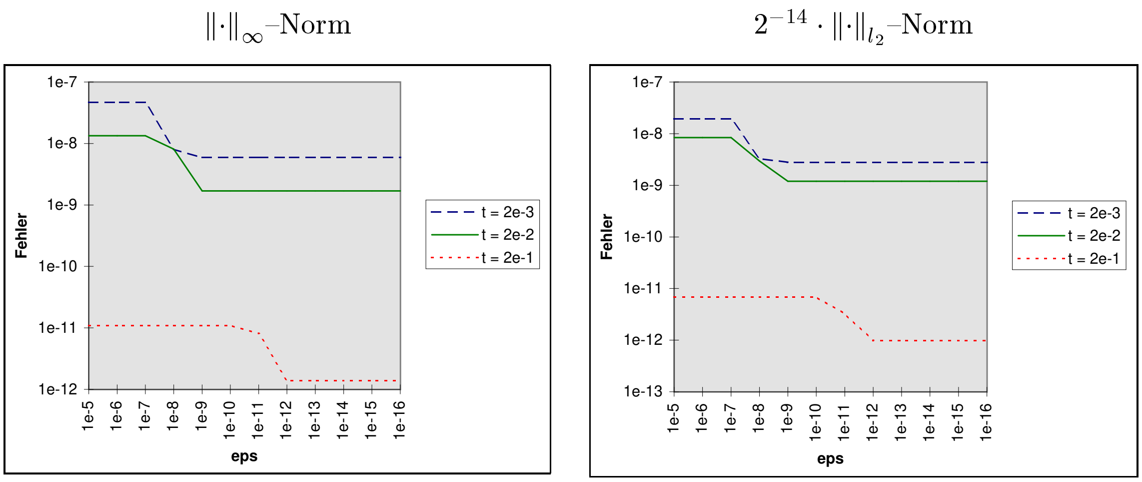


Abbildung 6.23: Kompressionsfehler $\|u(\delta t) - u_{14}^{\epsilon}(\delta t)\|$, $N = 14$, $\nu = 1$, $\epsilon = eps$.

Abbildung 6.24 zeigt die ε–Komplexität zum Zeitpunkt $\delta t = 0.002$. Die Diffusion hat die Lösung bereits hinreichend geglättet, so daß wir die volle Ordnung $\alpha = 4$ erhalten.

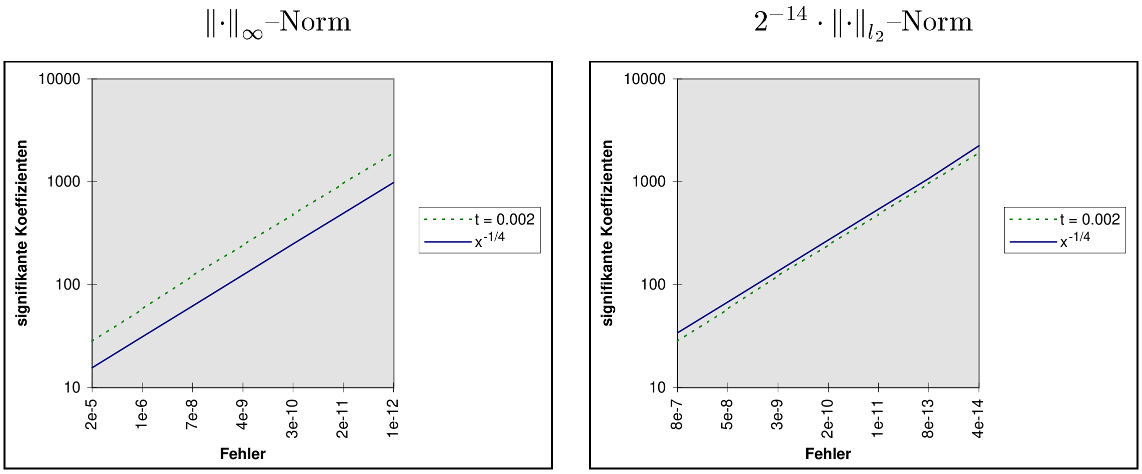


Abbildung 6.24: ε–Komplexität, $N = 14$, $\nu = 1$

Im nächsten Beispiel verringern wir die Regularität der Startfunktion noch ein wenig: sie ist jetzt nicht mehr stetig.

6.1.1.5 Startfunktion: $\chi_{(-1/2,1/2)}(x)$ auf $[-1:1]$

In diesem Abschnitt haben wir die charakteristische Funktion als Startfunktion gewählt. Abbildung 6.25 zeigt die Auswirkung der Diffusion auf die Lösung. Schon nach wenigen Zeitschritten ist der Sprung herausgeglättet und die Lösung ist glatt.

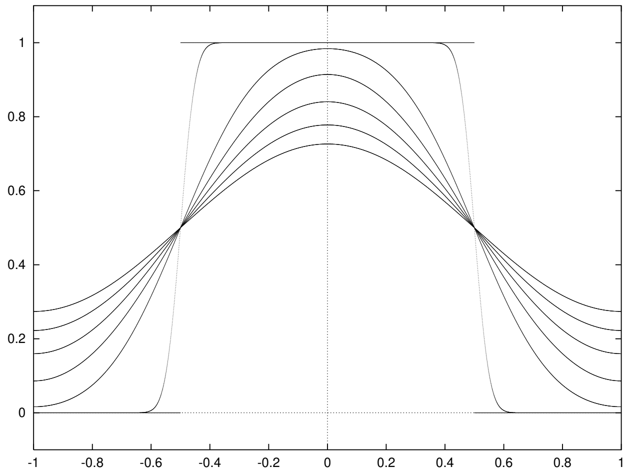
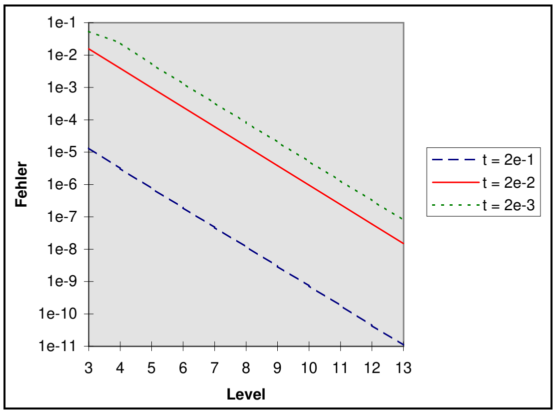


Abbildung 6.25: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Die Ordnung des Verfahrens ist, wie im letzten Abschnitt auch, quadratisch. Abbildung 6.26 zeigt deutlich die Ordnung des Fehlers $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf dem vollen Gitter.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm



$2^{-j} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm

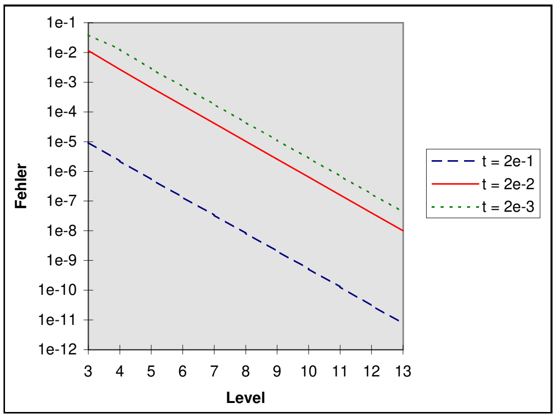


Abbildung 6.26: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf den vollen Gittern $\nu = 1$.

In der nächsten Abbildung 6.27 werden die Waveletkoeffizienten der Lösung zu unterschiedlichen Zeitpunkten dargestellt. Zunächst sammeln sich die signifikanten Waveletkoeffizienten um die beiden Sprünge herum. Man sieht gut, wie sich die Koeffizienten adaptiv an die Lösung anpassen. Mit fortschreitender Zeit wird die Lösung immer glatter und die Koeffizienten dehnen sich über das ganze Intervall aus.

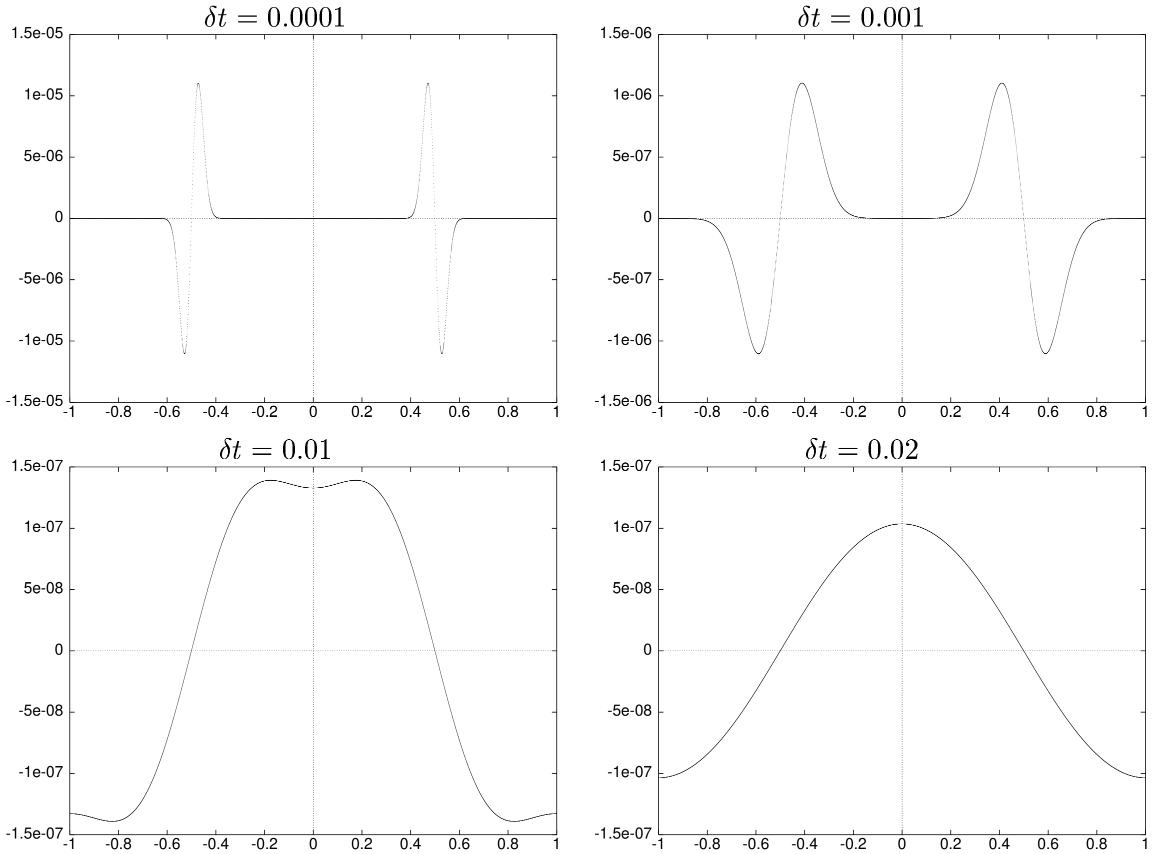


Abbildung 6.27: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\nu = 1$.

Die folgende Abbildung 6.28 zeigt im linken Bild die zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten und im rechten Bild das Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten. Beide Bilder haben wir so ähnlich bereits mehrmals gesehen. Bei dem Gitter fällt auf, daß sich im ersten Zeitschritt keine Koeffizienten in der Mitte des Intervalls ansiedeln. Das liegt daran, daß zu dem Zeitpunkt die Lösung in der Mitte des Intervalls noch konstant ist — siehe dazu auch das linke obere Bild in Abbildung 6.27.

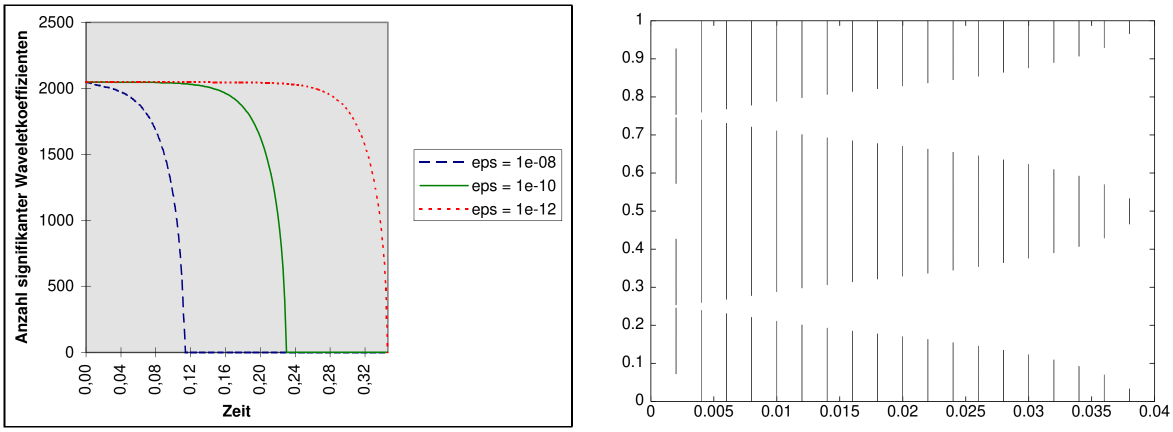


Abbildung 6.28: links Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, rechts Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\epsilon = 10^{-6}$.

Die letzten beiden Diagramme in Abbildung 6.29 beschäftigen sich mit der ε–Komplexität der Lösung zum Zeitpunkt $\delta t = 0.0001$. Beide Normen weisen eine Komplexität von $\alpha = 1.8$ auf, da die Lösung zu diesem Zeitpunkt noch nich stetig ist. Das volle Gitter hat eine Ordnung von $\alpha = 2$.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-14} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm

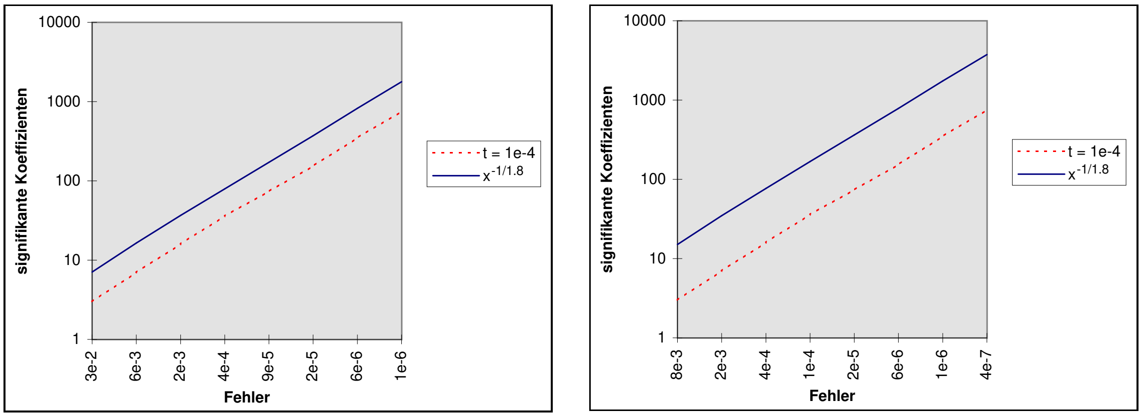


Abbildung 6.29: ε–Komplexität, $N = 14$, $\nu = 1$

Im letzten Beispiel haben wir eine Wurzel als Startfunktion gewählt. Die Ableitung ist also singulär.

6.1.1.6 Startfunktion: $\left|\sqrt{2\pi x}\right|$ auf $[-1:1]$

Obwohl die Ableitungen der Startfunktion im Ursprung singulär sind, wird die Lösung durch die Diffusion geglätet.

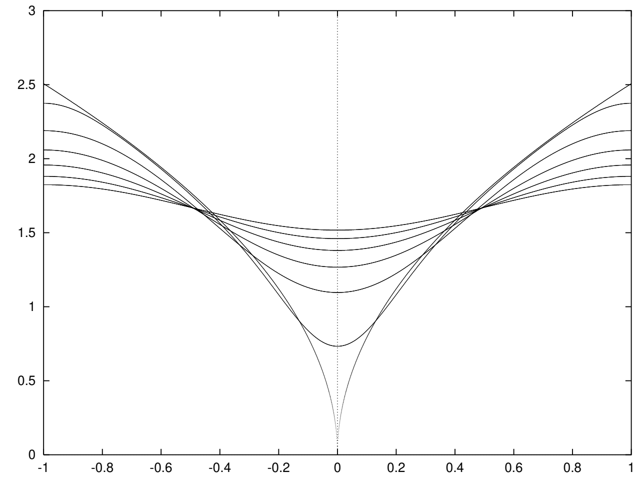


Abbildung 6.30: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Die Ordnung des Verfahrens bricht, bedingt durch die Singularität der Ableitungen, ein. Abbildung 6.31 zeigt, daß unser Verfahren die Ordnung 1.5 hat.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-j} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm

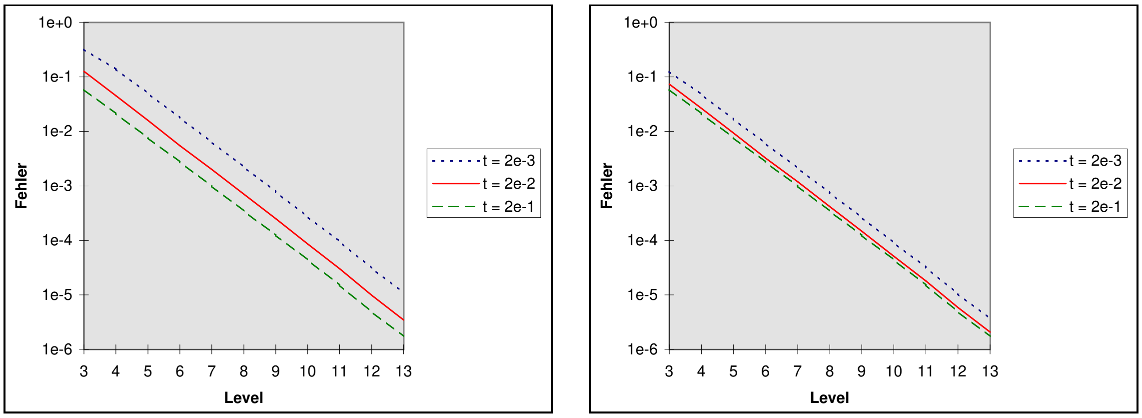


Abbildung 6.31: Fehler $\|u(\delta t_k) - u_j(\delta t_k)\|$ auf dem vollen Gitter, $\nu = 1$.

In Abbildung 6.32 sieht man, wie gut sich die Waveletkoeffizienten an die Singularität anpassen. Die Koeffizienten sind um die Singularität herum lokalisiert. Mit fortschreitender Zeit wird die Lösung geglättet und die Waveletkoeffizienten verteilen sich über das ganze Intervall.

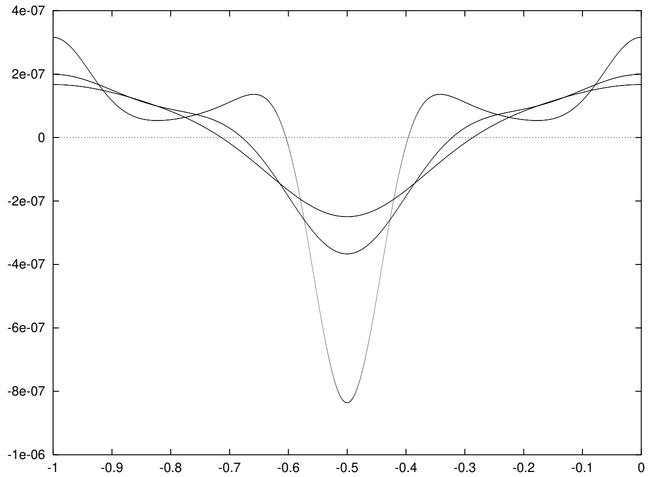
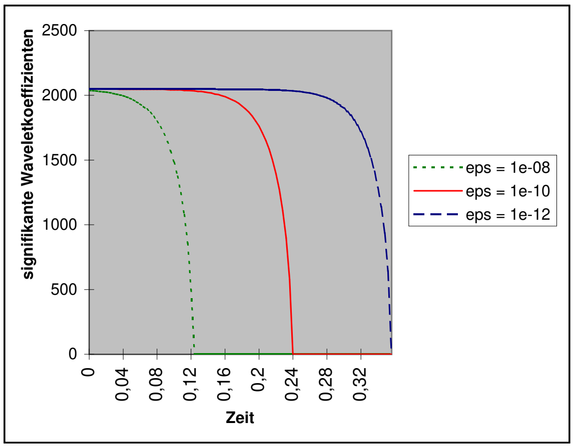


Abbildung 6.32: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Die nächste Abbildung 6.33 zeigt im linken Bild die zeitliche Entwicklung der signifikanten Waveletkoeffizienten und im rechten Bild das Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten. Beide Bilder sind ähnlich bereits mehrmals aufgetreten.



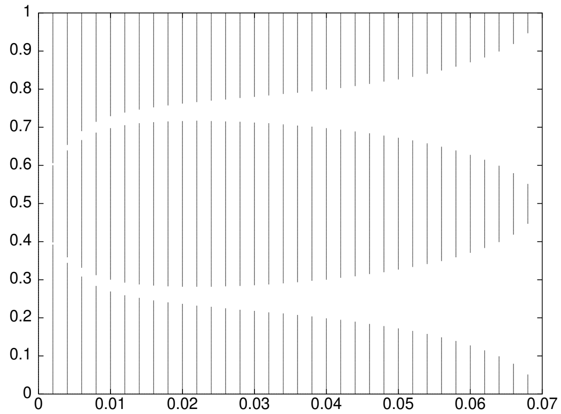


Abbildung 6.33: links Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, rechts Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\epsilon = 10^{-6}$, $\nu = 1$.

Die ε–Komplexität der Lösung zum Zeitpunkt $\delta t = 0.002$ weicht von der Ordnung des vollen Gitters ab. Abbildung 6.34 zeigt für beide Normen eine Komplexität der Ordnung $\alpha = 1.4$.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad\qquad$ $\|\cdot\|_{h_{14}}$–Norm

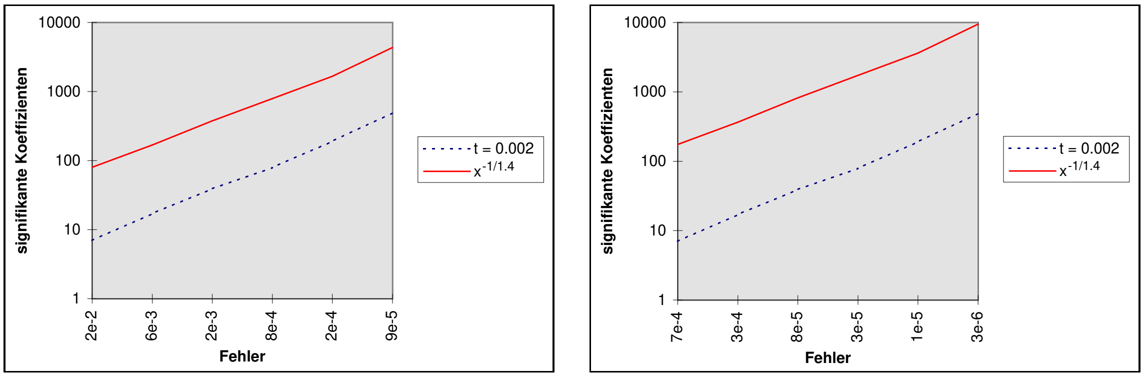


Abbildung 6.34: ε–Komplexität, $N = 12$, $\nu = 1$

6.1.2 Die nichtlineare Wärmegleichung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer **nichtlinearen Wärmeleitungsgleichung**. Das dazugehörige Anfangsrandwertproblem lautet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} u_t &= \nu\triangle u + f(u), && x \in (0,1),\, t > 0, \\ u(t,\, 0) &= u(t,\, 1) = 0, && t > 0, \\ u(0,\, x) &= u_0(x), && x \in (0,1). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Im Gegensatz zur linearen Wärmegleichung (6.1) hängt hier die Wärmequelle $f(u)$ noch zusätzlich von der Temperatur u ab. Die nichtlineare Funktion $f(u)$ sorgt dafür, daß sich die Lösung im Laufe der Zeit *aufbläßt*. Ausschlaggebend für die Geschwindigkeit, mit der dies geschieht, ist der Diffusionskoeffizient ν. Je kleiner ν ist, desto größer ist der Einfluß der Nichtlinearität. Die Halbgruppentheorie besagt, daß unter bestimmten Bedingungen an f die Lösung von (6.4) gegeben wird durch

$$u(t,x) = e^{t\nu\triangle}u_0(x) + \int_0^t e^{(\tau-t)\nu\triangle} f(u)(x,\tau)\, d\tau.$$

Diskretisiert man das Zeitintegral mit der Trapezregel, so ergibt sich die **semidiskrete Lösung:**

$$u(\delta t_k, x) = e^{\delta t_k \nu\triangle}u_0(x) + N(\delta t_k)\left\{f(u)(\delta t_k, x) + f(u)(\delta t_{k+1}, x)\right\}$$

mit $N(t) = \frac{1}{\nu}\left(id - e^{t\nu\triangle}\right)\triangle^{-1}$. In den beiden folgenden Beispielen wählen wir $\nu = 0.001$, so daß die Nichtlinearität der Gleichung stärker in den Vordergrund tritt. Die Anfangsfunktion ist immer eine Sinusschwingung; wir variieren lediglich die nichtlineare Funktion. Im nächsten Abschnitt gehen wir auf die Kompression des nichtlinearen Operators ein.

6.1.2.1 Kompression des Operators: $N(t) = \frac{1}{\nu}\left(id - e^{t\nu\triangle}\right)\triangle^{-1}$

Wir komprimieren die NS–Form $\mathbf{T}$ des Operators $N(t) = \frac{1}{\nu}\left(id - e^{t\nu\triangle}\right)\triangle^{-1}$, indem wir die Koeffizienten unterhalb einer vorgegebenen Genauigkeit ϵ abschneiden. Der dadurch entstehende Fehler wird in der Zeilensummennorm gemessen. Wie für die Halbgruppe der Wärmegleichung ergibt sich in der Einskalendarstellung ($J = 1$) eine *lineare Fehlerordnung:*

$$F(\epsilon) = \|\mathbf{T} - \mathbf{T}^{\epsilon}\|_{\infty} = \mathcal{O}(\epsilon).$$

Dabei ist $\mathbf{T}^{\epsilon}$ die mit ϵ komprimierte NS–Form von $N(t)$. Die Abbildung 6.35 zeigt den Kompressionsfehler $\|\mathbf{T} - \mathbf{T}^{\epsilon}\|_{\infty}$ auf Level $N = 12$ mit dem Leitungskoeffizienten $\nu = 0.001$. In doppelt logarithmischer Darstellung sieht man deutlich die lineare Ordnung des Fehlers.

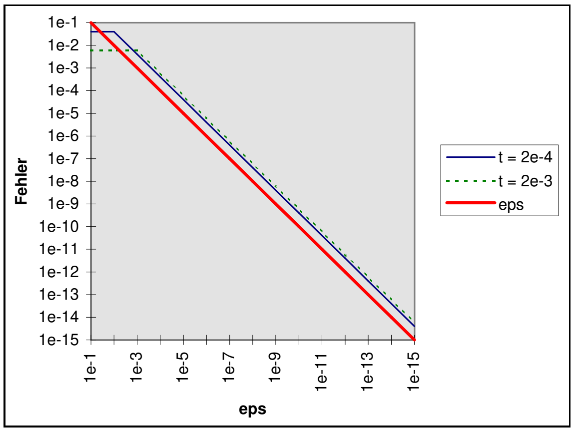


Abbildung 6.35: Kompressionsfehler in der Zeilensummennorm, $\|\mathbf{T} - \mathbf{T}^{eps}\|_{\infty}$, $eps = \epsilon$, $N = 12$, $J = 1$, $\nu = 0.001$.

Die nächste Abbildung 6.36 zeigt, daß sich die signifikanten Koeffizienten ebenfalls mit linearer Ordnung entwickeln. Je größer der Zeitschritt ist, desto weniger Koeffizienten sind signifikant. Das liegt daran, daß für größere Zeiten t das Symbol des Operators $\sigma(x) = \frac{1}{\nu 2^{2N} x^2}\left(1 - e^{-t\nu 2^{2N} x^2}\right)$ schneller abfällt. Für den kleinsten Zeitschritt $\delta t = 2e - 4$ in Abbildung 6.36 findet keine Kompression statt und man erreicht den Vollgitterfehler. Für die beiden anderen Zeitschritte setzt die Kompression erst auf einem höheren Level ein. Sowohl die Zeit $0 < t < 1$ als auch der Diffusionskoeffizient $0 < \nu < 1$ vermindern den Einfluß des Levels N auf das Symbol. Erst ab einer bestimmten Größe von N fällt das Symbol schnell genug ab, und es entsteht ein Kompressionseffekt.

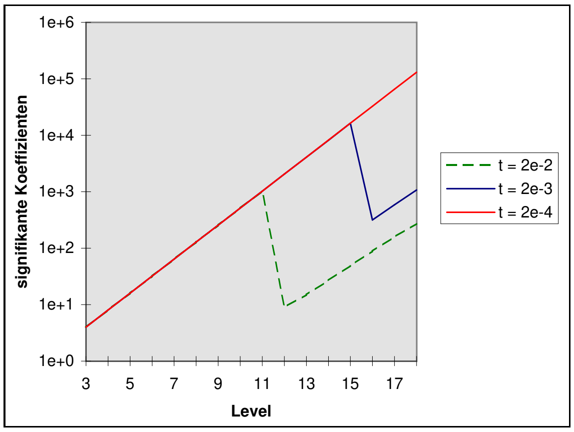


Abbildung 6.36: signifikante Koeffizienten von $\mathbf{T}^{\epsilon}$, $\epsilon = 10^{-14}$, $J = 1$, $\nu = 0.001$.

In der nächsten Abbildung 6.37 zeigen wir die Koeffizienten der Blöcke A_1, B_1 und D_1 zu zwei unterschiedlichen Zeitschrittweiten. Die Koeffizienten der A_1 und der B_1 Blöcke sind um die Diagonale herum sehr stark lokalisiert. Der D_1 Block trägt bei weitem die meisten Informationen. Deshalb ist es sinnvoll, den Operator auf mehreren Skalen darzustellen, da alle Skalierungsblöcke D_j, $j = 1, \cdots, J$ bis auf den Grobgitterblock D_J verschwinden. Dieser ist zwar voll besetzt, hat aber nur wenige Koeffizienten.

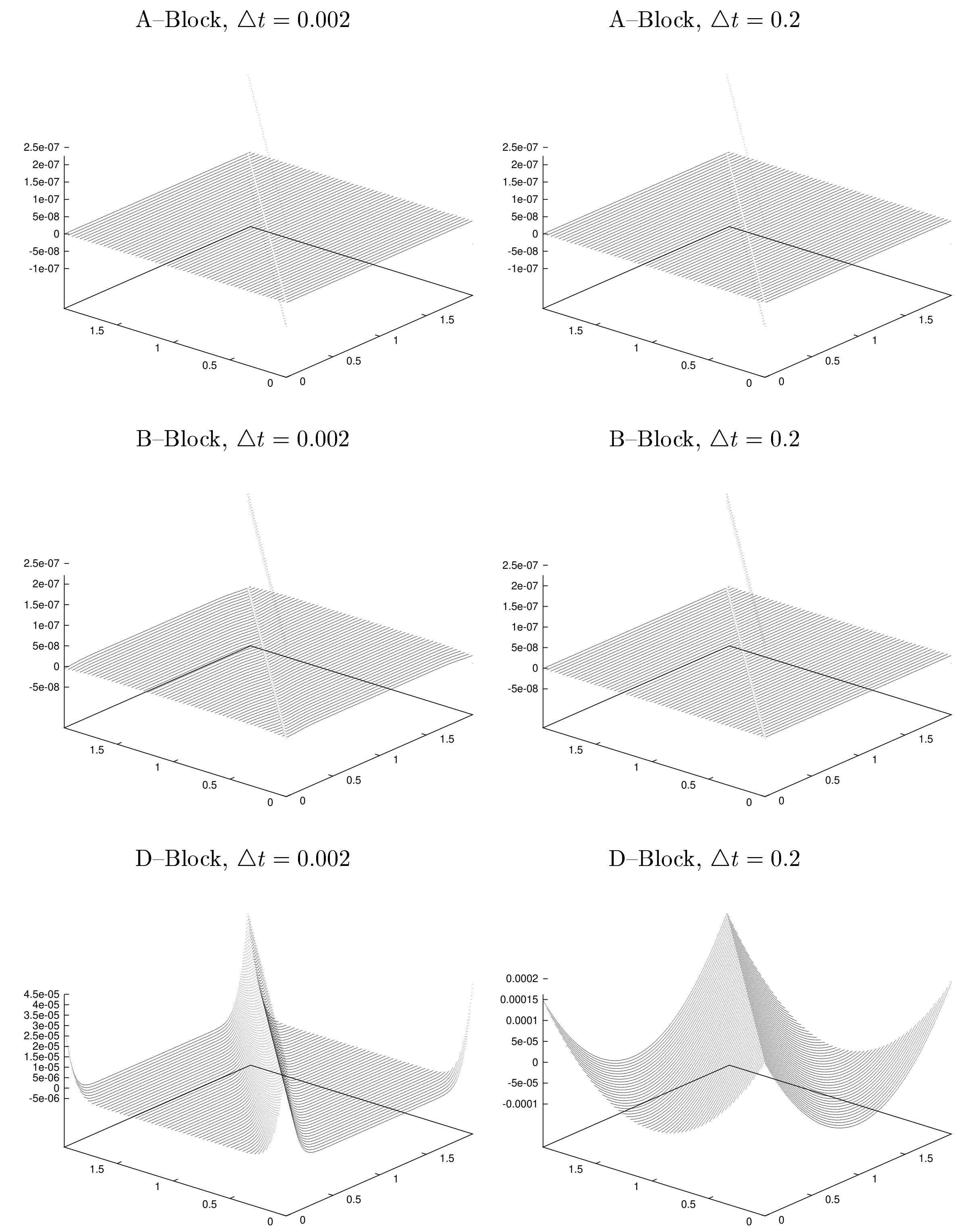


Abbildung 6.37: Koeffizienten der NS–Form der Halbgruppe $e^{t\nu\cdot\triangle}$, $N = 12$, $J = 1$, $\nu = 0.001$.

In der letzten Abbildung 6.38 wollen wir uns mit der relativen Kompressionsrate beschäftigen. Zur Erinnerung: die **relative Kompressionsrate**

$$\kappa_r \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{N_\epsilon}{N_0} = 1 - \alpha, \tag{6.5}$$

gibt das Verhältnis der Anzahl der signifikanten Koeffizienten N_ϵ zu der Anzahl der Koeffizienten an, welche ohne Kompression abgespeichert worden wären. Abbildung 6.38 zeigt die relative Kompressionsrate zu unterschiedlichen Zeitschrittweiten und Leveln. Es fällt auf, daß fast alle Koeffizienten die gleiche Größenordnung besitzen und sich deshalb der Übergang von einer Kompressionsrate von hundert Prozent zu einer Kompressionsrate von null sprungartig vollzieht. Dies ist ein nichtlinearer Effekt. Es ist deshalb fast unmöglich den Operator mittels *tresholding* zu komprimieren. Sinnvoller ist es, den Operator auf mehreren Skalen darzustellen. Denn dieser benötgt, vergleichen mit der Einskalendarstellung, nur einen Bruchteil der Koeffizienten. Die Kompressionsraten bezüglich der einzelnen Level — rechtes Bild — liegen so nah bei einander, daß sie kaum zu unterscheiden sind.

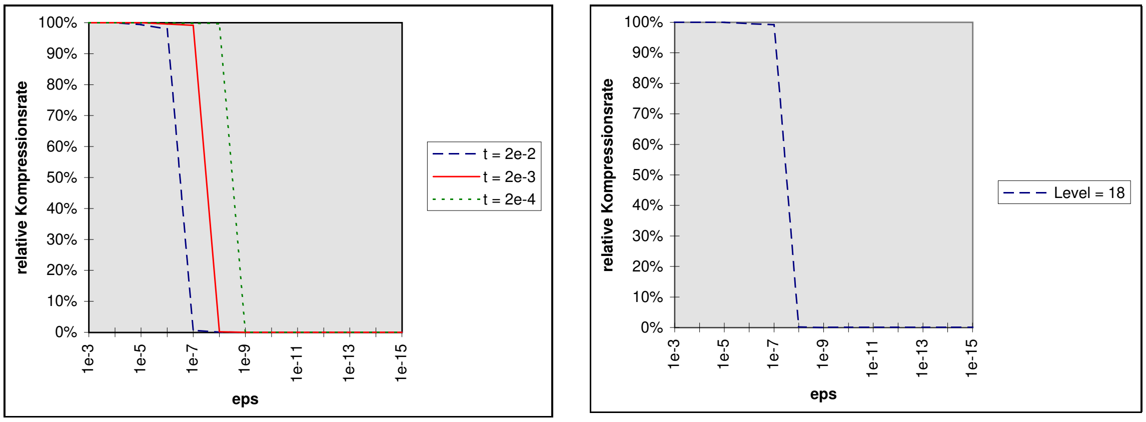


Abbildung 6.38: Relative Kompressionsrate, $\kappa_r = 1 - \alpha$.

Wir kommen nun zu den numerischen Ergebnissen dieses Abschnitts.

6.1.2.2 Nichtlineare Wärmequelle: $f(u) = u^3$

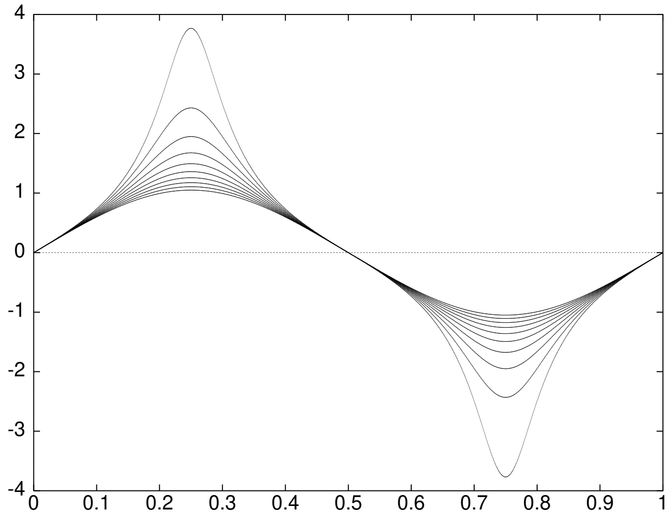
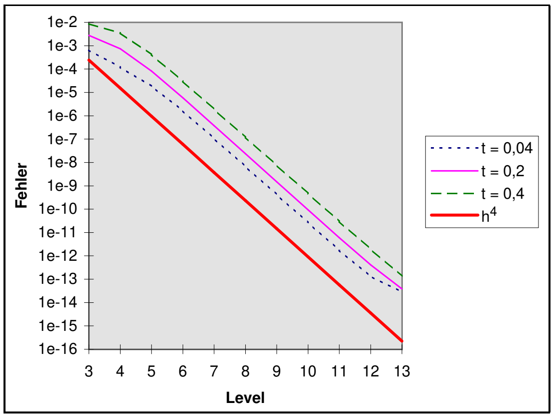


Abbildung 6.39: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 0.001$.

Die nichtlineare Wärmequelle $f(u)$ kontolliert das Wachstum der Lösungsfunktion. Für die spezielle Wahl $f(u) = u^3$ ist die Lösung unbeschränkt. Da wir nur eine schwache Diffusion($\nu = 0.001$) voraussetzen, wächst die Lösung relativ schnell an. Wie im linearen Fall erhält man ein Verfahren der Ordnung vier, da die Startfunktion $u_0(x) = sin(2\pi x)$ gerade eine Eigenschwingung des Laplace–Operators ist. In der nächsten Abbildung 6.40 sieht man die Ordnung des Verfahrens bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$–Norm und der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm



$2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

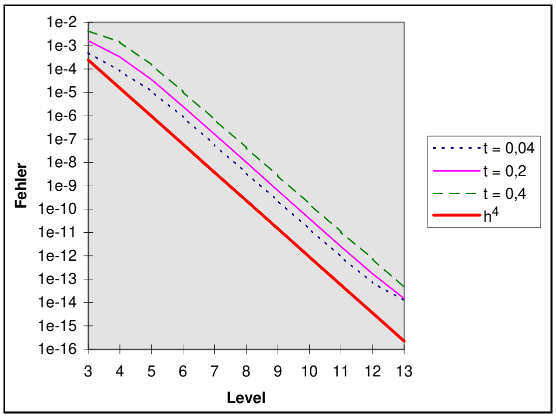


Abbildung 6.40: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf dem vollen Gitter, $\nu = 0.001$.

Abbildung 6.41 zeigt die Waveletkoeffizienten der Lösung zu unterschiedlichen Zeiten. Man sieht deutlich, wie sich die Koeffizienten an die Spitzen der Lösung anpassen. Je stärker die Lösung anwächst, desto stärker schwingen sich die Waveletkoeffizienten auf.

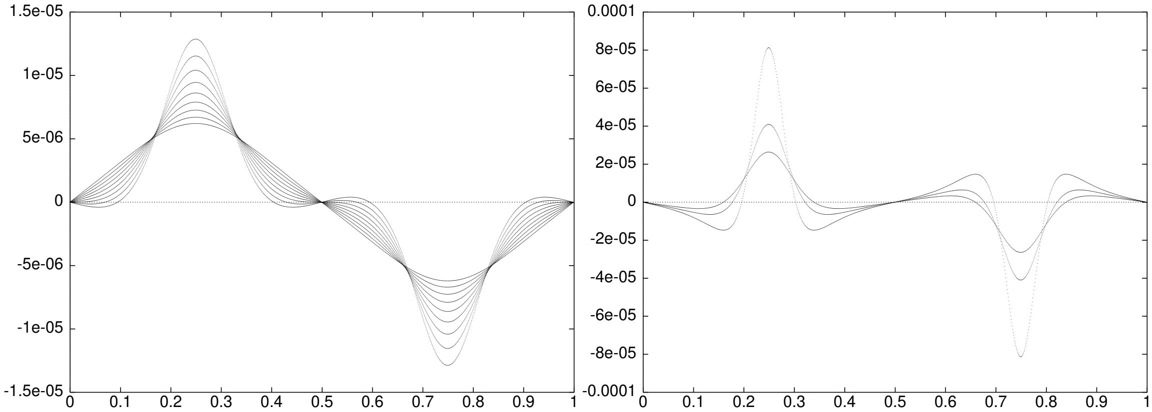


Abbildung 6.41: Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 0.001$.

Die Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten nimmt zunächst einmal ab, da die Koeffizienten um die Extrma herum immer stärker lokalisiert werden — siehe dazu auch das linke Bild der Abbildung 6.41. Im Laufe der Zeit schaukeln sich jedoch die Koeffizienten mehr und mehr auf bis fast alle Koeffizienten signifikant sind — rechtes Bild der Abbildung 6.41. Abbildung 6.42 zeigt die zeitliche Entwicklung der Anzahl signifikanter Waveletkoeffizienten auf Level $N = 12$.

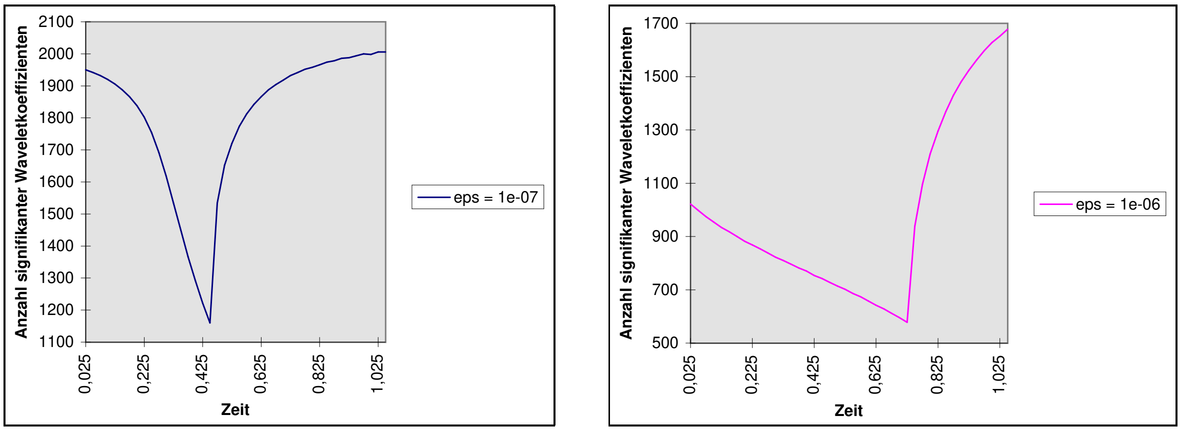


Abbildung 6.42: Zeitliche Entwicklung der Anzahl signifikanter Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\nu = 0.001$.

Abbildung 6.43 beschäftigt sich mit dem Kompressionsfehler $\|u(\delta t) - u_{12}^{\epsilon}(\delta t)\|$ der Lösung. Wie im linearen Fall hängt auch hier der Fehler von der Ordnung des Verfahrens ab. Da wir mit einer Eigenfunktion des Laplace–Operators begonnen haben, erhalten wir bezüglich der $\|\cdot\|_{\infty}$–Norm eine lineare Ordnung und bezüglich der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm eine Ordnung von 1.5.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-12}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

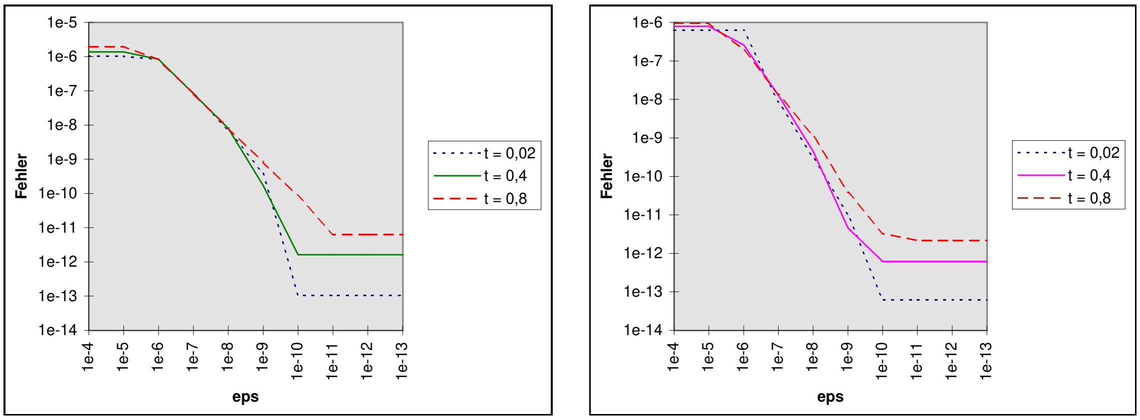


Abbildung 6.43: Kompressionsfehler $\|u(\delta t) - u_{12}^{\epsilon}(\delta t)\|$, $eps = \epsilon$, $N = 12$, $\nu = 0.001$.

Zum Schluß betrachten wir noch die ε–Komplexität zum Zeitpunkt $\delta t = 0.04$. Die Lösung hat sich bereits ein gutes Stück *aufgeblasen*, so daß wir nicht mehr die Ordnung des vollen Gitters erreichen. In Abbildung 6.44 sieht man, daß die Ordnung der ε–Komplexität mit $\alpha = 3.6$ leicht von der des vollen Gitters abweicht.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $\|\cdot\|_{h_{12}}$–Norm

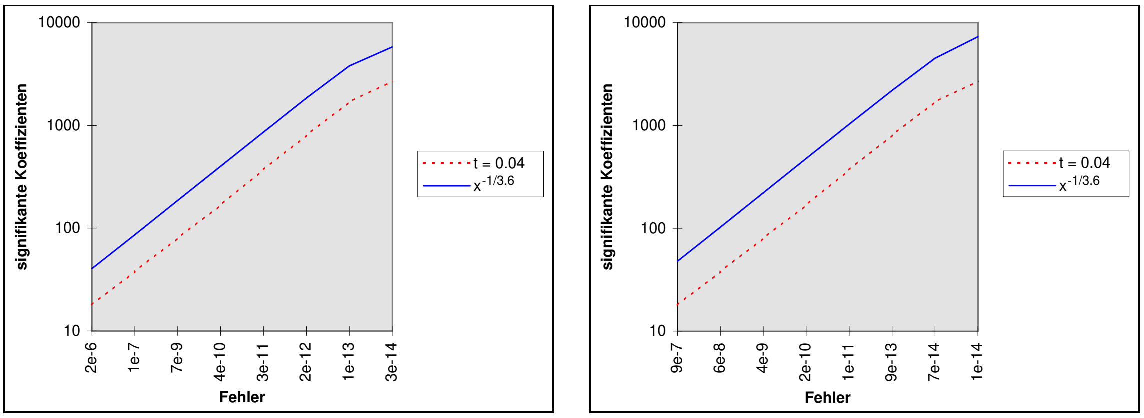


Abbildung 6.44: ε–Komplexität, $N = 12$, $\nu = 0.001$

Im nächsten Abschnitt betrachten wir das Verhalten der Lösung bezüglich einer anderen Wärmequelle.

6.1.2.3 Nichtlineare Wärmequelle: $f(u) = e^u$

In diesem Abschnitt wollen wir uns nur die Lösung und deren Waveletkoeffizienten bezüglich der nichtlineare Wärmequelle $f(u) = e^u$ ansehen.

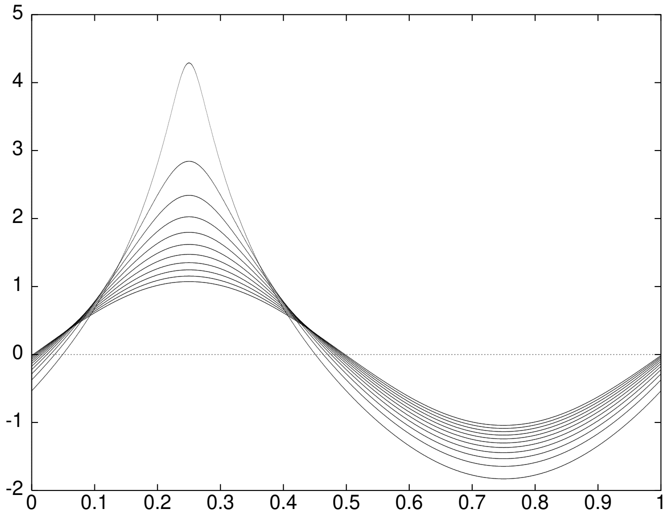


Abbildung 6.45: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 0.001$.

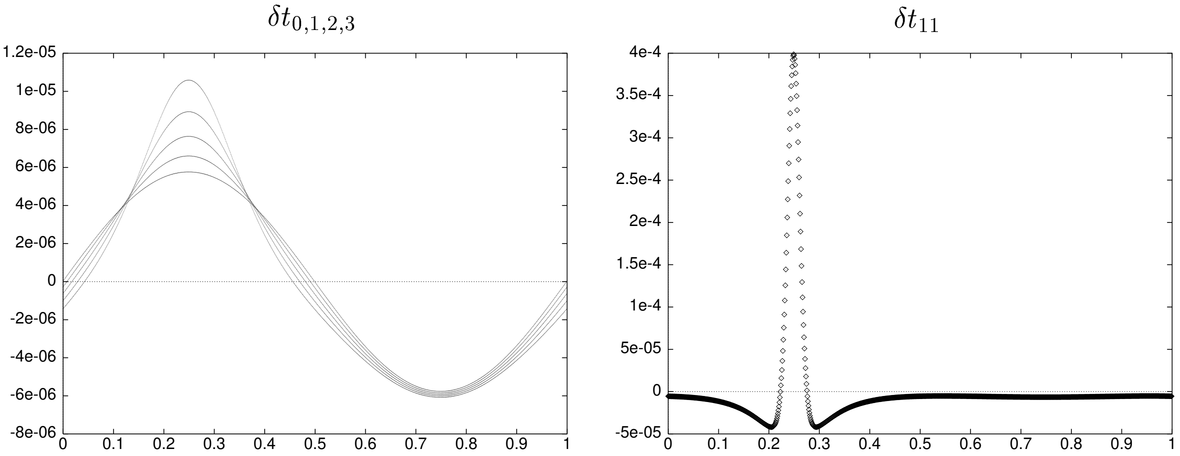


Abbildung 6.46: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 0.001$.

Im nächsten Modelbeispiel nehmen wir zur Diffusion auch noch Konvektion hinzu.

6.1.3 Konvektions–Diffusions–Gleichungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit **Transportgleichungen**. Das dazugehörige Anfangsrandwertproblem lautet wie folgt

$$\begin{aligned} u_t &= \nu \triangle u + c\, u_x, \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times [0,1], \\ u(t,0) &= u(t,1) = u_r(t), \\ u(0,\, x) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Die Konvektions–Diffusions–Gleichung (6.6) beschreibt unter anderem den Stofftransport in einem porösen Medium. Man kann zum Beispiel die Ausbreitung einer im Grundwasser gelösten Substanz modellieren, welche von der Grundwasserströmung durch eine Bodenschicht, Fels oder Sand, transportiert wird. Die Lösung $u(t, x)$ gibt dabei die Konzentration der Substanz an. $\nu \cdot \triangle u$ bezeichnet man als *Diffusionsterm* und $c \cdot u_x$ als *Konvektionsanteil.* Für kleines ν dominiert der Konvektionsterm. Weitere Anwendungsgebiete sind:

- Wärmetransport (z. B. durch eine Meeresströmung),
- Schadstoffausbreitung in Gewässern oder der Atmosphäre,
- Ladungsträgerverteilung in Halbleitern,
- Ausbreitung von Eiweißmolekülen in Aterien.

Durch die *Koordinatentransformation* y = x - ct geht die Konvektions–Diffusions–Gleichung (6.6) über in die *lineare Wärmegleichung*

$$\begin{aligned} v_t &= \nu \cdot v_{yy}, \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times [0,1], \\ v(t,0) &= v(t,1) = 0, \\ v(0,y) &= u_0(y), \end{aligned} \tag{6.7}$$

wobei die Lösungen wie folgt zusammenhängen: $u(t, x) = v(t, x - ct)$. Die Lösung der Konvektions–Diffusions–Gleichung (6.6) pflanzt sich mit der Geschwindigkeit c fort (Konvektion) und wird mit der Stärke ν gedämpft (Diffusion). In den folgenden Berechnungen setzen wir $c = 1$ und $\nu = 0.01$.

6.1.3.1 Startfunktion: $sin(2\pi x)$ auf $[0, 1]$

$u_0(x) = sin(2\pi x)$ sei die Startfunktion des Anfangsrandwertproblems (6.6). Die Lösung der Wärmegleichung (6.7) wird gegeben durch $v(t, x) = e^{-t\nu 4\pi^2} sin(2\pi x)$. Dann lautet die Lösung des AWP der Konvektions–Diffusions–Gleichung

$$u(t,x) = e^{-\nu 4\pi^2 t} sin(2\pi(x + ct) \tag{6.8}$$

mit der Randfunktion

$$u_r(t) = e^{-\nu 4\pi^2 t} sin(2\pi ct), \tag{6.9}$$

Abbildung 6.47 zeigt die zeitliche Entwicklung der Lösung (6.6). Im wesentlichen handelt es sich dabei um die Lösung der linearen Wärmegleichung, die in jedem Zeitschritt mit der Geschwindigkeit $c = 1$ transportiert wird. Man sieht gut, wie die Lösung im Laufe der Zeit gedämpft wird. Die Zeit läuft auf der linken unteren Achse.

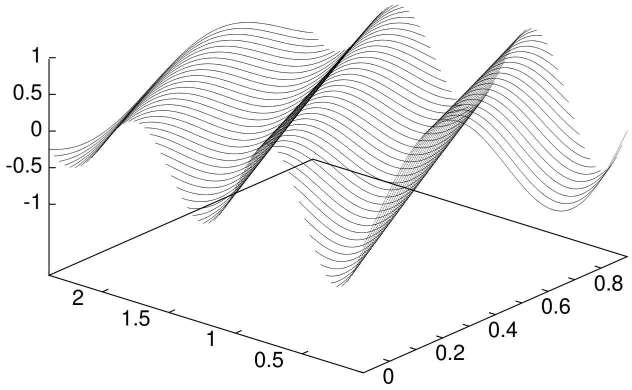


Abbildung 6.47: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 12$, $\delta t = 0.04$ und $\nu = 0.01$, $c = 1$.

In der nächsten Abbildung 6.48 wird der Vollgitterfehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ dargestellt. Da die Startfunktion eine Eigenschwingung des Laplace–Operatrors ist, erhalten wir einen Fehler der Ordnung 4.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

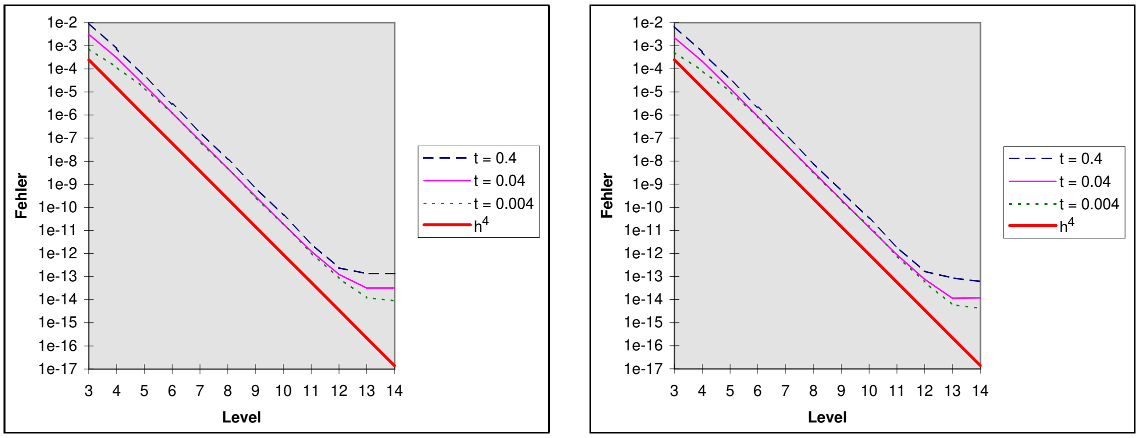


Abbildung 6.48: Kompressionsfehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf dem vollen Gitter, $\nu = 0.01$, $c = 1$.

Da die Lösung keine Sprünge aufweist, verteilen sich deren Waveletkoeffizienten, dargestellt in Abbildung 6.49, gleichmäßig über das Intervall.

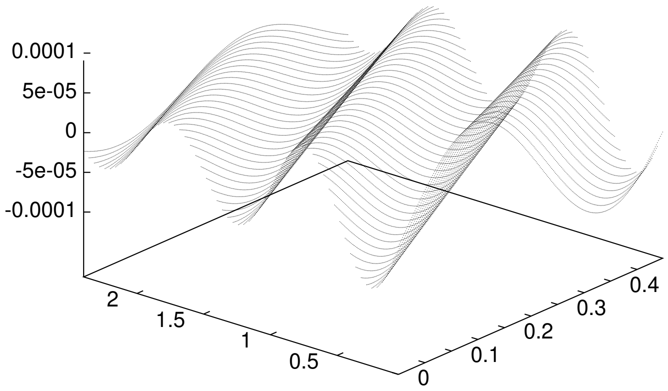


Abbildung 6.49: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizienten, $\delta t = 0.04$, $\nu = 0.01$, $c = 1$.

Die zeitliche Entwicklung der signifikanten Waveletkoeffizienten reflektiert die dissipative Eigenschaft der Lösung.

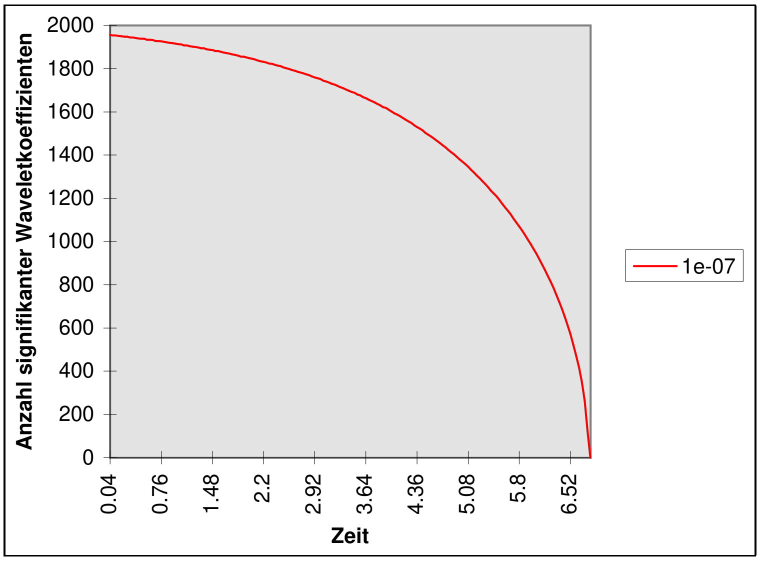


Abbildung 6.50: Zeitliche Entwicklung der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 0.01$, $c = 1$.

Betrachtet man die zeitliche Entwicklung des Gitters der signifikanten Waveletkoeffizienten in Abbildung 6.51, so sieht man neben der Dämpfung auch den Transport der Lösung. Die Zeit läuft auf der unteren Achse. Die Streifen zeigen den Verlauf der Maxima der Koeffizienten auf. Je stärker die Lösung gedämpft wird, desto weiter liegen die Maxima auseinander und desto geringer ist der Anstieg der Streifen.

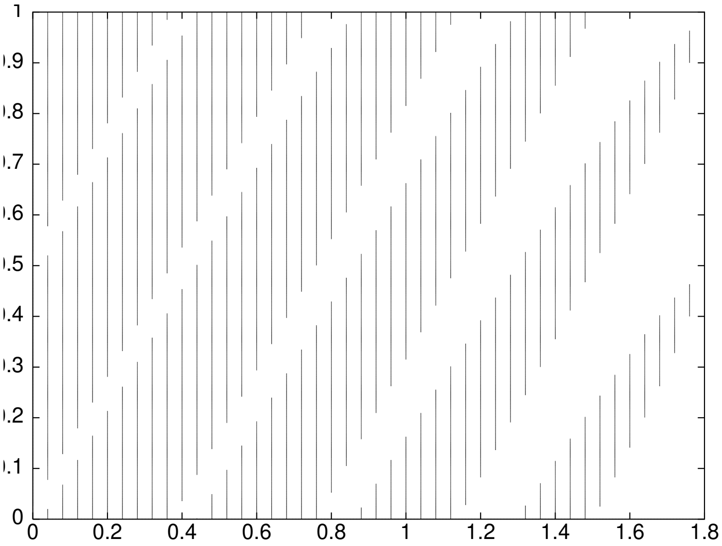


Abbildung 6.51: Zeitliche Entwicklung des Gitters der signifikanten Waveletkoeffizienten $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 0.01$, $c = 1$.

In der nächsten Abbildung 6.52 wird der Kompressionsfehler dargestellt. Da wir, bedingt durch die Wahl der Startfunktion, ein Verfahren der Ordnung 4 haben, reduziert sich der Kompressionsfehler bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$–Norm linear und bezüglich der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm mit der Ordnung 1.5. Wir wissen aus der Diskussion der linearen Wärmegleichung, daß sich der Kompressionsfehler eines Verfahrens zweiter Ordnung halbiert.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-12}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

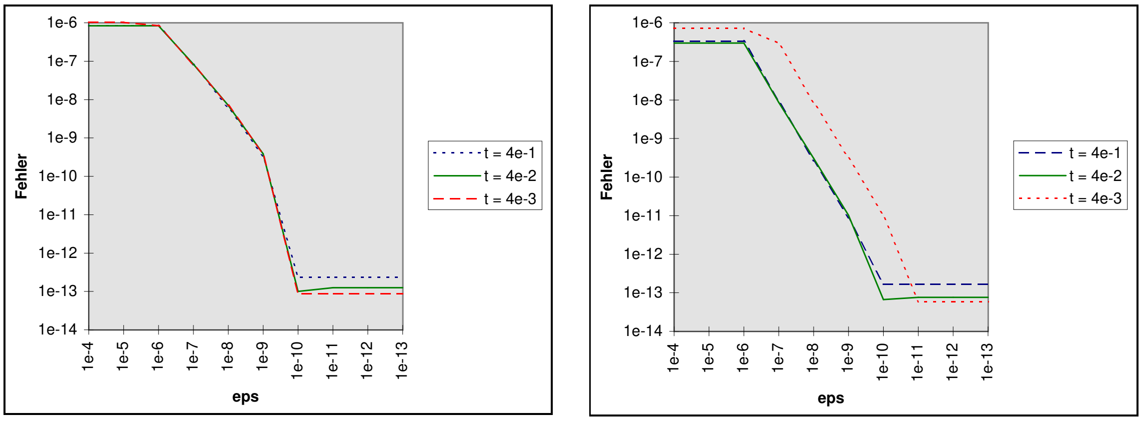


Abbildung 6.52: Kompressionsfehler $\|u(\delta t) - u_{12}^{\epsilon}(\delta t)\|$, $\epsilon = eps$, $N = 12$, $\nu = 0.01$, $c = 1$.

Die Lösung besitzt genügend Regularität, so daß die ε–Komplexität den Vollgitterfehler $x^{-1/4}$ erreicht. Die letzte Abbildung 6.53 dieses Abschnitts zeigt die ε–Komplexität bezüglich der beiden üblichen Normen.

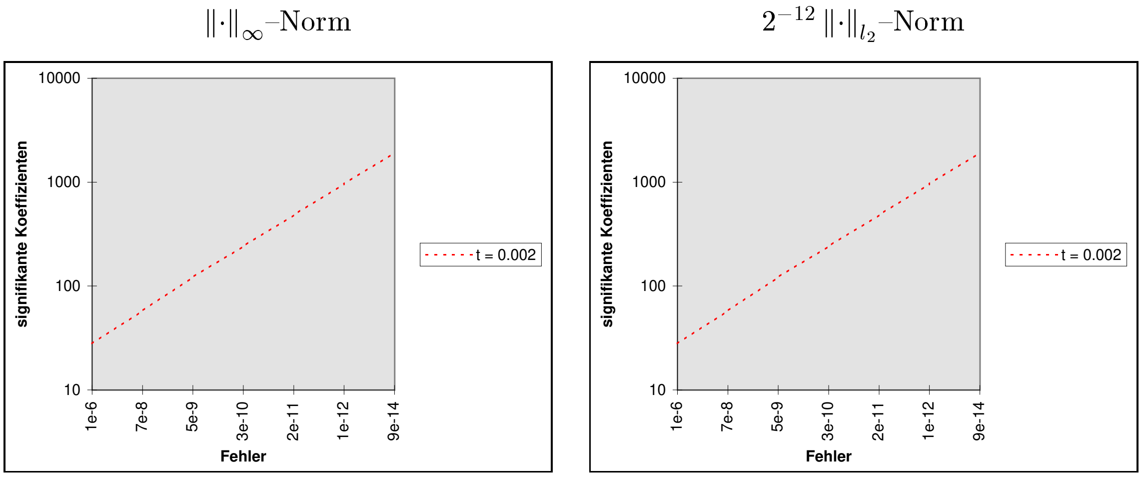


Abbildung 6.53: ε–Komplexität $W\left(e(\epsilon)\right) = \mathcal{O}\left(e(\epsilon)^{-1/4}\right)$, $N = 12$, $\nu = 0.001$.

Im folgenden Abschnitt wollen wir zeigen, daß unser Verfahren auch für Gleichungen mit variablen Koeffizienten geeignet ist.

6.1.4 Fokker–Planck Gleichung

Wir betrachten das periodische Anfangsrandwertproblem der **Fokker–Planck Gleichung**:

$$\begin{aligned} u_t &= \partial_{xx}\left[d(t,x)u\right] - \partial_x\left[c(t,x)u\right], \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times [0,1], \\ u(t,0) &= u(t,1) = u_r(t), \\ u(0,x) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Die Fokker–Plank Gleichung entsteht als Grenzwert einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie stellt einen Zusammnenhang her zwischen parabolischen Differentialgleichungen einerseits und einem zufälligen Prozeß andererseits. Viele Anwendungen für parabolische Differentialgleichungen entstehen durch die makroskopische Beschreibung von Prozessen, die auf einer mikroskopischen Ebene mehr oder weniger zufällig sind. Im Folgenden führen wir einige Beispiele dafür an.

- Der Wärmefluß in einem Körper steht in einem Zusammenhang zu den zufälligen Bewegungen der Elektonen und Atome dieses Körpers.
- Stömungen werden durch die Eigenschaften von Molekülen beeinflußt.
- Makroökonomische Prozesse in Märkten hängen häufig von mikroökonomischen Bedingungen ab.

Betrachten wir einen diskreten Prozeß, dessen Zustände gegeben werden durch $x_i = \xi i$ für $|i| = 0, 1, \cdots$, wobei $\xi > 0$ eine positive Zahl ist. Der Übergang von einem Zustand zu einem anderen findet an diskreten Zeitpunkten $t_n = \tau n$, $n = 0, 1, \cdots$ statt. Ein Zustand kann nur zu einem benachbarten Zustand wechseln. p_i^n sei die Wahrscheinlichkeit für den Übergang eines Zustandes von i nach $i+1$ und q_i^n sei die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von i nach $i-1$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß kein Übergang stattfindet, ist $1 - p_i^n - q_i^n$. u_i^n sei die *Wahrscheinlichkeitsdichte*, d. h. u_i^n gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß sich ein Objekt zum Zeitpunkt t_n am Ort x_i befindet. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte erhält man folgende Gleichung, welche unter dem Namen **Chapman–Kolmogorov Gleichung** bekannt ist.

$$u_i^{n+1} = p_{i-1}^n u_{i-1}^n + q_{i+1}^n u_{i+1}^n + (1 - p_i^n - q_i^n) u_i^n. \tag{6.11}$$

Wir formulieren die Gleichung (6.11) um:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n = {} & \frac{1}{2} \left(p_{i-1}^n - q_{i-1}^n\right) u_{i-1}^n - \frac{1}{2} \left(p_{i+1}^n - q_{i+1}^n\right) u_{i+1}^n \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(p_{i-1}^n + q_{i-1}^n\right) u_{i-1}^n - 2 \left(p_i^n + q_i^n\right) u_i^n + \left(p_{i+1}^n + q_{i+1}^n\right) u_{i+1}^n\right]. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Wir definieren nun die Funktionen $u(t,\, x)$, $c(t,\, x)$ und $d(t,\, x)$ als Grenzwerte $\xi,\, \tau \longrightarrow 0$:

$$\sum_{0 \le x_i \le 1} u_i^n \longrightarrow \int_0^1 u(t,\, x)\, dx, \qquad \text{für } t = n\tau,$$

$$\frac{p_i^n - q_i^n}{\tau} \xi \longrightarrow c(t,\, x), \quad \text{und} \quad \frac{p_i^n + q_i^n}{2\tau} \xi^2 \longrightarrow d(t,\, x).$$

Damit erhält man die **Fokker–Planck Gleichung** als Grenzwert von (6.12):

$$u_t = \partial_{xx} \left[d(t,\, x) u\right] - \partial_x \left[c(t,\, x) u\right], \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times [0, 1].$$

Die Lösung von (6.12) ist eine *Wahrscheinlichkeitsdichte*, deren Mittelwert gleich 1 ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t,\, x)\, dx = 1.$$

Es stellt sich die Frage, weshalb man daran interessiert ist, eine parabolische Differentialgleichung aus einem diskreten System zu gewinnen? Will man die Wahrscheinlichkeitsfunktion eines diskreten Prozesses mit sehr vielen Objekten berechnen, so ist es in der Regel effektiver und auch genauer, die dazugehörige parabolische Gleichung numerisch zu lösen, als das diskrete System direkt zu approximieren. Im nächsten Abschnitt geben wir ein konkretes Beispiel für eine Fokker–Planck Gleichung.

6.1.4.1 Brownsche Bewegung

Ein intersessantes Beispiel einer Fokker–Planck Gleichung ist die eindimensionale **Brownsche Bewegung**, die die zufällige Bewegung eines Partikels beschreibt.

$$
\begin{aligned}
u_t &= \nu u_{vv} + (vu)_v\,, \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times [0,1], \\
u(t,0) &= u(t,1), \\
u(0,\, v) &= sin(2\pi v).
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

$u(t,\, v)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion der Geschwindigkeit v und der Zeit t. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Partikel zur Zeit t eine Geschwindigkeit zwischen 0 und 1 hat, beträgt

$$\int_0^1 u(t,\, v)\, dv.$$

Wir beschränken uns auf die Berechnung der Lösung, da wir uns keine neuen Erkenntnisse von einer detailierteren Untersuchung versprechen. So daß lediglich gezeigt wird, welche Arten von Gleichungen mit unserem Ansatz berechenbar sind. Abbildung 6.54 zeigt die zeitliche Entwicklung der Lösung über einen längeren Zeitraum. Die Zeit läuft auf der vorderen Achse, die Geschindigkeit auf der rechten Achse. Man sieht, daß die Lösung unbeschränkt ist. Im rechten Bild beginnt die Wahrscheinlichkeitsfunktion mit einer Sinusschwingung. In Zeitrichtung entwickeln sich immer höhere Wellen.

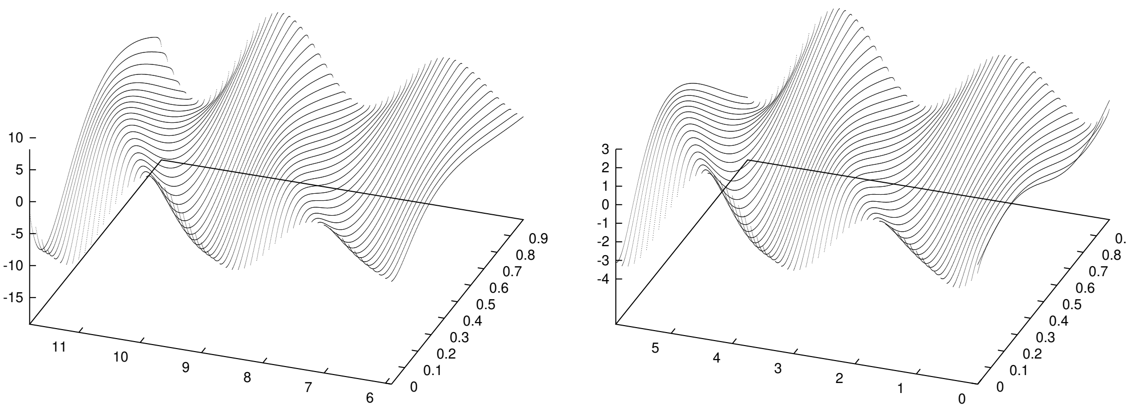


Abbildung 6.54: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 12$, $\nu = 0.01$, $\delta t = 0.1$.

6.1.5 Burgersartige Gleichungen

Die nächsten Modellbeispiele sind zwei **burgersartige Gleichungen**, deren Anfangsrandwertprobleme gegeben werden durch

$$\begin{aligned} u_t &= \nu \cdot \triangle u + \partial_x f(u), \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times [0,1], \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0, \\ u(0,\, x) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Das Charakterische dieser Gleichungen ist, daß die Lösungen, ausgehend von glatten Anfangsdaten, nach einiger Zeit einen Schock entwickelen, d. h. unstetig werden. Wir wollen mit der einfachsten dieser Gleichungen, der Burgersgleichung, beginnen.

6.1.5.1 Burgersgleichung: $f(u) = \frac{u^2}{2}$

Für die Wahl der nichtlinearen Funktion $f(x) = \frac{x^2}{2}$ erhält man aus (6.14) das Anfangsrandwertproblem der **Burgersgleichung:**

$$\begin{aligned} u_t &= \nu \cdot \triangle u + u \cdot u_x, \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times [0,1], \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0, \\ u(0,\, x) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Als Startfunktion haben wir wieder eine Sinusschwingung gewählt $u_0(x) = sin(2\pi x)$. Um die Nichtlinearität des Problems zu betonen, entscheiden wir uns für einen kleinen Diffusionskoeffizienten $\nu = 0.001$. Abbildung 6.55 zeigt, die zeitliche Entwicklung der Lösung. Im linken oberen Bild sieht man, wie sich die Anfangswelle immer weiter zusammenschiebt, bis sich im rechten oberen Bild ein Sprung in der Lösung entwickelt hat. Jetzt macht sich der Einfluß der Diffusion bemerkbar, welche die Lösung dämpft. Erst zu einem viel späteren Zeitpunkt entwickelt sich der Sprung wieder zurück.

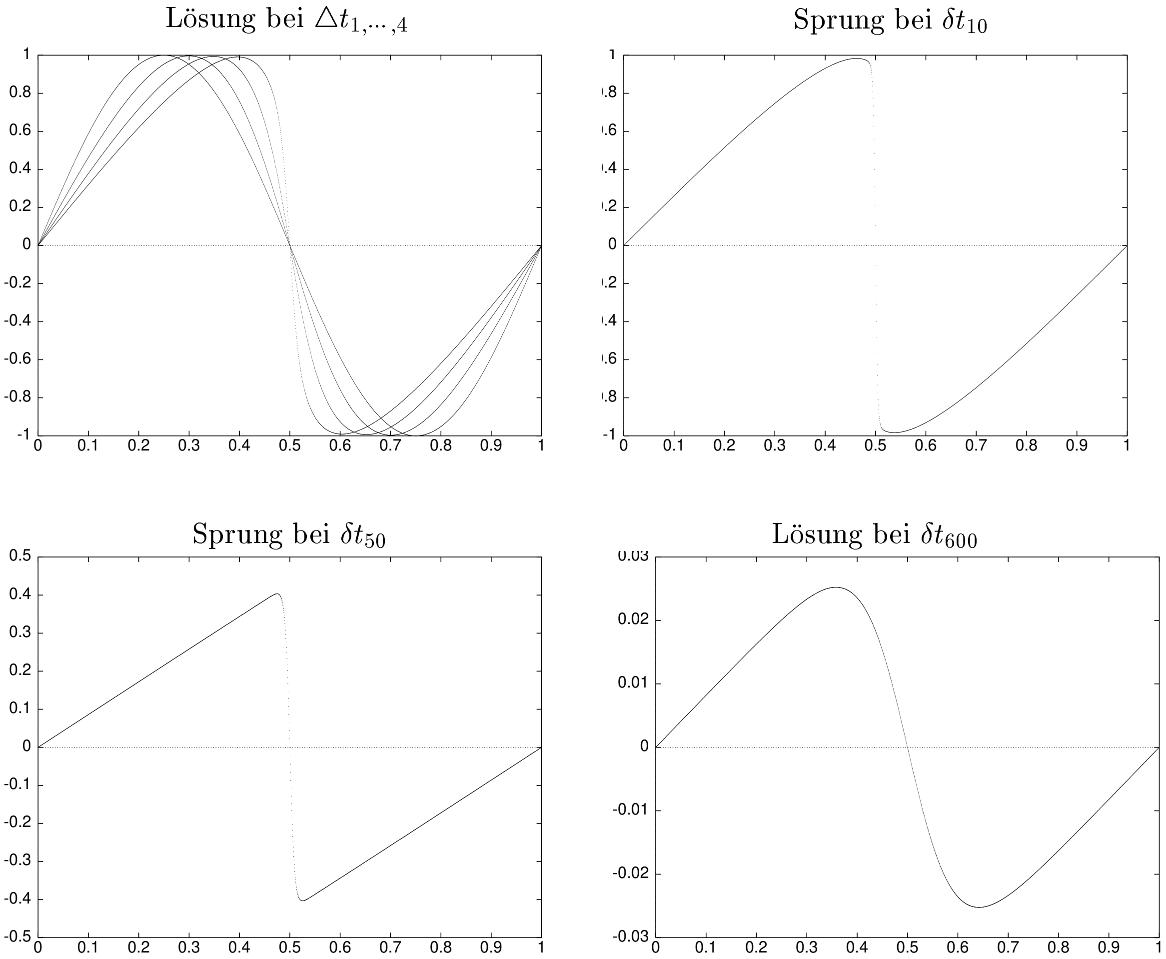


Abbildung 6.55: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 0.001$

Da die Startfunktion eine Eigenschwingung des Laplace–Operators ist, erhält man einen Vollgitterfehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ der Ordnung vier.

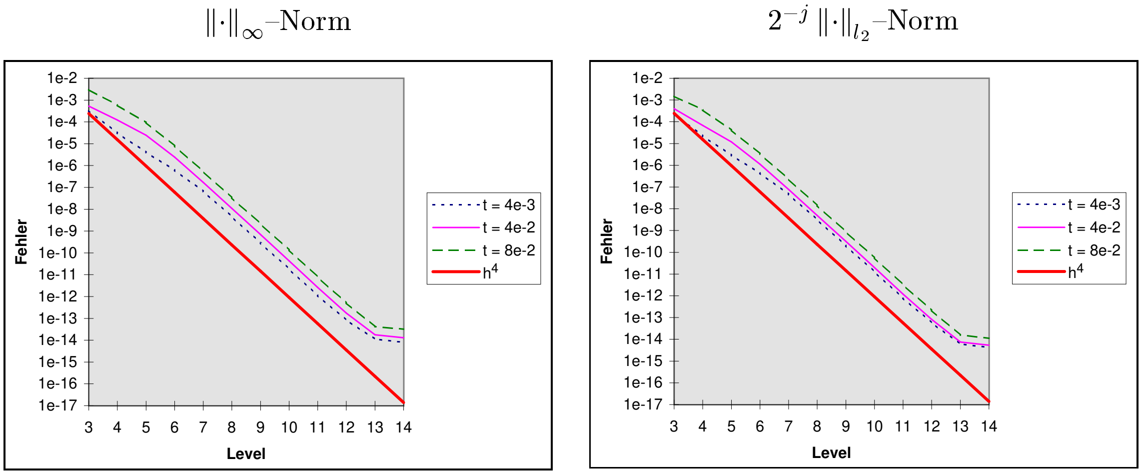


Abbildung 6.56: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf dem vollen Gitter, $\nu = 0.001$.

Die Waveletkoeffizienten adaptieren sich um den Sprung. Abbildung 6.57 zeigt, wie sich die Koeffizienten langsam zum Sprung hin entwickeln.

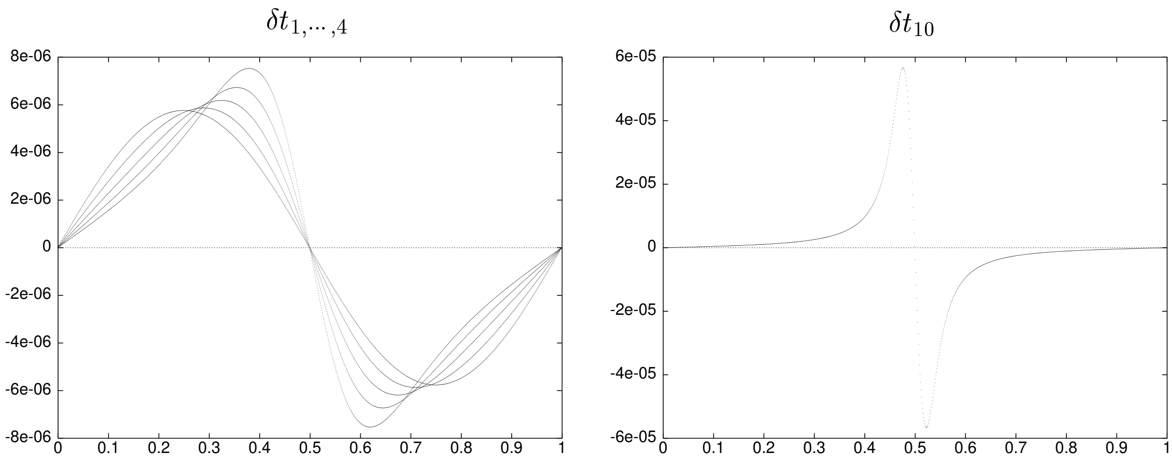


Abbildung 6.57: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 0.001$.

Beobachtet man die zeitliche Entwicklung der signifikanten Waveletkoeffizienten, so stellt man zunächst eine zügige Reduktion der Koeffizienten fest, da diese sich immer stärker um den Sprung konzentrieren und außerhalb einer kleinen Umgebung fast verschwinden. Der Sprung wird von Zeitschritt zu Zeitschritt gedämpft, so daß eine kontinuierliche Verringerung der signifikanten Koeffizienten stattfindet. In dem Moment, in dem der Sprung beginnt sich zurück zu entwickeln, siedeln sich wieder Koeffizienten auf dem ganzen Intervall an und die Anzahl der signifikanten Koeffizienten beginnt zu steigen. Erst wenn dieser Restrukturierungsprozeß abgeschlossen ist, können die letzten signifikanten Koeffizienten herausgeglättet werden. Diesen Prozeß kann man in den Abbildungen 6.58 und 6.59 beobachten.

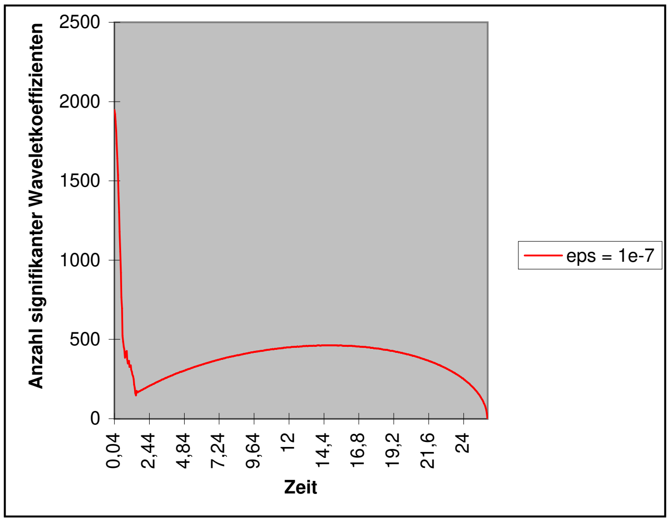


Abbildung 6.58: Zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanter Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 0.001$.

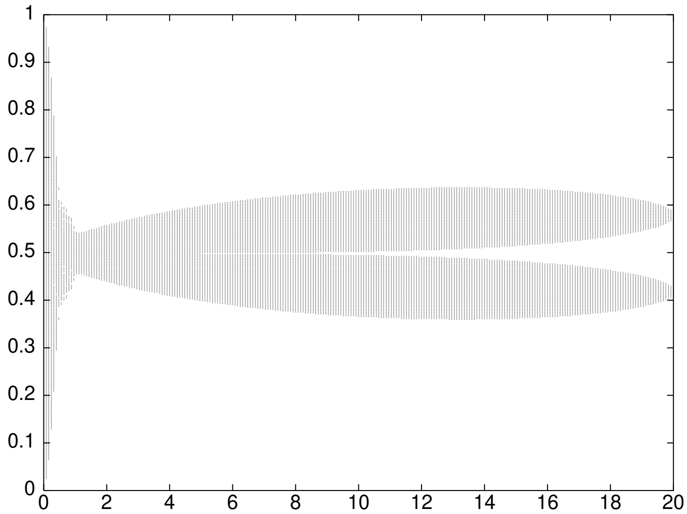


Abbildung 6.59: Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten, $\delta t = 0.002$, $eps = 10^{-6}$, $N = 12$, $\nu = 0.001$.

Abbildung 6.60 zeigt den Kompressionsfehler der Lösung. Wie in den Beispielen zuvor, reduziert sich der Fehler bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$–Norm mit linearer Ordnung und bezüglich der $2^{-j} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm mit der Ordnung 1.5.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-12} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm

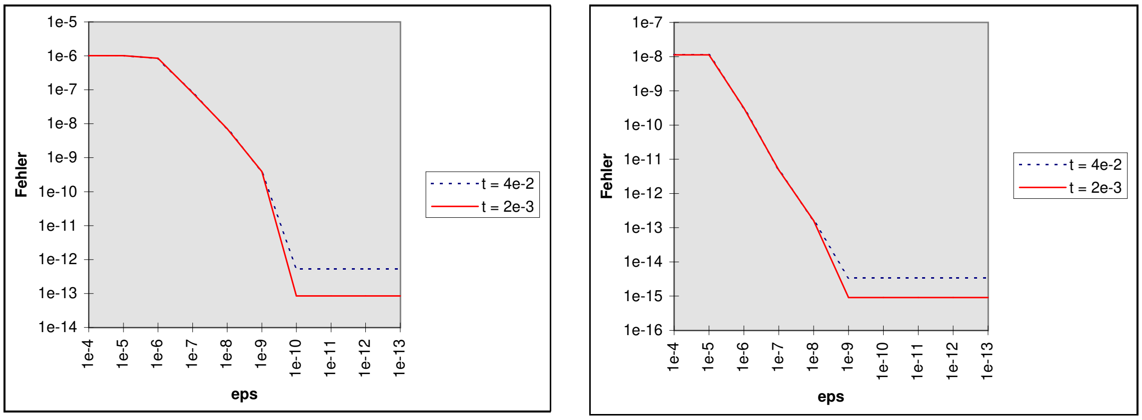


Abbildung 6.60: Kompressionsfehler, $\|u(\triangle t) - u_j^\epsilon(\triangle t)\|$, $N = 12$, $\nu = 0.001$.

Wir berechnen die ε–Komplexität bei $\delta t = 0.1$. Die Lösung ist nicht mehr so glatt wie am Anfang. Wir verlieren etwas Regularität und erhalten deshalb eine Komplexität der Ordnung $\alpha = 3.3$. Abbildung 6.61 zeigt die Ordnung der ε–Komplexität.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

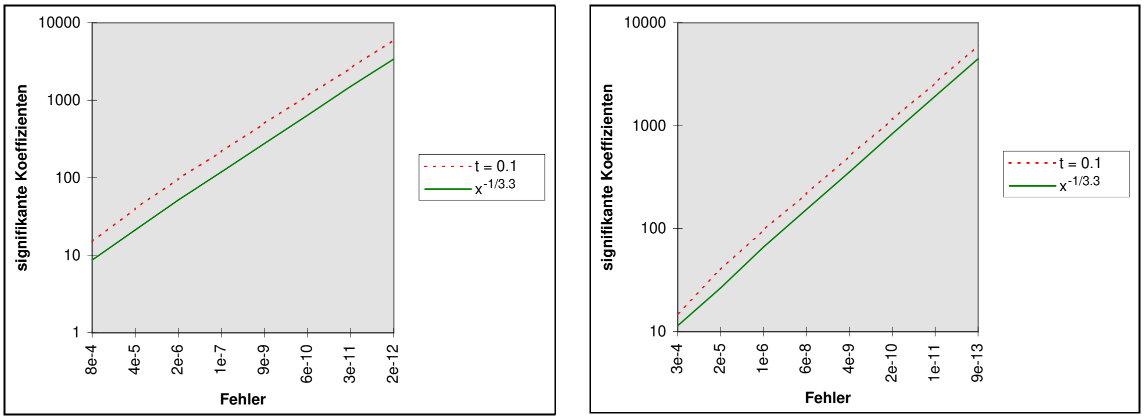


Abbildung 6.61: ε–Komplexität, $W\left(e(\epsilon)\right) = \mathcal{O}\left(e(\epsilon)^{-1/3.3}\right)$, $N = 12$, $\nu = 0.001$.

Je größer der Koeffizient ν ist, desto größer ist auch der Einfluß der Diffusion auf die Lösung. Für $\nu = 0.01$ beginnt die Dämpfung der Lösung früher und der Sprung entwickelt sich nicht so stark; ansonsten ergeben sich jedoch keine neuen Aspekte. Abbildung 6.62 zeigt die Lösung mit $\nu = 0.01$ und Abbildung 6.63 zeigt die Waveletkoeffizienten.

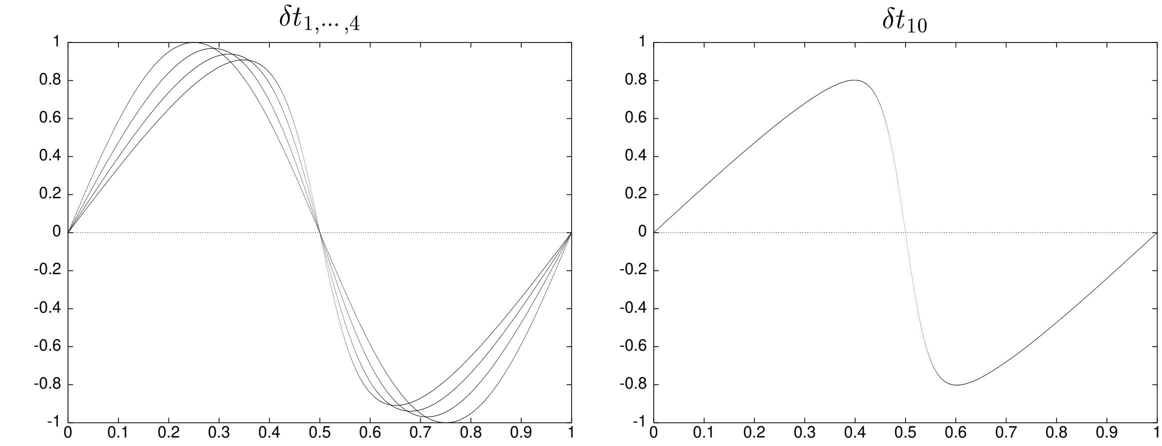


Abbildung 6.62: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 12$, $\nu = 0.01$, $\delta t = 0.002$

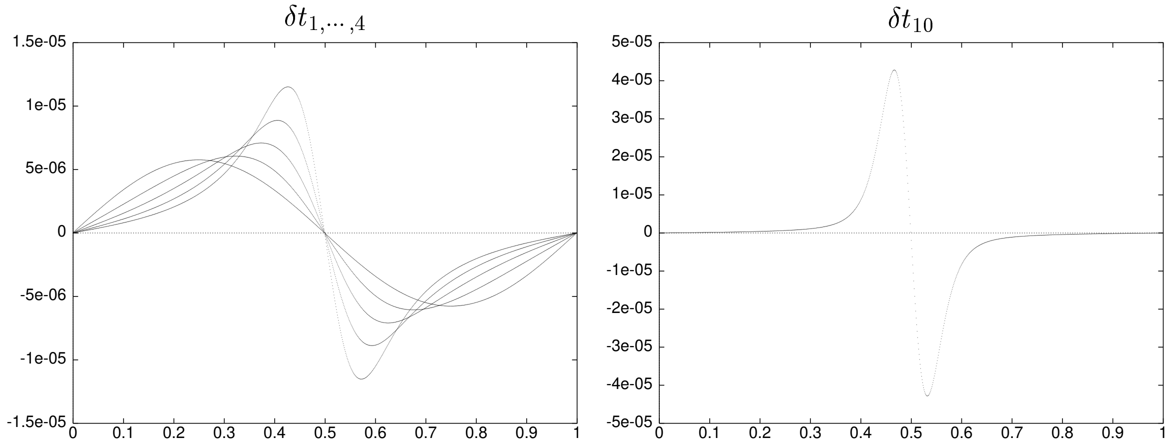


Abbildung 6.63: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\nu = 0.01$, $\delta t = 0.002$

In dem nächsten Beispiel haben wir die nichtlineare Funktion $f(x) = \frac{x^2}{2}$ der Burgersgleichung quadriert.

6.1.5.2 $f(u) = \frac{u^4}{4}$

Bezüglich der nichtlinearen Funktion $f(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}$ erhält man das folgende Anfangsrandwertproblem:

$$\begin{aligned} u_t &= \nu \cdot \triangle u + u \cdot u^3, \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times [0,1], \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0, \\ u(0,x) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{6.16}$$

Die Lösung von (6.16) verhält sich ganz ähnlich der Lösung der Burgersgleichung. Der Unterschied besteht darin, daß in diesem Fall die Lösung in Zeitrichtung durch eine Gerade läuft, was dazu führt, daß die Waveletkoeffizienten in der Mitte des Intervalls zu oszilieren beginnen. Die nächste Abbildung 6.64 zeigt die Lösung zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

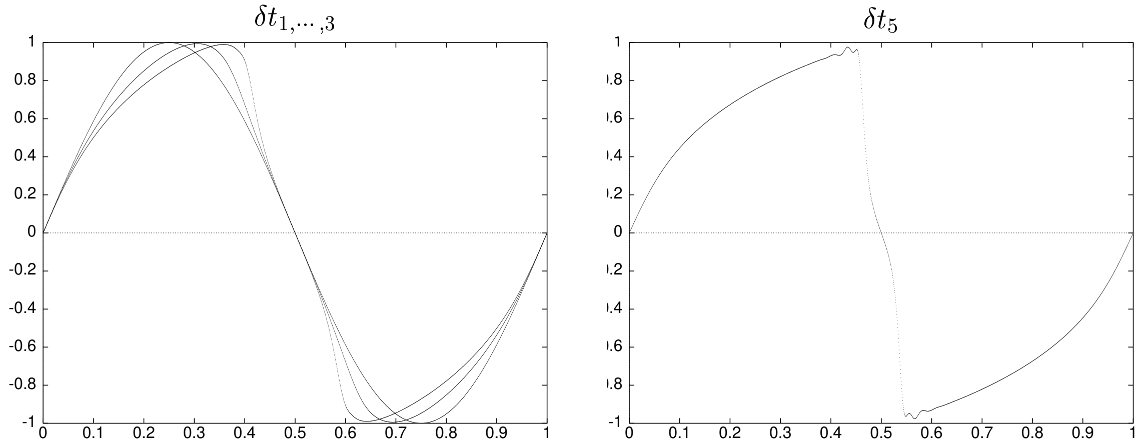


Abbildung 6.64: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 12$, $\nu = 0.001$, $\delta t = 0.04$.

In Abbildung 6.65 wird der Vollgitterfehler dargestellt. Wie bei der Burgersgleichung hat er auch hier die Ordnung vier.

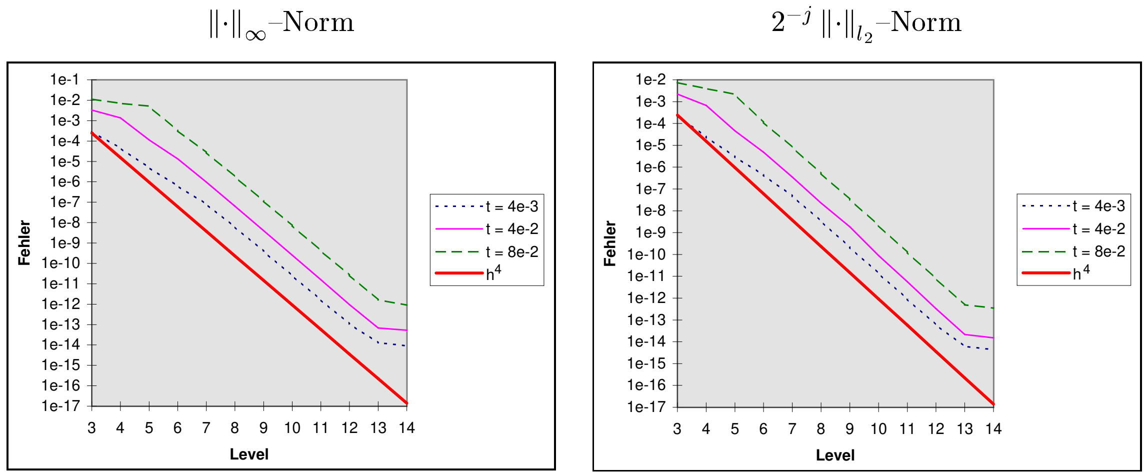


Abbildung 6.65: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf dem vollen Gitter, $\nu = 0.001$.

Abbildung 6.66 zeigt, wie die Waveletkoeffizienten in der Nähe des Sprungs zu oszilieren beginnen.

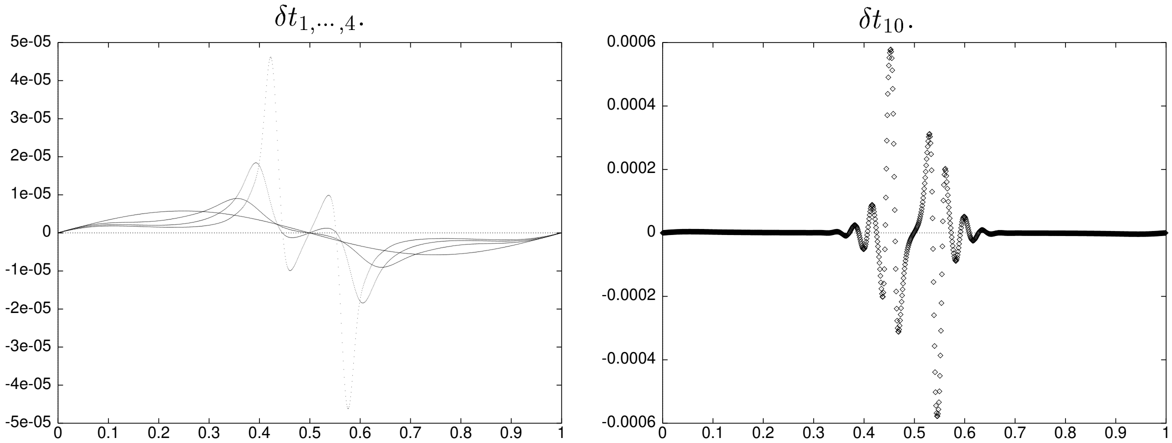


Abbildung 6.66: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\nu = 0.001$, $\delta t = 0.04$.

Die Diagramme sehen denen der Burgersgleichung sehr ähnlich, so daß wir auf diese verweisen.
Das letzte Modellbeispiel, die Korteweg de–Vries Gleichung, zeigt, daß unser Verfahren auch mit Halbgruppen funktioniert, die nicht vom Laplace–Operator erzeugt werden.

6.1.6 Korteweg de–Vries Gleichung

Die Korteweg de–Vries Gleichung beschreibt die Dynamik von Wellen, die sich in einem flachen Kanal mit gleichbleibender Geschwindigkeit in eine Richtung bewegen. Soche Wellen werden auch *Solitonen* genannt. Der englische Schiffsbauingenieur John Scott Russell berichtet in einem 1844 erschienen Aufsatz [Rus] von einer Erfahrung, die er zehn Jahre zuvor gemacht hatte. Als er den Kanal von Edinburgh entlangritt, beobachtete er, wie sich die Kielwelle eines Schiffs unverändert mit konstanter Geschwindigkeit im Kanal fortbewegte. Er verfolgte diese Welle mit seinem Pferd über eine Meile. Russell war fasziniert von diesem Phänomen und begann in einem eigenen Wassertank zu experimentieren. Es gelang ihm, eine Formel für die Geschwindigkeit solcher Wellen als Funktion ihrer Höhe herzuleiten. Die Mathematiker Airy und Stokes bezweifelten Russels Beobachtung; nach ihren Berechnungen wären solche Wellen äußerst instabil. 1895 gelang es Korteweg und de–Vries in einem Aufsatz [KdV] Fehler in der Analye von Airy und Stokes nachzuweisen und die Schlußfolgerung von Russell zu beweisen.
Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Korteweg de–Vries Gleichung ist die Datenübertragung über Glassfaserkabel. Bisher werden alle 30 km *Repeater* benötigt, die ein abgeschwächtes Signal wiederherstellen. Mit Solitonen von Lichtwellen hofft man, wesentlich größere Entfernungen ohnen Verstärker zurücklegen zu können.
Wir haben die **Korteweg de–Vries Gleichung** unter anderen deshalb ausgesucht, weil ihre Halbgruppe $T(t) = e^{t\nu\cdot\partial_{xxx}}$ sich von denen der übrigen Beispiele unterschei-

det. Das Symbol der Halbgruppe ist komplex $\sigma(x) = e^{-it\nu x^3}$. Das Anfangsrandwertproblem lautet

$$\begin{aligned} u_t &= \nu \cdot \partial_{xxx} u + u \cdot u_x, \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times [0,1], \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0, \\ u(0,x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Um die Nichtlinearität der Gkeichung stärker zu betonen, wählen wir den Diffusionskoeffizienten $\nu = 0.0005$ sehr klein. Als Startfunktion verwenden wir zunächst eine Sinusschwingung. Daraus entwickelt sich eine Welle auf einer freien Wasseroberfläche. Später arbeiten wir mit ein bzw. zwei scharf lokalisierten Wellen. Aus diesen Anfangsdaten entwickeln sich dann ein bzw. zwei Solitonen.

Wir beschäftigen uns wieder zuerst mit der Kompression der Halbgruppe.

6.1.6.1 Kompression der Halbgruppe: $T(t) = e^{t\nu \cdot \partial_{xxx}}$

In der Einskalendarstellung ergibt sich für den **Kompressionsfehler** eine *lineare Fehlerordnung:*

$$F(\epsilon) = \|\mathbf{T} - \mathbf{T}^\epsilon\|_\infty = \mathcal{O}(\epsilon).$$

Dabei ist $\mathbf{T}$ die NS–Form der Halbgruppe $e^{t\nu \cdot \partial_{xxx}}$ und $\mathbf{T}^\epsilon$ die mit ϵ komprimierte NS–Form. Abbildung 6.67 zeigt die lineare Ordnung des Kompressionsfehlers. Dabei ist $eps = \epsilon$ die Abschneidegenauigkeit.

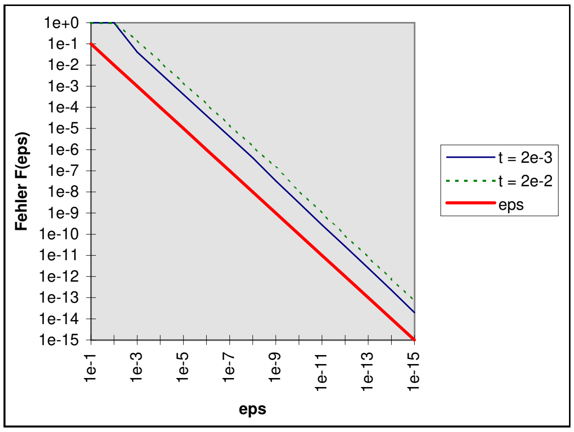


Abbildung 6.67: Kompressionsfehler in der Zeilensummennorm, $\|\mathbf{T} - \mathbf{T}^{eps}\|_\infty$, $N = 12$, $J = 1$, $\nu = 1$.

Die signifikanten Matrixkoeffizienten hängen ebenfalls linear von den Leveln ab. Abbildung 6.68 zeigt die lineare Ordnung der Koeffizienten.

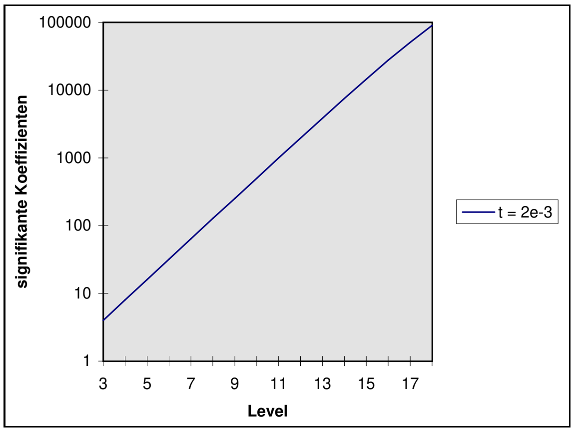
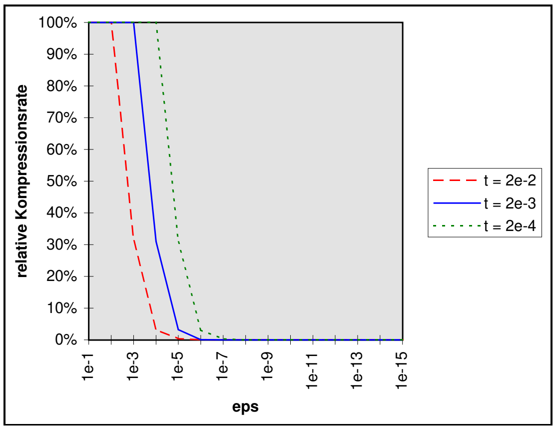


Abbildung 6.68: signifikante Koeffizienten von $\mathbf{T}^\epsilon$, $N = 12$, $J = 1$, $\nu = 1$.

In der letzten Abbildung 6.69 wollen wir uns mit der relativen Kompressionsrate beschäftigen. Zur Erinnerung: die **relative Kompressionsrate**

$$\kappa_r \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{N_\epsilon}{N_0} = 1 - \alpha, \tag{6.17}$$

gibt das Verhältnis der Anzahl der signifikanten Koeffizienten zu der Anzahl den Koeffizienten an, welche ohne Kompression abgespeichert worden wären. Abbildung 6.69 zeigt die relative Kompressionsrate zu unterschiedlichen Zeitschrittweiten und Leveln. Das Ergebnis ähnelt dem des nichtlinearen Operators der Wärmegleichung auf Seite 154. Die Koeffizienten liegen von der Größenordnung sehr nahe bei einander, deshalb vollzieht sich der Übergang von einer Kompressionsrate von hundert Prozent zu einer Kompressionsrate von null sprungartig . Der Operator ist deshalb nicht gut für eine Kompression mittels *tresholding* geeignet. Sinnvoller ist es, den Operator auf mehreren Skalen darzustellen. Denn dieser benötgt, vergleichen mit der Einskalendarstellung, nur einen Bruchteil der Koeffizienten. Die Kompressionsraten bezüglich der einzelnen Level — rechtes Bild — liegen so nah bei einander, daß sie kaum zu unterscheiden sind.



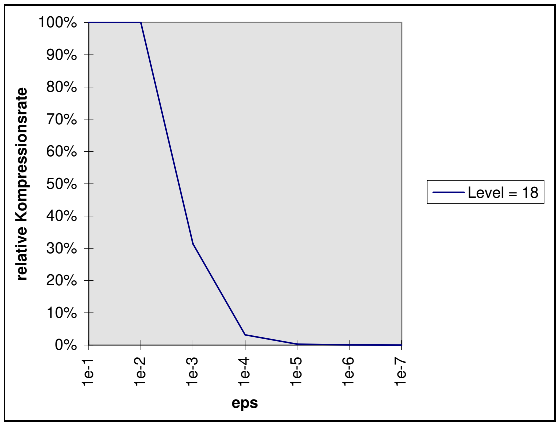


Abbildung 6.69: Relative Kompressionsrate, $\kappa_r = 1 - \alpha$, $\nu = 1$.

6.1.6.2 Startfunktion: $sin(2\pi x)$ auf $[0:1]$

Die Startfunktion ist wieder eine Sinusschwingung. Abbildung 6.70 verfolgen die Lösung über einen längeren Zeitraum. Die Zeit befindet sich auf der rechten Achse. Im linken unteren Bild entwickeln sich aus der Startfunktion zwei Wellenkämme. Der rechte baut sich schneller auf als der linke. Man kann seine weitere Entwicklung in den beiden linken Bildern darüber verfolgen. Im unteren rechten Bild verebt dieser erste Wellenkamm und neue Wellen bauen sich in den Bildern darüber auf.

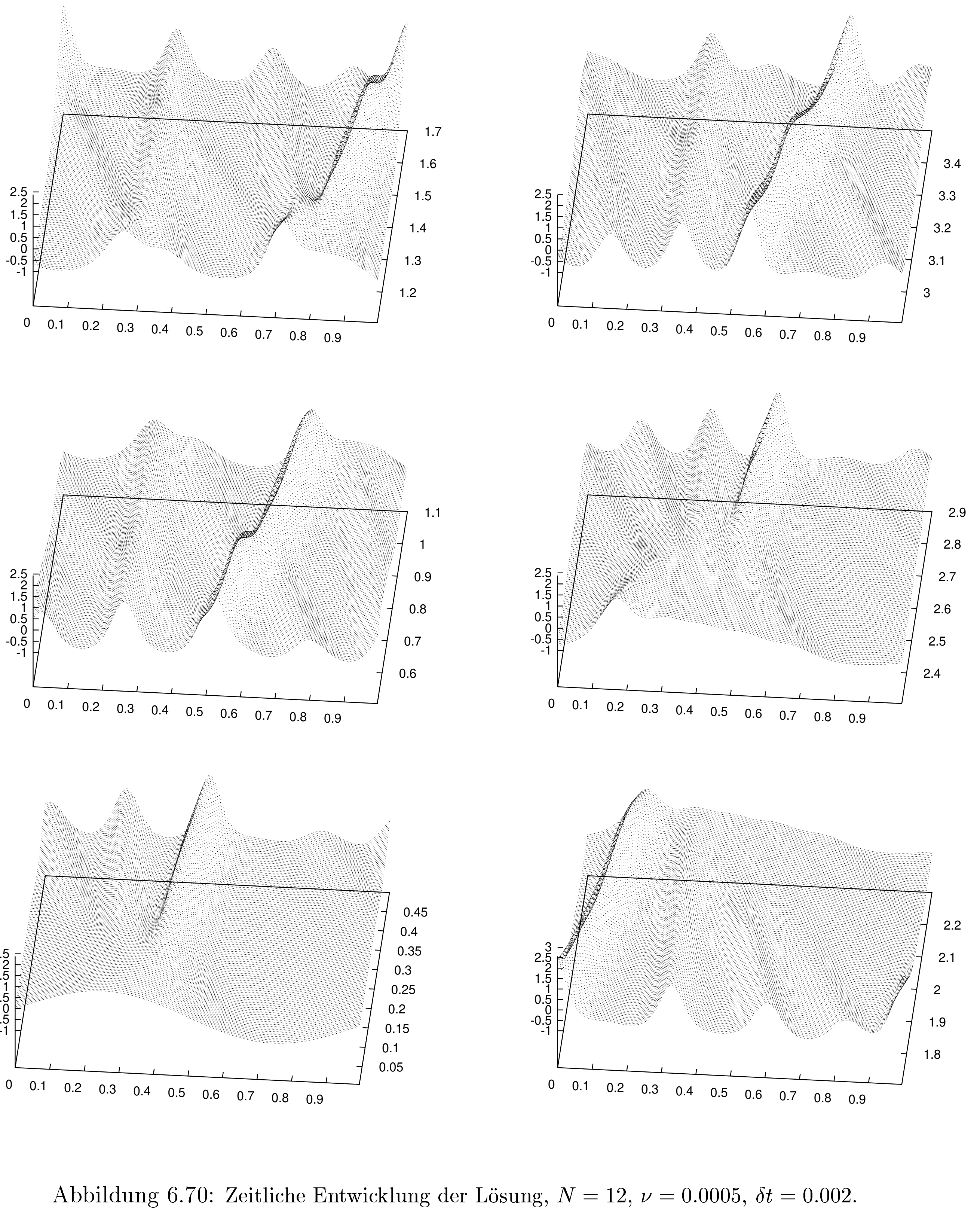


Abbildung 6.70: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 12$, $\nu = 0.0005$, $\delta t = 0.002$.

Der Vollgitterfehler hat die Ordnung vier, da die Startfunktion ein Teil einer Eigenfunktion des infinitesimalen Erzeugenden ∂_{xxx} ist: $\partial_{xxx}(\sin x + \cos x) = -(\sin x + \cos x)$. Die nächste Abbildung 6.71 zeigt den Fehler bezüglich der beiden bekannten Normen.

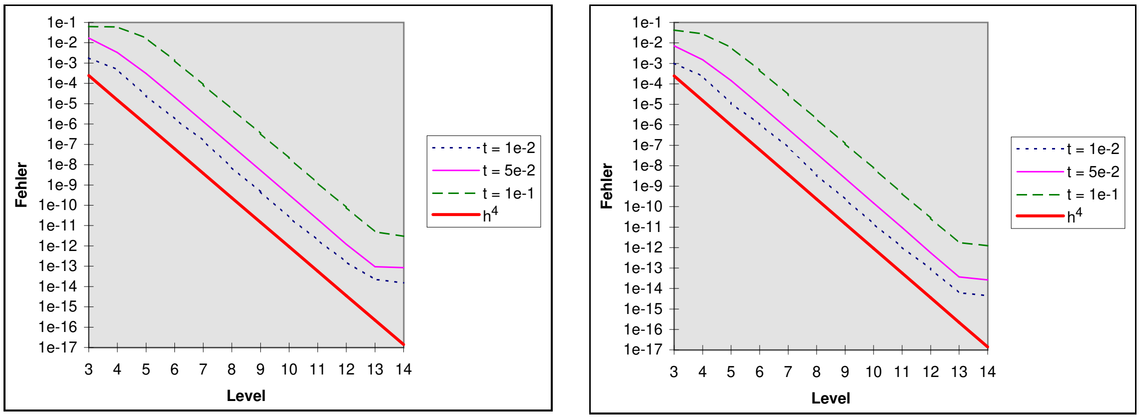


Abbildung 6.71: Fehler $\|u(\triangle t) - u_j(\triangle t)\|$ auf dem vollen Gitter, $\nu = 0.0005$.

In Abbildung 6.72 sind die Waveletkoeffizienten der Lösung dargestellt. Im linken Bild sieht man wie ein Wellenkamm sich aufbaut, die Koeffizienten verhalten sich ähnlich wie bei einer Schockwelle. Schon nach relativ kurzer Zeit kommen immer mehr kleinere Wellen hinzu. Das rechte Bild zeigt, wie die Waveletkoeffizienten zu oszillieren beginnen. Signifikante Waveletkoeffizienten werden über das ganze Intervall verteilt.

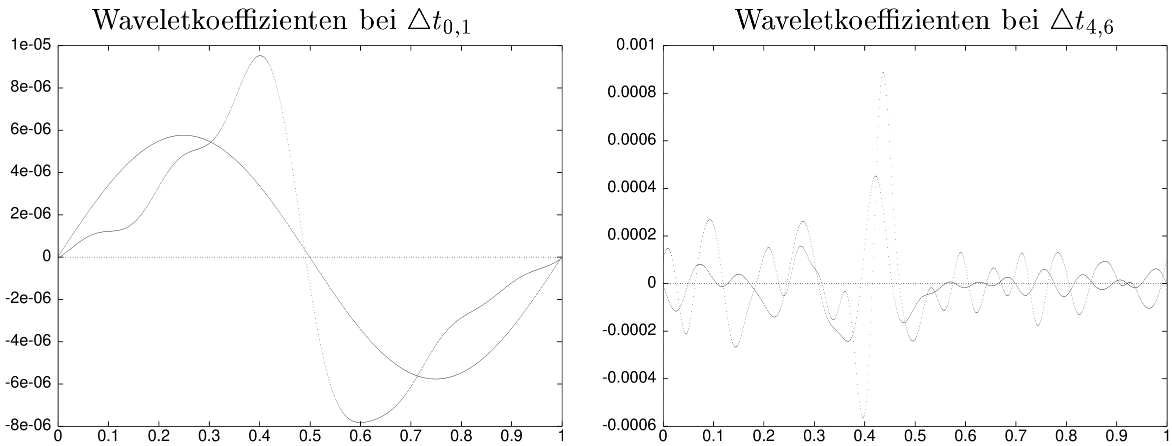


Abbildung 6.72: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizienten, $N = 12, \nu = 0.0005$, $\triangle t = 0.002$.

Abbildung 6.73 zeigt den Kompressionsfehler der Lösung. Der Fehler verhält sich genauso wie bei den anderen Modellbeispielen, die ein Verfahren der Ordnung 4 ermöglicht haben: bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$–Norm erhält man ein lineare Ordnung und bezüglich der $\|\cdot\|_{h_{12}}$–Norm eine Ordnung der Ordnung 1.5.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad\qquad$ $\|\cdot\|_{h_{12}}$–Norm

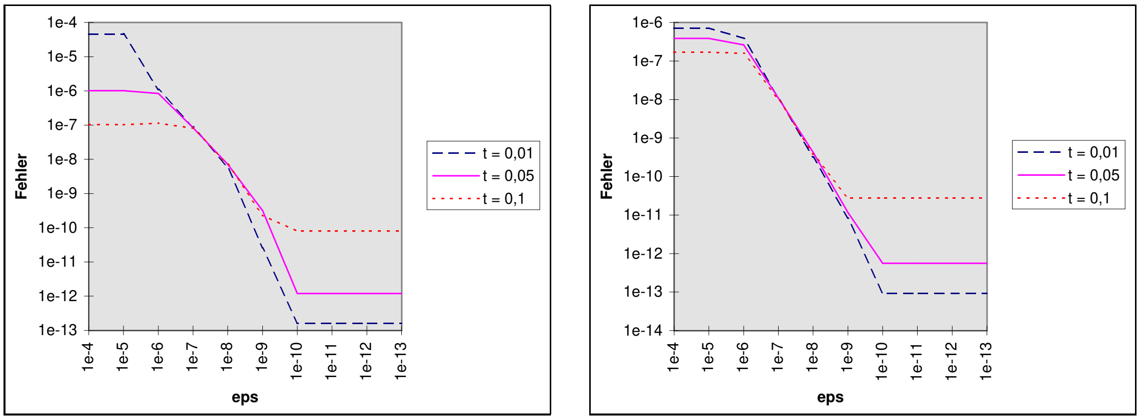


Abbildung 6.73: Fehler $\|u(\triangle t) - u^{\epsilon}_{12}(\triangle t)\|$, $N = 12$, $\nu = 0.0005$.

Die letzte Abbildung 6.74 gibt die ε–Komplexität der Lösung kurz vor dem ersten Wellenkamm wieder. Zu diesem Zeitpunkt stimmt die Ordnung mit der des vollen Gitters überein.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad\qquad$ $2^{-12} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm

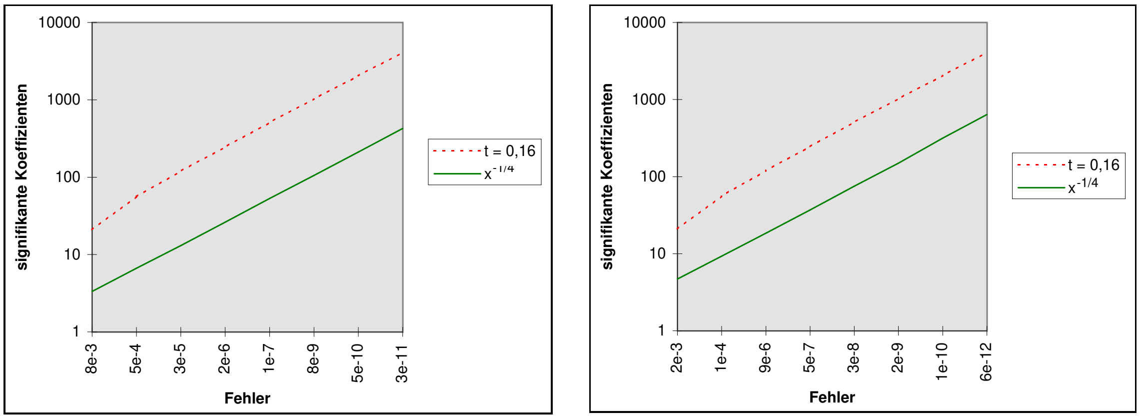


Abbildung 6.74: ε–Komplexität, $W\left(e(\epsilon)\right) = \mathcal{O}\left(e(\epsilon)^{-1/4}\right)$, $N = 12$, $\nu = 0.0005$.

In denn letzten zwei Abschnitten wollen wir uns noch kurz mit Ein– bzw. Zweisolitonen Lösungen beschäftigen. In der Einführung zu diesem Abschnitt haben wir den historischen Hintergrund der Korteweg de–Vries Gleichung skizziert und eine mögliche Anwendung aufgezeigt. Solitonen sind besonders stabile Lösungen. Es handelt sich hierbei um stark lokalisierte Wellen, die sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit und unveränderter Form über mehrere Kilometer fortbewegen.

6.1.6.3 Einsolitonen Lösung

Abbildung 6.75 zeigt eine Solitone in einem *Kanal* der Breite 2. Die Höhe der Welle bestimmt dabei die Geschwindigkeit, mit der sie sich fortbewegt. Man kann gut erkennen, daß sich weder die Höhe noch die Form der Welle verändert.

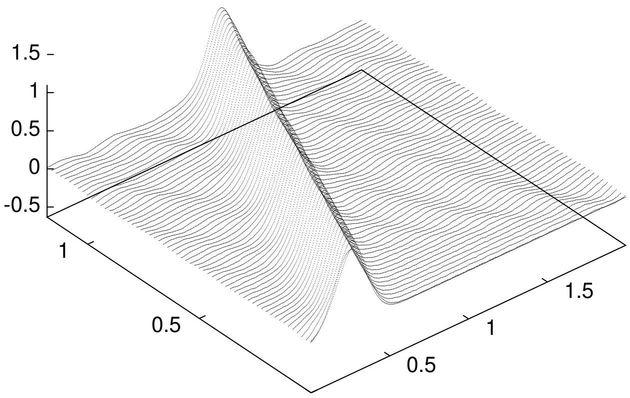


Abbildung 6.75: Eine Solitone, $N = 12$, $\nu = 0.003$, $\delta t = 0.002$.

6.1.6.4 Zweisolitonen Lösung

Abbildung 6.76 zeigt zwei Solitonen mit unterschiedlicher Höhe und damit auch mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Die linke Solitone im Bild ist doppelt so hoch wie die in Abbildung 6.75. Vergleicht man die Geschwindigkeiten der beiden Wellen, so sieht man, daß sich die doppelt so hohe Solitone auch doppelt so schnell bewegt. Das Interessante an der Zweisolitonen Lösung ist jedoch ihre Kollision. Abbildung 6.76 zeigt deutlich, daß die Solitonen bis auf einen Schift erhalten bleiden und ihren Weg unbeirrt fortsetzen. Weder ihre Amplitude noch ihre Frequenz hat sich durch den Zusammenstoß verändert.

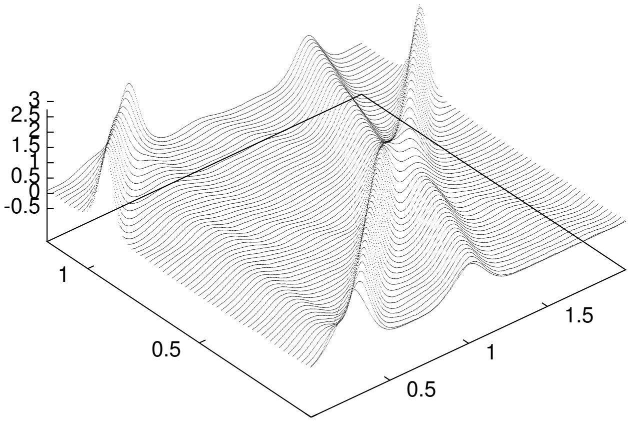


Abbildung 6.76: Zwei sich überschneidende Solitonen, $N = 12$, $\nu = 0.003$, $\delta t = 0.002$.

6.2 Der zweidimensionale Fall

Wir habe in zwei Dimensionen die meisten aber nicht alle Modellbeispiele aus dem Eindimensionalen übernommen. Insbesondere haben wir keine Fokker–Plank Gleichung gerechnet und auch die Korteweg de–Vries Gleichung ist auf eine Dimension beschränkt. Die wesentlichen Ergebnisse dieses Abschnitts lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die **Anzahl der signifikanten Matrixkoeffizienten** der NS–Form der Halbgruppe $e^{\nu t \triangle} = e^{\nu t \partial_{xx}} e^{\nu t \partial_{yy}}$ ist dimensionsunabhängig. Durch die Tensorproduktstruktur werden nur Koeffizienten in der Größenordnung $\mathcal{O}(N)$ benötigt, wobei N die Anzahl der Freiheitsgrade in einer Dimension ist. Der nichtlineare Operator $\frac{1}{2\nu}\left(id - e^{-t \cdot \nu \triangle}\right)\triangle^{-1}$ besitzt keine Tensorproduktstruktur. In der Mehrskalendarstellung mit genügend vielen Vergröberungsleveln geht die Dimension logarithmisch in die Anzahl der signifikanten Koeffizienten ein. Es ergibt sich eine Ordnung von $\mathcal{O}(N \log N)$.

- Die *Ordnung* des Verfahrens hängt von der Anzahl der verschwindenden Momente der Waveletbasis ab. Wie im Eindimensionalen arbeiten wir mit Daubechies 4 Wavelets und erhalten ein Verfahren der Ordnung 2.

- Auch der *Kompressionsfehler* der Lösung verhält sich wie im Eindimensionalen: bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$–Norm hängt der Kompressionsfehler linear von der Abschneidegenauigkeit ϵ ab und bezüglich der $2^{-j}\|\cdot\|_{l_2}$–Norm reduziert sich der Fehler mit der Ordnung 1.5.

Die ϵ–Komplexität haben wir nicht mehr berechnet, da diese ja nur eine Aussage über einzelne Zeitpunkte trifft. Wir beginnen wieder mit der Diskussion der linearen Wärmegleichung.

6.2.1 Die lineare Wärmeleitungsgleichung

Die **lineare Wärmegleichung** ist der Prototyp einer parabolischen Differentialgleichung. Das dazugehörige Anfangsrandwertproblem wird in 2 Dimensionen gegeben durch

$$\begin{aligned} u_t &= \nu \triangle u + \mu f, && x \in (0,1)^2,\, t > 0 \\ u(t,\,\cdot)|_{\partial[0,1]^2} &= 0, && t > 0 \\ u(0,\,x) &= u_0(x), && x \in (0,1)^2. \end{aligned} \tag{6.18}$$

$u(t,\,x,\,y)$ beschreibt die Temperaturverteilung in einem Körper. In unserem Fall handelt es sich dabei um eine Platte mit den Seitenlängen 1. Die Platte ist an allen vier Seiten isoliert, d. h. wir haben die Randwerte 0. ν und μ sind Materialkonstanten; ν gibt die Leitfähigkeit des Körpers an und μ die spezifische Wärme. $f(t)$ ist eine zeitabhängige Wärmequelle. In diesem Beispiel haben wir $f(t) \equiv 0$ gewählt. Im nächsten Abschnitt betrachten wir eine nichtlineare Wärmegleichung, bei der die Wärmequelle $f(u(t,\,x))$ zusätzlich noch von der Temperatur $u(t,\,x)$ abhängt.
Die Halbgruppe der linearen Wärmegleichung $T(t) = e^{t\cdot\nu\triangle} = e^{t\cdot\nu\partial_{xx}} e^{t\cdot\nu\partial_{yy}}$ besitzt Tensorproduktstruktur. Wir können also den zweidimensionalen Operator auf zwei eindimensionale Operatoren zurückführen, die dann in jede Raumrichtung einzeln angewendet werden. Die Lösung von (6.18) wird also gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t,x,y) &= e^{t\cdot\nu\triangle} u_0(x,y) \\ &= e^{t\cdot\nu\partial_{xx}} e^{t\cdot\nu\partial_{yy}} u_0(x,y). \end{aligned} \tag{6.19}$$

In d Dimensionen wird die **Kompressionsordnung der Halbgruppe** gegeben durch

$$\mathcal{O}\left(N^{-d}\right), \tag{6.20}$$

wobei N die Anzahl der Freiheitsgrade in einer Dimension ist.

6.2.1.1 Startfunktion: $sin(2\pi x)sin(2\pi y)$ auf $[0:1]^2$

Wir beginnen die Diskussion der linearen Wärmegleichung mit der Startfunktion $u_0(x,y) = sin(2\pi x)sin(2\pi y)$. Abbildung 6.77 zeigt im linken Bild die Startfunktion und im rechten Bild die Lösung zum Zeitpunkt $\delta t = 0.02$. Wie im Eindimensionalen wird auch hier die Lösung im Laufe der Zeit durch die Diffusion gedämpft.

$\delta t = 0.0$ $\qquad$ $\delta t = 0.02$

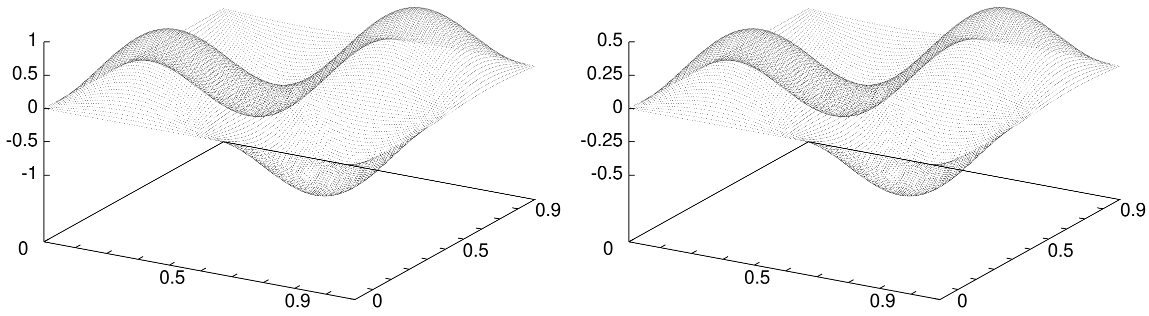


Abbildung 6.77: Zeitliche Entwicklung der Lösung auf Level $N = 7$, $\nu = 1$.

Der Vollgitterfehler hat die Ordnung 4, obwohl die Anzahl der verschwindenden Momente nur ein Verfahren zweiter Ordnung erwarten läßt. Das liegt daran, daß die Startfunktion eine Eigenschwingung des Laplace–Operators ist. In Abbildung 6.78 wird die Ordnung bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$–Norm und der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm dargestellt.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

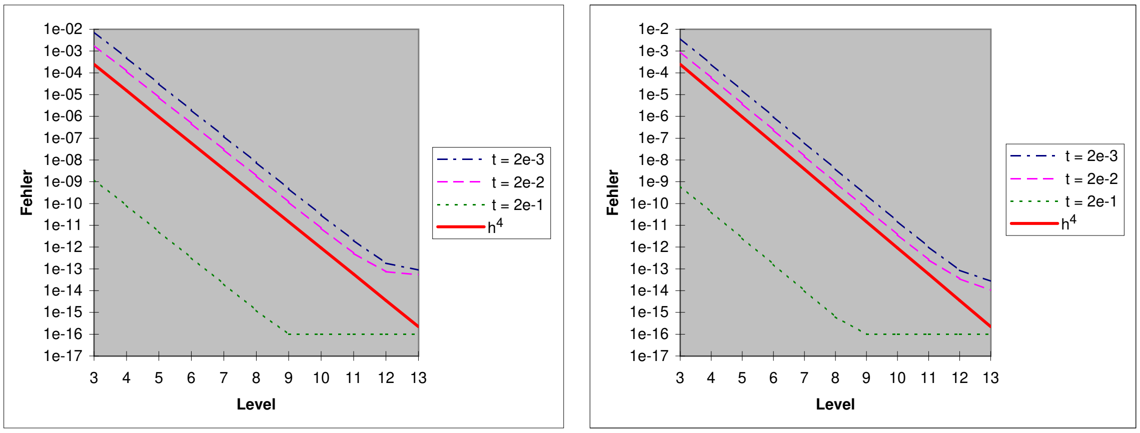


Abbildung 6.78: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf dem vollen Gitter, $\nu = 1$.

Da die Lösungsfunktion keine Unstetigkeitsstelle besitzt, sind die Waveletkoeffizienten gleichmäßig über das ganze Imtervall verteilt. In der nächsten Abbildung 6.79 kann man die Waveletkoeffizienten zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten sehen.

$\delta t = 0.0$ $\delta t = 0.02$

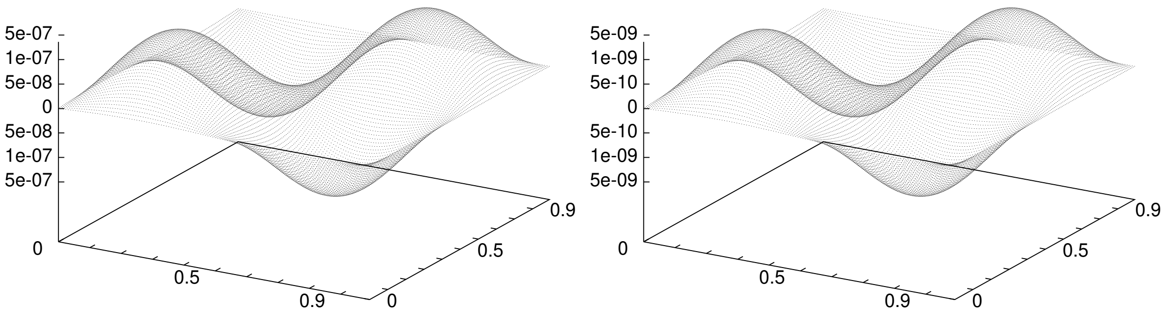


Abbildung 6.79: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizienten der Lösung, $N = 7$, $\nu = 1$.

Die Waveletkoeffizienten der Lösungsfunktion werden durch den Diffusionsterm $\nu\triangle$ gedämpft. Abbildung 6.80 zeigt die zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten bzgl. unterschiedlicher Abschneidegenauigkeiten ϵ.

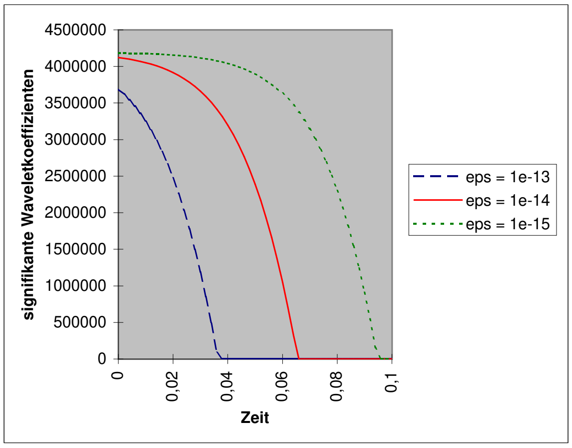


Abbildung 6.80: Zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$, $eps = \epsilon$.

Die signifikanten Waveletkoeffizienten konzentrieren sich um die vier Maxima der Lösung herum. Die nächste Abbildung 6.81 zeigt das Gitter der signifikante Waveletkoeffizienten. Man kann gut den Einfluß der Diffusion erkennen.

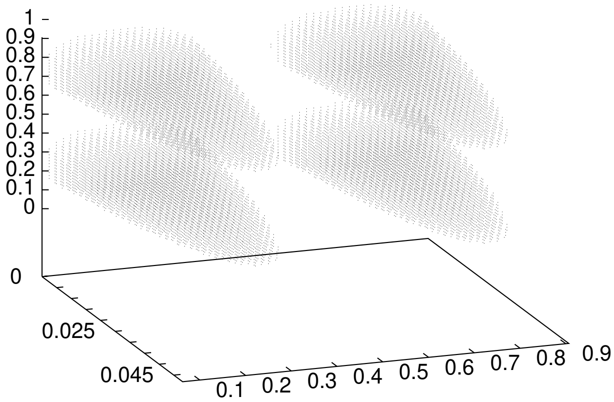


Abbildung 6.81: Zeitliche Entwicklung des Gitters.

Die letzte Abbildung dieses Abschnitts 6.82 beschäftigt sich mit dem Verhältniß von Abschneidegenauigkeit ϵ zum Kompressionfehler $F(\epsilon) = \left\|u(\delta t) - u_j^\epsilon(\delta t)\right\|$. Wie auch im Einsimensionalen reduziert sich der Fehler bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$–Norm mit linearer Ordnung und bzgl. der $2^{-j} \cdot \|\cdot\|_{l_2}$–Norm mit der Ordnung 1.5 .

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

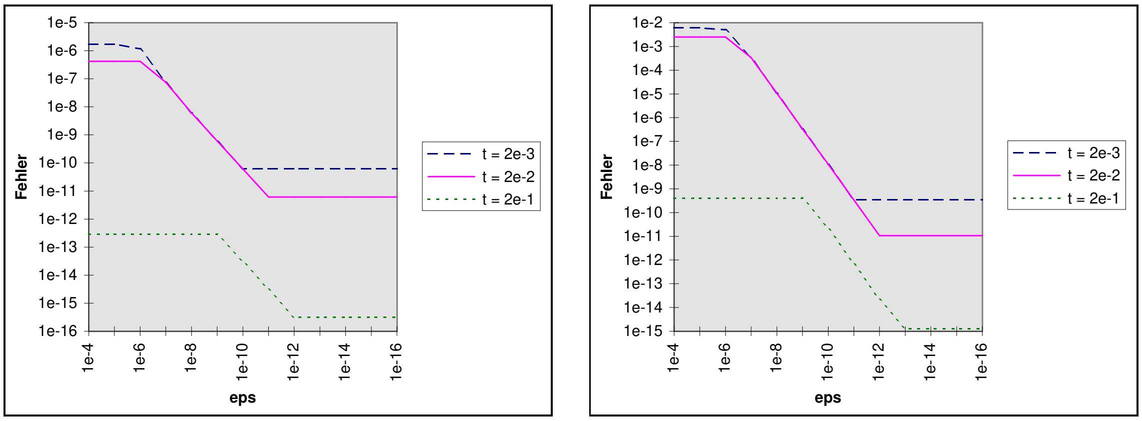


Abbildung 6.82: Fehler $\left\|u(\delta t) - u_j^\epsilon(\delta t)\right\|$ auf den adaptiven Gittern G_j^ϵ, $\nu = 1$.

Im nächsten Abschnitt starten wir mit einer sehr stark lokalisierten Funktion.

6.2.1.2 Startfunktion: $e^{-\frac{x^2+y^2}{4*\alpha}}$ auf $[0:1]^2$

Als Startfunktion haben wir eine stark lokalisierte Gaußfunktion gewählt: $u_0(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{4*\alpha}}$ mit $\alpha = 0.001$. In Abbildung 6.83 wird die Lösung zu unterschiedlichen

Zeitpunkten dargestellt. Man sieht deutlich den Einfluß der Diffusion auf die Lösung. Die Temperarur nimmt zunächst schnell, dann immer langsammer ab und dehnt sich über die ganze Platte aus.

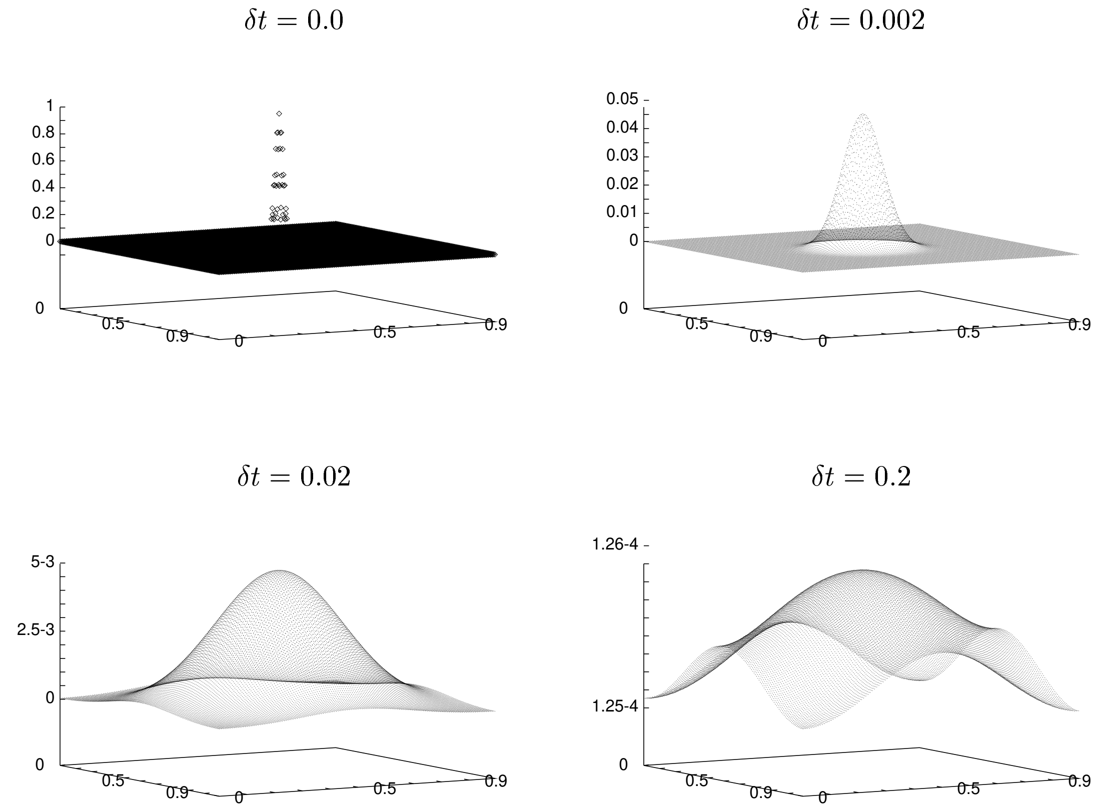


Abbildung 6.83: Zeitliche Entwicklung der Lösung, $N = 7$, $\nu = 1$, $\alpha = 0.001$.

Die Startfunktion $u_0(x) = e^{-\frac{x^2+y^2}{4*\alpha}}$ approximiert eine Eigenfunktion der Halbgruppe $T(t) = e^{t\triangle}$. Da sowohl der Operator T als auch die Startfunktion eine Tensorproduktstruktur besitzen, kann man die Argumente von **??** übertragen. Daraus ergibt sich ein Vollgitterfehler der Ordnung vier, wie die nächste Abbildung 6.84 zeigt.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad 2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

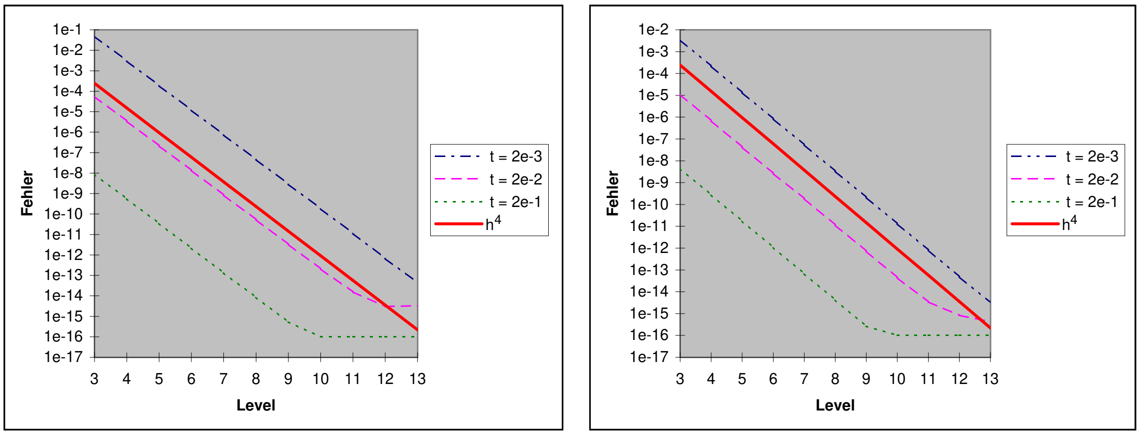


Abbildung 6.84: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf dem vollen Gitter $\nu = 1$, $\alpha = 0.001$.

In Abbildung 6.85 sieht man, wie gut sich die Wavelettransformation an die Lösung anpaßt und lokal Informationen über diese gibt. Je näher man an die Startfunktion herangeht, desto stärker sind die Koeffizienten lokalisiert.

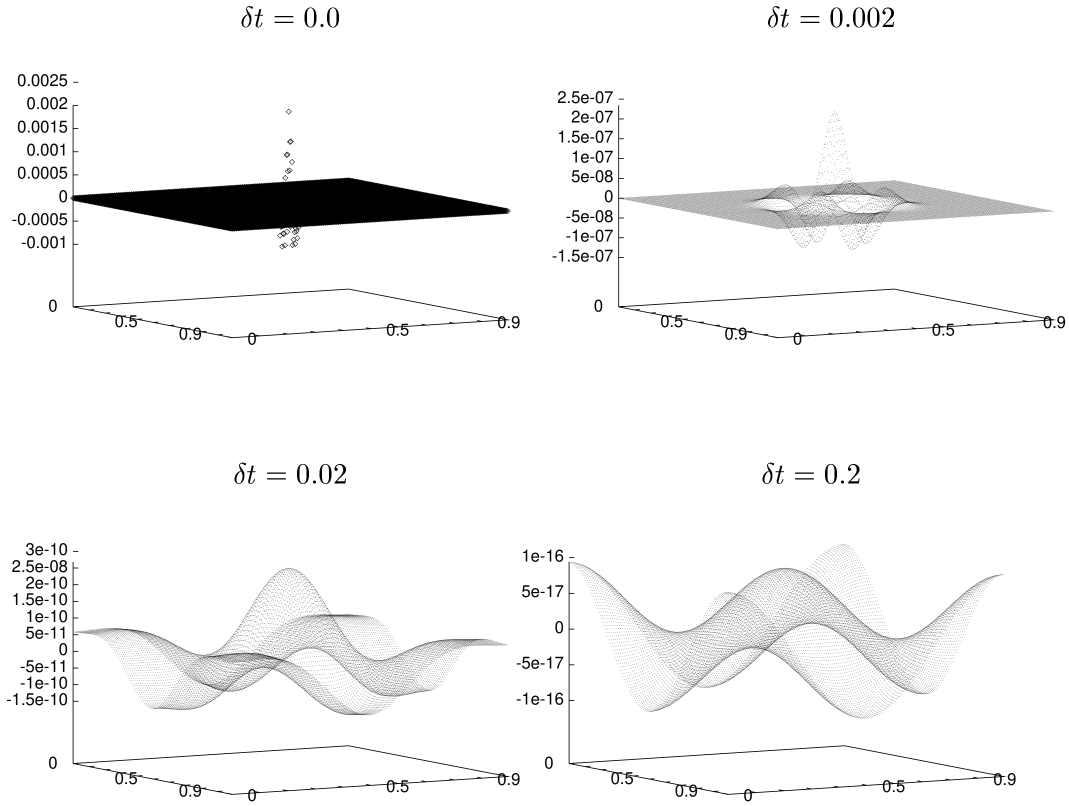


Abbildung 6.85: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizienten, $N = 7, \nu = 1, \alpha = 0.001$.

Die Anzahl der signifikanten Koeffizienten nimmt zunächst einmal zu, da die Startfunktion stark lokalisiert ist und sich der Träger am Anfang schnell vergrößert; danach reduziert die Diffusion die Koeffizienten und man erhält das bekannte Profil der Wärmegleichung in Abbildung 6.86.

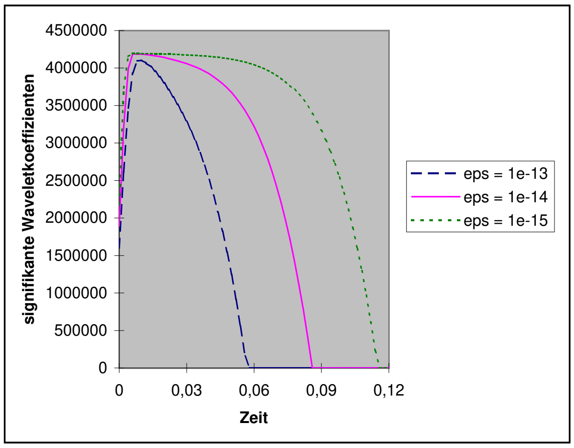


Abbildung 6.86: Zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$, $\alpha = 0.001$.

In der nächsten Abbildung 6.87 kann man die zeitliche Entwicklung des adaptiven Gitters der Waveletkoeffizienten sehen.

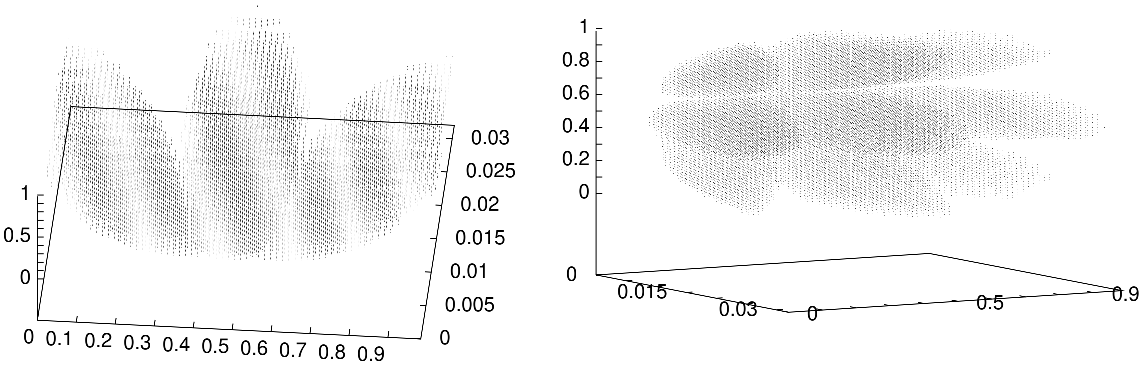


Abbildung 6.87: Zeitliche Entwicklung des Gitters, $\nu = 1$, $\alpha = 0.001$.

In der letzten Abbildung 6.88 dieses Abschnitts zeigen wir wieder den Kompressionsfehler der Lösung abhängig von der Abschneidegenauigkeit ϵ. Wie in den bisherigen Beispielen reduziert sich der Fehler bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$–Norm mit linearer Ordnung und bzgl. der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm mit der Ordnung 1.5.

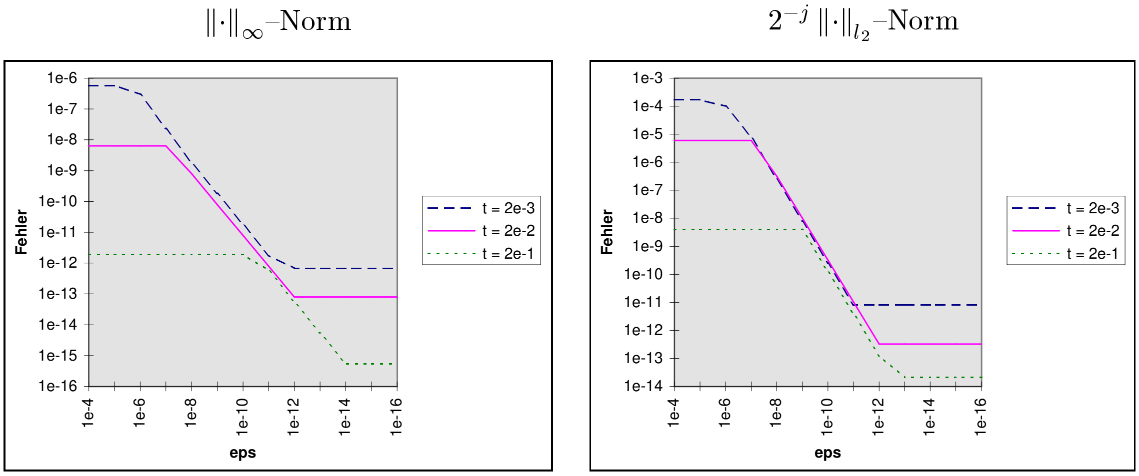


Abbildung 6.88: Kompressionsfehler $\left\|u(\delta t) - u_j^\epsilon(\delta t)\right\|$, $N = 7$, $\nu = 1$, $eps = \epsilon$, $\alpha = 0.001$.

Im nächsten Abschnitt reduzieren wir die Regularität der Startfunktion. Wir beginnen mit einer Hütchen–Funktion, die in der Intervallmitte nicht differenzierbar ist.

6.2.1.3 Startfunktion: $N1(x - \frac{1}{2})N1(y - \frac{1}{2})$ auf $[0:1]^2$

Die Startfunktion $u_0(x, y) = N1(x - \frac{1}{2})N1(y - \frac{1}{2})$ ist in der Mitte des Intervalls nicht differenzierbar. Abbildung 6.89 zeigt die zeitliche Entwicklung der Lösung zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Es ist typisch für parabolische Differentialgleichungen, daß die Lösung im Laufe der Zeit immer glatter wird. Bereits nach kurzer Zeit ($\delta t = 0.002$) ist die Lösung auch in der Intervallmitte differenzierbar.

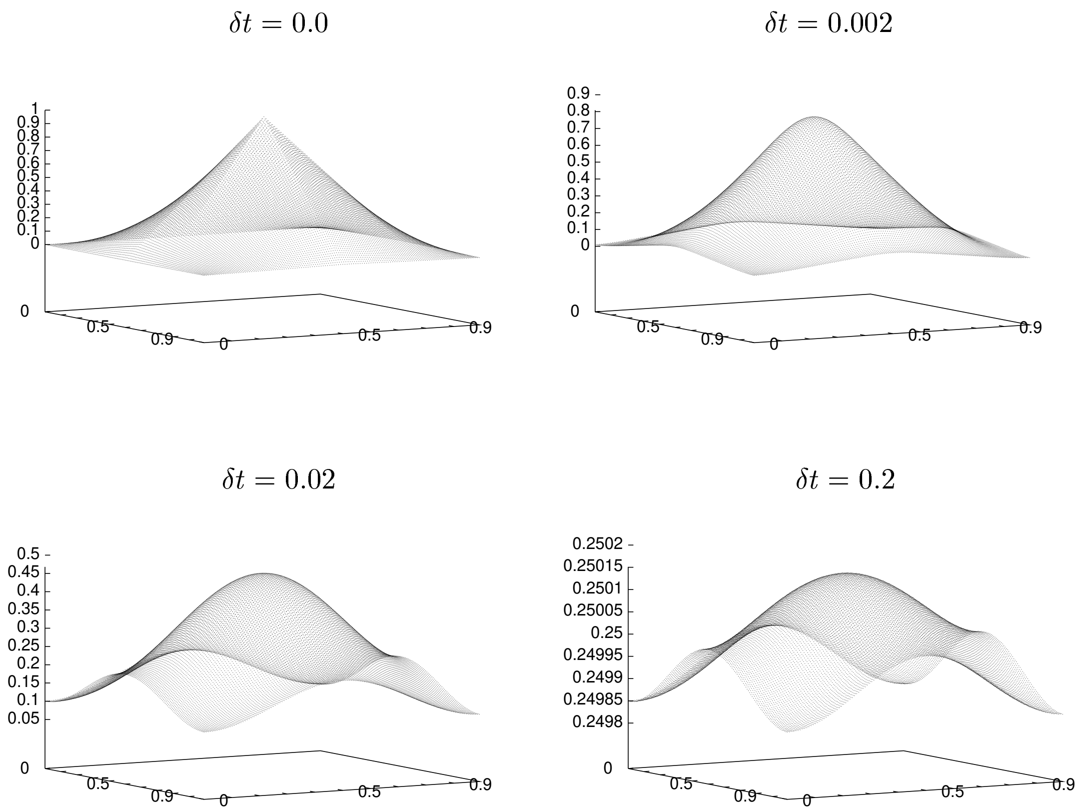


Abbildung 6.89: Zeitliche Entwicklung der Lösung auf Level $N = 7$, $\nu = 1$.

In Abbildung 6.90 wird der Vollgitterfehler dargestellt. Da die Startfunktion keine Eigenschwingung ist, erhält man eine quadratische Ordnung, die der Anzahl der verschwindenden Momente der Waveletbasis entspricht.

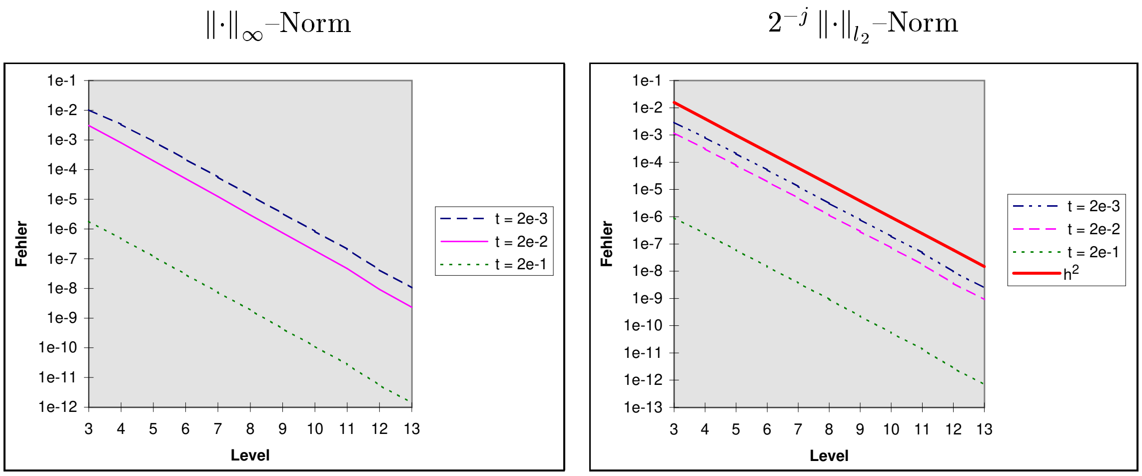


Abbildung 6.90: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf dem vollen Gitter, $N = 7$, $\nu = 1$.

Die Startfunktion besitzt nur einen signifikanten Koeffizienten in der Mitte des Intervalls, da die von uns verwendeten Wavelets zwei verschwindende Momente besitzen und die Startfunktion stückweise linear ist. Je weiter die Lösung abflacht, desto breiter werden die Träger der Waveletkoeffizienten. Abbildung 6.91 zeigt die Waveletkoeffizienten der Lösung zu veschiedenen Zeitpunkten.

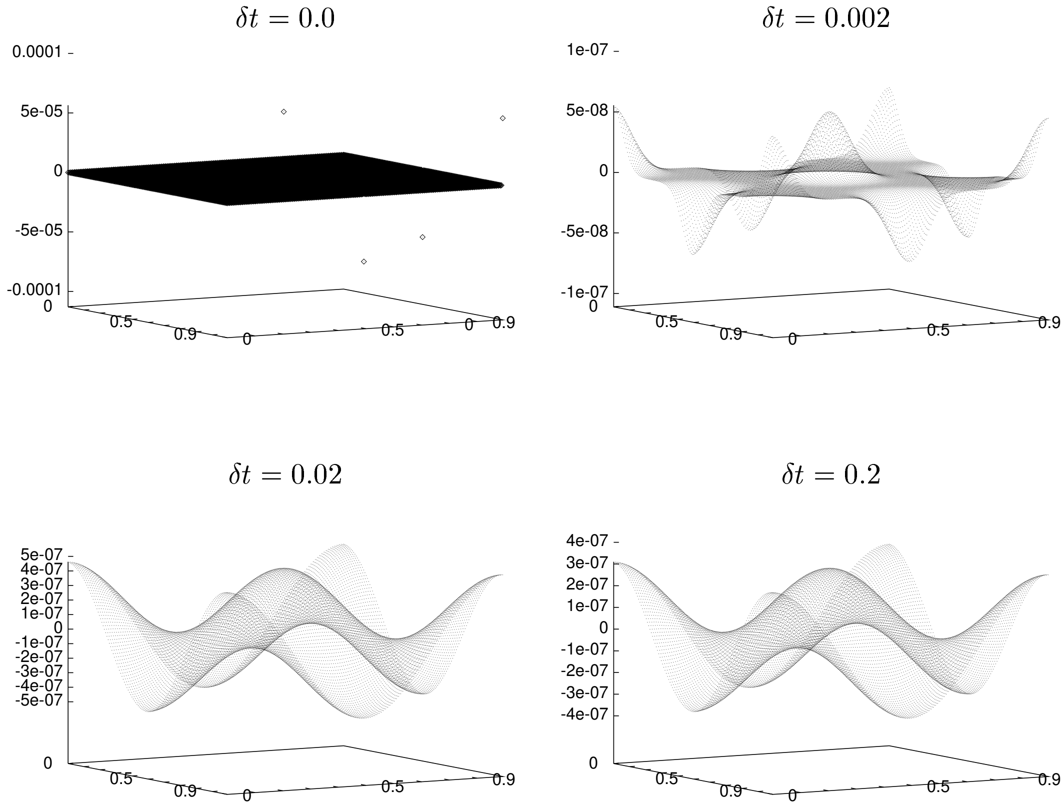


Abbildung 6.91: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizienten der Lösung, $N = 7$, $\nu = 1$.

Das Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten hat große Ähnlichkeit mit dem im letzten Abschnitt. In beiden Fällen hat die Startfunktion nur wenige Koeffizienten in der Mitte des Intervalls; diese nehmen am Anfang schnell zu und werden dann langsam durch die Diffusion gedämpft. Abbildung 6.92 stellt das adaptive Gitter da.

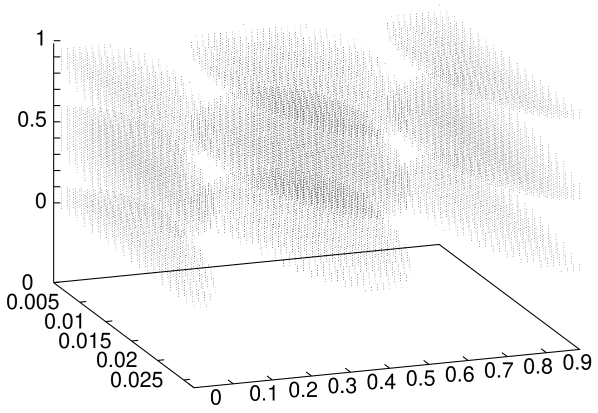


Abbildung 6.92: Zeitliche Entwicklung des Gitters, $\nu = 1$.

Die Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, dargestellt in Abbildung 6.93, verhält sich ähnlich wie im letzten Abschnitt. Zunächst werden es mehr, da die Lösung mit der Zeit immer schwächer lokalisiert ist, dann setzt die Diffusion ein und die Koeffizienten werden gleichmäßig reduzuert.

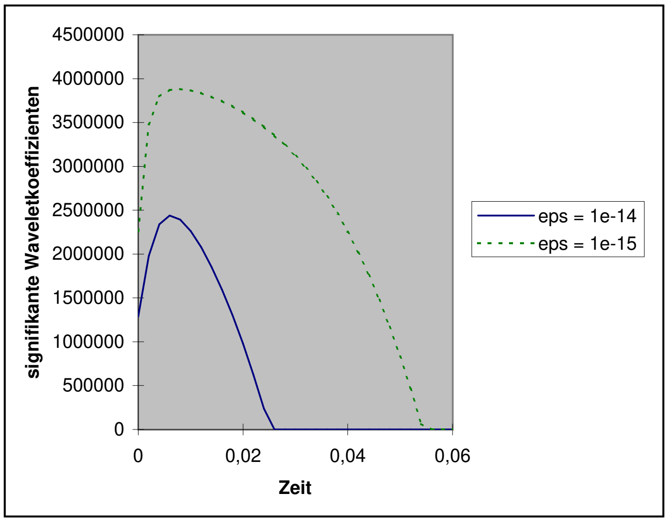


Abbildung 6.93: Zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Der Kompressionsfehler, dargestellt in Abbildung 6.94, reduziert sich mit linearer Ordnung bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$–Norm und mit der Ordnung 1.5 bezüglich der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

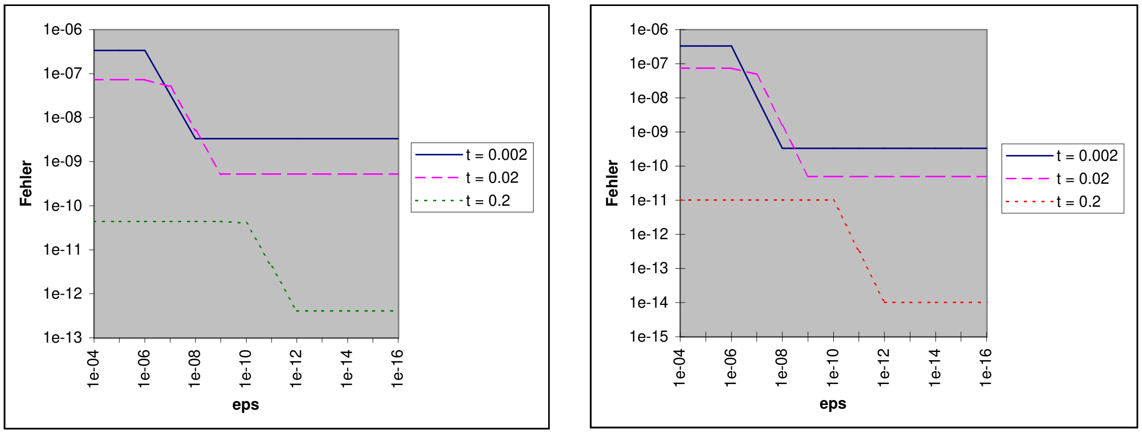


Abbildung 6.94: Fehler $\left\| u(\delta t) - u_j^\epsilon(\delta t) \right\|$ auf den adaptiven Gittern G_j^ϵ, $\nu = 1$.

Im nächsten Beispiel verringern wir die Regularität der Startfunktion noch ein wenig: sie ist jetzt nicht mehr stetig.

6.2.1.4 Startfunktion: $\chi_{(-1/2,1/2)}(x)\chi_{(-1/2,1/2)}(y)$ auf $[-1:1]^2$

Die Startfunktion $u_0(x,y) = \chi_{(-1/2,1/2)}(x)\chi_{(-1/2,1/2)}(y)$ ist nicht stetig. Abbildung 6.95 zeigt die zeitliche Entwicklung der Lösung zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Man sieht deutlich, daß die Lösung mit der Zeit immer glatter wird. Dies ist typisch für parabolische Differentialgleichungen.

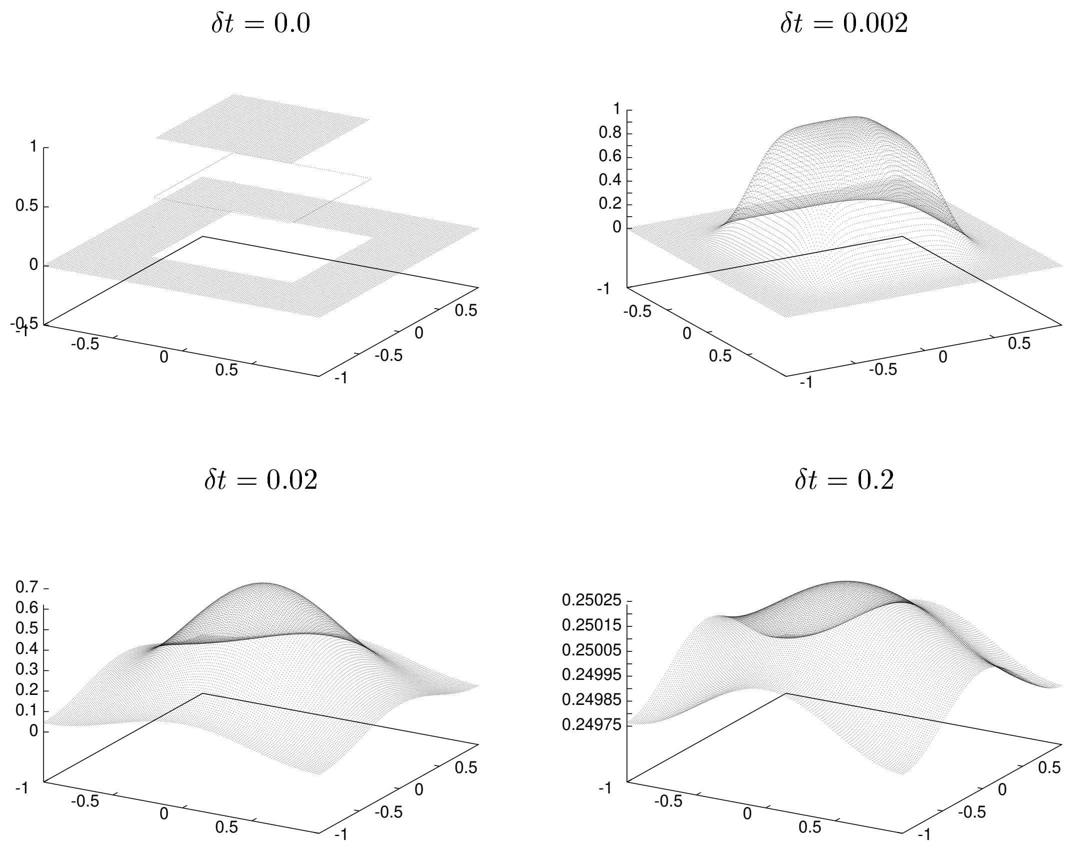


Abbildung 6.95: Zeitliche Entwicklung der Lösung auf Level $N = 7$, $\nu = 1$.

In Abbildung 6.96 wird der Vollgitterfehler bezüglich der zwei bekannten Normen dargestellt. Wir erhalten ein Verfahren der Ordnung 2, da wir Daubechies 4 Wavelets mit zwei verschwindenen Momenten verwenden.

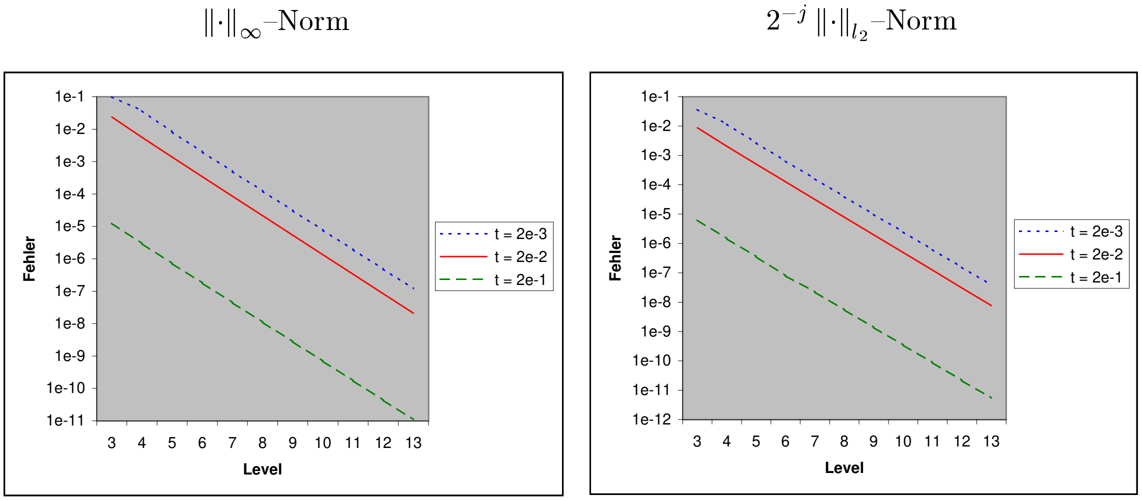


Abbildung 6.96: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf dem vollen Gitter, $\nu = 1$.

In Abbildung 6.97 sehen wir die Waveletkoeffizieneten der Lösung zum Zeitpunkt $\delta t = 0.002$. Es bilden sich signifikante Koeffizienten, um die vier Ecken herum, da die Lösung dort in beide Raumdimensionen unstetig ist.

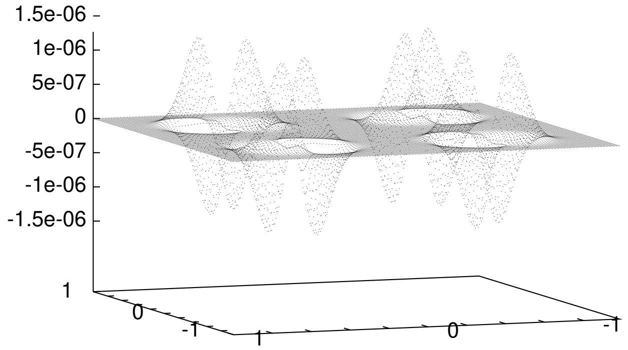


Abbildung 6.97: Zeitliche Entwicklung des Gitters, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Die zeitliche Entwicklung des Gitters der signifikanten Waveletkoeffizienten, dargestellt in Abbildung 6.98, spiegelt den Einfluß der Diffusion wieder. Wie man in Abbildung 6.95 sehen kann, wird die Lösung schon nach wenigen Zeitschritten glatt und das Maximum liegt in der Mitte des Intervalls, dort siedeln sich auch die signifikanten Koeffizienten an. Da die Lösung leicht gewellt ist, verteilen sich die signifikanten Koeffizienten gerade so wie in Abbildung 6.98 dargestellt.

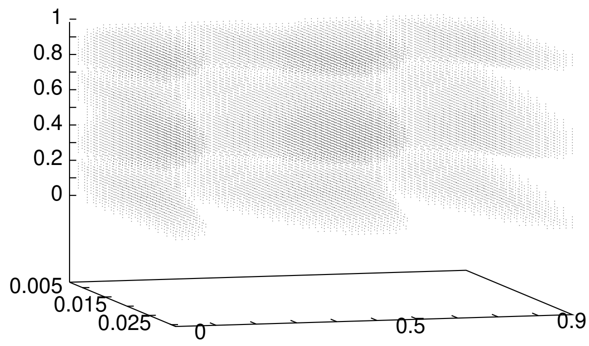


Abbildung 6.98: Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten $\delta t = 0.002$, $\epsilon = 10^{-6}$.

Abbildung 6.99 zeigt die zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten. Man erhält das bekannte Diffusionsprofil.

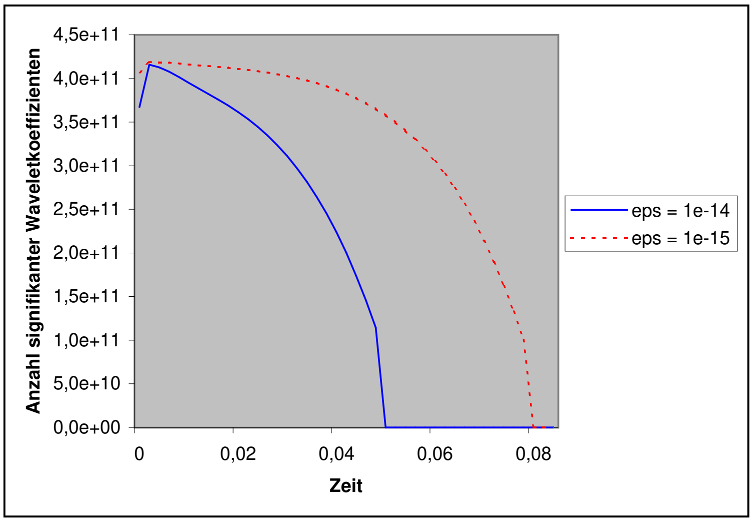
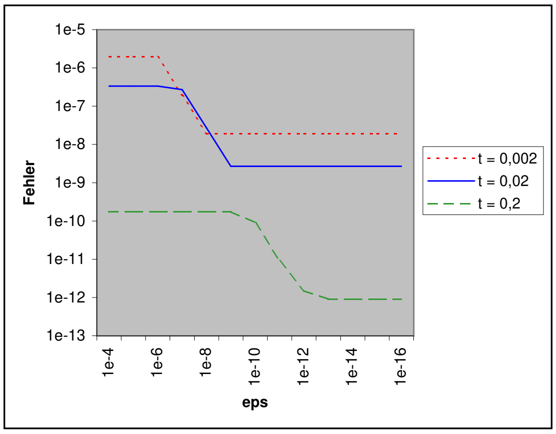


Abbildung 6.99: Zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Die letzte Abbildung 6.100 zeigt den Kompressionsfehler. Wie gewohnt reduziert sich der Fehler mit linearer Ordnung bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$–Norm und mit der Ordnung 1.5 bezüglich der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm



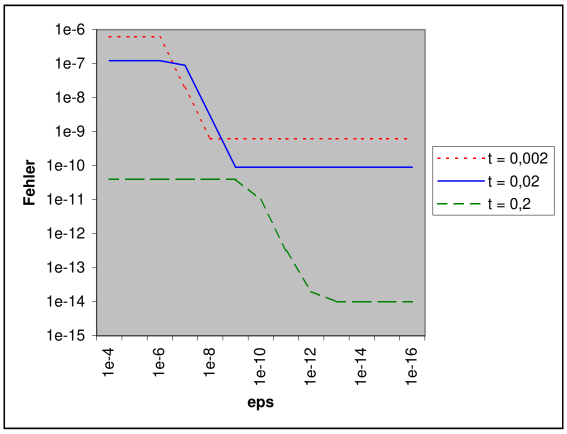


Abbildung 6.100: Kompressionsfehler $\left\| u(\delta t) - u_j^\epsilon(\delta t) \right\|$, $\nu = 1$, $eps = \epsilon$.

Im letzten Beispiel der linearen Wärmegleichung haben wir eine Startfunktion gewählt, deren Ableitungen singulär sind.

6.2.1.5 Startfunktion: $\left|\sqrt{2\pi x}\right| \left|\sqrt{2\pi y}\right|$ auf $[-1:1]^2$

Die Ableitungen der Startfunktion $u_0(x,y) = \left|\sqrt{2\pi x}\right| \left|\sqrt{2\pi y}\right|$ sind singulär. Abbildung 6.101 zeigt die zeitliche Entwicklung der Lösung. Man sieht deutlich, wie die

Spitze in der Mitte des Intervalls im Laufe der Zeit herausgeglättet wird und die Lösung immer glatter wird.

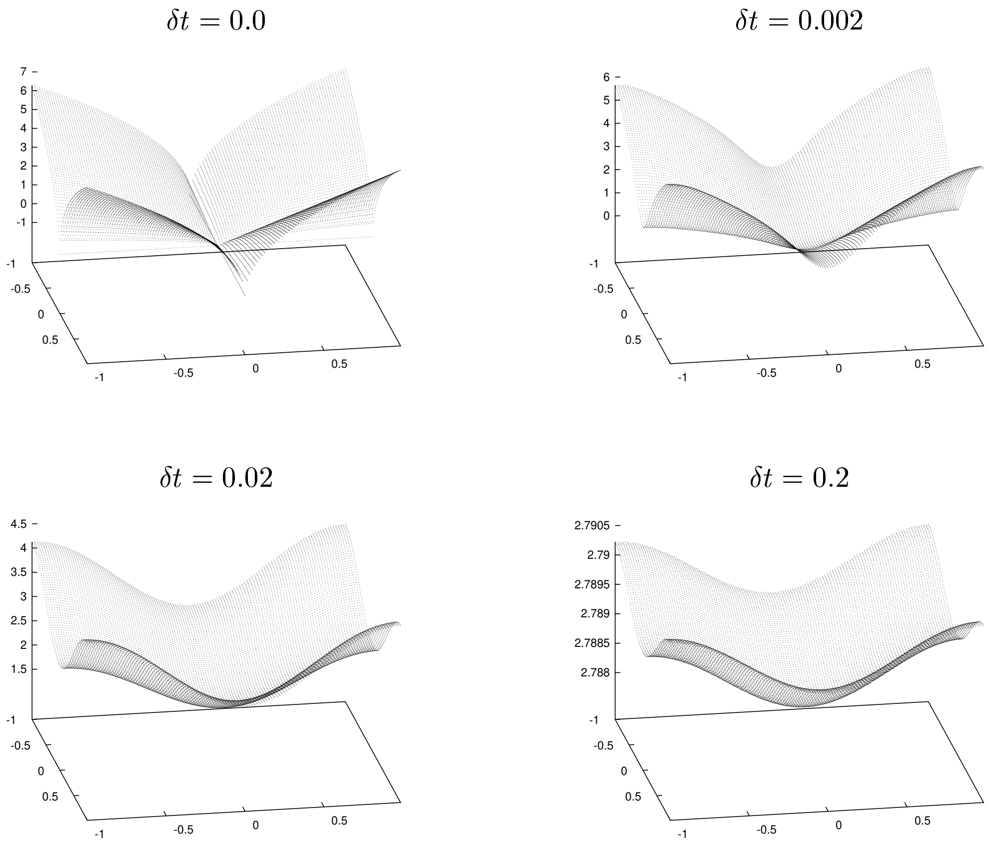


Abbildung 6.101: Zeitliche Entwicklung der Lösung auf Level $N = 7$, $\nu = 1$.

In der nächsten Abbildung 6.102 wird der Vollgitterfehler dargestellt. Wie wir bereits mehrfach gesehen haben, hat unser Verfahren eine quadratische Ordnung.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

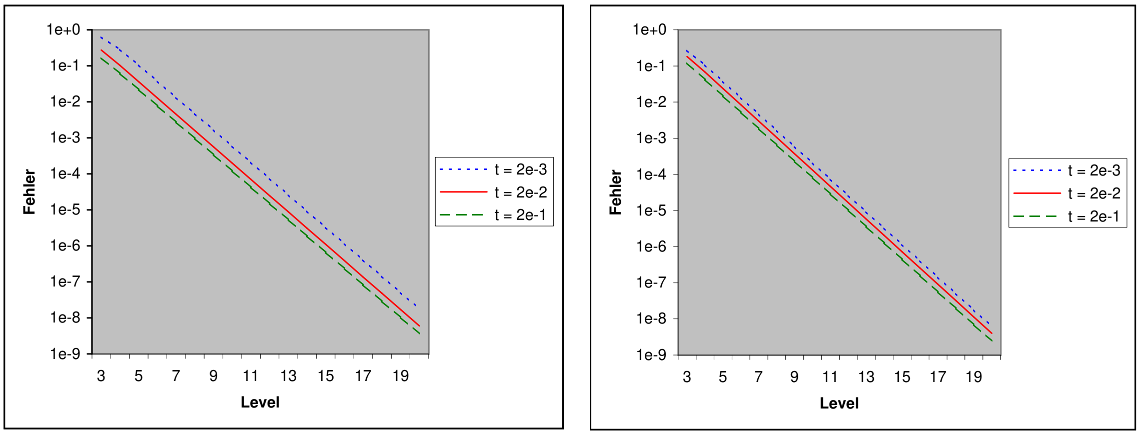


Abbildung 6.102: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf den vollen Gittern G_j, $\nu = 1$.

Die nächste Abbildung 6.103 zeigt die Waveletkoeffizienten der Lösung. In der Nähe der Startfunktion verliert die Lösung Regularität in der Mitte des Intervalls und entlang der Kanten. Die Waveletkoeffizienten sind zunächst scharf lokalisiert. Je weiter sich die Lösung von vom Ursprung entfernt, desto glatter wird sie und desto breiter ist auch der Träger der Waveletkoeffizienten.

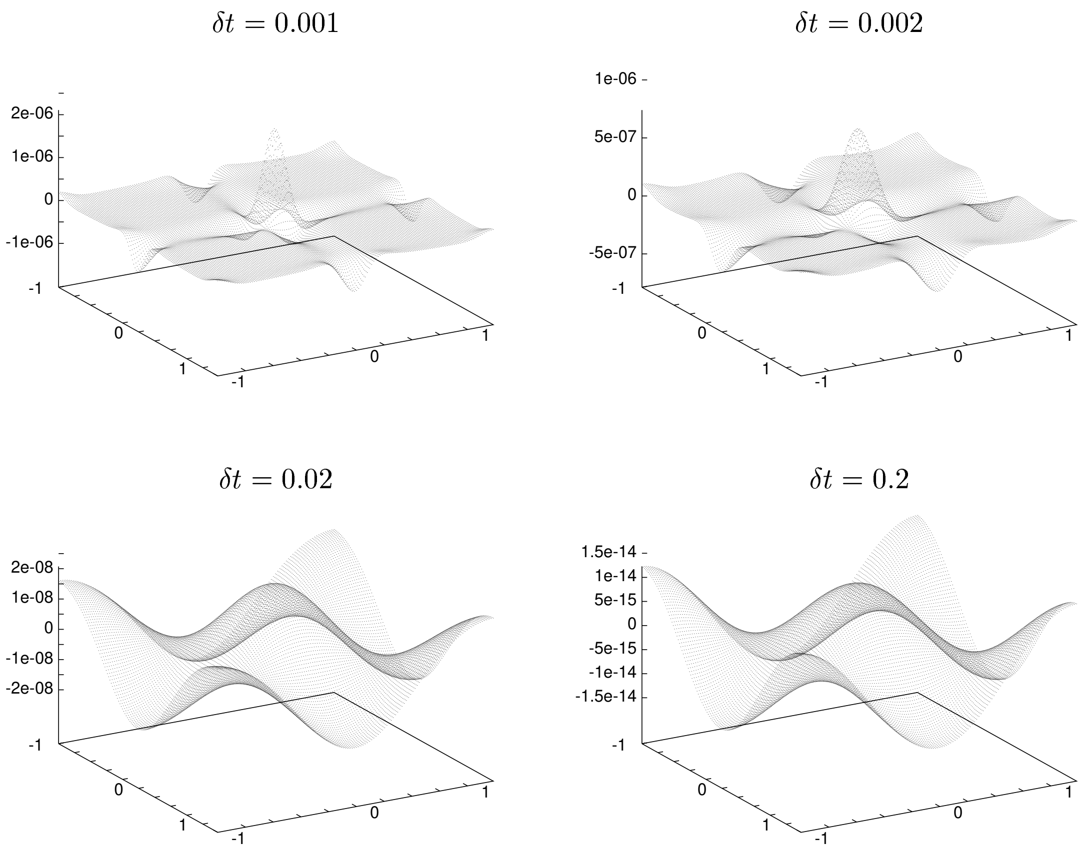


Abbildung 6.103: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizienten der Lösung, $N = 7$, $\nu = 1$.

Das Gitter der Waveletkoeffizienten wird in Abbildung 6.104 dargestellt. Die signifikanten Koeffizienten siedeln sich um die Maxima der Lösung an und werden dann von der Diffusion herausgeglätet.

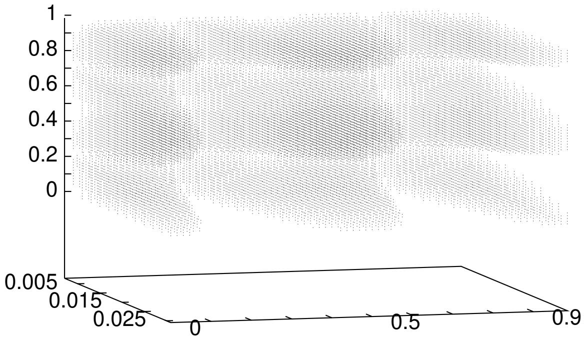


Abbildung 6.104: Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten, $\delta t = 0.002$, $\epsilon = 10^{-6}$.

Die zeitliche Entwicklung der signifikanten Koeffizienten, dargestellt in Abbildung

6.105, zeigt die Diffusion der linearen Wärmegleichung.

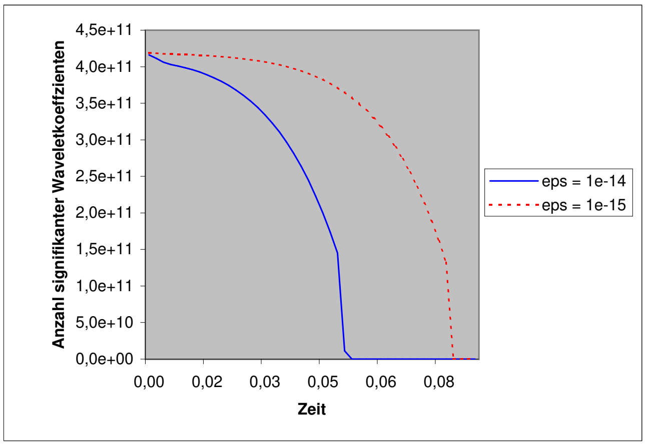


Abbildung 6.105: Zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Die letzte Abbildung 6.106 zeigt den Kompressionsfehler. Wie gewohnt reduziert sich der Fehler mit linearer Ordnung bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$–Norm und mit der Ordnung 1.5 bezüglich der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

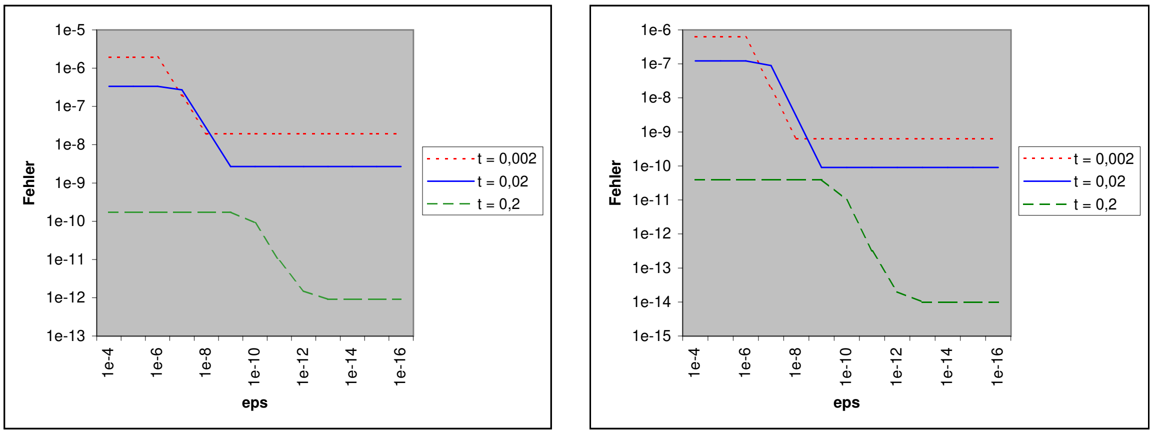


Abbildung 6.106: Fehler $\left\| u(\delta t) - u_j^\epsilon(\delta t) \right\|$ auf den adaptiven Gittern G_j^ϵ, $\nu = 1$.

Wir beenden nun diesen Abschnitt und gehen zur nichtlinearen Wärmegleichung über.

6.2.2 Die nichtlineare Wärmegleichung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der **nichtlinearen Wärmeleitungsgleichung**. Das dazugehörige Anfangsrandwertproblem lautet folgendermaßen:

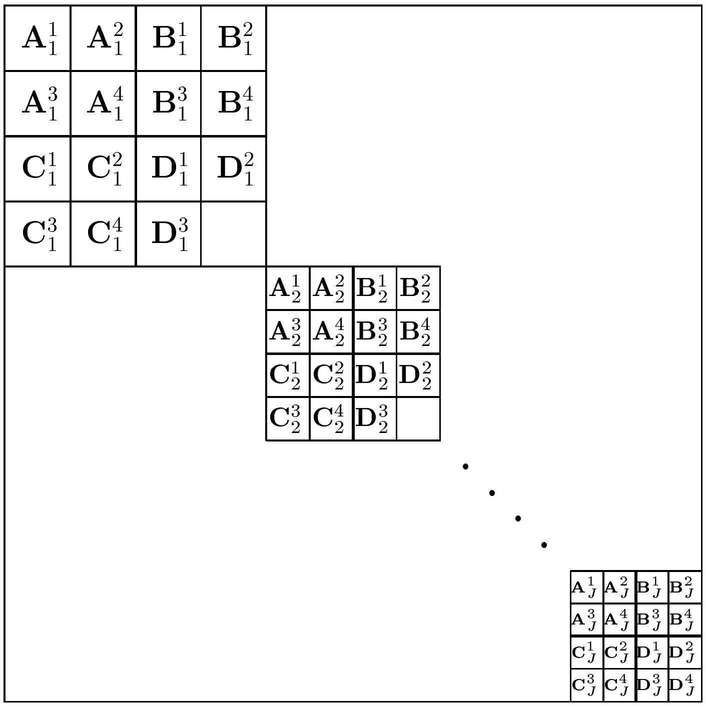
Die nichtlinearen Wärmeleitungsgleichung:

$$
\begin{aligned}
u_t &= \nu \triangle u + f(u), && x \in (0,1)^2,\, t > 0 \\
u(t,\,\cdot)|_{\partial[0,1]^2} &= 0, && t > 0 \\
u(0,\,x) &= u_0(x), && x \in (0,1)^2
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

Im Gegensatz zur linearen Wärmegleichung (6.18) hängt hier die Wärmequelle $f(u)$ noch zusätzlich von der Temperatur u ab. Die nichtlineare Funktion $f(u)$ sorgt dafür, daß sich die Lösung im Laufe der Zeit*aufbläßt*. Ausschlaggebend für die Geschwindigkeit mit der dies geschieht ist der Diffusionskoeffizient ν. Je kleiner ν ist, desto größer ist der Einfluß der Nichtlinearität. In den beiden folgenden Beispielen wählen wir $\nu = 0.001$, so daß die Nichtlinearität der Gleichung stärker in den Vordergrund tritt. Die Anfangsfunktion ist immer eine Sinusschwingung; wir variieren lediglich die nichtlineare Funktion. Wir beschäftigen uns zunächst mit der Kompression der NS–Form des nichtlinearen Operators $\frac{1}{2\nu}\left(id - e^{-t\cdot\nu\triangle}\right)\triangle^{-1}$.

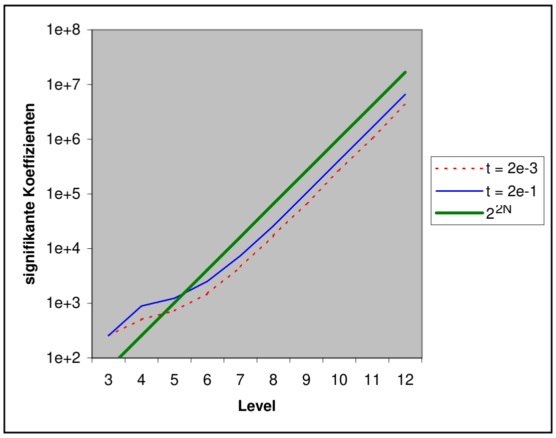
6.2.2.1 Kompression des Operators: $\frac{1}{2\nu}\left(id - e^{-t\cdot\nu\triangle}\right)\triangle^{-1}$

Der nichtlineare Operator $N = \frac{1}{2\nu}\left(id - e^{-t\cdot\nu\triangle}\right)\triangle^{-1}$ entsteht durch die Diskretisierung des Zeitintegrals. Er kontrolliert den nichtlinearen Anteil der Differentialgleichung. Die dazugehörige NS–Form wird gegeben durch



.

Im Gegensatz zum linearen Operator besitzt N keine Tensorproduktstruktur und muß komplett aufgestellt werden. In der Einskalendarstellung führt dies zu einer exponentiellen Dimensionsabhängigkeit. Die signifikanten Koeffizienten wachsen mit $\mathcal{O}\left(2^{2N}\right)$ — siehe dazu auch linkes Bild der Abbildung 6.107. Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, daß lediglich die Skalierungsblöcke $\mathbf{D}_j^4$ exponentiell wachsten — diese werden ausschließlich durch Skalierungsfilter erzeugt. Alle anderen Blöcke haben nur eine logarithmische Dimensionsabhängigkeit. Dies zeigt das rechte Bild der Abbildung 6.107. In einer Mehrskalendarstellung mit genügend vielen Skalen erreicht man also eine logarithmische Dimensionsabhängigkeit.



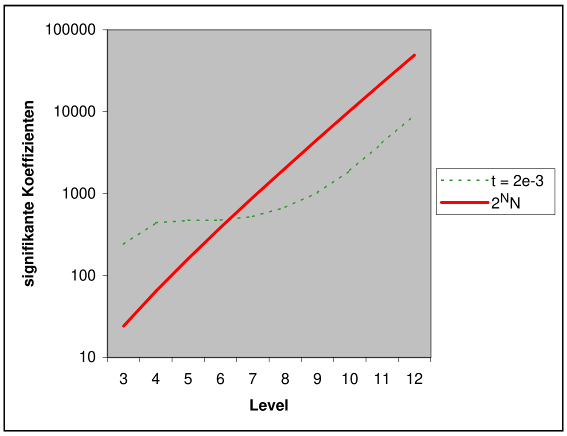


Abbildung 6.107: links Ordnung der signifikanten Matrixkoeffizienten der NS–Form, rechts Ordnung der signifikanten Koeffizienten ohne den Skalierungsblock $\mathbf{D}_1^4$.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich folgendes Fazit:

Die Ordnung der NS–Form der nichtlinearen Funktion ist abhängig von der Anzahl der verwendeten Skalen. In der Einskalendarstellung besitzt sie die dimensionasabhängige Ordnung $\mathcal{O}\left(2^{2N}\right)$, in der Mehrskalendarstellung mit $J = N - 1$ Vergröberungsleveln hängt die Ordnung nur logarithmisch von der Dimension ab $\mathcal{O}\left(2^N N\right)$.

Wir kommen nun zu den numerischen Experimenten.

6.2.2.2 Nichtlineare Störung: $f(u) = u^3$

In diesem Abschnitt haben wir die nichtlineare Funktion $f(u) = u^3$ gewählt. Die nichtlineare Wärmequelle $f(u)$ kontolliert das Wachstum der Lösungsfunktion. Für die spezielle Wahl $f(u) = u^3$ ist die Lösung unbeschränkt. Da wir nur eine schwache Diffusion($\nu = 0.001$) voraussetzen, wächst die Lösung relativ schnell an. Abbildung 6.108 zeigt die Lösung zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten.

$\delta t = 0.2$ $\delta t = 0.8$

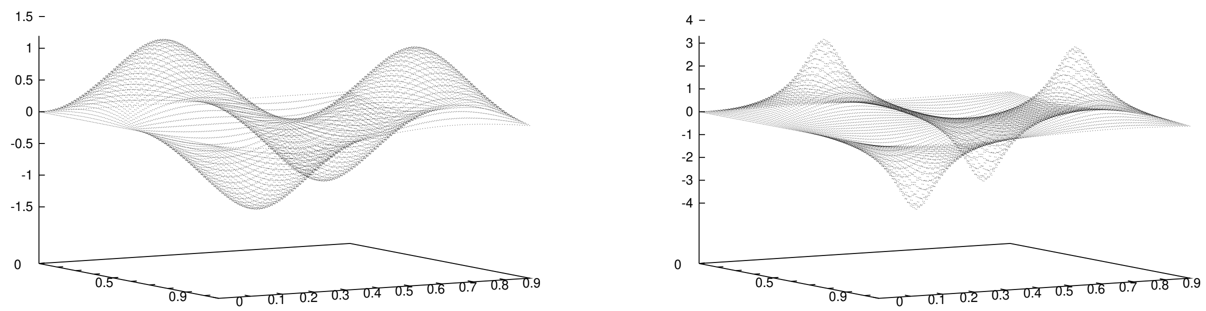


Abbildung 6.108: Zeitliche Entwicklung der Lösung auf Level $N = 7$, $\nu = 1$.

Der Diffusionsterm kontrolliert die Ordnung des Verfahrens. Man erhält ein Verfahren der Ordnung vier, da die Startfunktion gerade eine Eigenschwingung des Laplaceoperators ist. In der nächsten Abbildung 6.109 sieht man die Ordnung des Verfahrens bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$–Norm und der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm.

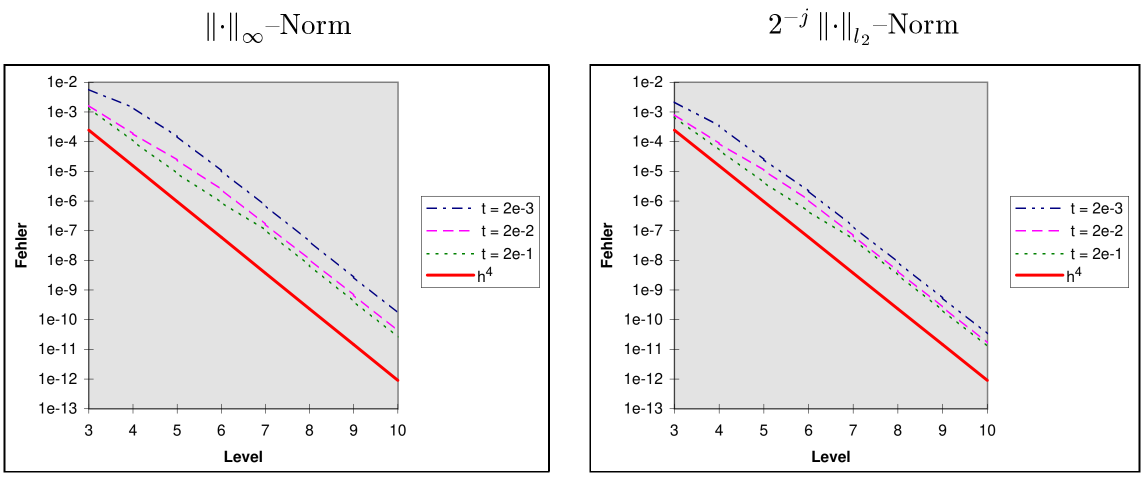


Abbildung 6.109: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf den vollen Gittern G_j, $\nu = 1$.

Abbildung 6.93 zeigt die Waveletkoeffizienten der Lösung zum Zeitpunkt $\delta t = 0.2$. Man sieht deutlich, wie sich die Koeffizienten an die Spitzen der Lösung anpassen. Je stärker die Lösung anwächst, desto stärker schwingen sich die Waveletkoeffizienten auf.

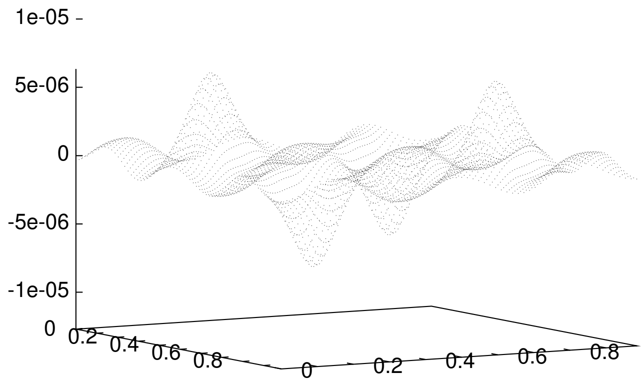


Abbildung 6.110: Waveletkoeffizienten der Lösung auf Level $N = 7$, $\delta t = 0.2$, $\nu = 1$.

In der nächsten Abbildung 6.111 sieht man die zeitliche Entwicklung des Gitters der signifikanten Waveletkoeffizienten. Zunächst konzentrieren sind die signifikanten Koeffizienten um die vier Maxima der Lösung herum, im Laufe der Zeit schaukeln sie sich jedoch auf bis fast alle Koeffizienten signifikanten sind.

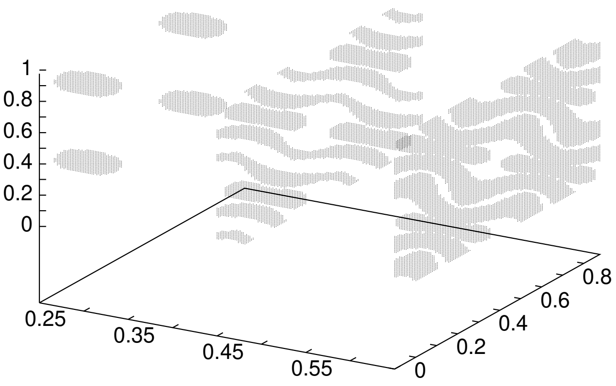


Abbildung 6.111: Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten $G_{12}^{\epsilon} = \{i \cdot 2^{-12} \mid \left|d_i^{12}\right| > \epsilon,\, i = 0, \cdots, 2^{12} - 1\}$, $\delta t = 0.002$, $\epsilon = 10^{-6}$.

In der nächsten Abbildung 6.112 ist die zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten auf Level $N = 12$ dargestellt. Die signifikanten Waveletkoeffizienten wachsen mit der Lösung an.

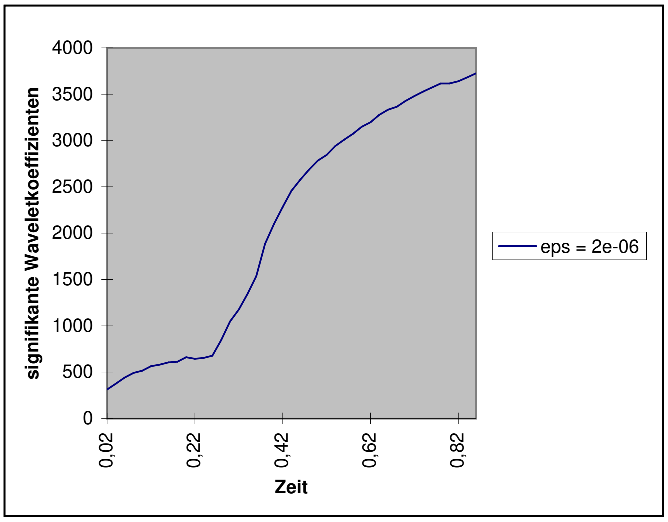


Abbildung 6.112: Zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Die letzte Abbildung 6.113 beschäftigt sich wieder mit dem Kompressionsfehler $\|u(\delta t) - u_{12}^{\epsilon}(\delta t)\|$. Wie im linearen Fall hängt der Fehler bzgl. der $\|\cdot\|_{\infty}$–Norm lineare von der Abschneidegenauigkeit ab, bezüglich der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm hat der Fehler die Ordnung 1.5.

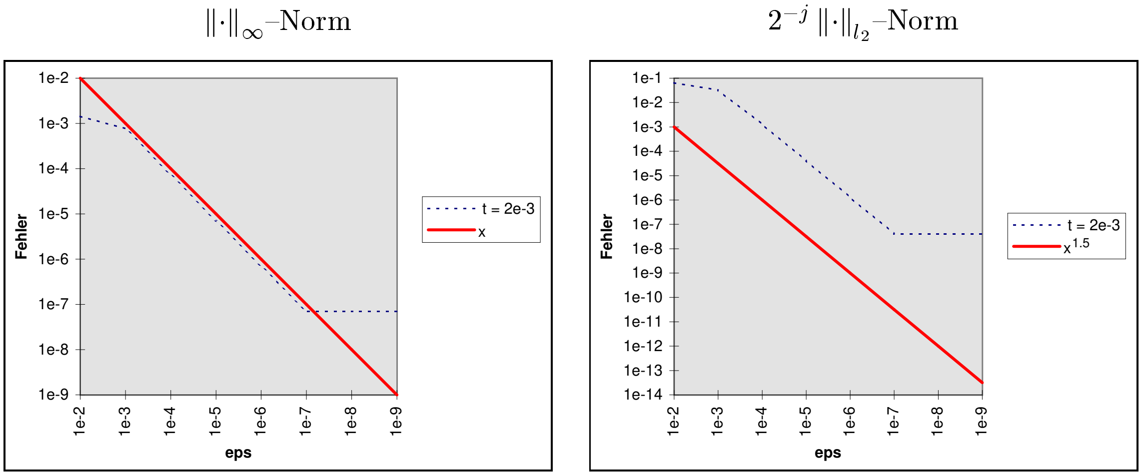


Abbildung 6.113: Fehler $\left\| u(\delta t) - u_j^\epsilon(\delta t) \right\|$ auf den adaptiven Gittern G_j^ϵ, $\nu = 1$.

6.2.2.3 Nichtlineare Störung: $f(u) = e^u$

In diesem Abschnitt wählen wir die nichtlineare Wärmequelle: $\boldsymbol{f(u) = e^u}$. Wir betrachten lediglich die Lösung und deren Waveletkoeffizienten. Abbidlung 6.114 zeigt die Lösung zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten.

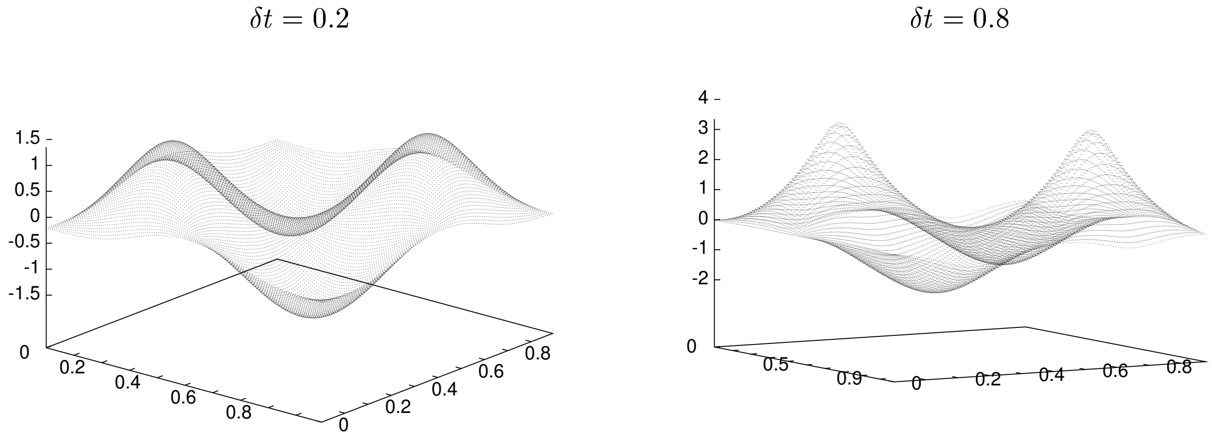


Abbildung 6.114: Zeitliche Entwicklung der Lösung auf Level $N = 7$, $\nu = 1$.

Die nächste Abbildung stellt die Waveletkoeffizienten zum Zeitpunkt $\delta t = 0.2$ dar.

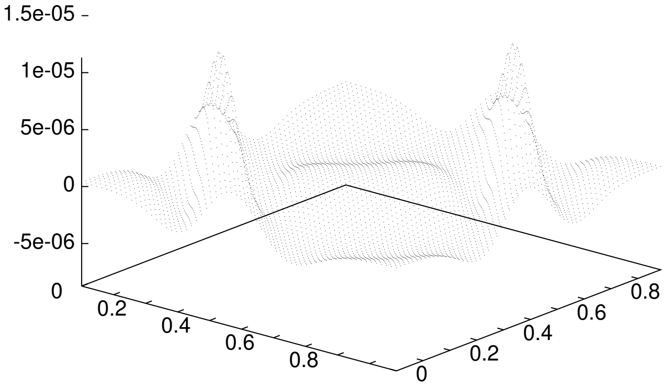


Abbildung 6.115: Waveletkoeffizienten der Lösung auf Level $N = 7$, $\delta t = 0.2$, $\nu = 1$.

Im folgenden Abschnitt fügen wir zusätzlich zur Diffusion noch Konvektion hinzu.

6.2.3 Konvektions–Diffusions–Gleichung

6.2.3.1 Startfunktion: $sin(2\pi x)sin(2\pi y)$ auf $[0,1]^2$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit **Transportgleichungen**. Das dazugehörige Anfangsrandwertproblem lautet folgendermaßen

$$\begin{aligned} u_t &= \nu \cdot \triangle u + c \cdot \nabla u, \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times (0,1)^2 \\ u(t,\cdot)|_{\partial[0,1]^2} &= u_r(t) \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

wobei die Lösung u und die Startfunktion u_0 vektorwertige Funktionen $u = (u^1, u^2)$ bzw. $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$ sind. Im folgenden haben wir uns auf die Analyse einer Komponentenfunktion beschränkt. Um die Konvektion stärker zu betonen wählen wir einen kleinen Diffusionskoeffizienten $\nu = 0.001$ und einen größeren Konvektionskoeffizienten $c = 1.$.
Abbildung 6.116 zeigt die zeitliche Entwicklung der ersten Komponente der Lösung u^1. Im wesentlichen handelt es sich dabei um die Lösung der linearen Wärmegelichung, die in jedem Zeitschritt mit der Geschwindigkeit c in x–Richtung transportiert wird. Da der Diffusionskoeffizienten klein ist mach sich die Diffusion noch nicht bemerkbar.

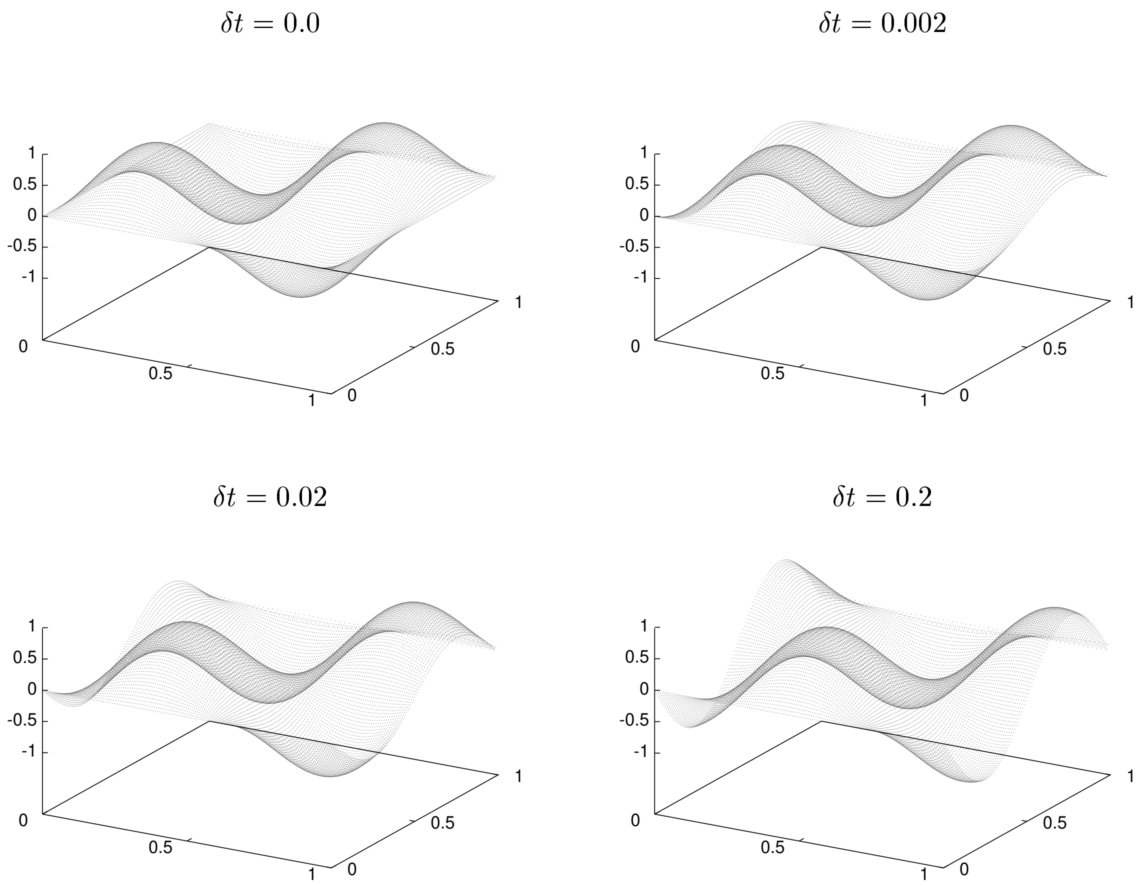


Abbildung 6.116: Zeitliche Entwicklung der Lösung auf Level $N = 7$, $\nu = 1$.

In der nächsten Abbildung 6.117 wird der Vollgitterfehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ dargestellt. Auch hier wird der Ordnung durch den Diffusionsterm dominiert. Da die Startfunktion eine Eigenschwingung des Laplaceoperatrors ist, erhalten wir einen Fehler der Ordnung 4.

$\|\cdot\|_{\infty}$–Norm $\qquad\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

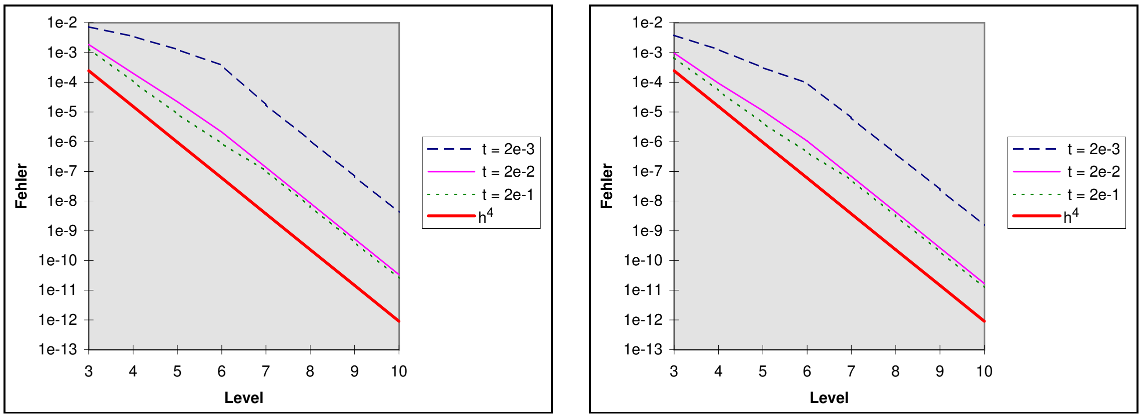


Abbildung 6.117: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf den vollen Gittern G_j, $\nu = 1$.

Die nächste Abbildung 6.118 zeigt die Waveletkoeffizienten der Lösung zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten. Man kann auch hier den Transport der Koeffizienten feststellen, die Diffusion ist aber für so kleine Zeitschritte zu schwach.

$\delta t = 0.005$ $\qquad\qquad$ $\delta t = 0.01$

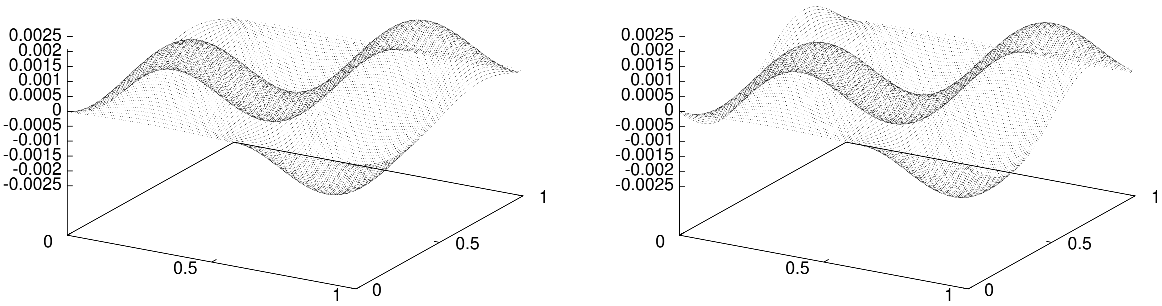


Abbildung 6.118: Zeitliche Entwicklung der Waveletkoeffizieten Lösung auf Level $N = 7$, $\nu = 1$.

Betrachtet man die zeitliche Entwicklung des Gitters der signifikanten Waveletkoeffizienten in Abbildung 6.119, so sieht man neben der Dämpfung auch den Transport der Lösung.

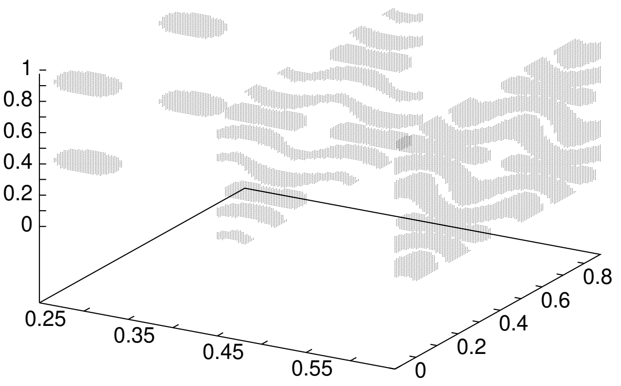


Abbildung 6.119: Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten $G_{12}^{\epsilon} = \{i \cdot 2^{-12} \mid \left|d_i^{12}\right| > \epsilon,\, i = 0, \cdots, 2^{12} - 1\}$, $\delta t = 0.002$, $\epsilon = 10^{-6}$.

Die zeitliche Entwicklung der signifikanter Waveletkoeffizienten, dargestellt in Abbildung 6.120, zeigt deutlich die dissipative Eigenschaft der Lösung.

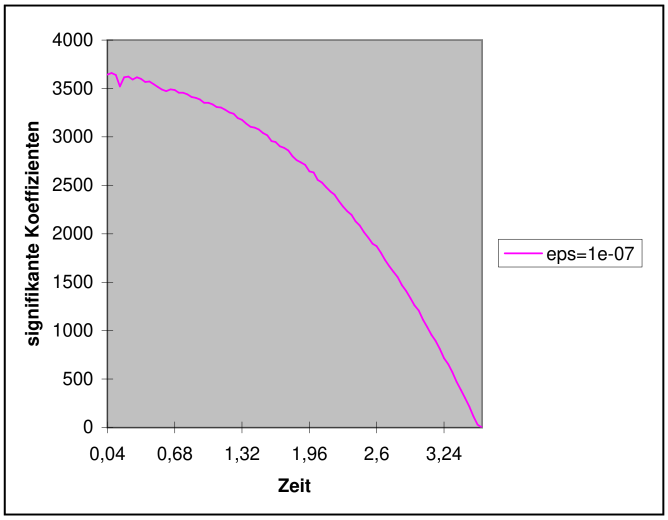


Abbildung 6.120: Zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 12$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 1$.

Die letzte Abbildung 6.121 beschäftigt sich wieder mit dem Kompressionsfehler $\|u(\delta t) - u_{12}^{\epsilon}(\delta t)\|$. Wie im linearen Fall hängt der Fehler bzgl. der $\|\cdot\|_{\infty}$–Norm lineare von der Abschneidegenauigkeit ab, bezüglich der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm hat der Fehler die Ordnung 1.5.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

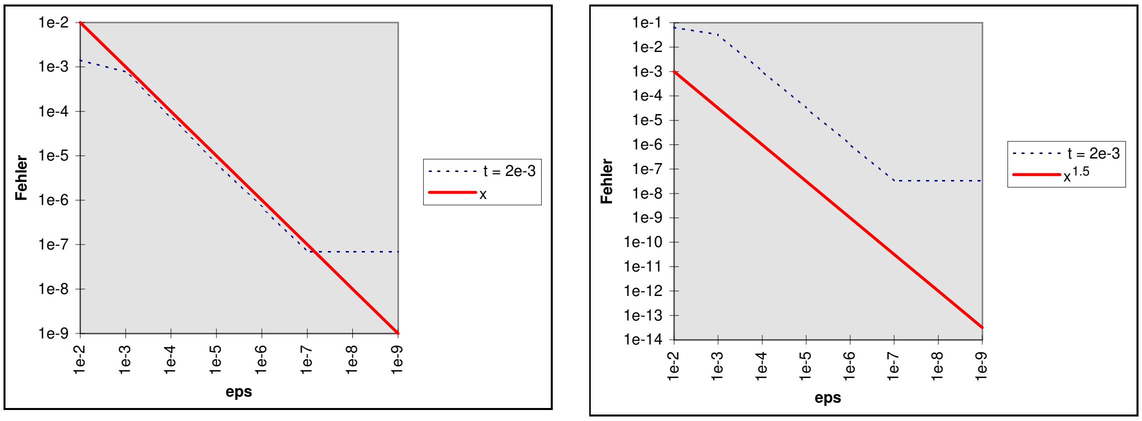


Abbildung 6.121: Fehler $\left\| u(\delta t) - u_j^\epsilon(\delta t) \right\|$ auf den adaptiven Gittern G_j^ϵ, $\nu = 1$.

Im letzten Abschnitt betrachten wir die Burgersgleichung und eine burgersartige Gleichung.

6.2.4 Burgersartige Gleichungen

Die nächsten zwei Modellbeispiele sind **burgersartige Gleichungen**, deren Anfangsrandwertproblem gegeben werden durch

$$
\begin{aligned}
u_t &= \nu \cdot \triangle u + (u^n \cdot \bigtriangledown)\, u, \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times [0,1]^2,\ n \geq 1 \\
u(t,\cdot)|_{\partial[0,1]^2} &= 0, \\
u(0,x) &= u_0(x),
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

wobei die Lösung u und die Startfunktion u_0 vektorwertige Funktionen $u = (u^1, u^2)$ bzw. $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$ sind. Im folgenden haben wir uns, wie im letzten Abschnitt, auf die Analyse einer Komponentenfunktion beschränkt.
Das Charakterische der Gleichungen (6.22) ist, daß die Lösung ausgehend von glatten Anfangsdaten nach einiger Zeit einen Schock entwickelt, d. h. unstetig wird. Wir wollen mit der einfachsten dieser Gleichungen beginnen.

6.2.4.1 Die Burgersgleichung $(n = 1)$

Das Anfangsrandwertproblem der **Burgersgleichung** wird gegeben durch

$$
\begin{aligned}
u_t &= \nu \cdot \triangle u + (u \cdot \bigtriangledown)\, u, \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times (0,1)^2 \\
u(t,\cdot)|_{\partial[0,1]^2} &= 0, \\
u(0,x) &= u_0(x),
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

wobei die Lösung u und die Startfunktion u_0 vektorwertige Funktionen $u = (u^1, u^2)$ bzw. $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$ sind. Die Halbgruppe wird gegeben durch $T(t) = e^{t\nu \cdot \triangle}$.
Als erste Komponente der Startfunktion haben wir wieder $u_0^1(x) = sin(2\pi x) sin(2\pi y)$ gewählt. Um die Nichtlinearität des Problems zu betonen entscheiden wir uns für einen kleinen Diffusionskoeffizienten $\nu = 0.001$. Abbildung 6.122 zeigt, die zeitliche Entwicklung der ersten Komponenete der Lösung $u^1(x)$. Im linken Bild sieht man die Anfangswelle, im rechten Bild hat sich bereits der Schock aufgebaut.

$\delta t = 0.0$ $\qquad\qquad$ $\delta t = 0.2$

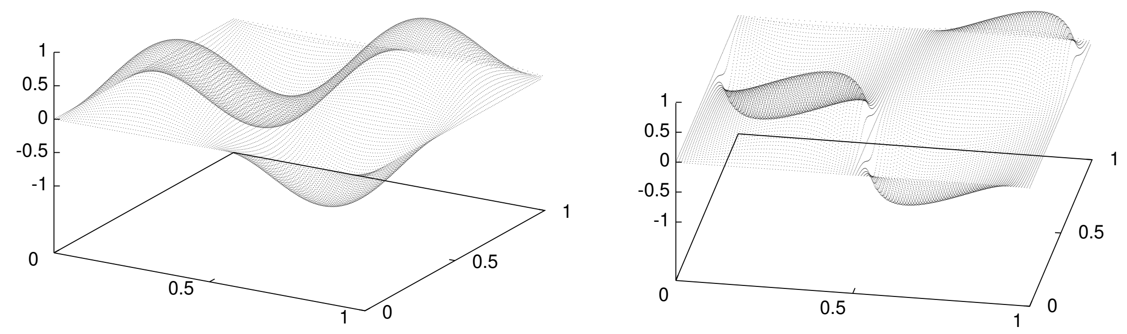


Abbildung 6.122: Zeitliche Entwicklung der Lösung auf Level $N = 7$, $\nu = 0.001$.

Da die Startfunktion in der ersten Komponente wieder eine Eigenschwingung des Laplaceoperators ist, erhält man einen Vollgitterfehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ der Ordnung vier. In der folgenden Abbildung 6.123 ist dies gut zu erkennen.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

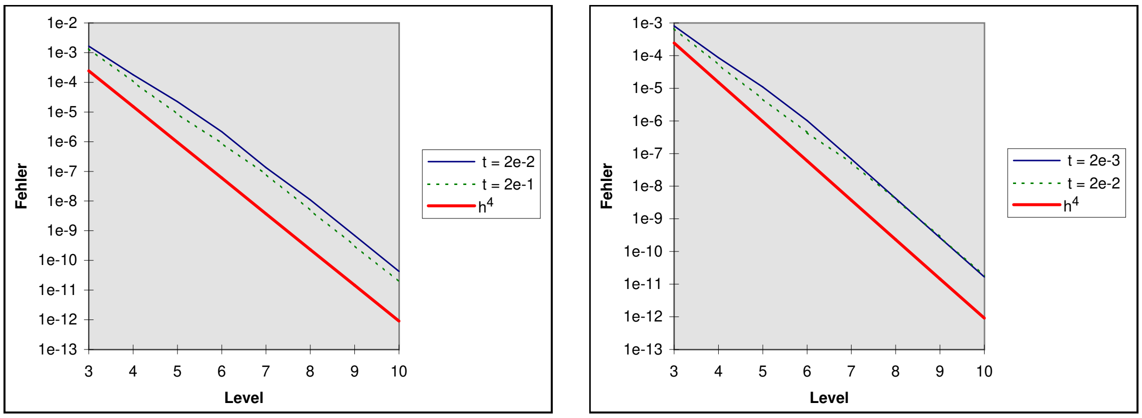


Abbildung 6.123: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf den vollen Gittern G_j, $\nu = 1$.

Die Waveletkoeffizienten adaptieren sich um den Sprung herum. Je näher man an den Sprung heran kommt, desto stärker werden die Koeffizienten lokalisiert und esto größer wird ihre Amplitude. Abbildung 6.124 zeigt, wie sich die Koeffizienten langsam zum Sprung hin entwickeln.

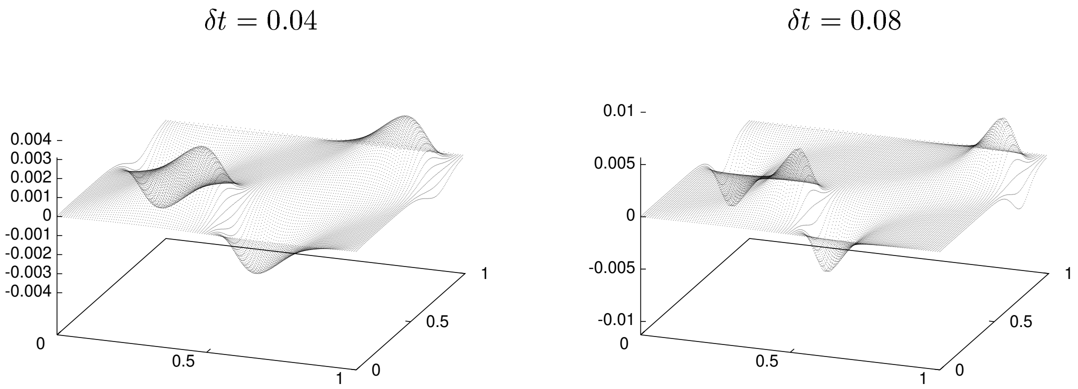


Abbildung 6.124: Waveletkoeffizienten der Lösung auf Level $N = 7$, $\delta t = 0.01$, $\nu = 0.001$.

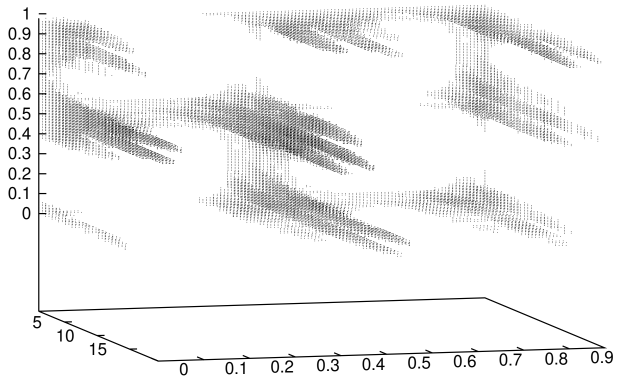


Abbildung 6.125: Gitter der signifikanten Waveletkoeffizienten $G_{12}^{\epsilon} = \{i \cdot 2^{-12} \mid \left|d_i^{12}\right| > \epsilon,\, i = 0, \cdots, 2^{12} - 1\}$, $\delta t = 0.002$, $\epsilon = 10^{-6}$.

Beobachtet man die zeitliche Entwiclung der signifikannten Waveletkoeffizienten, so stellt man zunächst eine zügige Reduktion der Koeffizienten fest, da diese sich immer stärker um den Sprung herum konzentrieren und außerhalb einer kleinen Umgebung fast verschwinden. Der Sprung wird von Zeitschritt zu Zeitschritt gedämpft, so daß eine kontinuierliche Verringerung der signifikanten Koeffizienten stattfindet. In dem Moment, in dem der Sprung beginnt sich zurück zu entwickeln, siedeln sich wieder Koeffizienten auf dem ganzen Intervall an und die Anzahl der signifikannten Koeffizienten beginnt zu steigen. Erst wenn dieser Restrukturierungsprozeß abgeschlossen ist können die letzten signifikannten Koeffizienten herausgeglättet werden. Diesen Prozeß kann man in den Abbildungen 6.58 und 6.46 beobachten.

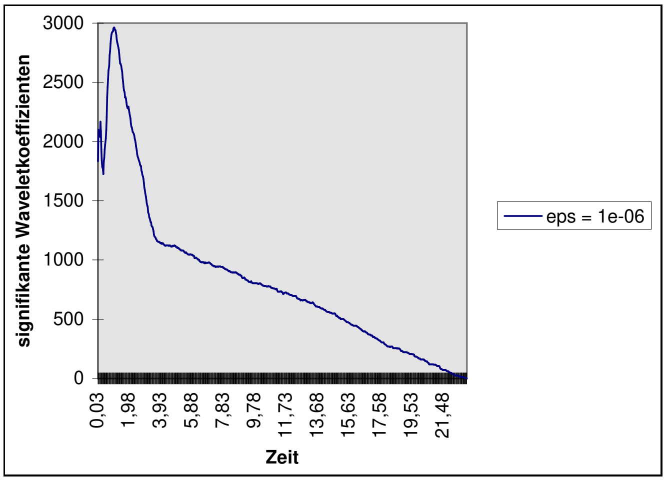


Abbildung 6.126: Zeitliche Entwicklung der Anzahl der signifikanten Waveletkoeffizienten, $N = 7$, $\delta t = 0.002$, $\nu = 0.001$.

Die letzte Abbildung 6.127 widmet sich wieder mit dem Kompressionsfehler $\|u(\delta t) - u_{12}^{\epsilon}(\delta t)\|$. Wie bei allen anderen Modellbeispielen hängt der Fehler bzgl. der $\|\cdot\|_{\infty}$–Norm lineare von der Abschneidegenauigkeit ϵ ab, bezüglich der $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm hat der Fehler die Ordnung 1.5.

$\|\cdot\|_{\infty}$–Norm $\qquad\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

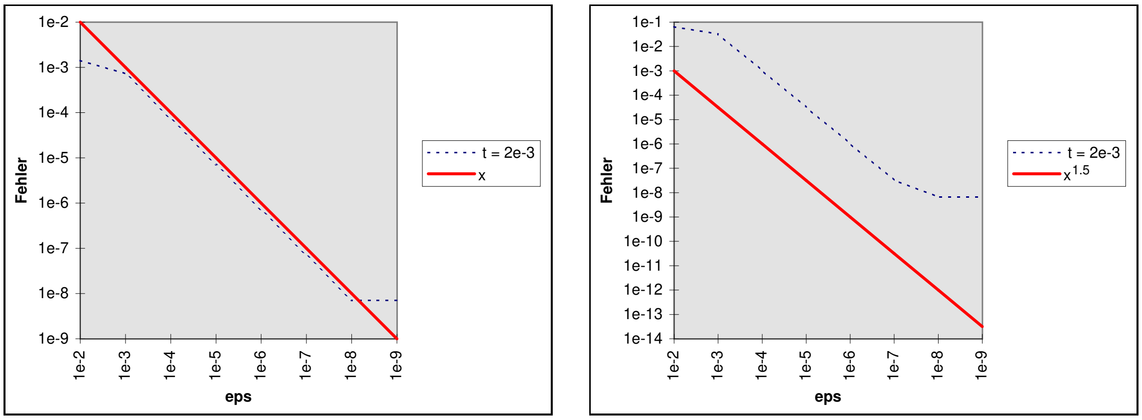


Abbildung 6.127: Fehler $\left\|u(\delta t) - u_j^{\epsilon}(\delta t)\right\|$ auf den adaptiven Gittern G_j^{ϵ}, $\nu = 1$.

6.2.4.2 Burgersartige Gleichung $(n = 3)$

Wir kommen nun zu unserem letzten Modellbeispiel. Unser **Anfangsrandwertproblem** sieht der Burgersgleichung (6.23) sehr ähnlich. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Lösungsfunktion im nichtlinearen Teil der Gleichung stärker wächst.

$$
\begin{aligned}
u_t &= \nu \cdot \triangle u + \left(u^3 \cdot \bigtriangledown\right) u, \qquad \text{auf } \mathbb{R}_0^+ \times (0,1)^2, \\
u(t,\cdot)|_{\partial[0,1]^2} &= 0, \\
u(0,\,x) &= u_0(x),
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

wobei die Lösung u und die Startfunktion u_0 vektorwertige Funktionen $u = (u^1, u^2)$ bzw. $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$ sind. Die Halbgruppe wird gegeben durch $T(t) = e^{t\nu\cdot\triangle}$.
Die erste Komponente der Lösung ähnelt der der Burgersgleichung. Im Eindimensionalen haben wir gesehen, daß sich der Schock etwas anders aufbaut und durch eine Gerade läuft, was dazu führt, daß die Waveletkoeffizienten in der Mitte des Intervalls zu oszilieren beginnen. Abbildung 6.128 zeigt die erste Komponente der Startfunktion und die Lösung zum Zeitpunkten $\delta t = 0.4$.

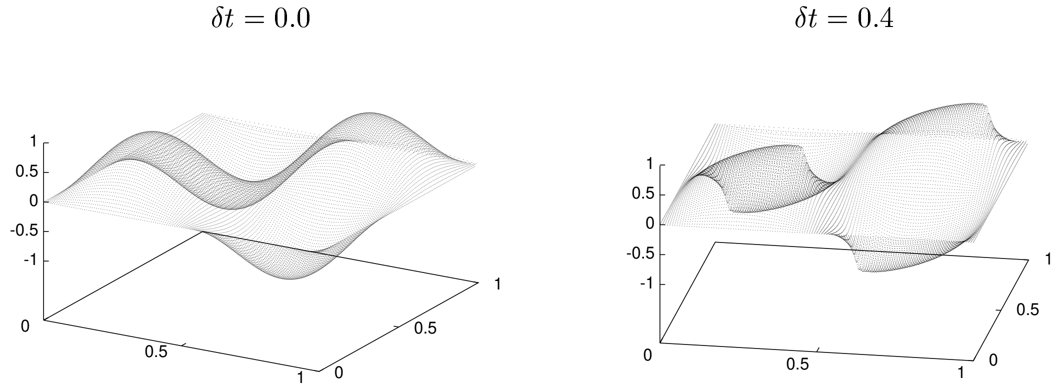


Abbildung 6.128: Zeitliche Entwicklung der Lösung auf Level $N = 7$, $\nu = 0.001$.

Der Vollgitterfehler, dargestellt in Abbildung 6.129, unterscheidet sich nicht von dem der Burgersgleichung.

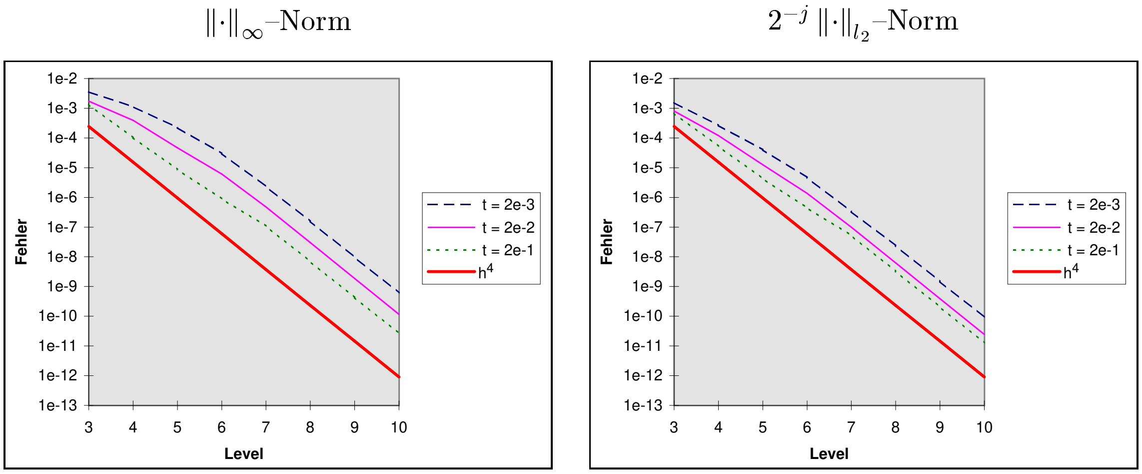


Abbildung 6.129: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf den vollen Gittern G_j, $\nu = 0.001$.

Die nächste Abbildung 6.130 zeigt die Waveletkoeffizienten von u_1. Die Koeffizienten sammeln sich um die Sprünge herum.

$\delta t = 0.04$ $\qquad\qquad$ $\delta t = 0.08$

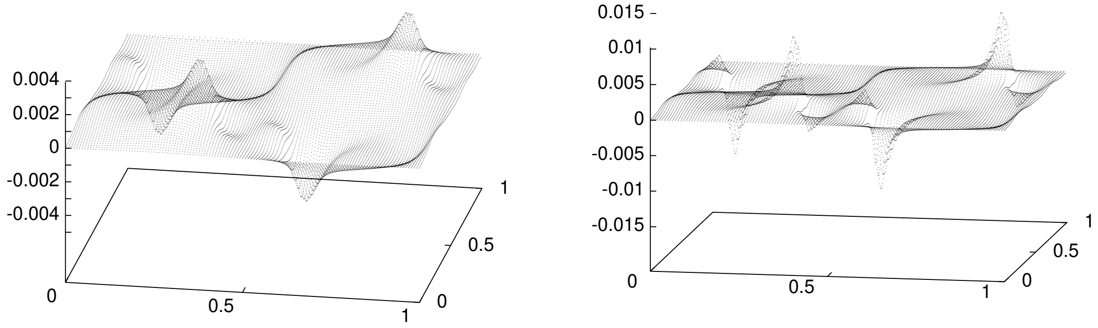


Abbildung 6.130: Waveletkoeffizienten der Lösung auf Level $N = 7$, $\delta t = 0.01$, $\nu = 0.001$.

Das Gitter und die Anzahl der signifikanten Kieffzienten haben wir nicht berechnet, da diese gegenüber der Burgersgleichung keine neue Aussage beinhalten. Die letzte Abbildung 6.131 zeigt das gewohnte Bild des Kompressionsfehlers.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad\qquad$ $2^{-j}\, \|\cdot\|_{l_2}$–Norm

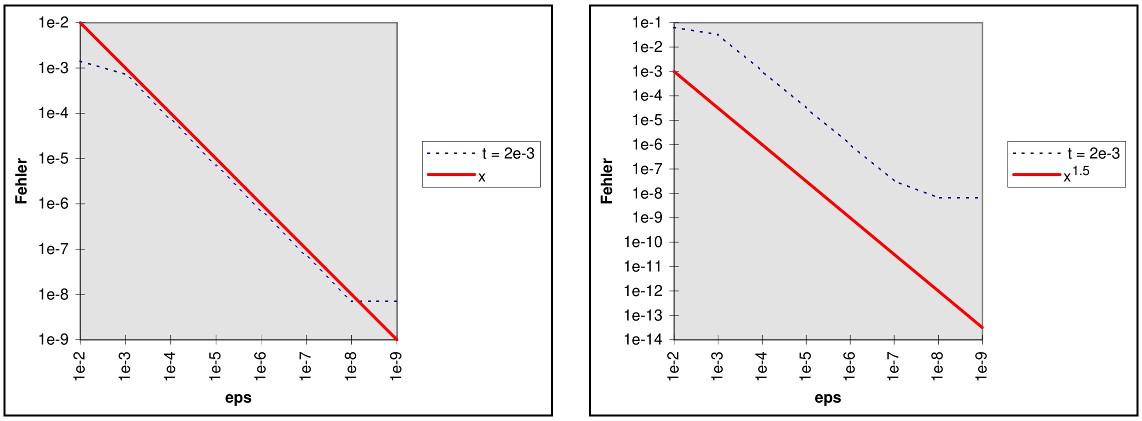


Abbildung 6.131: Fehler $\left\| u(\delta t) - u_j^\epsilon(\delta t) \right\|$ auf den adaptiven Gittern G_j^ϵ, $\nu = 1$.

6.3 Der dreidimensionale Fall

In drei Dimensionen behandeln wir nur die lineare Wärmegleichung. Da die zum Diffusionsterm $\nu\triangle$ gehörige Halbgruppe $e^{\nu t \triangle} = e^{\nu t \partial_{x_1 x_1}} \cdots e^{\nu t \partial_{x_d x_d}}$ Tensorproduktstruktur besitzt, ist es leicht, den eindimensionalen Code auf d Dimensionen zu verallgemeinern. Der nichtlineare Operator $N = \frac{1}{2\nu}\left(id - e^{-t\cdot\nu\triangle}\right)\triangle^{-1}$ besitzt keine Tensorproduktstruktur und muß komplett aufgestellt werden. Da die Anzahl der Blöcke dimensionsabhängig ist — $\sharp$ Blöcke $= 2^{2d}$ —, ist der nichtlineare Fall wesentlich komplizierter zu handhaben. Wir haben die NS–Form von N nur für $d = 1, 2$ aufgestellt. Um mit mehreren Dimensionen umgehen zu können, müßten die Datenstrukturen stark verändert werden. Da wir den eindimensionalen Operator in jede Raumdimension einzeln anwenden, erhalten wir ähnliche Resultate wie in ein oder in zwei Dimensionen. In diesem Kapitel wollen wir zeigen, daß die Ordnung des Verfahrens in mehreren Dimensionen die gleiche ist wie in einer. Aus diesem Grund zeigen wir auch nur den Vollgitterfehler bzgl. der unterschiedlichen Startfunktionen.

6.3.1 Die lineare Wärmeleitungsgleichung

Wie wir bereits mehrfach erwähnt haben ist die **lineare Wärmeleitungsgleichung** der Prototyp einer parabolischen Differentialgleichung. Das dazugehörige Anfangsrandertproblem lautet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} u_t &= \nu\triangle u, && x \in (0,1)^3,\ t > 0 \\ u(t,\,\cdot)|_{\partial[0,1]^3} &= 0, && t > 0 \\ u(0,\,x) &= u_0(x), && x \in (0,1)^3. \end{aligned} \tag{6.25}$$

6.3.1.1 Startfunktion: $sin(2\pi x_1)sin(2\pi x_2)sin(2\pi x_3)$ auf $[0:1]^3$

Wir arbeiten mit Daubechies 4 Wavelets, die zwei verschwindende Momente haben. Deshalb können wir ein Verfahren der Ordnung 2 erwarten. Da aber in diesem Fall die Startfunktion eine Eigenschwingung des Laplaceoperators ist, erhalten wir ein Verfahren der Ordnung vier. Abbildung 6.132 zeigt die Ordnung des Vollgitterfehlers bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$–Norm und der $2^{-3j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-3j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

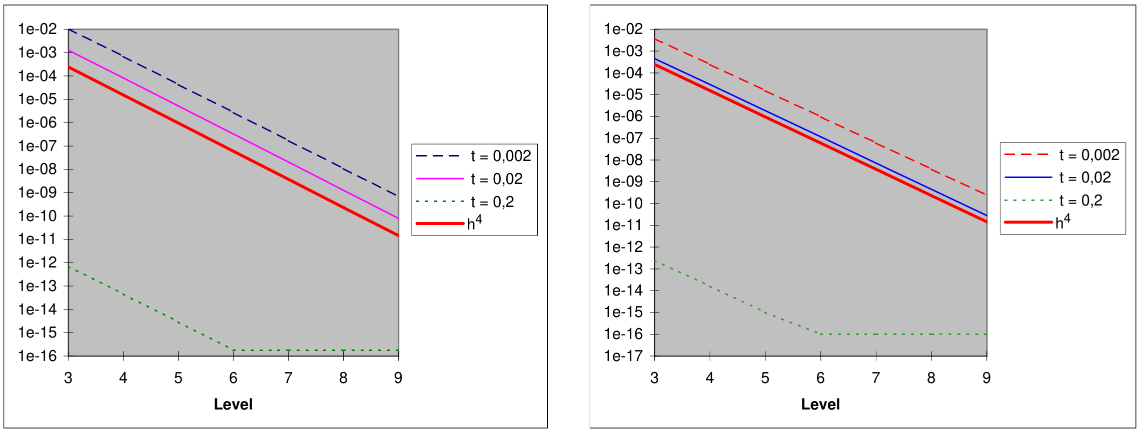


Abbildung 6.132: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf den vollen Gittern, $\nu = 1$.

6.3.1.2 Startfunktion: $e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{4*\alpha}}$ auf $[0:1]^3$

In diesem Abschnitt verwenden wir eine stark lokalisierte Startfunktion. Wir erhalten wiederum ein Verfahren der Ordnung 4, da die Startfunktion bis auf eine sehr kleine Störung eine Eigenfunktion der Halbgruppe ist. In der nächsten Abbildung 6.133 ist die Ordnung des Verfahrens bzgl. zwei verschiedener Normen dargestellt.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

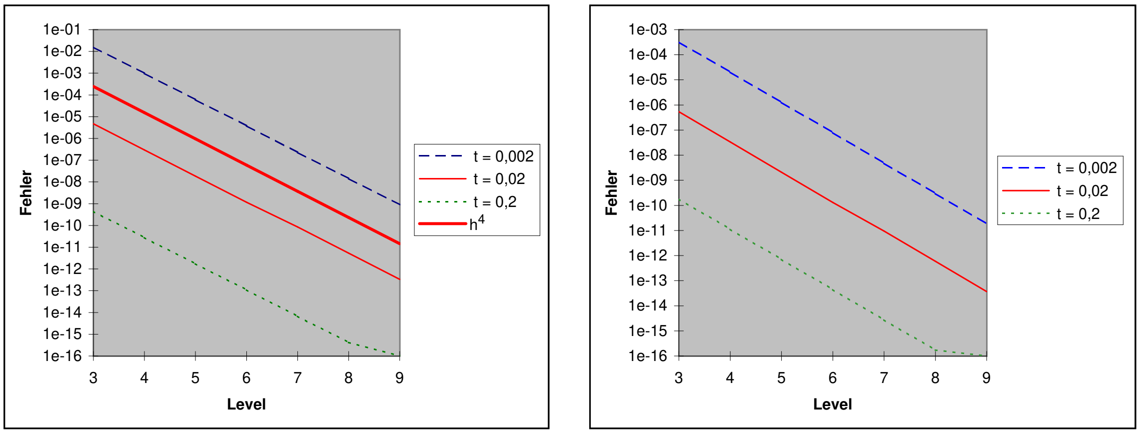


Abbildung 6.133: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf den vollen Gittern, $\nu = 1$.

6.3.1.3 Startfunktion: $N1(x_1 - \frac{1}{2})N1(x_2 - \frac{1}{2})N1(x_3 - \frac{1}{2})$ auf $[0:1]^3$

Wir verringern nun die Regularität der Startfunktion ein wenig. Die Funktion ist in der Mitte des Definitionsbereiches nicht mehr differenzierbar. Dadurch bekommen wir die richtige Ordnung des Verfahrens. Abbildung 6.134 zeigt das die Ordnung des Vollgitterfehlers zwei ist.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

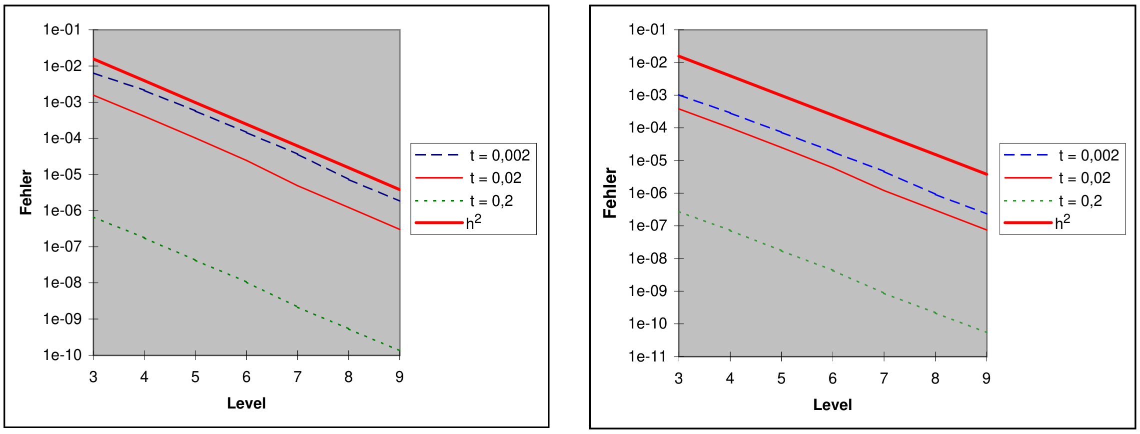


Abbildung 6.134: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf den vollen Gittern G_j, $\nu = 1$.

6.3.1.4 Startfunktion: $\chi_{(-0.5,\,0.5)^3}(x)$ auf $[0:1]^3$

Die Startfunktion in diesem Abschnitt ist nicht mehr stetig. Diese weitere Reduzierung der Regularität hat jedoch keine Auswirkungen auf die Ordnung des Verfahrens. Der Vollgitterfehler, dargestellt in Abbildung 6.135, hat wie im letzten Abschnitt auch die Ordnung 2.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

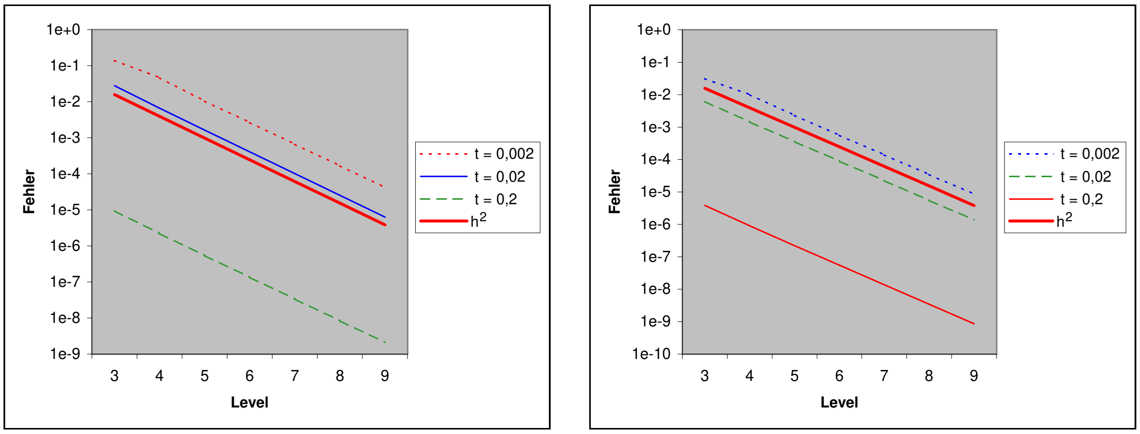


Abbildung 6.135: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf den vollen Gittern, $\nu = 1$.

6.3.1.5 Startfunktion: $\left|\sqrt{2\pi x_1}\right|\left|\sqrt{2\pi x_2}\right|\left|\sqrt{2\pi x_3}\right|$ auf $[-1:1]^3$

Für unserern letzten Versuch wählen wir wieder eine Startfunktion, deren partielle Ableitungen singulär sind. In Abbildung 6.136 sieht man, daß die Ordnung des Verfahrens etwas einbricht.

$\|\cdot\|_\infty$–Norm $\qquad$ $2^{-j}\,\|\cdot\|_{l_2}$–Norm

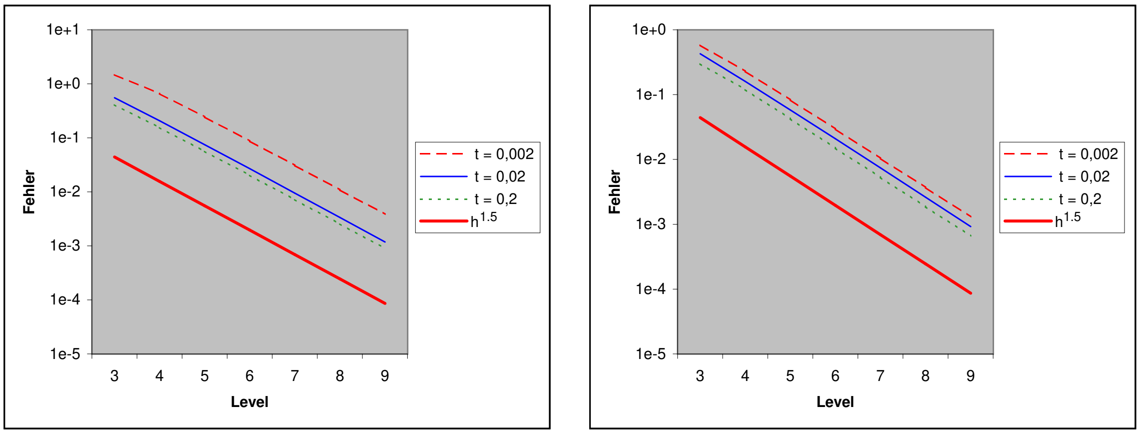


Abbildung 6.136: Fehler $\|u(\delta t) - u_j(\delta t)\|$ auf den vollen Gittern, $\nu = 1$.

Kapitel 7

Ausblick

Wir haben eine ganze Reihe von Problemen angesprochen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht oder nur unzulänglich behandelt worden sind. Deshalb wollen wir zum Schluß einen kurzen Ausblick geben auf mögliche Arbeit, die noch zu leisten ist. Vorrangig ist da die Programmierung des nichtlinearen **dreidimensionalen** Falls zu nennen. In drei Dimensionen besteht die periodische NS–Form aus 64 verschiedenen Blöcken. Die größte Schwierigkeit besteht in der Verwaltung der Blöcke und der effizienten Realisierung der Matrix–Vektormultiplikation. In einem weiteren Schritt könnten **Dirichlet– und Neumann Ränder** implementiert werden. Dadurch würde eine Randschicht in jeden Block eingeführt werden, welche die Matrix–Vektormultiplikation weiter kompliziert. An dieser Stelle muß darauf geachtet werden, nicht zu viel *Performance* zu verlieren.
Als nächstes könnte man **Adaptivität** in das Programm einführen. Bisher geben wir uns einen feinsten und einen gröbsten Level vor und bauen die Gitter mit Hilfe der Wavelet–Transformation vom feinsten zum gröbsten hin auf. In einem adaptiven Prozeß wird diese Reihenfolge umgekehrt, indem man von einem groben Gitter ausgeht und nur noch die signifikanten Koeffizienten abspeichert. Für die NS–Form würde dies bedeuten, daß in jedem Zeitschritt, je nachdem wie stark sich die Lösung verändert hat, weitere Blöcke hinzugefügt werden müssen. Das erfordert eine weitere Flexebilisierung der Datenstrukturen.
Mittelfristig kann man an der Lösung der **Navier–Stokes Gleichung** arbeiten. Dazu muß die Lösung der Burgers–Gleichung in jedem Zeitschritt auf einen divergenzfreien Raum projiziert werden. Alternativ könnte man auch divergenzfreie Wavelets verwenden. Dies hätte den Vorteil, daß nicht in jedem Zeitschritt eine zusätzliche Projektion berechnet werden müßte. Allerdings sind divergenzfreie Wavelets nur auf rechteckigen Gebieten definiert. Es wäre vorstellbar, die NS–Form auch auf **Dreiecksgebieten** zu verwenden, indem man entsprechend angepaßte Wavelets verwendet.
Interessant ist auch die **Vorkonditionierung** der NS–Form. Wir haben gesehen, daß die Kondition der Steiffigkeitsmatrizen mit zunehmender Anzahl an Freiheitsgraden wächst, so daß die Picard–Iteration immer länger dauert. Es gibt bereits Vorkonditionierer für Block–Toeplitz Matrizen [Ben97], diese müßten jedoch auf

unser Verfahren angepaßt werden.
Mit dem Hinweis auf diese Problemkreise endet diese Arbeit.

Anhang A

Beweise zum Kapitel Halbruppen

Bis auf die Abschnitte über das inhomogene und das semilineare Cauchy–Problem stammen alle Beweise dieses Kapitels aus [PA].

Stark–stetige Halbgruppe

A.1. Satz. *A sei der infinitesimale Erzeugende der $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $T(t)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Für $x \in X$ ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x.$$

(b) Für $x \in X$ ist $\int_0^t T(s)x\, ds \in \mathcal{D}(A)$ und

$$A\left(\int_0^t T(s)x\, ds\right) = T(t)x - x.$$

(c) Differenzierbarkeit
Für $x \in \mathcal{D}(A)$ ist $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ und

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t) = T(t)Ax.$$

(d) Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung
Für $x \in \mathcal{D}(A)$ ist

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\, d\tau.$$

Beweis:

(a) Die Behauptung folgt sofort aus der Stetigkeit von $t \to T(t)x$.

(b) Für $x \in X$ und $h > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{T(h) - id}{h} \int_0^t T(s)x\, ds &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)\ ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x\, ds \\ &\underset{h \downarrow 0}{\longrightarrow} T(t)x - x.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus der Definition von $A = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)-id}{h}$.

(c) Für $x \in \mathcal{D}(A)$ und $h > 0$ gilt

$$\frac{T(h) - id}{h} T(t)x = T(t) \left(\frac{T(h) - id}{h} \right) x \underset{h \downarrow 0}{\longrightarrow} T(t)Ax.$$

Der linke Term strebt gegen $AT(t)x$. Daraus folgt nun $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ und $AT(t)x = T(t)Ax$. Es bleibt die Differenzierbarkeit zu zeigen:

$$\begin{aligned}\lim_{h \downarrow 0} \left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right] &= \lim_{h \downarrow 0} T(t-h) \left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right] + \\ &\quad \lim_{h \downarrow 0} (T(t-h)Ax - T(t)Ax) \\ &= 0,\end{aligned}$$

Der erste Ausdruck der rechte Seite verschwindet, da $x \in \mathcal{D}(A)$ und $\|T(t-h)\|$ für $0 \leq h \leq t$ beschränkt ist, der zweite Term konvergiert gegen Null, wegen der starken Stetigkeit der Halbgruppe.

(d) Die Behauptung folgt sofort aus (c).

□

Der Satz von Hille–Yosida

A.2. Satz (Hille–Yosida). *Ein linearer Operator $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ist genau dann der infinitesimale Erzeuger einer kontrahierenden $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $\{K(t)\}_{t \geq 0}$, wenn gilt*

(a) A ist abgeschlossen und $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$;

(b) die Resolventenmenge $\rho(A) \supset \mathbb{R}^+$ von A beinhaltet die positiven reelen Zahlen und für jedes $\lambda > 0$ ist

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Beweis Notwendigkeit. Wenn A der infinitesimale Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe ist, so folgt Behauptung (a) aus Korollar (1.1).
Für $x \in X$ und $\lambda > 0$ definieren wir

$$\mathrm{R}(\lambda)x \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-\lambda t} K(t)x\, dt.$$

Wegen der Stetigkeit und der gleichmäßigen Beschränktheit von $t \to K(t)x$ konvergiert das Integral und definiert einen beschränkten Operator $\mathrm{R}(\lambda)$, denn

$$\|\mathrm{R}(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|K(t)x\| \, dt \leq \frac{1}{\lambda} \|x\| \,.$$

Um die Behauptung (b) zu beweisen, müssen wir zeigen, daß $\mathrm{R}(\lambda)$ gleich der Resolvente von A ist, d. h. $\mathrm{R}(\lambda) \stackrel{!}{=} \mathrm{R}(\lambda;\, A)$.
Für $h > 0$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - id}{h} \mathrm{R}(\lambda)x \;&=\; \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(K(t+h)x - K(t)x\right) \, dt \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} K(t)x\, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} K(t)x\, dt.
\end{aligned}$$

Für $h \downarrow 0$ konvergieren beide Seiten und es ergibt sich $A\,\mathrm{R}(\lambda) = \lambda\,\mathrm{R}(\lambda) - id$. Für $x \in X$ und $\lambda > 0$ ist also $\mathrm{R}(\lambda)x \in \mathcal{D}\,(A)$ und

$$(\lambda id - A)\,\mathrm{R}(\lambda) = id.$$

Für $x \in \mathcal{D}\,(A)$ kommutieren A und $\mathrm{R}(\lambda)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}(\lambda)Ax \;&=\; \int_0^\infty e^{-\lambda t} K(t)Ax\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} AK(t)x\, dt \\
&= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} K(t)x\, dt\right) = A\,\mathrm{R}(\lambda)x.
\end{aligned}$$

Insgesmmt erhält man also

$$\mathrm{R}(\lambda)\,(\lambda id - A)\,x = x, \qquad \text{für } x \in \mathcal{D}\,(A).$$

Also ist $\mathrm{R}(\lambda)$ die Inverse von $(\lambda id - A)$ für $\lambda > 0$. Damit ist gezeigt, daß $\mathrm{R}(\lambda)$ die Resolvente von A ist und es folgt Teil zwei der Behauptung. $\square$

Um die Rückrichtung zu zeigen, benutzen wir ein *Dichtheitsargument*: Sei A ein Operator, der die Voraussetzungen (a) und (b) erfüllt. Dann definieren wir eine Folge von Operatoren $\{A_\lambda\}_\lambda$, die A approximiert und die Behauptung erfüllt. Daraus schließen wir dann, daß auch A die Behauptung erfüllt. Also

A.1. Definition (Yosida–Approximation). Sei A ein linearer Operator. Für $\lambda \geq 0$ wird die *Yosida–Approximation* gegeben durch

$$\begin{aligned} A_\lambda &\overset{\text{def}}{=} \lambda A R(\lambda; A) \\ &= \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Als erstes zeigen wir die Approximationseigenschaft.

A.1. Lemma (Approximationseigenschaft). *A erfülle Teil (a) und (b) des Satzes von Hille–Yosida. Für die Yosida–Approximation* $\{A_{\lambda \geq 0}\}$ *gilt*

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax, \qquad x \in \mathcal{D}(A).$$

Bevor wie Lemma (A.1) beweisen, benötigen wir noch einen weiteren Hilfssatz.

A.2. Lemma. *A erfülle Teil 1 und 2 des Satzes von Hille–Yosida. Für die Yosida–Approximation* $\{A_{\lambda \geq 0}\}$ *gilt*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \, \mathrm{R}(\lambda;\, A)x = x, \qquad \textit{für } x \in X.$$

Beweis. Für $x \in \mathcal{D}(A)$ ergibt sich aus dem Beweis der Notwendigkeit, daß $A\, \mathrm{R}(\lambda;\, A) = \lambda\, \mathrm{R}(\lambda,\, A) - id$, also können wir folgendermaßen Abschätzen

$$\begin{aligned} \|\lambda\, \mathrm{R}(\lambda;\, A)x - x\| &= \|A\, \mathrm{R}(\lambda;\, A)x\| \\ &= \|\mathrm{R}(\lambda;\, A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\, \|Ax\| \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Da $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ und $\|\lambda\, \mathrm{R}(\lambda;\, A)\| \leq 1$ ist, gilt die Behauptung für alle $x \in X$, denn $\lambda\, \mathrm{R}(\lambda;\, A)x \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} x$. □

Beweis Lemma (A.1). Die Behauptung folgt sofort aus Lemma (A.2) und der Definition der Yosida–Approximation. Für $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda\, \mathrm{R}(\lambda;\, A)Ax = Ax.$$

□

Nun müssen wir nur noch zeigen, daß A_λ eine Kontraktionshalbgruppe $K_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$ erzeugt.

A.3. Lemma. *A erfülle die Bedingungen (a) und (b) des Satzes von Hille–Yosida und A_λ sei die Yosida–Approximation von A. Dann ist A_λ der infinitesimale Erzeuger einer gleichmäßig stetigen Kontraktionshalbgruppe $K_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$. Außerdem gilt für $x \in X$ und $\lambda,\, \mu > 0$ folgende Abschätzung:*

$$\left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\|.$$

Beweis. Die Beschränktheit von A_λ folgt aus ihrer Definition. Also ist A_λ der infinitesimale Erzeuger einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe $K_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$. Mit der Bedingungen (b) des Satzes von Hille–Yosida und der Definition von A_λ erhalten wir auch die Kontraktionseigenschaft:

$$\left\| e^{tA_\lambda} \right\| = e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|\mathrm{R}(\lambda;\, A)\|} \leq 1.$$

Nach Definition kommutieren A_λ und A_μ, also kommutieren auch $K_\lambda(t)$ und $K_\mu(t)$. Daraus folt der Rest der Behauptung.

$$\begin{aligned}
\left\| e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}x \right\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x \right) \, ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 t \left\| e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} \left(A_\lambda x - A_\mu x \right) \right\| \, ds \\
&\leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\|.
\end{aligned}$$

□

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns endlich dem Beweis der Rückrichtung des Satzes von Hille–Yosida zuwenden.

Rückrichtung des Satzes von Hille–Yosida. Wir müssen zeigen, daß $K_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$ für $\lambda \to \infty$ gegen die kontrahierende $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe $K_\lambda(t) = e^{tA}$ konvergiert. Für $x \in \mathcal{D}(A)$ ist A_λ eine Cauchy–Folge, denn

$$\left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\| \leq t \left\| A_\lambda x - Ax \right\| + t \left\| Ax - A_\mu x \right\|;$$

Nach Lemma (A.1) verschwindet die rechte Seite für $\lambda,\, \mu \to 0$. Da $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ und $\|K_\lambda(t)\| \leq 1$ gleichmäßig für alle $t > 0$ folgt, daß

$$\lim_{\lambda \to \infty} K_\lambda(t)x = K(t)x, \qquad \text{für } x \in X.$$

ebenfalls gleichmäßig für alle $t > 0$.
Natürlich besitzt $K(t)$ die Halbgruppeneigenschaft und es ist $\|K(t)\| \leq 1$. Außerdem ist $t \to K(t)x$ für $t > 0$ stetig, da $K(t)$ gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen $t \to K_\lambda(t)x$ ist. Also ist $K(t)$ eine kontrahierende $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $K(t)$ von A erzeugt wird. Sei also $x \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt mit Satz(A.1), daß

$$K(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty} (K_\lambda(t)x - x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t K_\lambda(s)A_\lambda x\, ds = \int_0^t K(s)Ax\, ds.$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von $K_\lambda(T)A_\lambda x$ gegen $K(t)Ax$ auf beschränkten Intervallen. Sei B nun der infinitesimale Erzeuger von $K(t)$. Dividieren wir beide Seiten durch $t > 0$ und lassen $t \downarrow 0$, so folgt daß $B = A$ und $x \in \mathcal{D}(B)$. Da aber auch $x \in \mathcal{D}(A)$ liegt, folgt $B \supset A$. Nach Voraussetzung (b) ist $1 \in \rho(A)$. Da aber B der infinitesimale Erzeugende von $K(t)$ ist, folgt aus (b) auch $1 \in \rho(B)$. Dann gilt aber $(id - B)\,\mathcal{D}(A) = (id - A)\,\mathcal{D}(A) = X$. Daraus folgt nun, daß $\mathcal{D}(B) = (id - B)^{-1} X = \mathcal{D}(A)$ und damit auch die Eindeutigkeit $A = B$.

$\square$

Analytische Halbgruppen

A.3. Satz. *Seien $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{CL}(X)$ eine gleichmäßig beschränkte $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe und A dessen infinitesimaler Erzeuger, außerdem sei $0 \in \rho(A)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ kann fortgesetzt werden zu einer analytischen Halbgruppe in einen Winkel um die positive relle Achse $\triangle_\delta = \left\{\; z \in \mathbb{C} : |arg\, z| < \delta \;\right\}$ und $\|T(z)\|$ ist gleichmäßig beschränkt in jedem abgeschlossenen Teilgebiet $\overline{\triangle}_{\delta'}$, $\delta' < \delta$ von $\triangle_\delta$.

(b) Es gibt eine Konstante C, so daß für jedes $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$ gilt

$$\|R(\sigma + i\tau; A)\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

(c) Es gibt Konstanten $0 < \delta < \pi/2$ und $M > 0$, so daß gilt

$$\rho(A) \supset \sum = \left\{\; \lambda : |arg\, \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \;\right\} \cup \{0\}$$

und

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \qquad \text{für } \lambda \in \sum,\ \lambda \neq 0.$$

(d) $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ist differenzierbar und es gibt eine Konstantev C, so daß

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t} \qquad \text{für } t > 0.$$

Beweis.

- (a) $\Rightarrow$ (b)

  $\|T(z)\| \leq C_1$ für $z \in \overline{\triangle}_{\delta'}$, $\delta' < \delta$. Für $x \in X$ und $\sigma > 0$ ist

  $$\mathrm{R}(\sigma + i\tau;\, A)x = \int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t} T(t)x\, dt.$$

  Dies ist eine Folgerung 1.2 aus dem Satz von Hille–Yosida. Da $T(z)$ analytisch und gleichmäßig beschränkt in $z \in \overline{\triangle}_{\delta'}$ ist, können wir den Integrationsweg von $\mathbb{R}_0^+$ um einen Winkel $|\theta| \leq \delta'$ verschieben. Für $\theta > 0$ integrieren wir über den Strahl $\Gamma_\rho^+ = \rho e^{i\theta}$, $0 < \rho < \infty$. Daraus ergibt sich folgende Abschätzung:

  $$\begin{aligned}\|\mathrm{R}(\sigma + i\tau;\, A)x\| &\leq \int_{\Gamma_{\delta'}^+} \left|e^{-(\sigma+i\tau)t}\right| C_1 \|x\|\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho(\sigma\cos\delta' + \tau\sin\delta')} C_1 \|x\|\, d\rho \\ &\leq \frac{C_1 \|x\|}{\sigma\cos\delta' + \tau\sin\delta'} \\ &\leq \frac{C}{\tau}\|x\|.\end{aligned}$$

  Für $\tau < 0$ integrieren wir über den Strahl $\Gamma_\rho^- = \rho e^{-i\theta}$, $0 < \rho < \infty$ und erhalten $\|\mathrm{R}(\sigma + i\tau;\, A)x\| \leq -\frac{C}{\tau}\|x\|$. Daraus folgt die Behauptung.

- (b) $\Rightarrow$ (c)

  Nach Voraussetzung ist A der infinitesimale Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$–Halbgruppe. Aus dem Satz von Hille–Yosida fogt, daß $\|\mathrm{R}(\lambda;\, A)\| \leq M_1/\operatorname{Re}\lambda$ für $\operatorname{Re}\lambda > 0$ nach (b) ist $\|\mathrm{R}(\lambda;\, A)\| \leq C/\operatorname{Im}\lambda$. Also ist $\|\mathrm{R}(\lambda;\, A)\| \leq M_1/|\lambda|$. Für $\sigma > 0$ entwickeln wir $\mathrm{R}(\lambda;\, A)$ in eine Taylorreihe um $\sigma + i\tau$:

  $$\mathrm{R}(\lambda;\, A) = \sum_{n=0}^\infty \mathrm{R}(\sigma + i\tau;\, A)^{n+1} (\sigma + i\tau - \lambda)^n.$$

  Die Reihe konvergiert absolut, wenn $\|\mathrm{R}(\sigma + i\tau;\, A)\|\,|\sigma + i\tau - \lambda| \leq k < 1$. Sei nun $\lambda = \operatorname{Re}\lambda + i\tau$. Aus (b) ergibt sich, daß $|\sigma - \operatorname{Re}\lambda| \leq \frac{k|\tau|}{C}$. Da $\sigma > 0$, folgt daraus , daß die Reihe für alle λ mit $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ und $\frac{|\operatorname{Re}\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|} < \frac{1}{C}$ konvergiert. Faßt man diese beiden Aussagen zusammen, so ergibt sich

  $$\rho(A) \supset \left\{\lambda :\ |\arg\lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \delta\right\}$$

mit $\delta = k \arctan \frac{1}{C}$, $0 < k < 1$. Außerdem gilt in diesem Gebiet

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{R}(\lambda;\, A)\| &\leq \|\mathrm{R}(\sigma + i\tau;\, A)\| \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathrm{R}(\sigma + i\tau;\, A)\|^n \, |\sigma + i\tau - \lambda|^n \\
&\leq \frac{C}{|\tau|} \sum_{n=0}^{\infty} k^n \\
&\leq \frac{C}{1-k} \cdot \frac{1}{|\tau|} \\
&= \frac{M}{|\tau|}.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $0 \in \rho(A)$. Damit folgt die Behauptung.

- $(c) \Rightarrow (d)$

  Aus Satz 1.7.7 von [PA] folgt, daß

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t}\, \mathrm{R}(\lambda;\, A)\, d\lambda, \qquad t > 0$$

  wobei $\Gamma = \left\{\rho e^{i\theta}\right\}_{0<\rho<\infty} \cup \left\{\rho e^{-i\theta}\right\}_{0<\rho<\infty}$ mit $\theta \in]\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + \delta[$. Nach Voraussetzung ist also $\Gamma \supset \rho(A)$. Wir differenzieren zunächst formal und erhalten

$$T'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda e^{\lambda t}\, \mathrm{R}(\lambda;\, A)\, d\lambda, \qquad t > 0.$$

  Das Integral konvergiert absolut in $B(X)$, da

$$\begin{aligned}
\|T'(t)\| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty M e^{-\rho \cos\theta t}\, d\rho \\
&\leq \left(\frac{M}{\pi \cos\theta}\right) \frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

  Wir können also differenzieren und für $t > 0$ gilt

$$\|AT(t)\| = \|T'(t)\| \leq \frac{C}{t}.$$

- $(d) \Rightarrow (a)$

  Wir beweisen durch Induktion, daß $T^{(n)}(t) = (AT(t/n))^n = T'(t/n)^n$ ist. Für $n = 1$ ist $T^{(n)}(t) = (AT(t/n))^n$. Die Aussage gelte für n, dann erhalten wir mit $t \geq s$: $T^{(n)}(t) = (AT(t/n))^n = T(t-s)\,(AT(s/n))^n$. Ableiten auf beiden Seiten liefert $T^{(n+1)}(t) = AT(t-s)\,(AT(s/n))^n$. Die Behauptung folgt mit

$s = nt/n+1$. Mit der Voraussetzung (d) können wir jetzt folgendermaßen abschätzen:

$$\left\|T^{(n)}(t)\right\| = \|T'(t/n)^n\| \le \|T'(t/n)\|^n \le \left(\frac{Cn}{t}\right)^n.$$

Mit $n!e^n \ge n^n$ folgt dann die Abschätzung

$$\frac{1}{n!}\left\|T^{(n)}(t)\right\| \le \left(\frac{Ce}{t}\right)^n.$$

Betrachten wir die Potenzreihe

$$T(z) = T(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig für $|z-t| \le k\frac{t}{e\,C}$ mit $k<1$. Also ist $T(z)$ analytisch in $\triangle = \left\{z : |\arg z| < \arctan\frac{1}{e\,C}\right\}$. Da $T(z) = T(t)$ für reele z, wird $T(t)$ von $T(z)$ in das Gebiet $\triangle$ fortgesetzt. Wegen der Analytizität erfüllt $T(z)$ die Halbgruppeneigenschaften und aus der Reihenentwicklung folgt, daß $T(z)x \to x$ für $z \to 0$ in $\triangle$. Schränken wir den Winkel $\triangle$ auf abgeschlossene Teilmengen $\overline{\triangle}_\epsilon = \left\{z : |\arg z| < \arctan\frac{1}{e\,C} - \epsilon\right\}$, so ist $\|T(z)\|$ dort gleichmäßig beschränkt.

$\square$

Das inhomogene Cauchy–Problem

Die Beweise der folgenden zwei Abschnitte stammen aus [DH] S. 50 ff..

A.4. Lemma. *Sei A ein sektoraler Operator, $f : (0,T) \to X$ lokal Hölder–stetig mit $f \in L^1([0,\rho];X)$ für ein $\rho > 0$. Dann ist*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$

eine klassische Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1.16) *und es gilt $v(t) \to 0$ für $t \to 0^+$.*

Beweis. Wir haben also zu zeigen, daß v stetig auf $[0,T)$ ist, stetig differenzierbar auf $(0,T)$ mit $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ für $0 < t < T$ und daß die Differentialgleichung (1.16) erfüllt wird. Wir zeigen diese Behauptungen zunächst lokal für

$$v_\rho(t) = \begin{cases} \int_0^{t-\rho} T(t-s)f(s)\,ds, & t \in [\rho,T) \\ 0 & t \in [0,\rho). \end{cases}$$

Falls erforderlich setzen wir $f(s) = 0$ für $s < 0$.

Stetigkeit auf [0,T):

$v_\rho(t)$ ist stetig, denn für $0 \leq t \leq t+h \leq t_0 < T$ gilt

$$\begin{aligned} v_\rho(t+h) - v_\rho(t) \;=\; & (T(h) - id)\int_0^{t-\rho} T(t-s)f(s)\,ds + \\ & \int_{t-\rho}^{t+h-\rho} T(t+h-s)f(s)\,ds \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0. \end{aligned}$$

Außerdem konvergiert $v_\rho(t) \longrightarrow v(t)$ für $\rho \to 0^+$ gleichmäßig auf $[0, t_0]$ für jedes $t_0 < T$, da folgende Abschätzung gilt

$$\|v(t) - v_\rho(t)\| \leq \int_{t-\rho}^{t} \|T(t-s)\|\;\|f(s)\|\;ds.$$

$v(t)$ ist also der gleichmäßige Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen und somit selbst stetig auf $[0,T)$ und $\|v(t)\| \leq \int_0^t \|T(t-s)\|\;\|f(s)\|\;ds \to 0$ für $t \to 0^+$.

Stetige Differenzierbakeit auf (0,T):

Als erstes zeigen wir, daß $v_\rho \in \mathcal{D}(A)$ und schließen dann mit der Abgeschlossenheit von A, daß auch $v \in \mathcal{D}(A)$.
Für $0 \leq s < t$ ist $T(t-s)f(s) \in \mathcal{D}(A)$, so daß auch die Riemannsche Summe von v_ρ in $\mathcal{D}(A)$ liegt:

$$\sum_{t-s_j \geq \rho} T(t-s_j)f(s_j)\Delta s_j \in \mathcal{D}(A)$$

Wegen der Abgeschlossenheit von A liegt dann auch der Grenzwert über alle Zerlegungen Δs in $\mathcal{D}(A)$ und damit dann auch $v_\rho \in \mathcal{D}(A)$.
Wenden wir uns der Differenzierbarkeit zu: Für $t > \rho$ ist v_ρ differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichng (1.16), und es gilt

$$\begin{array}{ccc} \frac{d}{dt}v_\rho(t) & = & -Av_\rho(t) + T(\rho)f(t-\rho) \\ {\scriptstyle \rho\to 0^+}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho\to 0^+} \\ \frac{d}{dt}v(t) & = & -Av(t) + f(t) \end{array}$$

gleichmäßig auf dem Intervall $[t_0,\, t_1]$ mit $0 < t_0 < t_1 < T$.
Die Stetigkeit der Ableitung $\frac{d}{dt}v_\rho(t)$ zeigt man auf die gleiche Weise, wie man die Stetigkeit von v_ρ gezeigt hat. Es bleibt also nur noch die gleichmäßige Konvergenz von $Av_\rho(t) \to Av(t)$ auf Intervallen $[t_0,\, t_1]$ zu zeigen. Dann können wir auf die Stetigkeit von $\frac{d}{dt}v(t)$ schließen. Wir zerlegen die Integralformel von $Av_\rho(t)$ in zwei Teile, die wir dann einzeln abschätzen werden:

$$Av_\rho(t) = \int_0^{t-\rho} AT(t-s)\{f(s) - f(t)\}\,ds + \{T(\rho) - T(t)\}f(t).$$

Bei der Abschätzung benutzen wir die lokale Hölder–Stetigkeit von $f(t)$, $\|f(t)-f(s)\| \leq K\,|t-s|^{\theta}$ für ein $\theta > 0$ und $t,\, s \in [t_0,\, t_1]$, und $\|AT(t-s)\| \leq \frac{C}{t-s}$. Damit erhalten wir die gleichmäßige Konvergenz durch

$$
\begin{aligned}
\|Av_\rho(t) - Av(t)\| &= \left\| \{T(\rho) - id\}\, f(t) + \int_{t-\rho}^{t} AT(t-s)\,\{f(s) - f(t)\}\; ds \right\| \\
&\leq \|\{T(\rho) - id\}\, f(t)\| + C \int_{t-\rho}^{t} |t-s|^{\theta - 1}\; ds \xrightarrow[\rho \to 0+]{} 0.
\end{aligned}
$$

□

Das semilineare Cauchy–Problem

A.5. Lemma. *f erfülle die Voraussetzung(F) und sei lokal $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ integrierbar. $v : (0,\, t_1) \to X^\alpha$ sei stetig und erfülle die Integralgleichung*

$$
v(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) f(s,\, v(s))\, ds. \tag{A.2}
$$

wobei $T(t)$ die von $-A$ erzeugte analytische Halbgruppe ist. Außerdem sei $t \to f(t,\, v(t))$ auf $[0,\, t_1]$ beschränkt: $\|f(t,\, v(t))\| \leq N$ für $t \in [0,\, t_1]$. Dann ist v die eindeutige Lösung von (1.18)*.*

Beweis. Da wir Satz (1.9) anwenden wollen, müssen wir zeigen, daß $t \to f(t, u(t))$ lokal Hölder–stetig ist. Dazu zeigen wir zunächst, daß $v(t)$ lokal Hölder–stetig ist. Sei also $0 \leq t < t+h < t_1$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\|v(t+h) - v(t)\|_\alpha \leq \\
&\qquad \|(T(h) - id)\, T(t)u_0\|_\alpha + \int_0^t \|(T(h) - id)\, T(t-\tau) f(\tau, v(\tau))\|_\alpha\, d\tau \\
&\qquad\qquad + \int_t^{t+h} \|T(t+h-\tau) f(\tau, v(\tau))\|_\alpha\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Wir bezeichnen die drei Therme auf der rechten Seite mit I_1, I_2, I_3.
Aus Satz (1.11) folgt nun sofort, daß

$$
\|(T(h) - I)\, T(t-s)\|_\alpha \leq C_\beta h^\beta \left\|A^{\alpha+\beta} T(t-s)\right\| \leq C h^\beta (t-s)^{-(\alpha+\beta)}.
$$

für $0 < \beta < 1 - \alpha$.
Damit können wir jetzt Abschätzen:

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq\; C t^{-(\alpha+\beta)} h^\beta \|u_0\| \leq M_1 h^\beta \\
I_2 &\leq\; C N h^\beta \int_0^t (t-\tau)^{-(\alpha+\beta)}\, d\tau \leq M_2 h^\beta \\
I_3 &\leq\; N C_\alpha \int_t^{t+h} (t+h-\tau)^{-\alpha}\, d\tau = \frac{N C_\alpha}{1-\alpha} h^{1-\alpha} \leq M_3 h^\beta
\end{aligned}
$$

Beachte, daß M_1 von t abhängt und mit $t \downarrow 0$ anwächst.
Für jedes $t_0 > 0$ gibt es also eine Konstante C, so daß

$$\|v(t) - v(s)\|_\alpha \leq C\,|t-s|^\beta\,, \qquad t_0 \leq t,\, s \leq t_1.$$

$v(t)$ ist also lokal Hölder–stetig auf $(0,\, t_1]$.
Nach Voraussetzung(F) ist dann aber auch $t \to f(t,\, v(t))$ Hölderstetig, denn

$$\begin{aligned} \|f(t,\, v(t)) - f(s,\, v(s))\| &\leq L\left(|t-s|^\theta + \|v(t) - v(s)\|_\alpha\right) \\ &\leq C_1\,|t-s|^{\theta+\beta}\,. \end{aligned}$$

Nach Satz (1.9) löst $u(t)$ das inhomogene Cauchy–Problem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) + Au(t) &= f(t, v(t)), \qquad t > 0 \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

und besitzt die Darstellung

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^{t_1} T(t-s)f(s,\, v(s))\,ds.$$

Nach Definition (A.2) von v gilt: $u(t) = v(t)$.
Also löst u auch das ursprüngliche Problem (1.18). $\square$

Es bleibt nur noch die Voraussetzungen von Lemma (1.4) herzustellen. Dazu wollen wir ein Fixpunktargument benutzen.
Betrachten wir den

A.4. Satz (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei $(M,\, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $T:\, M \to M$ eine Kontraktion, d. h. für ein $0 \leq K < 1$ ist*

$$d\,(T(x),\, T(y)) \leq K d\,(x, y)\,, \qquad x,\, y \in M.$$

*Dann gibt es einen eindeutigen Fixpunkt x^* von T in M, also $T(x^*) = x^*$.
Außerdem gilt: $T^n(y) \to x^*$ für $n \to \infty$, $y \in M$, da*

$$d\,(T^n(y),\, x^*) \leq K^n d\,(y,\, x^*)\,.$$

Wir interessieren uns nun für parameterabhängige Fixpunkte und deren Regularität.

A.2. Definition (gleichmäßige Kontraktion). Seien $(M,\, d)$ und $(\Delta,\, l)$ zwei verschiedene metrische Räume. Eine gleichmäßige Kontraktion ist eine Abbildung $T:\, M \times \Delta \to M$, so daß

$$d\,(T(x,\, \lambda),\, T(y,\, \lambda)) \leq Kd(x,\, y)$$

für $x,\, y \in M$, $\lambda \in \Delta$ und $0 \leq K < 1$.

A.5. Satz. *Sei $T : M \times \Delta \to M$ eine gleichmäßige Kontraktion mit eindeutiger Fixpunktabbildung $g(\lambda) \in M$ und $\lambda \to T(x, \lambda)$ sei stetig auf Δ für alle $x \in M$. Dann ist auch $g : \Delta \to M$ stetig.*

Beweis. Der Beweis ist klar. Aus der Stetigkeit von $\lambda \to T(x, \lambda)$ folgt sofort

$$d\left(g(\lambda), g(\nu)\right) = d\left(T(g, \lambda), T(g, \nu)\right) \leq \epsilon d(\lambda, \nu).$$

$\square$

Jetzt können wir endlich das Hauptresultat beweisen.

A.6. Satz (Existenz und Eindeutigkeit). *Sei A ein sektoraler Operator mit $\omega < \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \alpha < 1$. $f : U \to X$, $U \subset \mathbb{R}^+ \times X^\alpha$ erfülle die Voraussetzung(F). Dann gibt es zu jedem Startwert $(0, u_0) \in U$ ein $t_1 = t_1(0, u_0)$, so daß (1.18) eine eindeutige Lösung u auf $(0, t_1)$ besitzt.*

Beweis. Wir haben folgendes zu zeigen:

Die Lösung der Integralgleichung

$$v(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) f(s, v(s))\, ds.$$

$v : (0, t_1) \to X^\alpha$ ist stetig und $t \to f(t, v(t))$ ist auf $[0, t_1]$ beschränkt:

Wir werden diese Aussage beweisen, indem wir sie als Fixpunktargument umformulieren und dann die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes (A.5) herstellen.
Nach Voraussetzung(F) gibt es Konstanten $\rho > 0$, $\tau > 0$, so daß

$$V = \left\{ (t, v) \middle| \, 0 \leq t \leq \tau, \; \|v - u_0\|_\alpha \leq \rho \right\} \subset U$$

eine Umgebung von $(0, u_0)$ in U ist und für (t, v_1), $(t, v_2) \in V$ gilt

$$\|f(t, v_1) - f(t, v_2)\| \leq L \|v_1 - v_2\|_\alpha .$$

Wegen der lokalen Hölder–stetigkeit in t existiert $B = \max_{t \in [0, \tau]} \|f(t, u_0)\|$.
Wähle nun $0 < T \leq \tau$ so, daß

$$\begin{aligned} &\|(T(h) - id)\, u_0\|_\alpha \leq \tfrac{\rho}{2}, \qquad \text{für } 0 \leq h \leq T, \\ &C(B + L\rho) \int_0^T u^{-\alpha} e^{-\delta u}\, du \leq \tfrac{\rho}{2}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Dies ist möglich, da nach Satz (1.11) folgende Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} &\|(T(t) - id)\, x\| \leq \tfrac{1}{\beta} C_{1-\beta} t^\beta \left\|A^\beta x\right\| \text{ für } 0 < \beta \leq 1, \; x \in \mathcal{D}\left(A^\beta\right), \\ &\|T(t)\|_\beta \leq C_\beta t^{-\beta} e^{-\delta t} \text{ für } t > 0. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Wie bereits angekündigt, formulieren wir das Problem nun als Fixpunktaussage. Wir definieren einen vollständigen metrischen Raum (M, d) wobei

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in \mathcal{C}\left([0,T]; X^\alpha\right) \,\middle|\, \|v(t) - u_0\|_\alpha \leq \rho \text{ auf } [0,T] \right\}$$

und

$$d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x-y\|_\infty \;\text{ mit }\; \|x\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|_\alpha .$$

Für $v \in M$ definiere nun $G(v) : [0,T] \to X$ durch

$$G(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} T(t)u_0 + \int_0^t T(t-\tau) f(\tau, v(\tau))\, d\tau.$$

Wir haben zu zeigen, daß G eine Selbstabbildung von M ist und daß G eine strikte Kontraktion ist. Also

1. *Selbstabbildung*

   Die Stetigkeit von $t \to G(v)(t)$ folgt aus dem Beweis zu Lemma A.5. Außerdem gilt mit (A.3) und (A.4)

$$\begin{aligned} \|G(v)(t) - u_0\|_\alpha \;&\leq\; \|(T(t) - id)\, u_0\|_\alpha + \int\limits_0^t \|A^\alpha T(t-\tau) f(\tau,\, u_0)\|\; d\tau \\ &\quad + \int\limits_0^t \|A^\alpha T(t-\tau)\left\{ f(\tau,\, v(\tau)) - f(\tau,\, u_0)\right\}\|\; d\tau \\ &\leq\; \frac{\rho}{2} + C\,(B + L\rho) \int\limits_0^T (t-\tau)^{-\alpha}\, e^{-\delta(t-\tau)}\, d\tau \\ &\leq\; \delta \end{aligned}$$

   für $v \in M$.
   Also ist $G(v)$ eine Selbstabbildung.

2. *Strikte Kontraktion*

   Seien $x,\, y \in M$, dann gilt für $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \|G(x)(t) - G(y)(t)\|_\alpha \;&\leq\; \int\limits_0^t \|T(t-\tau)\|_\alpha \, \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\|_\alpha \; d\tau \\ &\leq\; CL \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\alpha} e^{-\delta(t-\tau)}\, d\tau \cdot \|x - y\|_\alpha \end{aligned}$$

Also

$$\|G(x) - G(y)\|_\alpha \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_\alpha, \qquad \forall x,\, y \in M.$$

Nach dem Fixpunktsatz A.5 besitzt $G(v)(t)$ einen eindeutig bestimmte stetig Fixpunktfunktion $v(t)$ in M. Wegen der Stetigkeit von $v(t)$ und da f die Voraussetzung (F) erfüllt, ist $t \to f(t, v(t))$ beschränkt auf $[0, T]$. Nach Lemma A.5 ist $v(t)$ Lösung des semilinearen Anfangswertproblems (1.18). □

Picard–Iteration

A.7. Satz. *A sei ein sektoraler Operator mit $\omega < \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \alpha < 1$, und $f : U \to X$, $U \subset \mathbb{R}^+ \times X^\alpha$ erfülle die Voraussetzung(F). Dann gibt es zu jedem Startwert $(0,\, u_0) \in U$ ein $T = T(0,\, u_0)$, so daß (1.18) eine eindeutige Lösung u auf $J = (0,\, T)$ besitzt. Die Lösung kann iterativ bestimmt werden. Setzt man*

$$A(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} T(t)u_0 + \int_0^t T(t-\tau) f(\tau, v(\tau))\, d\tau, \qquad t \in J,$$

so strebt $\tilde{u}_n \stackrel{\text{def}}{=} A^n \tilde{u}_0 \to u(t)$, $n \to \infty$ gleichmäßig auf J für eine beliebige Funktion $\tilde{u}_0 \in M \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in \mathcal{C}([0,T]; X^\alpha) \,\middle|\, \|v(t) - u_0\|_\alpha \leq \rho \text{ auf } [0,T] \right\}$ und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u(t) - \tilde{u}_n\|_\alpha \leq 2^{-(n-1)} \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0\|_\alpha.$$

Beweis:
Nach Voraussetzung(F) gibt es Konstanten $\rho > 0$, $T > 0$, so daß

$$V = \left\{ (t,v) \,\middle|\, 0 \leq t \leq T,\ \|v - u_0\|_\alpha \leq \rho \right\} \subset U$$

eine Umgebung des Startwertes $(0,\, u_0)$ in U ist und für (t, v_1), $(t, v_2) \in V$ folgt aus der Lipschitz–Stetigkeit des zweiten Arguments von f

$$\|f(t, v_1) - f(t, v_2)\| \leq L \|v_1 - v_2\|_\alpha.$$

Aus dem Beweis zu Satz A.6 geht hervor, daß der Operator

$$A(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} T(t)u_0 + \int_0^t T(t-\tau) f(\tau, v(\tau))\, d\tau.$$

eine Selbstabbildung $A : M \to M$ des Banachraumes $(M, \|\cdot\|)_\infty$ ist mit

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in \mathcal{C}\left([0,T]; X^\alpha\right) \,\middle|\, \|v(t) - u_0\|_\alpha \leq \rho \text{ auf } [0,T] \right\},$$
$$\|x\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|_\alpha \,,$$

und daß A eine strikte Kontraktion ist, d. h.

$$\|A(x) - A(y)\|_\alpha \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_\alpha \,, \qquad \forall x,\, y \in M.$$

Die gleichmäßige Konvergenz $\tilde{u}_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} A^n \tilde{u}_0(t) \to u(t)$, $n \to \infty$ und die Fehlerabschätzung folgt nun aus dem Banachschen Fixpunktsatz. $\square$

Literaturverzeichnis

Halbgruppen

[PA] Pazy, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations

[DH] Henry, D., Geometric Theorie of Semigroups

[FK] Fujita, H./Kato, T., Navier–Stokes Initial Value Problem

[OQ] Odqvist, F.K.G., Über die Randwertaufgabe der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten. Math. Z. 32, 329-375(1930)

Wavelets

[AHJP92] Anderson, L., Hall, N., Jawerth, B., Peters, G., Wavelets on closed subsets of the real line, in [Chu92b], pp 1-61

[Aus92] Auscher, P., Wavelets with boundary conditions on the intervall, in [Chu92b], pp 217-236

[Bey91] Beylkin, G., Wavelets, MRA, and Fast Numerical Algorithms, INRIA lectures, 1991

[Bey93] Beylkin, G., On wavelet based algorithms for solving partial differential equations, in J. Benedetto, M. Frzier (Ed) Wavelets: Mathematics and applications, CRC Press, Boca Raton, 1993

[Bey95] Beylkin, G., Keiser, J.M., On the Adaptive Numerical Solution of Nonlinear Partial Differential Equations in Wavelet Bases, Preprint University of Colorado, Boulder, 1995

[BCR91] Beylkin, G., Coifman, R., Rokhlin, V., Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms I, Comm. Pure Appl. Math., vol. **44**, 141–183, 1991

[DPS93] Dahmen, W., Prössdorf, S., Schneider, R., Wavelet approximation methods for pseudo–differential equations II: Matrix compression and fast solution, Advances in Computational Mathematics, vol. 1, 259–335, 193

[DPS94] Dahmen, W., Prössdorf, S., Schneider, R., Multiscale methods for pseudo–differential equations on smooth closed manifolds, Wavelets:

Theory Algorithms and Applications, Chui, C.K., Montefusco, L., Puccio eds., Academic Press, 1994

[CDJV93] Cohen, A., Daubechies, I., Jawerth, B., Vial, P., Multiresolution analysis, wavelets and fast algorithms on the interval, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, vol I, pp. 417–421, 1993

[CDV93a] Cohen, A., Daubechies, I., Vial, P., Multiresolution analysis, wavelets and fast algorithms on the interval, Appl. Comp. Harm. Anal., vol 1, 1993, pp. 54–81

[CDV93b] Cohen, A., Daubechies, I., Vial, P., Wavelets on the interval and fast wavelet transforms, Appl. Comp. Harm. Anal., vol 1, pp. 157–188, 1993

[Chu92a] Chui, C.K., An Introduction to Wavelets, Academic Press, Boston, 1992

[Chu92b] Chui, C.K., ed., Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications, Academic Press, Boston, 1992

[CQ92] Chui, C.K., Quak, E., Wavelets on a boundet intervall, Numerical Methods of Approximation Theory, Braess, D., Schumaker, L.L., eds., Birkhäuser–Verlag, Basel, 1992, pp.1-24

[Daub88] Daubechies, I., Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Comm. Pure and Appl. Math., vol. **41**, S. 909 ff., 1988

[Daub92] Daubechies, I., Ten Lectures on wavelets, SIAM, Pennsylvania, Philadelphia, 1992

[Haa10] Haar, A., Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Annalen 69, S.331–371

[Hac85] Hackbusch, W., Multigrid Methods and Applications, Springer, Berlin, 1985

[JS94] Jawerth, B., Sweldens, W., An Overview of Wavelets based on Multi Resolution Analysis, SIAM review, **36**, 1994

[Kai94] Kaiser, G., A Friendly Guide to Wavelets, Birkhauser, Boston, 1994

[Kei95] Keiser, J.M., Wavelet based approach to numerical solution of nonlinear partial differential equations and nonlinear waves in fully diskrete dynamical systems, Ph. D. Thesis, Program in Applied Mathematics, University of Colorado, 1995

[Mal89] Mallat, S., Multiresolution Approximation and Orthonormal Bases of $L^2(\mathbb{R})$, Trans. Amer.Math. Soc., vol. **315**, 69–87, 1989

[Mey90] Meyers, Y., Ondelettes et Opérateurs I/II, Hermann, Paris, 1990

[MC90] Meyers, Y., Coifman, R., Ondelettes et Opérateurs III, Hermann, Paris, 1990

[Mey92] Meyer, Y., Ondelettes sur l'intervalle, Rev. Math. Iberoamericana, vol. 7, pp.115–133, 1992

[Mey93] Meyers, Y., Wavelets — Algorithms and Applications, SIAM, Philadelphia, 1993

[MP95] Monasse, P./Perrier, V., Othonormal Wavelet Bases adapted for Partial Differential Equations with boundary conditions

[PTVF92] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, P.F., Numerical Recipes in C, 2. Auflage, Cambridge University Press, 1992

[Run04] Runge, C., Theorie und Praxis der Reihen, G. J. Göschen, Leipzig, 1904

[Sch99] Scherer, K., Splines und Wavelets, Preprint Universität Bonn, 1999

[SW71] Stein, W., Weiss, G., Introduction to Fourier Analysis on Eucldian Spaces, Princeton Universitiy Press, Princeton Mathematical Series, vol. **32**, New Jersey, 1971

[Wic96] Wickerhauser, M.V., Adaptive Wavelet–Analysis, Vieweg, Wiesbaden, 1996

Signalverarbeitung

[Mar82] Marr, D., Vision: a computational investigation into the human representation and processing of visual information, Freeman, San Franscisco, 1982

[Pap77] Papoulis, A., Signal Analysis, McGraw–Hill, New York, 1977

Pseudo–Differentialoperatoren

[TY] M.E., Taylor, Pseudo–differential Operators, Springer, Berlin, 1974

[Hoe] Hörmander, Lars, The analysis of linear partial differential operators, Springer, Berlin

Toeplitz–Matrizen

[Ben97] Di Bennedetto, Fabio, Preconditioning of Block Toeplitz Matrices by Sine Transforms, SIAM J. Sci. Comput, vo. 18, pp. 499-515, 1997

[DG58] Delsarte, P., Genin, Y., Spectral Properties of Finite Toeplitz Matrices, Philips Research Laboratory, 1958, Brussels

Informatik

[Wei94] Weiss, Mark Allen, Data Struktures ans Algorithm Analysis in C++, Addison–Wesley Publishing Company, Menlo Park, 1994

[Sed92a] Sedgewick, Robert, Algorithmen in C, Addison–Wesley Publishing Company, Menlo Park, 1992

[Sed92b] Sedgewick, Robert, Algorithmen in C++ Addison–Wesley Publishing Company, Menlo Park, 1992

[Num88] Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, 1988

[Num92] Numerical Recipes in C++, Cambridge University Press, 1992

Gewöhnliche Differentialgleichungen

[Heu91] Heuser, Harro, Gewöhnliche Differentialgleichungen, B.G. Teubner, Stuttgart,1991

Sonstiges

[KdV] Korteweg, D.J., de–Vries, G., On the change of form of long waves in a rectengualar canal, and of a new type of long stationary waves, Philos. Mag. Ser. 5 39, 1895, S. 422 – 443

[Rus] Russell, J.S., Report on Waves, 14th Mtg. of the British Assoc. for the Advance of Science, John Murray, pp. 311 – 390, London, 1844