Ein numerisches Verfahren zur Lösung der Flachwassergleichungen auf einer rotierenden Kugel mittels der Lagrange-Galerkin-Methode

Diplomarbeit von Thomas Heinze
aus Mannheim

Dezember 1998

GMD - Forschungszentrum
Informationstechnik mbH
Institut für Algorithmen und
Wissenschaftliches Rechnen
Schloss Birlinghoven, Sankt Augustin

Institut für angewandte Mathematik
Meteorologisches Institut
Rheinische Friedrich-
Wilhelms-Universität Bonn

Ein numerisches Verfahren zur Lösung der Flachwassergleichungen auf einer rotierenden Kugel mittels der Lagrange-Galerkin-Methode

Diplomarbeit von Thomas Heinze

aus Mannheim

eingereicht am Institut für angewandte Mathematik
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
im Dezember 1998

Referent: Professor Dr. Michael Griebel
Institut für angewandte Mathematik

Korreferent: Professor Dr. Andreas Hense
Meteorologisches Institut

für Lale Ilka

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine neue Kombination bekannter Verfahren zur numerischen Lösung der Flachwassergleichungen auf einer Kugel angegeben. Als Gitter werden ein Fußball und seine Verfeinerungen benutzt, die Zeitdiskretisierung geschieht mittels eines Semi-LAGRANGE-Schemas und die Lösung der resultierenden HELMHOLTZ-Gleichung erfolgt mit der Methode der finiten Elemente. Anhand von fünf Standardtestfällen wird die Güte des Algorithmus abgeschätzt und die dabei auftretenden Stärken und Schwächen diskutiert. Insbesondere zeigt sich, dass das Verfahren in Bezug auf Erhaltung von Masse und Energie ein gutes Verhalten zeigt, während hingegen die Trajektorienbestimmung noch nicht ganz ausgereift ist.

Schlüsselwörter: Flachwassergleichungen, LAPLACE-BELTRAMI-Operator, Fußball, Semi-LAGRANGE-Schema, HELMHOLTZ-Gleichung, Methode der finiten Elemente

Summary

In this work a new combination of well known techniques for the numerical solution of the Shallow Water Equations is presented. A football and its refinements are used as grids, the time discretization is done by a Semi-LAGRANGIAN-Scheme and by the aid of the Finite-Element-Method a solution of the resulting HELMHOLTZ Equation is found. We estimate the quality of the algorithm using five standard testcases and discuss the occuring strong and weak points. It is demonstrated that the procedure has good properties in regard to preservation of mass and energy, whereas there has to be done little more work for the calculation of the trajectories.

Keywords: Shallow Water Equations, LAPLACE-BELTRAMI-Operator, Football, Semi-LAGRANGIAN-Scheme, HELMHOLTZ-Equation, Finite-Element Model

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Numerical weather prediction is much more a problem of
mathematical physics than of black magic.
Andrew Staniforth

Menschen interessieren sich für das Wetter, seitdem sie die Erde bevölkern. Das Wechselspiel der Kräfte, deren Resultat das Wetter ist, ist von komplexer Natur und wird bis heute nur unvollständig verstanden.
Die Meteorologie stand lange Zeit im Ruf, keine exakte Naturwissenschaft zu sein, weil sie mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln die Geschehnisse nicht zufriedenstellend erklären konnte.
Erst durch die Entwicklung von Computern, die viele Rechenoperationen in kurzer Zeit durchführen können, und durch den Einsatz von Satelliten, die meteorologische Daten auch aus Gebieten der Erde liefern, in denen direkte Messungen nur schwer zu erhalten sind, wie zum Beispiel Wüsten oder Ozeane, sind in den letzten dreißig Jahren wesentliche Fortschritte erzielt worden.
In diesem Sinne ist die Meteorologie eine junge Wissenschaft. Dank der Computer ist es möglich geworden, die Zusammenhänge und Wechselwirkungen zwischen beobachteten Phänomenen zu untersuchen. Man reduziert das „System Erde" auf wenige physikalische Größen und untersucht die Kopplungs- und Rückkopplungsmechanismen in diesem stark vereinfachten System. Für die sich daraus ergebenden Gleichungssysteme gilt es dann, effektive numerische Lösungsverfahren zu verwenden.
Die Flachwassergleichungen sind das Resultat einer solchen Vorgehensweise. Sie sind ein einfaches System von gekoppelten Differentialgleichungen, die in einem hydrostatisch geschichteten Fluid die Wechselwirkungen in einer Strömung beschreiben.
Bereits 1959 hat der dänische Meteorologe A. Wiin-Nielsen [53] die Idee publiziert, Strömungen längs ihrer Trajektorien zu diskretisieren. Inzwischen ist diese Technik so weit fortentwickelt, dass sie bei der täglichen Wettervorhersage einiger Wetterdienste benutzt wird.
Dieses Konzept wird hier in Verbindung mit der Methode der finiten Elemente umgesetzt, wobei eine bisher in diesem Zusammenhang nicht betrachtete besondere Aufteilung der Erdoberfläche in Dreiecke verwendet wird. Andere Aspekte dieses Ansatzes sind bereits in zahlreichen Veröffentlichungen behandelt worden. In dieser Diplomarbeit werden erstmals alle drei Gesichtspunkte zu einem Algorithmus zusammengefasst. Es handelt sich somit in erster Linie um ein numerisches Problem.
Aus diesem Grund wird auf theoretische Sätze und deren Beweise zum größten Teil verzichtet. Falls es dennoch notwendig ist, einen Satz zu benutzen, dann wird auf eine geeignete Quelle verwiesen.

Diese Diplomarbeit wird in Zusammenarbeit des Instituts für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen der GMD - Forschungszentrum Informationstechnik mbH in Sankt Augustin (GMD-SCAI), des Instituts für Angewandte Mathematik (IAM) und des Meteorologischen Instituts der Universität Bonn (MIUB) angefertigt. Deshalb soll diese Arbeit für Leser* beider Richtungen verständlich sein, was zur Folge hat, dass im Anhang einige für den Mathematiker selbstverständliche Dinge erläutert sind. Im Hauptteil wird auf eine genaue Definition verzichtet, so weit es sich um die übliche Verwendung handelt, und auf den Anhang verwiesen.
Im ersten Kapitel werden die Flachwassergleichungen hergeleitet. Zunächst werden einige in der Meteorologie verwendete physikalische Größen eingeführt. Ausgehend von den Prinzipien der Erhaltung von Masse, Impuls und Energie werden zusätzliche Annahmen getroffen, die dann zu den Flachwassergleichungen führen. Die LAGRANGE-GALERKIN-Methode wird im zweiten Kapitel vorgestellt. Die Flachwassergleichungen werden längs der Trajektorien zeitlich diskretisiert und anschließend durch Umformungen auf eine HELMHOLTZ-Gleichung reduziert. Nach Einführung eines Finite-Elemente-Raumes wird diese Gleichung im nächsten Kapitel mit linearen finiten Elementen räumlich diskretisiert. Das vierte Kapitel fasst die Resultate der ersten drei Kapitel zu einem Lösungsalgorithmus zusammen und erläutert die Details der numerischen Umsetzung im verwendeten Programmpaket. Um die Güte des Verfahrens abzuschätzen, werden im folgenden Kapitel einige Messgrößen definiert und numerische Ergebnisse mit unterschiedlichen Testfällen gezeigt. Zum Schluss folgt ein kurzes Kapitel, in dem die Ergebnisse bewertet und Antworten auf folgende Fragen gegeben werden, die das übergeordnete Ziel dieser Diplomarbeit sind.

(a) Ist es möglich, die drei angesprochenen Aspekte - Diskretisierung längs von Trajektorien, besonderes Dreiecksgitter, finite Elemente - zu einem einzigen Algorithmus zu kombinieren ?

(b) Welche Schwierigkeiten treten dabei auf und welche Lösungsansätze gibt es ?

(c) Wie sehen die Ergebnisse im Vergleich zu herkömmlichen Ansätzen aus ?

(d) Ist es sinnvoll diesen Ansatz weiter zu verfolgen ?

(e) Wenn ja, an welchen Punkten soll für Verbesserungen angesetzt werden ?

*In dieser Arbeit wird die heute so populäre I-Form zur Einbeziehung von Personen beiderlei Geschlechts nicht verwendet, weil sie nach Meinung des Autors die Lesbarkeit von Texten erschwert. Selbstverständlich sind aber bei der Verwendung der männlichen Form grundsätzlich auch die Leserinnen angesprochen.

Kapitel 1

Flachwassergleichungen

Ausgangspunkt aller numerischen Betrachtungen in der Meteorologie sind die so genannten primitiven meteorologischen Gleichungen, wie sie z.B. bei J. Dutton [9] auf Seite 233 eingeführt werden. Sie beschreiben die Wechselwirkungen von Druck, Temperatur und Geschwindigkeit eines idealen, nicht viskosen Fluids in einem dreidimensionalen rotierenden System. In der Praxis hat sich jedoch gezeigt, dass sich dieser Satz von gekoppelten Differentialgleichungen wegen seiner Komplexität nur unzureichend zum Testen numerischer Algorithmen eignet.
In der Regel werden dazu die Flachwassergleichungen benutzt. Sie betrachten nur noch die Wechselwirkungen von Druck und Geschwindigkeit einer tangentialen Strömung des rotierenden Gesamtsystems und berücksichtigen daher nur einen Teil der primitiven meteorologischen Gleichungen. Sie enthalten jedoch bereits wesentliche Aspekte der atmosphärischen Vorgänge, die bei der numerischen Umsetzung zu Problemen führen können, wie z.B. die Kopplung der Differentialgleichung, die Veränderung der betrachteten physikalischen Größen in Raum und Zeit oder die Rotation des Systems.
Im nächsten Abschnitt werden die physikalischen Parameter, die geometrische Situation des Problems und, ausgehend von physikalischen Erhaltungssätzen, ein System von Differentialgleichungen vorgestellt, die zunächst in einem allgemeinen Modellgebiet gelten. Aufgrund der Problemstellung werden erste Schlüsse gezogen und diese auf Geschwindigkeit und CORIOLIS[1]-Vektor angewendet.
Mittels des Geopotentials, einer physikalischen Größe, die in der Meteorologie häufig verwendet wird, zweier Annahmen, die das ursprüngliche Gleichungssystem wesentlich vereinfachen, und einer Betrachtung der kinetischen Energie wird in den folgenden Abschnitten ein Anfangswertproblem der Flachwassergleichungen auf der Kugeloberfläche hergeleitet.
Diese Art der Herleitung der Flachwassergleichungen beruht im wesentlichen auf den Konzeptionen, die A. Hense [20], J. Klaßen [25] und J. Pedlosky [31] in den zitierten Veröffentlichungen dargelegt haben, mit der Einschränkung, dass es sich bei dem betrachteten Modellgebiet jeweils um eine Ebene handelt. Die Übertragung des Konzeptes auf die Kugeloberfläche als Modellgebiet gelingt in derselben Art, wie sie von K. Siebert [43] im Fall der EULER[2]-Gleichungen vorgestellt worden ist.

[1]Gaspard Gustave de Coriolis, 1792-1843
[2]Leonhard Euler, 1707-1783

1.1 Vorbetrachtungen und Ausgangsgleichungen

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein offenes Gebiet und $I = [0,T] \subset \mathbb{R}_0^+$ ein Intervall. Bei den betrachteten physikalischen Größen handelt es sich um folgende Parameter:

$$t: \quad I \to \mathbb{R}_0^+ \qquad \text{Zeit} \tag{1.1}$$
$$\rho : G \times I \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{Dichte des Fluids} \tag{1.2}$$
$$p : G \times I \to \mathbb{R}_0^+ \qquad \text{Druck des Fluids} \tag{1.3}$$
$$\vec{v} : G \times I \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{Geschwindigkeit des Fluids} \tag{1.4}$$
$$\vec{g}: \quad G \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{Schwerebeschleunigung} \tag{1.5}$$
$$\vec{\Omega}: \quad G \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation} \tag{1.6}$$

Die Beträge der letzten beiden Größen werden als Konstanten angenommen:

$$|\,\vec{g}\,| := \quad g \qquad \approx 9.80616\,\mathrm{ms}^{-2} \tag{1.7}$$
$$|\,\vec{\Omega}\,| = \frac{2\pi}{86164\ \mathrm{s}} \approx 7.2921 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1} \tag{1.8}$$

Bei der Beschäftigung mit Strömungen eines Fluids gibt es zwei unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten. M. Geiben hat in ihrer Diplomarbeit [12] eine Charakterisierung der beiden Bewegungsdarstellungen gegeben:

(a) „Die EULERsche Bewegungsdarstellung beschreibt die Strömung in einem vorgegebenen Koordinatensystem. In jedem Punkt des Koordinatensystems werden die einzelnen Parameter bestimmt. Dabei handelt es sich um die Werte des gerade an dem betreffenden Punkt befindlichen Fluidteilchens. Hier ist nicht das Einzelschicksal eines Teilchens interessant, sondern nur das Verhalten ständig wechselnder Teilchen, die einen vorgegebenen Punkt passieren. Größen wie Geschwindigkeit und Druck sind im Allgemeinen Funktionen des Ortes und der Zeit.

(b) Die LAGRANGEsche[3] Bewegungsdarstellung verfolgt die Bewegung der einzelnen Fluidteilchen in ihrem zeitlichen Verlauf."

Der Zusammenhang zwischen beiden Betrachtungsweisen wird durch folgende Formel, die eine Verbindung zwischen der totalzeitlichen Ableitung (LAGRANGE) und der partiellen zeitlichen Ableitung (EULER) einer vektoriellen physikalischen Größe $\vec{q}$ herstellt, deutlich. Die genaue Definiton des ∇-Operators findet man in Gleichung (A.41).

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{q} \tag{1.9}$$

Bei der LAGRANGE-Methode wird ein Teilchen entlang seiner Trajektorie verfolgt. Diese Betrachtungsweise wird später bei der Diskretisierung der hergeleiteten Differentialgleichungen in der Zeit benutzt. Deshalb werden in dieser Arbeit die betrachteten Differentialgleichungen in der LAGRANGE-Form verwendet.
Die Flachwassergleichungen beruhen auf zwei physikalischen Prinzipien, der Erhaltung von Masse und Impuls. Die Kontinuitätsgleichung (1.10) ist eine mathematische Formulierung des ersten Prinzips und die Bewegungsgleichungen (1.11) des zweiten im Fall, dass die Reibung im System vernachlässigt wird.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\,\rho \nabla \vec{v} \qquad \text{in } G \times I \tag{1.10}$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\,\frac{1}{\rho}\nabla p \;-\; 2\,\vec{\Omega} \times \vec{v} \;-\; \vec{g} \qquad \text{in } G \times I \tag{1.11}$$

[3]Joseph Louis Lagrange, 1736-1813

Gegenstand der Untersuchung ist die Strömung eines Fluids auf der Kugel B_{r_e}. Abbildung 1.1, die einen Schnitt durch die idealisierte Erdkugel längs der Rotationsachse zeigt, verdeutlicht die Lage einzelner Vektoren zueinander.

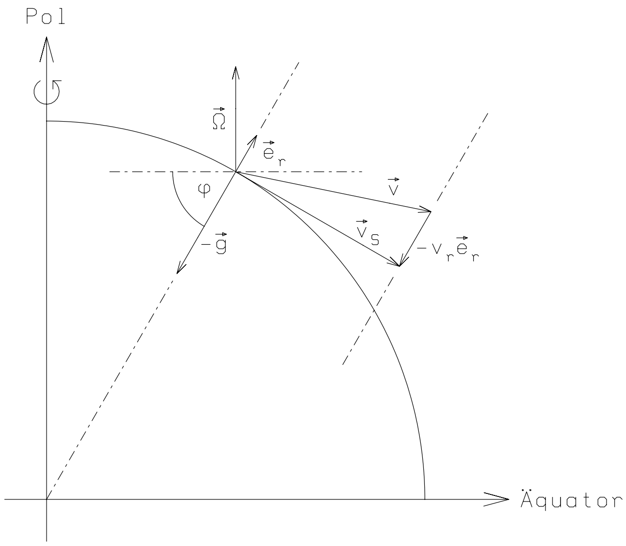


Abbildung 1.1: Lage der Vektoren $\vec{\Omega}$, $\vec{g}$, $\vec{e}_r$, $\vec{v}$ und $\vec{v}_S$

Der Vektor $\vec{e}_r$ ist der in jedem Punkt der Erdoberfläche nach außen gerichtete Einheitsvektor längs der radialen Richtung r. Die Schwerebeschleunigung $\vec{g}$ liegt parallel zu diesem Vektor und hat die Länge g:

$$\vec{e}_r := \frac{\vec{g}}{g} \tag{1.12}$$

Parallel zur nach Norden gerichteten Rotationsachse befindet sich der Vektor $\vec{\Omega}$. Der Winkel $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bezeichnet die geographische Breite eines Punktes. Der Radius r_e der Erdkugel wird durch

$$r_e = \frac{40000\,\text{km}}{2\pi} \approx \; 6371.22\,\text{km} \tag{1.13}$$

berechnet.

1.1 Bemerkung: $\vec{v}$, $\vec{\Omega}$ und $\vec{e}_r$ liegen, entgegen der schematischen Darstellung im Schaubild, im Allgemeinen nicht in einer Ebene, sondern spannen den ganzen $\mathbb{R}^3$ auf.

Sei $S \subset U$ die Oberfläche der Erdkugel B_{r_e} und $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Insbesondere ist S eine kompakte $C^{k,\alpha}$-Hyperfläche[4]($k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq \alpha \leq 1$) ohne Rand, d.h. $\partial S = \emptyset$. Es wird eine tangentiale Strömung auf S untersucht. Deshalb werden tangentiale Operatoren eingeführt und die physikalischen Größen in radiale und tangentiale Anteile zerlegt.

1.2 Definition: (radiale Ableitung und tangentialer Gradient)
Sei $q : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist die radiale Ableitung von q :

$$\frac{\partial q}{\partial r} := \vec{e}_r \cdot \nabla q \tag{1.14}$$

Sei $q : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist der tangentiale Gradient von q :

$$\nabla_S\, q := \nabla q - \vec{e}_r \cdot \frac{\partial q}{\partial r} \tag{1.15}$$

[4]siehe Anhang A, Gleichung (A.22)

1.3 Definition: (tangentiale Divergenz)

Sei $\vec{q} : U \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Dann ist die tangentiale Divergenz von $\vec{q}$:

$$\nabla_S\, \vec{q} := \nabla \vec{q} - \vec{e}_r\, (\vec{e}_r \cdot \nabla)\vec{q} \tag{1.16}$$

Da $S \in C^2$ lässt sich nach K. Siebert [43] ein LAPLACE[5]- BELTRAMI[6]- Operator definieren.

1.4 Definition: (LAPLACE-BELTRAMI**-Operator)**

Sei $q : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist der LAPLACE-BELTRAMI-Operator von q auf S :

$$\nabla_S^2\, q := \nabla_S \cdot \nabla_S\, q \tag{1.17}$$

1.5 Definition: (radiale und tangentiale Geschwindigkeit)

radiale Geschwindigkeitskomponente:

$$v_r : S \times I \to \mathbb{R}, \qquad v_r := \vec{v} \cdot \vec{e}_r \tag{1.18}$$

tangentiale Geschwindigkeit:

$$\vec{v}_S : S \times I \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{v}_S := \vec{v} - v_r \cdot \vec{e}_r \tag{1.19}$$

Die Zerlegung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in ihre Komponenten ist ebenfalls in Abbildung 1.1 dargestellt.

1.6 Bemerkung: Es gilt $\vec{v}_S \cdot \vec{e}_r = 0$, d.h. $\vec{v}_S$ bildet den Punkt $(\vec{x}, t)$ auf ein Element des Tangentialraums T_S von S in $\vec{x}$ ab. Dies wird im Folgenden mit $\vec{v}_S : S \times I \to T_S$ bezeichnet.

1.2 CORIOLIS-Term

Analog zur Geschwindigkeit $\vec{v}$ wird der CORIOLIS-Vektor $(\vec{\Omega} \times \vec{v})$ in eine tangentiale und radiale Komponente zerlegt:

$$(\vec{\Omega} \times \vec{v}) = (\vec{\Omega} \times \vec{v})_S \;+\; (\vec{\Omega} \times \vec{v})_r \tag{1.20}$$

$$(\vec{\Omega} \times \vec{v})_r := ((\vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r \tag{1.21}$$

Diese Terme lassen sich mit Hilfe von (1.19) und der analogen Aufspaltung der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation $\vec{\Omega}$ (1.22) vereinfachen:

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_S \;+\; (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned}(\vec{\Omega} \times \vec{v}) &= (\vec{\Omega}_S \times \vec{v}_S) \;+\; (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_r)(\vec{e}_r \times \vec{v}_S) \\ &\quad + v_r\, (\vec{\Omega}_S \times \vec{e}_r) \;+\; v_r (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_r)\, \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_r)}_{\vec{\mathcal{O}}}\end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\;\; (\vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{e}_r &= (\vec{\Omega}_S \times \vec{v}_S) \cdot \vec{e}_r \;+\; (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_r)\, \underbrace{((\vec{e}_r \times \vec{v}_S) \cdot \vec{e}_r)}_{0} \\ &\quad + v_r\, \underbrace{((\vec{\Omega}_S \times \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r)}_{0}\end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\Longrightarrow \quad (\vec{\Omega} \times \vec{v})_r = ((\vec{\Omega}_S \times \vec{v}_S) \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r \tag{1.21*}$$

Aus der Tatsache, dass sowohl $\vec{v}_S$ als auch $\vec{\Omega}_S$ orthogonal zum radialen Einheitsvektor $\vec{e}_r$ und im Allgemeinen linear unabhängig sind, folgt die Identität:

$$(\vec{\Omega}_S \times \vec{v}_S) = ((\vec{\Omega}_S \times \vec{v}_S) \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r \tag{1.25}$$

[5] Pierre Simon Laplace, 1749-1827

[6] Eugenio Beltrami, 1835-1900

Die Bedingungen aus den Gleichungen (1.21*), (1.23) und (1.25) eingesetzt in Gleichung (1.20) ergeben:

$$\begin{aligned}(\vec{\Omega} \times \vec{v})_S = (\vec{\Omega}_S \times \vec{v}_S) \;+\; (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_r)(\vec{e}_r \times \vec{v}_S) \\ +\, v_r\,(\vec{\Omega}_S \times \vec{e}_r) \;-\; (\vec{\Omega}_S \times \vec{v}_S)\end{aligned} \tag{1.26}$$

1.7 Bemerkung: Aus der üblichen Definition des Skalarproduktes und der Lage der Vektoren $\vec{\Omega}$ und $\vec{e}_r$ in der Abbildung 1.1 erkennt man:

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_r &= |\,\vec{\Omega}\,| \cdot |\,\vec{e}_r\,| \cos\big(\frac{\pi}{2} - \varphi\big) \\ &= |\,\vec{\Omega}\,| \,\sin\varphi\end{aligned} \tag{1.27}$$

1.8 Definition: (CORIOLIS-Parameter f)
CORIOLIS-Parameter: $$f := 2\,|\,\vec{\Omega}\,|\,\sin\varphi \tag{1.28}$$

Mit Hilfe der letzten Definition ergeben sich die Komponenten des Beschleunigungtermes $(\vec{\Omega} \times \vec{v})$.

1.9 Definition: (radiale und tangentiale Komponenten des Beschleunigungtermes)
radialer Anteil:
$$\begin{aligned}(\vec{\Omega} \times \vec{v})_r &: S \times I \to \mathbb{R}^3 \\ (\vec{\Omega} \times \vec{v})_r &:= \vec{\Omega}_S \times \vec{v}_S\end{aligned} \tag{1.29}$$
tangentialer Anteil:
$$\begin{aligned}(\vec{\Omega} \times \vec{v})_S &: S \times I \to T_S \\ (\vec{\Omega} \times \vec{v})_S &:= \frac{1}{2} f(\vec{e}_r \times \vec{v}_S) \;+\; v_r\,(\vec{\Omega}_S \times \vec{e}_r)\end{aligned} \tag{1.30}$$

1.3 Geopotential

Häufig wird in der Meteorologie die radiale Koordinate durch das Geopotential ausgedrückt. Dazu benötigt man zunächst zwei Funktionen r_b und r_t, mit denen anschließend Unter- und Oberrand einer betrachteten Schicht definiert wird. Abbildung 1.2 verdeutlicht die Situation. $r_0 := k_0 \cdot |\,\vec{x}\,|$ $(k_0 \in \mathbb{R}^+)$ sei dabei eine feste Bezugshöhe, z.B. die mittlere Meereshöhe (Normal Null).

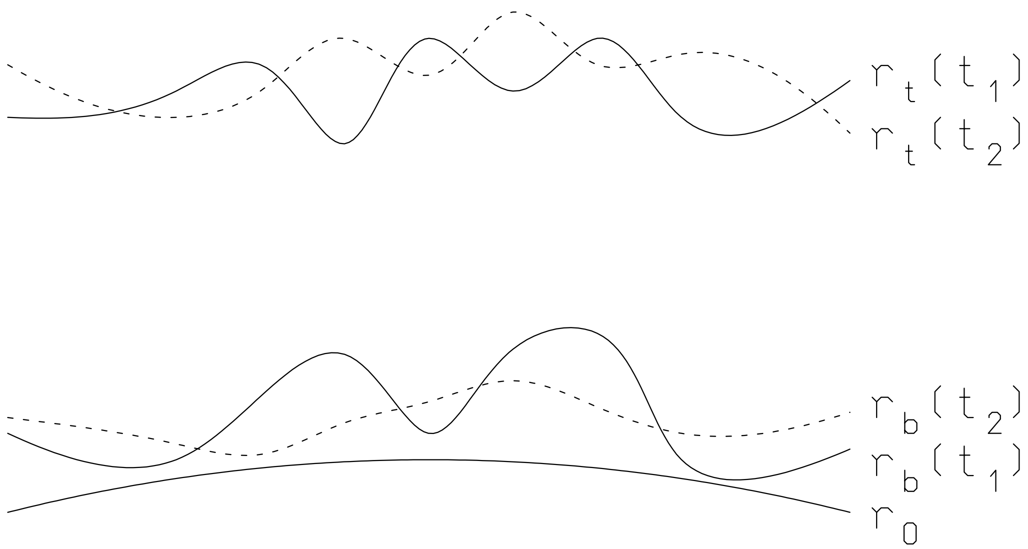


Abbildung 1.2: Unterrand r_b und Oberrand r_t zu den Zeitpunkten t_1 (durchgezogene Linien) und t_2 (gestrichelte Linien)

1.10 Definition: (Unter- und Oberrand)

Seien r_t und $r_b : S \times I \to \mathbb{R}$ zwei C^1-Funktionen mit der Bedingung $r_e \leq r_b(\vec{x}_0, t_0) < r_t(\vec{x}_0, t_0)$ in jedem Punkt $(\vec{x}_0, t_0) \in S \times I$.

Damit werden Unter- und Oberrand des Systems definiert, die sich mit der Zeit verändern können.

Unterrand:
$$B(t) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |\vec{x}\,| = r_b \left(r_e \frac{\vec{x}}{|\vec{x}\,|}, t \right) \right\} \tag{1.31}$$

Oberrand:
$$T(t) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |\vec{x}\,| = r_t \left(r_e \frac{\vec{x}}{|\vec{x}\,|}, t \right) \right\} \tag{1.32}$$

Insbesondere gibt es zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ und jedem Ortspunkt $\vec{x} \in S$ genau einen Punkt $\vec{x}_b \in B$ und genau einen Punkt $\vec{x}_t \in T$.

1.11 Definition: (Geopotential)

Geopotential:
$$\widetilde{\phi} : S \times \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$$
$$\widetilde{\phi}\,(\vec{x}, \widetilde{r}, t) := \int_{r_0}^{\widetilde{r}(\vec{x},t)} g \; dr = g\Big(\widetilde{r}(\vec{x}, t) - r_0\Big) \tag{1.33}$$
$$\phi, H : S \times I \to \mathbb{R}$$
$$\phi\,(\vec{x}, t) := \widetilde{\phi}\,(\vec{x}, r_t, t) = g\, r_t(\vec{x}, t) - g\, r_0 \tag{1.34}$$

Orografie:
$$H\,(\vec{x}, t) := \widetilde{\phi}\,(\vec{x}, r_b, t) = g\, r_b(\vec{x}, t) - g\, r_0 \tag{1.35}$$

Die angegebene Definition des Geopotentials stammt von J.R. Holton [23].

1.4 Inkompressibilität

Die erste Vereinfachung der Ausgangsgleichungen ist die Inkompressibilität. Das ist die Annahme, dass sich die Dichte $\rho \neq 0$ längs einer Trajektorie nicht ändert,

$$\text{d.h.} \quad \frac{d\rho}{dt} = 0\,. \tag{1.36}$$
$$\text{aus (1.10):} \quad -\rho \nabla \vec{v} = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \nabla \vec{v} = 0 \tag{1.37}$$

$\nabla \vec{v}$ kann in einen radialen und einen tangentialen Anteil $\nabla_S\, \vec{v}_S$ zerlegt werden. Die tangentiale Komponente ist als Funktion der radialen Richtung r eine Konstante. Die Zerlegung gelingt mit der Definition der integrierten radialen Geschwindigkeit v_r^*.

1.12 Definition: (integrierte radiale Geschwindigkeit)

integrierte radiale Geschwindigkeit:
$$v_r^* : S \times \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$$
$$v_r^*\;(\vec{x}, r^*, t) := \int_{r_0}^{r^*} \big(\nabla \vec{v} - \nabla_S\, \vec{v}_S\big) dr \tag{1.38}$$

Mittels dieser Definition folgt:

$$v_r^*\;(\vec{x}, r_t, t) - v_r^*\;(\vec{x}, r_b, t) = \int_{r_b(\vec{x},t)}^{r_t(\vec{x},t)} \big(\nabla \vec{v} - \nabla_S\, \vec{v}_S\big) dr =$$
$$\int_{r_b(\vec{x},t)}^{r_t(\vec{x},t)} \underbrace{\nabla \vec{v}}_{0}\, dr - \nabla_S\, \vec{v}_S \cdot \int_{r_b(\vec{x},t)}^{r_t(\vec{x},t)} 1\; dr = -\nabla_S\, \vec{v}_S \Big(r_t(\vec{x}, t) - r_b(\vec{x}, t) \Big) \tag{1.39}$$

Es werden materielle Randflächen angenommen, d.h. Volumenelemente, die zu Beginn in der Schicht liegen, können diese nicht verlassen.
Damit gilt für die Vertikalgeschwindigkeit an den Rändern:

$$v_r^*(\vec{x}, r_b, t) = \frac{dr_b}{dt}(\vec{x}, t) \quad \text{und} \quad v_r^*(\vec{x}, r_t, t) = \frac{dr_t}{dt}(\vec{x}, t) \tag{1.40}$$

Diese Bedingung eingesetzt in Gleichung (1.39) und Multiplikation der Gleichung mit g ergibt:

$$g\left(\frac{dr_t}{dt} - \frac{dr_b}{dt}\right) = -g\Big(r_t - r_b\Big) \cdot \nabla_S \, \vec{v}_S \tag{1.41}$$

Unter Verwendung der Definitionen von Geopotential (1.34) und Orografie (1.35) folgt:

$$\frac{d(\phi - H)}{dt} = -\,(\phi - H)\,\nabla_S \, \vec{v}_S \tag{1.42}$$

1.5 Hydrostatische Approximation

Mit der hydrostatischen Approximation wird das Verhalten des Systems in radialer Richtung vereinfacht. Dazu wird Gleichung (1.11) getrennt nach tangentialen (1.43) und radialen Komponenten (1.44) betrachtet.

$$\frac{d\vec{v}_S}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla_S \, p - f(\vec{e}_r \times \vec{v}_S) - 2\,v_r(\vec{\Omega}_S \times \vec{e}_r) \tag{1.43}$$

$$\underbrace{\frac{dv_r}{dt}}_{I} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}(\nabla p \cdot \vec{e}_r)}_{II} - \underbrace{2\,(\vec{\Omega}_S \times \vec{v}_S) \cdot \vec{e}_r}_{III} - \underbrace{g}_{IV} \tag{1.44}$$

Aus Messungen in der Natur kennt man typische Größenordnungen der einzelnen Terme der letzten Gleichung. Nach A. Hense [20] hat Term I die Ordnung $10^{-5}\,\mathrm{ms}^{-2}$, Term III die Ordnung $10^{-3}\,\mathrm{ms}^{-2}$ und die anderen beiden Terme die Ordnung $10\,\mathrm{ms}^{-2}$. Sie sind also mindestens um vier Potenzordnungen größer. Mittels dieser Skalenanalyse gelangt man zu dem Schluss, dass die Terme I und III vernachlässigt werden können. Damit erhält man die hydrostatische Approximation (1.45). Diese besagt, dass die Druckabnahme mit der Höhe konstant ist.

$$\nabla p \cdot \vec{e}_r = \frac{\partial p}{\partial r} = -g\rho \tag{1.45}$$

Unter den zusätzlichen Annahmen, dass der Druck am Oberrand des Systems verschwindet und die Dichte mit der Höhe ebenfalls konstant ist, folgt:

$$\int_{r_1}^{r_t(\vec{x},t)} \frac{\partial p}{\partial r}\,dr = -\int_{r_1}^{r_t(\vec{x},t)} g\rho\,dr \tag{1.46}$$

$$\underbrace{p(r_t(\vec{x},t))}_{0} - p(r_1) = -g\rho\,(r_t(\vec{x},t) - r_0 + r_0 - r_1) \tag{1.47}$$

$$\text{mit (1.34):} \qquad p(r_1) = \rho\phi + g\rho\,(r_0 - r_1) \tag{1.48}$$

Dabei sei $r_1 := k_1 \cdot r_0$ ($k_1 \in \mathbb{R}^+$) eine beliebige Höhe und wegen

$$\nabla_S\,(r_0 - r_1) = k_0(1 - k_1)\,\nabla_S\,|\,\vec{x}\,| = 0 \tag{1.49}$$

ist $\nabla_S\, p$ unabhängig von der Höhe r_1. Daraus folgt in jeder Höhe:

$$\frac{1}{\rho}\nabla_S\, p = \nabla_S\, \phi \tag{1.50}$$

Eingesetzt in Gleichung (1.43) ergibt sich für die tangentiale Komponente in den Bewegungsgleichungen (1.11):

$$\frac{d\vec{v}_S}{dt} \;=\; -\nabla_S\,\phi - f(\vec{e}_r \times \vec{v}_S) - 2\,v_r(\vec{\Omega}_S \times \vec{e}_r) \tag{1.43*}$$

1.6 Energiebetrachtung

Durch eine energetische Betrachtung wird sich Gleichung (1.43*) weiter vereinfachen und das Gleichungssystem unter dem Aspekt der Erhaltung der kinetischen Energie geschlossen.

1.13 Definition: (kinetische Energie)

kinetische Energie:

$$\begin{aligned} &K : \mathbb{R}^3 \times I \to \mathbb{R} \\ &K := \frac{1}{2}|\vec{v}\,|^2 \;=\; \frac{1}{2}\,\vec{v}\cdot\vec{v} \end{aligned} \tag{1.51}$$

Die Energiebetrachtung bezieht sich auf die Änderung der kinetischen Energie im LAGRANGEschen Sinne (totalzeitliche Änderung):

$$\frac{dK}{dt} \;=\; \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.52}$$

Multipliziert man die Bewegungsgleichung (1.11) mit $\vec{v}$, dann erkennt man, dass der CORIOLIS-Term $(\vec{\Omega} \times \vec{v})$ keinen Beitrag zur totalzeitlichen Änderung der kinetischen Energie liefert, da

$$\vec{v}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{v}) \;=\; 0 \quad . \tag{1.53}$$

Verwendet man die Aufspaltung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ aus Gleichung (1.19) in (1.51), so ergibt sich die kinetische Energie zu

$$K := \frac{1}{2}\,\vec{v}_S\cdot\vec{v}_S \;+\; \frac{1}{2}\,v_r^2 \quad . \tag{1.51*}$$

Daraus folgt für die totalzeitliche Änderung der kinetischen Energie

$$\frac{dK}{dt} = \vec{v}_S\cdot\frac{d\vec{v}_S}{dt} \;+\; v_r\cdot\underbrace{\frac{dv_r}{dt}}_{I} \quad . \tag{1.52*}$$

Eine Annahme der hydrostatischen Approximation (1.45) ist, dass der Term I in Gleichung (1.44) klein ist und deshalb vernachlässigt wird. Aus demselbem Grund wird dies auch in Gleichung (1.52*) angewendet und es gilt

$$\frac{dK}{dt} = \vec{v}_S\cdot\frac{d\vec{v}_S}{dt} \tag{1.52**}$$

unter der Annahme der hydrostatischen Approximation.
Welche Konsequenz hat das nun für den CORIOLIS-Anteil in Gleichung (1.43*) ?
Durch Multiplikation von Gleichung (1.43*) mit $\vec{v}_S$ ergibt sich für den CORIOLIS-Anteil $\vec{v}_S\cdot(-2\,(\vec{\Omega}\times\vec{v})_S)$:

$$-2\,\vec{v}_S\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{v})_S = \underbrace{-f\,\vec{v}_S\cdot(\vec{e}_r\times\vec{v}_S)}_{0} - \underbrace{2v_r\,\vec{v}_S\cdot(\vec{\Omega}_S\times\vec{e}_r)}_{*} \tag{1.54}$$

Der Term $(*)$ ist im Allgemeinen ungleich 0. Das bedeutet, dass durch den CORIOLIS-Anteil auf der Tangentialebene ein Beitrag zur totalzeitlichen Änderung der kinetischen Energie induziert wird. Das widerspricht aber der vorherigen Aussage, dass der CORIOLIS-Term keinen Beitrag zur totalzeitlichen Änderung der kinetischen Energie liefert. Dies lässt sich jedoch dadurch erreichen, dass der letzte Term in Gleichung (1.43*) vernachlässigt wird.

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d\vec{v}_S}{dt} = -\nabla_S\,\phi - f(\vec{e}_r \times \vec{v}_S) \tag{1.55}$$

1.7 Anfangswertproblem

Die Gleichungen (1.42) und (1.55) sind die Flachwassergleichungen. Ihren Namen haben sie erhalten, weil sie durch die Inkompressibilität eine typische Eigenschaft des Wassers beschreiben und die horizontale Ausdehnung des Modellgebietes sehr viel größer ist als die vertikale. Nur in diesem Fall ist die hydrostatische Approximation physikalisch sinnvoll. Die Flachwassergleichungen beschreiben eine Strömung in einer hydrostatisch geschichteten inkompressiblen Schicht.

Seien $\phi_o, H_o : S \to \mathbb{R}$ und $\vec{v}_o : S \to T_S$ vorgegebene Anfangsfelder des Geopotentials, der Orografie und der Geschwindigkeit. Damit ergibt sich das Anfangswertproblem der Flachwassergleichungen auf der Kugeloberfläche S:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d(\phi - H)}{dt} &= -\,(\phi - H)\,\nabla_S\,\vec{v}_S && \text{in } S \times I\\ \frac{d\vec{v}_S}{dt} &= -\nabla_S\,\phi - f(\vec{e}_r \times \vec{v}_S) && \text{in } S \times I\\ \phi(\vec{x},0) &= \phi_o(\vec{x}\,) && \text{in } S\\ H(\vec{x},0) &= H_o(\vec{x}\,) && \text{in } S\\ \vec{v}_S(\vec{x},0) &= \vec{v}_o(\vec{x}\,) && \text{in } S \end{aligned}} \tag{1.56}$$

Alternativ zu dieser Darstellung wird im Folgenden mittels einer Aufspaltung des Geopotentials ϕ in einen Grundzustand $\overline{\phi}$ und eine Störung $\widehat{\phi}$ eine weitere Version der Flachwassergleichungen angegeben. Der Grundzustand ist zeitlich und räumlich konstant.

1.14 Definition: (Grundzustand und Störung des Geopotentials)

Störung: $\widehat{\phi} : S \times I \to \mathbb{R}$

Grundzustand: $\overline{\phi} = const \neq 0$ (1.57)

$$\widehat{\phi}(\vec{x},t) := \phi(\vec{x},t) \;-\; H(\vec{x},t) \;-\; \overline{\phi} \tag{1.58}$$

Bei den Differentiationen führt das zu:

$$\frac{\partial\widehat{\phi}}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} \;-\; \frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.59}$$

$$\nabla\widehat{\phi} = \nabla\phi \;-\; \nabla H \tag{1.60}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d\widehat{\phi}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \;-\; \frac{dH}{dt} \tag{1.61}$$

$$\Longrightarrow \qquad \nabla_S\,\phi = \nabla_S\,\widehat{\phi} \;+\; \nabla_S\,H \tag{1.62}$$

Mit diesen Aussagen ergibt sich die alternative Darstellung der Flachwassergleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\widehat{\phi}}{dt} &= -\left(\widehat{\phi} + \overline{\phi}\right) \nabla_S\, \vec{v}_S && \text{in } S \times I \\ \frac{d\vec{v}_S}{dt} &= -\nabla_S \left(\widehat{\phi} + H\right) - f(\vec{e}_r \times \vec{v}_S) && \text{in } S \times I \\ \widehat{\phi}(\vec{x},0) &= \phi_o(\vec{x}\,) - H_o(\vec{x}\,) - \overline{\phi} && \text{in } S \\ H(\vec{x},0) &= H_o(\vec{x}\,) && \text{in } S \\ \vec{v}_S(\vec{x},0) &= \vec{v}_o(\vec{x}\,) && \text{in } S \end{aligned}} \tag{1.63}$$

1.15 Bemerkung: Mit dem Konzept der Flachwassergleichungen lassen sich dreidimensionale Mehrschichtmodelle entwickeln, die in jeder Schicht eine Lösung der Flachwassergleichungen besitzen. Die beiden Meteorologen Y.-J.G. Hsu und A. Arakawa [24] haben 1990 ein solches Modell mit einer isentropen Vertikalkoordinate vorgestellt.

Kapitel 2

LAGRANGE-GALERKIN-Methode

Bei der LAGRANGEschen Betrachtungsweise wird der zeitliche Verlauf der Bewegung eines Teilchens entlang seiner Trajektorie oder Charakteristik verfolgt. Deshalb ist die numerische Umsetzung dieses Ansatzes in der Literatur auch unter „Charakteristikenverfahren“ bekannt. Eine weitere Bezeichnungen ist „Transport-Diffusions-Algorithmus“, die z.B. von M. Geiben [12] benutzt wird.
In der meteorologischen Fachliteratur finden hauptsächlich zwei Bezeichnungen Verwendung. Die allgemeinere Bezeichnung „Semi-implizite Semi-LAGRANGE-Methode“ wird häufig in Verbindung mit einer räumlichen Diskretisierung der Differentialgleichungen durch finite Differenzen gebraucht (z.B. [1], [34], [39], [45], [50]).
Bei einer Diskretisierung mit finiten Elementen - die Art und Weise, die in der vorliegenden Diplomarbeit verwendet wird - ist seit Mitte der neunziger Jahre die Bezeichnung „LAGRANGE-GALERKIN[1]-Verfahren“ geläufig (z.B. [15], [35]). Die Details der räumlichen Diskretisierung werden im nächsten Kapitel dargestellt.
Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der zeitlichen Diskretisierung der Flachwassergleichungen. Dazu wird im nächsten Abschnitt eine kurze Einführung in die Semi-LAGRANGE-Methode gegeben und mittels einiger Definitionen die Verschiebung eines Teilchens längs seiner Trajektorie in einem Zeitschritt festgelegt. Anschließend werden zwei allgemeinere Problemstellungen der Advektion als Vorbereitung auf die Diskretisierung der Flachwassergleichungen, die im darauf folgenden Unterkapitel erfolgt, betrachtet. Aus der diskretisierten Form wird dann im letzten Abschnitt eine elliptische Differentialgleichung vom HELMHOLTZ[2]-Typ hergeleitet, deren numerische Lösung mittels finiter Elemente Gegenstand des nächsten Kapitels ist.

2.1 Diskretisierung in der Zeit

Die zeitliche Diskretisierung wird durch ein Semi-LAGRANGE-Zweischrittverfahren realisiert. Eine Übersicht über diese Methode und die Arbeiten, die bis 1990 zu diesem Thema erschienen sind, bietet der Artikel von A. Staniforth und J. Côté [44]. Die Idee dabei ist, die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe durch ihre Verschiebung längs von Trajektorien, die durch ein vorgegebenes Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ festgelegt werden, zu realisieren. Abbildung 2.1 verdeutlicht das Vorgehen bei einer ausgewählten Trajektorie, die zum Zeitpunkt $t_n + \Delta t$ durch den Punkt $\vec{x}_m$ geht. Aus den bekannten Geschwindigkeitsfeldern zu den Zeitpunkten t_n und t_{n-1} wird ein Geschwindigkeitsfeld im Zwischenzeitpunkt t_n^* extrapoliert und dann derjenige Punkt P^0 bestimmt, der auf der Trajektorie liegt. Somit erhält man eine Verschiebung $\vec{\xi}_m$ für den halben Zeitschritt und den Startpunkt P^- der Trajektorie über die Verdoppelung der Verschiebung.

[1] Boris Grigorewitsch Galerkin, 1871-1945
[2] Hermann Helmholtz, 1821-1894

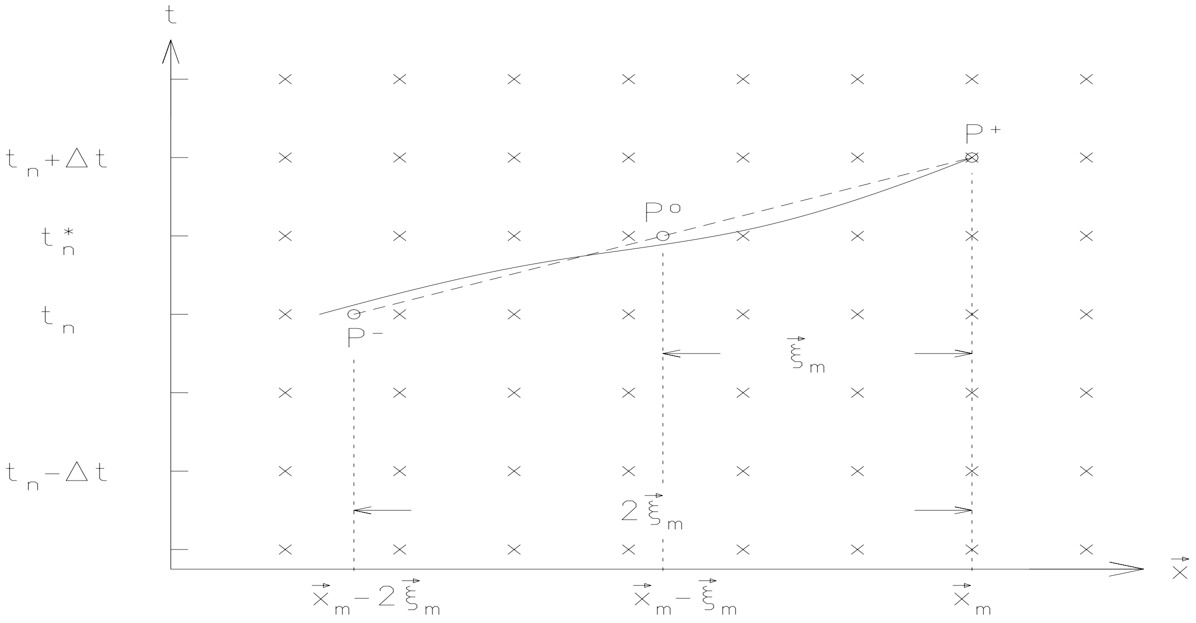


Abbildung 2.1: Zweischrittverfahren nach A. Staniforth und J. Côté [44]
Trajektorie (durchgezogen) und ihre Approximation (gestrichelt)

Sei $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ eine äquidistante Zerlegung des Intervalls I in N Zeitschritte $(N \in \mathbb{N})$ der Länge Δt.

$$\Delta t := \frac{T}{N} \tag{2.1}$$

Zu jedem so festgelegten Zeitpunkt t_n wird ein Zwischenzeitpunkt t_n^* definiert.
2.1 Definition: (Zwischenzeitpunkt t_n^*)

$$t_n^* := \frac{1}{2}\,(t_n + t_{n+1}) \;=\; t_n + \frac{1}{2}\Delta t \qquad n \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\} \tag{2.2}$$

Alle $(2\,N+1)$ diskreten Zeitpunkte werden zur Menge I_t zusammengefasst:
2.2 Definition: (Menge I_t der diskreten Zeitpunkte)

$$I_t := \left\{t_0, t_0^*, t_1, t_1^*, \ldots, t_{N-1}, t_{N-1}^*, t_N\right\} \tag{2.3}$$

In den Zwischenzeitpunkten t_n^* wird ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{V}^*$ mittels der bekannten Geschwindigkeitsfelder der letzten beiden Zeitpunkte t_n und t_{n-1} extrapoliert:
2.3 Definition: (extrapolierte Geschwindigkeit $\vec{V}^*$)

extrapolierte Geschwindigkeit: $\vec{V}^* : S \times I_t \to T_S$

$$\vec{V}^*(\vec{x}, t_n^*) := \frac{3}{2}\,\vec{v}_S(\vec{x}, t_n) - \frac{1}{2}\,\vec{v}_S(\vec{x}, t_n - \Delta t) \tag{2.4}$$

Dabei sei $\vec{v}_S(\vec{x}, t_0 - \Delta t) := \vec{v}_S(\vec{x}, t_0)$.

C. Temperton und A. Staniforth [48] schlagen mittels dieses extrapolierten Geschwindigkeitsfeldes ein implizites iteratives Verfahren (2.5) zur Bestimmung der Verschiebung in einer Ebene mit geeignetem Startwert $\vec{\xi}_*^{(0)}$ vor.

2.4 Definition: (Iteration der Verschiebung in einer Ebene)

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_*^{(k)} &: S \to T_S,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ \vec{\xi}_*^{(0)}(\vec{x}\,) &:= \vec{\mathcal{O}} \\ \vec{\xi}_*^{(k+1)}(\vec{x}\,) &= \frac{\Delta t}{2} \cdot \vec{V}^*(\vec{x} - \vec{\xi}_*^{(k)}(\vec{x}\,), t_n^*) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Es gilt aber zu beachten, dass das betrachtete Gebiet keine Ebene, sondern eine Kugel ist und daher ein solcher Verschiebungsvektor $\vec{\xi}$ gesucht wird, der

- in der Tangentialebene T_S dieselbe Richtung wie der Vektor $\vec{\xi}_*$ hat,
- und so lang ist, dass seine Projektion auf die Kugeloberfläche, genau von der Länge des Vektors $\vec{\xi}_*$ ist.

Die folgenden Abbildung verdeutlicht die Situation. Es ist offensichtlich, dass der Vektor $\vec{\xi}_*$ nur mit einem konstanten Faktor $c_* \geq 0$ multipliziert werden muss, um den Vektor $\vec{\xi}$ zu erhalten.

$$\vec{\xi} := c_* \cdot \vec{\xi}_* \tag{2.6}$$

e sei der zu einem Bogen der Länge $|\vec{\xi}_*|$ auf der Erdoberfläche korrespondierende Öffnungswinkel im Erdmittelpunkt E.

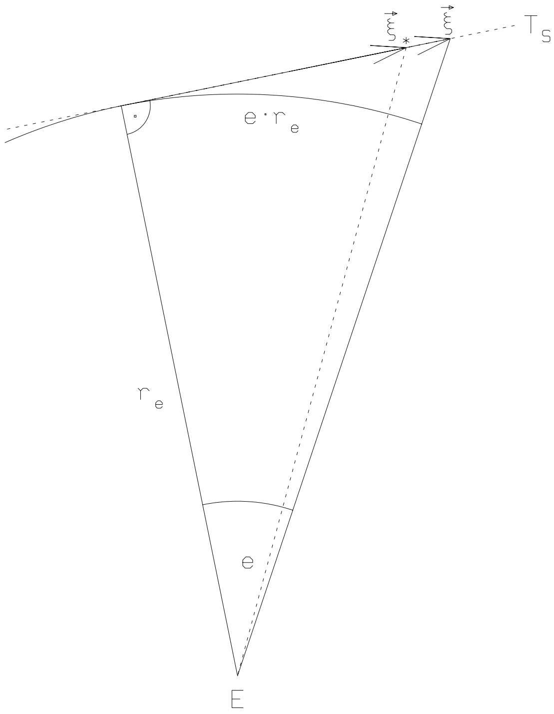
$$e := \frac{|\vec{\xi}_*|}{r_e} \tag{2.7}$$

Somit ergibt sich folgender Zusammenhang für den Tangens von e :

$$\begin{aligned} \tan e = \frac{|\vec{\xi}|}{r_e} &= \frac{c_* \cdot |\vec{\xi}_*|}{r_e} \\ = \frac{c_* \cdot e \cdot r_e}{r_e} &= c_* \cdot e \end{aligned} \tag{2.8}$$

Daher berechnet sich der konstante Faktor c_*:

$$c_* := \frac{\tan e}{e} \tag{2.9}$$



Mit diesen Betrachtungen wird nun ein modifiziertes implizites Iterationsverfahren zur Bestimmung der Verschiebung auf der Kugel definiert.

2.5 Definition: (Iteration der Verschiebung für die Kugel)

$$\begin{aligned} \vec{\xi}^{(k)}, \vec{\xi}_*^{(k)} &: S \to T_S,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ c_*, e &: S \to \mathbb{R}_0^+ \\ \vec{\xi}^{(0)}(\vec{x}\,) &:= \vec{\mathcal{O}} \\ \vec{\xi}_*^{(k+1)}(\vec{x}\,) &= \frac{\Delta t}{2} \cdot \vec{V}^*(\vec{x} - \vec{\xi}^{(k)}(\vec{x}\,), t_n^*) \\ e &= \frac{|\vec{\xi}_*^{(k+1)}|}{r_e} \\ c_* &= \frac{\tan e}{e} \\ \vec{\xi}^{(k+1)} &= c_* \cdot \vec{\xi}_*^{(k+1)} \end{aligned} \tag{2.10}$$

A. McDonald [29] hat gezeigt, dass bereits wenige Iterationen die Verschiebung gut approximieren. In den getesteten Fällen, die im fünften Kapitel vorgestellt werden, haben sich zwei Iterationsschritte als ausreichend erwiesen.

2.6 Definition: (Verschiebung $\vec{\xi}$)

Verschiebung:

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &: S \to T_S \\ \vec{\xi}(\vec{x}\,) &:= \vec{\xi}^{(2)}(\vec{x}\,) \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.2 Problemstellungen der Advektion

In Vorbereitung der Diskretisierung der Flachwassergleichungen werden zunächst noch zwei einfachere Probleme untersucht, um das prinzipielle Vorgehen bei der Diskretisierung von Differentialgleichungen mit der Semi-LAGRANGE-Technik darzulegen.
Gegeben sei ein festes Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}_o$ und ein Anfangszustand ϕ_o des Geopotentials.

2.7 Definition: (Problem der passiven Advektion)

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \qquad \text{in } S \times I \tag{2.12}$$

$$\vec{v}_S(\vec{x},t) = \vec{v}_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \times I \tag{2.13}$$

$$\phi(\vec{x},0) = \phi_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \tag{2.14}$$

Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}_s$ bleibt während der ganzen Betrachtung konstant und das Geopotentialfeld ϕ wird mit der Zeit längs der Trajektorien verschoben. Mittels der diskreten Zeitpunkte t_n und der Verschiebung $\vec{\xi}$ ergibt sich die diskrete Formulierung des Problems. Dabei wird die totalzeitliche Ableitung durch den Differenzenquotienten längs einer Trajektorie ersetzt.

2.8 (zeitliche Diskretisierung des Problems der passiven Advektion)

$$\frac{\phi(\vec{x},t_{n+1}) - \phi(\vec{x}-2\,\vec{\xi},t_n)}{\Delta t} = 0 \qquad \text{in } S \times I_t \tag{2.15}$$

$$\vec{v}_S(\vec{x},t_n) = \vec{v}_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \times I_t \tag{2.16}$$

$$\phi(\vec{x},0) = \phi_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \tag{2.17}$$

Zusätzlich seien nun noch zwei feste Felder $\widehat{d}_o$ und $\overline{d_o}$ gegeben. Damit ergibt sich das Problem der erzwungenen Advektion.

2.9 Definition: (Problem der erzwungenen Advektion)

$$\frac{d\phi}{dt} = \widehat{d} + \overline{d} \qquad \text{in } S \times I \tag{2.18}$$

$$\widehat{d}(\vec{x},t) = \widehat{d}_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \times I \tag{2.19}$$

$$\overline{d}\,(\vec{x},t) = \overline{d_o}(\vec{x}) \qquad \text{in } S \times I \tag{2.20}$$

$$\vec{v}_S(\vec{x},t) = \vec{v}_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \times I \tag{2.21}$$

$$\phi(\vec{x},0) = \phi_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \tag{2.22}$$

Bei der Diskretisierung wird das erste Feld $\widehat{d}$ in den Trajektorienmittelpunkten ausgewertet und das zweite Feld $\overline{d}$ durch ein gewichtetes Mittel der Funktionswerte in Anfangs- und Endpunkt der Trajektorien ersetzt .

2.10 (zeitliche Diskretisierung des Problems der erzwungenen Advektion)

$$\begin{aligned}\frac{\phi(\vec{x},t_{n+1}) - \phi(\vec{x}-2\,\vec{\xi},t_n)}{\Delta t} = {} & \widehat{d}(\vec{x}-\vec{\xi},t_n^*) \; + \\ & \omega\cdot\overline{d}\,(\vec{x},t_{n+1}) \; + \; (1-\omega)\cdot\overline{d}\,(\vec{x}-2\,\vec{\xi},t_n) \qquad \text{in } S \times I_t\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\widehat{d}(\vec{x},t_n^*) = \widehat{d}_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \times I_t \tag{2.24}$$

$$\overline{d}\,(\vec{x},t_n) = \overline{d_o}(\vec{x}) \qquad \text{in } S \times I_t \tag{2.25}$$

$$\vec{v}_S(\vec{x},t_n) = \vec{v}_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \times I_t \tag{2.26}$$

$$\phi(\vec{x},0) = \phi_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \tag{2.27}$$

$\omega \in \; (0,1]$ sei dabei ein festes Gewicht.

2.3 Diskretisierung der Flachwassergleichungen

In allen weiteren Betrachtungen sei nun die Orografie $H(\vec{x},t)$ als zeitlich festes Feld $H_o(\vec{x})$ vorgegeben. Die Flachwassergleichungen (1.63) haben damit folgendes Aussehen:

2.11 (modifizierte Flachwassergleichungen)

$$\frac{d\widehat{\phi}}{dt} = -\,\widehat{\phi}\,\nabla_S\,\vec{v}_S \;-\; \overline{\phi}\,\nabla_S\,\vec{v}_S \qquad \text{in } S \times I \tag{2.28}$$

$$\frac{d\vec{v}_S}{dt} = -f(\vec{e}_r \times \vec{v}_S) \;-\; \nabla_S\left(\widehat{\phi} + H\right) \qquad \text{in } S \times I \tag{2.29}$$

$$H(\vec{x},t) = H_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \times I \tag{2.30}$$

$$\widehat{\phi}\,(\vec{x},0) = \phi_o(\vec{x}) - H_o(\vec{x}) - \overline{\phi} \qquad \text{in } S \tag{2.31}$$

$$\vec{v}_S(\vec{x},0) = \vec{v}_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \tag{2.32}$$

Zur Diskretisierung dieses Systems nach dem vorgestellten Schema aus den Gleichungen (2.18) und (2.23) werden nun diejenigen Terme bestimmt, die in den Trajektorienmittelpunkten (wie Feld $\widehat{d}$ in (2.23)) bzw. als gewichtetes Mittel der Funktionswerte in Anfangs- und Endpunkt (wie Feld $\overline{d}$) ausgewertet werden. Eine der von C. Temperton und A. Staniforth [48] vorgeschlagenen Möglichkeit ist, die ersten Terme der rechten Seite in den Gleichungen (2.28) und (2.29) wie $\widehat{d}$ und die letzten Terme wie $\overline{d}$ zu behandeln. Man erkennt aus Gleichung (2.28), dass es dadurch notwendig ist, $\widehat{\phi}$ in den Trajektorienmittelpunkten auszuwerten. Diese Mittelpunkte werden zu den Zwischenzeitpunkten erreicht, die durch (2.2) definiert worden sind. Analog zur Geschwindigkeit (2.4) wird auch für das Geopotential $\widehat{\phi}$ ein Feld in den Zwischenzeitpunkten extrapoliert.

2.12 Definition: (extrapoliertes Geopotential $\widehat{\phi}^*$)

extrapoliertes Geopotential: $\widehat{\phi}^* : S \times I_t \to \mathbb{R}$

$$\widehat{\phi}^*(\vec{x},t_n^*) := \frac{3}{2}\,\widehat{\phi}(\vec{x},t_n) - \frac{1}{2}\,\widehat{\phi}(\vec{x},t_n - \Delta t) \tag{2.33}$$

Dabei sei $\widehat{\phi}(\vec{x},t_0 - \Delta t) := \widehat{\phi}(\vec{x},t_0)$.

Zur besseren Übersicht werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt. Indiziere $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ weiterhin einen Zeitpunkt.

2.13 Bezeichnungen:

$$\phi_{n+1}, \phi_n^*, \phi_n : S \to \mathbb{R}$$

$$\phi_{n+1}(\vec{x}) := \widehat{\phi}\,(\vec{x},t_{n+1}) \tag{2.34}$$

$$\phi_n^*(\vec{x}-\vec{\xi}) := \widehat{\phi}^*\,(\vec{x}-\vec{\xi},t_n^*) \tag{2.35}$$

$$\phi_n(\vec{x}-2\,\vec{\xi}) := \widehat{\phi}\,(\vec{x}-2\,\vec{\xi},t_n) \tag{2.36}$$

$$H_{n+1}, H_n : S \to \mathbb{R}$$

$$H_{n+1}(\vec{x}) := H(\vec{x},t_{n+1}) \tag{2.37}$$

$$H_n(\vec{x}-2\,\vec{\xi}) := H(\vec{x}-2\,\vec{\xi},t_n) \tag{2.38}$$

$$\vec{v}_{n+1}, \vec{v}_n^*, \vec{v}_n : S \to T_S$$

$$\vec{v}_{n+1}(\vec{x}) := \vec{v}_S(\vec{x},t_{n+1}) \tag{2.39}$$

$$\vec{v}_n^*(\vec{x}-\vec{\xi}) := \vec{V}^*(\vec{x}-\vec{\xi},t_n^*) \tag{2.40}$$

$$\vec{v}_n(\vec{x}-2\,\vec{\xi}) := \vec{v}_S(\vec{x}-2\,\vec{\xi},t_n) \tag{2.41}$$

$$\vec{c}_n^* : S \to T_S$$

$$\vec{c}_n^*(\vec{x}-\vec{\xi}) := \left[f(\vec{e}_r \times \vec{V}^*)\right](\vec{x}-\vec{\xi},t_n^*) \tag{2.42}$$

2.14 (zeitliche Diskretisierung der modifizierten Flachwassergleichungen)

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{n+1}(\vec{x}\,) - \phi_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,)}{\Delta t} &= -\,\phi_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \cdot \nabla_S\, \vec{v}_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) - \\ \overline{\phi}\cdot \Big[\omega\, \nabla_S\, \vec{v}_{n+1}(\vec{x}\,) \;&+\; (1-\omega)\, \nabla_S\, \vec{v}_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,)\Big] \qquad \text{in } S \times I_t \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{v}_{n+1}(\vec{x}\,) - \vec{v}_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,)}{\Delta t} &= -\,\vec{c}_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) - \\ \Big[\omega\, \nabla_S\, \big(\phi_{n+1} + H_{n+1}\big)(\vec{x}\,) \;&+\; (1-\omega)\, \nabla_S\, \big(\phi_n + H_n\big)(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,)\Big] \qquad \text{in } S \times I_t \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\phi_0(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \;=\; \phi_o(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \;-\; H_o(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \;-\; \overline{\phi} \qquad \text{in } S \tag{2.45}$$

$$\vec{v}_0(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \;=\; \vec{v}_o(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \qquad \text{in } S \tag{2.46}$$

$$H_1(\vec{x}\,) \;=\; H_o(\vec{x}\,) \qquad \text{in } S \tag{2.47}$$

$$H_0(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \;=\; H_o(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \qquad \text{in } S \tag{2.48}$$

$\omega \in \; (0, 1]$ sei wieder ein festes Gewicht.

2.4 Herleitung einer HELMHOLTZ-Gleichung

Multipliziert man die Gleichung (2.44) mit Δt und wendet anschließend auf diese Gleichung den ∇_S - Operator an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla_S\, \vec{v}_{n+1}(\vec{x}\,) &= \nabla_S\, \vec{v}_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \;-\; \Delta t\, \Big\{ \nabla_S\, \vec{c}_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \\ &+ \omega\, \nabla_S^2\, \big(\phi_{n+1} + H_{n+1}\big)(\vec{x}\,) \;+\; (1-\omega) \nabla_S^2\, \big(\phi_n + H_n\big)(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \Big\} \end{aligned} \tag{2.49}$$

Dies eingesetzt in Gleichung (2.43) ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{n+1}(\vec{x}\,) - \phi_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,)}{\Delta t} &= -\,\phi_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \cdot\; \nabla_S\, \vec{v}_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) + \;\omega\, \overline{\phi} \Delta t \Big\{ \nabla_S\, \vec{c}_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \\ &+ \omega\, \nabla_S^2\, \big(\phi_{n+1} + H_{n+1}\big)(\vec{x}\,) \;+\; (1-\omega)\, \nabla_S^2\, \big(\phi_n + H_n\big)(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \Big\} \\ &- \omega\, \overline{\phi} \cdot \nabla_S\, \vec{v}_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \;-\; (1-\omega)\, \overline{\phi} \cdot \nabla_S\, \vec{v}_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \end{aligned} \tag{2.50}$$

Nach Multiplikation mit Δt erhält man:

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(\vec{x}\,) - \phi_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) &= \omega^2\, \overline{\phi}\, (\Delta t)^2\, \nabla_S^2\, \phi_{n+1}(\vec{x}\,) \;+\; \omega^2\, \overline{\phi}\, (\Delta t)^2\, \nabla_S^2\, H_{n+1}(\vec{x}\,) \\ &+ \omega\, (1-\omega)\, \overline{\phi}\, (\Delta t)^2 \nabla_S^2\, \phi_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \;+\; \omega\, (1-\omega)\, \overline{\phi}\, (\Delta t)^2 \nabla_S^2\, H_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \\ &- \overline{\phi}\, \Delta t\, \nabla_S\, \vec{v}_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \;-\; \Delta t\, \phi_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \cdot \nabla_S\, \vec{v}_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \;+\; \omega\, \overline{\phi}\, (\Delta t)^2\, \nabla_S\, \vec{c}_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \end{aligned} \tag{2.51}$$

Nach einer weiteren Multiplikation mit der positiven Konstante $c \;:=\; \big(\omega^2\, \overline{\phi} (\Delta t)^2\big)^{-1} \;>\; 0$ ergibt sich eine HELMHOLTZ-Gleichung für ϕ_{n+1} :

$$\begin{aligned} -\nabla_S^2\, \phi_{n+1}(\vec{x}\,) \;+\; c \cdot \phi_{n+1}(\vec{x}\,) \;&=\; \frac{1-\omega}{\omega}\, \nabla_S^2\, \phi_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \;+\; c \cdot \phi_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \\ &+ \nabla_S^2\, H_{n+1}(\vec{x}\,) \;+\; \frac{1-\omega}{\omega}\, \nabla_S^2\, H_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \;-\; \frac{1}{\omega^2\, \Delta t}\, \nabla_S\, \vec{v}_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \\ &- \;\frac{1}{\omega^2\, \overline{\phi}\, \Delta t}\, \phi_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \cdot \nabla_S\, \vec{v}_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \;+\; \frac{1}{\omega}\, \nabla_S\, \vec{c}_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \end{aligned} \tag{2.52}$$

Diese Herleitung zeigt auf, wie sich das gekoppelte System (2.43) - (2.48) in jedem diskreten Zeitpunkt t_{n+1} auf die elliptische Differentialgleichung

$$L\phi_{n+1}(\vec{x}\,) = rhs_n(\vec{x}\,) \qquad \text{in } S \tag{2.53}$$

mit dem Differentialoperator

$$L := -\nabla_S^2 \, + c \quad , \tag{2.54}$$

der positiven Konstante

$$c = \frac{1}{\omega^2 \, \overline{\phi} (\Delta t)^2} \tag{2.55}$$

und der rechten Seite

$$\begin{aligned} rhs_n(\vec{x}\,) &:= \frac{1-\omega}{\omega} \nabla_S^2 \, \phi_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \; + \; c \cdot \phi_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \\ + \nabla_S^2 \, H_{n+1}(\vec{x}\,) \; &+ \; \frac{1-\omega}{\omega} \nabla_S^2 \, H_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \; - \; \frac{1}{\omega^2 \, \Delta t} \nabla_S \, \vec{v}_n(\vec{x} - 2\,\vec{\xi}\,) \\ - \frac{1}{\omega^2 \, \overline{\phi} \, \Delta t} \, \phi_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) &\cdot \nabla_S \, \vec{v}_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \; + \; \frac{1}{\omega} \nabla_S \, \vec{c}_n^*(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \qquad \text{in } S \end{aligned} \tag{2.56}$$

reduzieren lässt.

Kapitel 3

Finite Elemente

Zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen auf der Erdkugel wird am Meteorologischen Institut der Universität Bonn ein „**F**inite-**E**lemente-**M**odell für *m*eteorologische **E**xperimente (**FEM*m*E**)" entwickelt. Charakteristisch für **FEM*m*E** ist die Makrotriangulierung durch ein Dreiecksgitter, dem ein Fußball zugrunde liegt, die Verwendung eines dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems mit Ursprung im Erdmittelpunkt und eine Semi-LAGRANGE-Diskretisierung der zeitabhängigen Parameter.
In diesem Kapitel wird als erstes eine schwache Formulierung des im letzten Kapitel hergeleiteten HELMHOLTZ-Problems auf der Kugeloberfläche angegeben. Anschließend wird eine Approximation der Oberfläche durch Dreiecke vorgestellt und das HELMHOLTZ-Problem auf diesem Polyeder formuliert. Der letzte Abschnitt befasst sich mit der Diskretisierung durch finite Elemente. Es wird ein Lösungsraum eingeführt und das diskrete HELMHOLTZ-Problem in geeigneter Weise formuliert. Zum Schluß wird für lineare finite Elemente erläutert, wie man daraus ein lineares Gleichungssystem erhält und die benötigten Matrizen berechnet.

3.1 Schwache Formulierung

Zunächst ist es für die Diskretisierung notwendig, eine geeignete Formulierung des gestellten Problems zu finden. Bei finiten Elementen ist das nicht die Form der partiellen Differentialgleichung, das wäre Gleichung (2.53), sondern die dazu äquivalente Integralgleichung. Diese wird als schwache Formulierung des Problems bezeichnet. Als Vorbereitung wird eine zur 1. GREENschen[1] Formel (vergleiche G. Green [16]) analoge Aussage für den LAPLACE-BELTRAMI-Operator benötigt. Die Definitionen der verwendeten Vektorräume und der darin gültigen Operationen befinden sich im Anhang A.

3.1 Satz: Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein offenes Gebiet ohne Rand, d.h. $\partial G = \emptyset$. Für $\phi \in H^1_S(G)$ und $\psi \in H^1_S(G)$ gilt:

$$\int\limits_G -\nabla_S^2\, \phi \cdot \psi \, dxdydz = \int\limits_G \nabla_S\, \phi \cdot \nabla_S\, \psi \, dxdydz \tag{3.1}$$

Beweis: siehe G. Dziuk [10]

[1] George Green, 1793-1841

Das Skalarprodukt (im L^2) von $L\phi \in H^1_S(S)$ mit $\psi \in H^1_S(S)$ ergibt:

$$\langle L\phi, \psi\rangle = \int_S (-\nabla_S^2\,\phi \;+\; c\phi)\psi\; dxdydz \tag{3.2}$$

$$= -\int_S \nabla_S^2\,\phi \cdot \psi\; dxdydz + \int_S c\phi\psi\; dxdydz \tag{3.3}$$

Mit Satz 3.1 folgt:

$$\langle L\phi, \psi\rangle = \int_S \nabla_S\,\phi\nabla_S\,\psi\; dxdydz + \int_S c\phi\psi\; dxdydz \tag{3.4}$$

$$= \int_S (\nabla_S\,\phi\nabla_S\,\psi \;+\; c\phi\psi)\; dxdydz \tag{3.5}$$

3.2 Definition: (Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ und Funktional $f(\cdot)$)
Seien $\phi, \psi \in H^1_S(S)$ und $rhs_n \in L^2(S)$:

Bilinearform: $$a(\phi, \psi) := \langle L\phi, \psi\rangle \tag{3.6}$$

Funktional: $$f(\psi) := \int_S rhs_n \cdot \psi\; dxdydz \tag{3.7}$$

Mit diesen Vorbereitungen lässt sich jetzt die schwache Formulierung des HELMHOLTZ-Problems aus Gleichung (2.53) angeben:

3.3 Definition: (schwache Formulierung des elliptischen Problems aus (2.53))

Gesucht ist zu jedem diskreten Zeitpunkt t_{n+1} $(n \in \mathbb{N}_0)$ ein $\phi_{n+1} \in H^1_S(S)$ mit:

$$a(\phi_{n+1}, \psi) = f(\psi) \quad \forall \psi \in H^1_S(S) \tag{3.8}$$

3.4 Bemerkung: Nach G. Dziuk [10] ist die schwache Lösung von Gleichung (3.8) nur eindeutig bis auf eine additive Konstante. Deshalb wird zusätzlich gefordert, dass

$$\int_S \phi_{n+1}\; dxdydz = c_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.9}$$

mit einer festen Konstante c_0.

3.2 Triangulierung der Kugeloberfläche

In der meteorologischen Praxis war es bisher üblich, in Anlehnung an die geografische Einteilung der Erde in Längen- und Breitengrade, die Parameter an den Gitterpunkten dieses Koordinatensystems auszuwerten. Das liefert in den mittleren Breiten eine vernünftige Auflösung. In den Tropen erreicht man aber dadurch nur eine verhältnismäßig grobe und in der Umgebung der Pole eine sehr hohe Auflösung. Beide Effekte sind unerwünscht, weil sie die Ergebnisse einer Simulation verfälschen oder Stabilitätsprobleme hervorrufen können. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, ein Gitter anzugeben, das auf der ganzen Kugeloberfläche eine nahezu gleichmäßige Auflösung bietet.

Mögliche Kandidaten als Ausgangskörper einer ersten Näherung der Kugel sind die fünf PLATONischen[2] Körper Ikosaeder, Dodekaeder, Oktaeder, Würfel und Tetraeder (von links nach rechts und oben nach unten in Abbildung 3.1). Sie eignen sich besonders aufgrund der Tatsachen, dass alle Kanten gleich lang sind und sie in eine Kugel so eingefügt werden können, dass alle Ecken genau auf der Oberfläche liegen. In der Praxis sind bisher aber nur Ansätze mit dem Ikosaeder verfolgt worden (z.B. [2], [27], [36] und [43]).

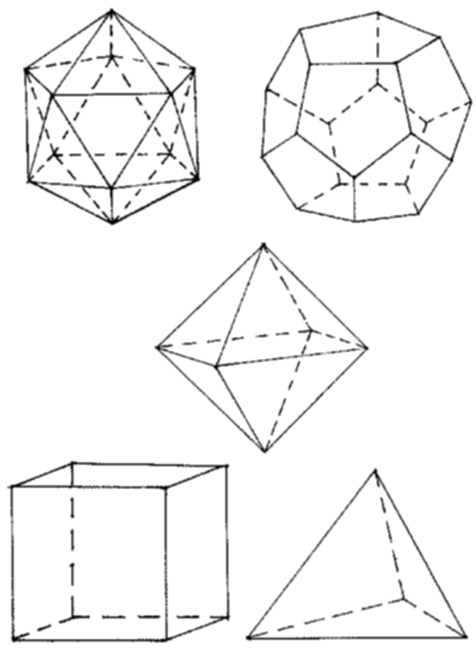


Abbildung 3.1: die fünf platonischen Körper

Schon ARCHIMEDES[3] hat einen weiteren Körper mit denselben Eigenschaften beschrieben, den man durch Kappen aller zwölf Ecken des Ikosaeders erhält. LEONARDO DA VINCI[4] hat ein heute noch erhaltenes Holzmodell dieses Körpers angefertigt (siehe Abbildung 3.2).

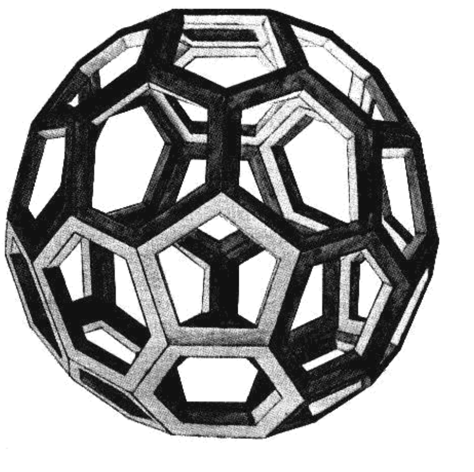


Abbildung 3.2: Holzmodell eines Fußballs von LEONARDO DA VINCI

1985 sorgte in der Chemie ein Artikel von H.W. Kroto et.al.[26] in *Nature* für Furore, in dem spektakuläre Ergebnisse mit C_{60}-Kohlenstoffmolekülen beschrieben worden sind, deren Struktur dem Gitternetz eines Fußballs gleichen. In Anlehnung an den Architekten R. BUCKMINSTER FULLER[5], der auf der Weltausstellung 1967 in Montreal mit seinem kugelförmigen Pavillon auffiel, ist dieses „Kugelmolekül" inzwischen auch unter den Namen Fulleren oder Buckyball bekannt geworden. Für die Beschreibung erhielten seine Entdecker 1996 den NOBELpreis[6] für Chemie.

Inspiriert von dieser Molekülstruktur wird in dieser Arbeit ein regelmäßiges Gitter für die Erdkugel entwickelt. Im Anhang B wird diese Makrotriangulierung ausführlich erläutert. Zunächst wird dabei das Gitter eines Fußballs berechnet und durch Zerlegung der Seitenflächen in Dreiecke das Makrogitter. Diese Dreiecke sind die Elemente der Triangulierung und ihre Ecken heißen Knoten der Triangulierung. Die Verfeinerung der Makrotriangulierung erfolgt durch Halbierung der Dreieckseiten. Dadurch entstehen in jedem Verfeinerungsschritt aus einem Dreieck drei neue Knoten und vier neue Dreiecke (siehe Anhang B.2). Die Abbildungen 3.3 bis 3.6 zeigen den Fußball, die Makrotriangulierung und zwei daraus verfeinerte Gitter. Tabelle 3.1 auf der nächsten Seite gibt einen Überblick über die Anzahl der Knoten, Dreiecke und Kanten der einzelnen Verfeinerungsstufen, sowie der längsten und kürzesten Kante als Indikator für das Auflösungsvermögen.

[2] Platon, 427-347 v.Chr.
[3] Archimedes von Syrakus, 287-212 v.Chr.
[4] Leonardo da Vinci, 1452-1519
[5] Richard Buckminster Fuller, 1895-1983
[6] Alfred Nobel, 1833-1896

Verfeinerungsstufe	#Knoten	#Dreiecke	#Kanten	längste Kante	kürzeste Kante
0	92	180	270	2625,493 km	2219,355 km
1	362	720	1080	1340,933 km	1113,949 km
2	1442	2880	4320	674,136 km	557,509 km
3	5762	11520	17280	337,531 km	278,821 km
4	23042	46080	69120	168,824 km	139,419 km

Tabelle 3.1: Anzahl der Knoten, Dreiecke und Kanten in jeder Stufe

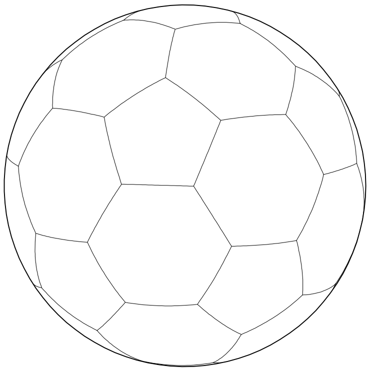


Abbildung 3.3: Fußball

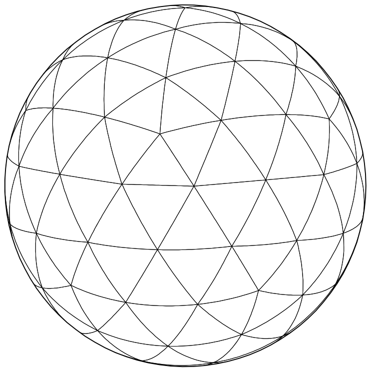


Abbildung 3.4: Makrotriangulierung

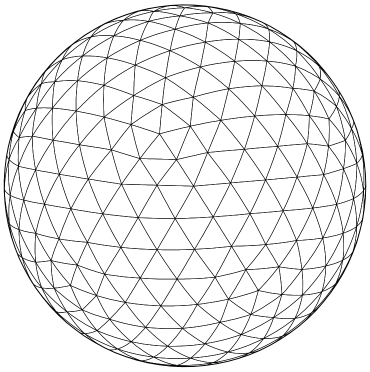


Abbildung 3.5: 1.Verfeinerung

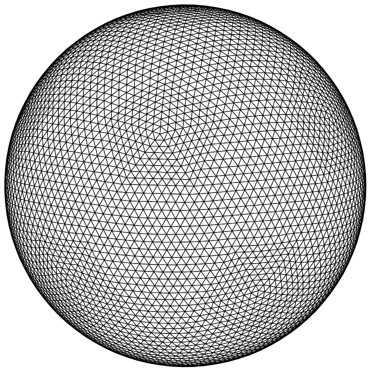


Abbildung 3.6: 3.Verfeinerung

Zum Ende dieses Abschnittes folgen noch vier Definitionen, die der richtigen Einordnung der angegebenen Triangulierung in die mathematische Theorie dienen.

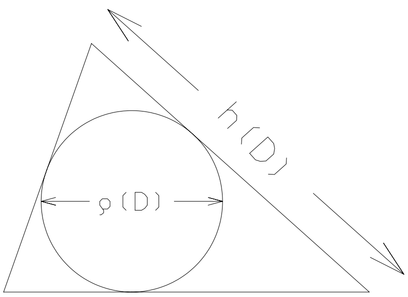
3.5 Definition: (Bezeichnungen im Dreieck D)
Sei D ein ebenes, abgeschlossenes Dreieck mit Ecken auf der Kugeloberfläche S und $\mathbb{D} = \{D\}$ die Menge dieser Dreiecke.

$h(D)$: längste Seite im Dreieck D

$\varrho(D)$: Inkreisdurchmesser des Dreiecks D

$\vec{n}_D$: nach außen gerichteter Normalenvektor senkrecht zur Fläche von D

$$h := \max_{D \in \mathbb{D}} h(D) \tag{3.10}$$



3.6 Definition: (Polyeder S_h)
Polyeder S_h:

$$S_h := \bigcup_{D \in \mathbb{D}} D \tag{3.11}$$

3.7 Definition: (zulässige Triangulierung)
Unter einer zulässigen Triangulierung von S versteht man eine Menge $\mathbb{D}_h$ von Dreiecken D für die gilt:

$$(1)\ S = \lim_{h \to 0} \bigcup_{D \in \mathbb{D}_h} D \tag{3.12}$$

$$(2)\ \forall D, D' \in \mathbb{D}_h, D \neq D' \text{ und } D \cap D' \neq \emptyset \tag{3.13}$$

$\Rightarrow D$ und D' haben entweder gemeinsame Kante oder Ecke

3.8 Definition: (reguläre Triangulierung)
Eine Familie von Triangulierungen $\mathbb{D}_h$ heißt regulär, falls es eine von h unabhängige Konstante C gibt, so dass

$$\forall D \in \mathbb{D}_h : \qquad \frac{h(D)}{\rho(D)} \leq C \tag{3.14}$$

gilt.

3.9 Bemerkung: Die im Anhang B.2 angegebenen Polyeder S_h der Makrotriangulierung und ihrer Verfeinerungen sind eine zulässige und reguläre Triangulierung von S.

3.3 Das HELMHOLTZ-Problem auf dem Polyeder S_h

Da die Hyperfläche S_h zwar stetig, aber nur stückweise differenzierbar ist, ist es notwendig eine geeignete Formulierung des HELMHOLTZ-Problems auf dem Polyeder S_h anzugeben. Dies geschieht, indem alle physikalischen Größen, Funktionen und Operatoren nur noch stückweise auf jedem Dreieck $D \in \mathbb{D}_h$ betrachtet werden. Die tangentialen Operatoren ∇_{S_h} und $\nabla^2_{S_h}$ werden deshalb nur stückweise definiert.

3.10 Definition: (tangentialer Gradient auf S_h)
Sei $q : S_h \to \mathbb{R}$ stückweise differenzierbar auf jedem Dreieck $D \in \mathbb{D}_h$. Dann ist der tangentiale Gradient von q auf S_h:

$$\nabla_{S_h} q := \nabla q - \vec{n}_D(\vec{n}_D \cdot \nabla q) \tag{3.15}$$

3.11 Definition: (tangentiale Divergenz auf S_h)
Sei $\vec{q} : S_h \to \mathbb{R}^3$ stückweise differenzierbar auf jedem Dreieck $D \in \mathbb{D}_h$. Dann ist die tangentiale Divergenz von $\vec{q}$ auf S_h:

$$\nabla_{S_h} \vec{q} := \nabla \vec{q} - \vec{n}_D(\vec{n}_D \cdot \nabla)\vec{q} \tag{3.16}$$

3.12 Definition: (LAPLACE-BELTRAMI-Operator auf S_h)
Sei $q : S_h \to \mathbb{R}$ stückweise differenzierbar auf jedem Dreieck $D \in \mathbb{D}_h$. Dann ist der LAPLACE-BELTRAMI-Operator von q auf S_h:

$$\nabla^2_{S_h} q := \nabla_{S_h} \cdot \nabla_{S_h} q \tag{3.17}$$

3.13 Definition: (Operator L^h)

$$L^h := -\nabla^2_{S_h} \ + \ c \tag{3.18}$$

Mit Hilfe dieser Definitionen lässt sich die elliptische Differentialgleichung von der Kugeloberfläche S (Gleichungen (2.53) bis (2.56)) auf den Polyeder S_h übertragen:

$$L^h \phi_{n+1}^h(\vec{x}\,) = rhs_n^h(\vec{x}\,) \qquad \text{in } S_h \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} rhs_n^h(\vec{x}\,) :=& \frac{1-\omega}{\omega} \nabla_{S_h}^2 \phi_n^h(\vec{x} - 2\vec{\xi}\,) + c \cdot \phi_n^h(\vec{x} - 2\vec{\xi}\,) \\ &+ \nabla_{S_h}^2 H_{n+1}^h(\vec{x}\,) + \frac{1-\omega}{\omega} \nabla_{S_h}^2 H_n^h(\vec{x} - 2\vec{\xi}\,) - \frac{1}{\omega^2 \Delta t} \nabla_{S_h} \vec{v}_n^{\,h}(\vec{x} - 2\vec{\xi}\,) \\ &- \frac{1}{\omega^2 \overline{\phi}\, \Delta t} \phi_n^\star(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \cdot \nabla_{S_h} \vec{v}_n^{\,\star}(\vec{x} - \vec{\xi}\,) + \frac{1}{\omega} \nabla_{S_h} \vec{c}_n^{\,\star}(\vec{x} - \vec{\xi}\,) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Dabei sei

$$\phi_{n+1}^h(\vec{x}\,) := \phi_{n+1}(\vec{x}\,)\big|_{S_h} \tag{3.21}$$

$$\phi_n^\star(\vec{x} - \vec{\xi}\,) := \phi_n^\star(\vec{x} - \vec{\xi}\,)\big|_{S_h} \tag{3.22}$$

Auf dieselbe Weise werden auch die anderen Parameter ϕ_n^h, H_{n+1}^h, H_n^h, $\vec{v}_n^{\,h}$, $\vec{v}_n^{\,\star}$ und $\vec{c}_n^{\,\star}$ aus den entsprechenden Parameter der Gleichung (2.56) definiert.

Genau wie in Abschnitt 3.1 ergibt sich auch für das HELMHOLTZ-Problem auf S_h eine schwache Formulierung. G. Dziuk [10] hat gezeigt, dass der Satz 3.1 analog auch in der stückweisen Formulierung gilt.

3.14 Satz: $S_h \subset \mathbb{R}^3$ ist ein offenes Gebiet ohne Rand. Für $\phi^h \in H_S^1(S_h)$ und $\psi^h \in H_S^1(S_h)$ gilt:

$$\int_{S_h} -\nabla_{S_h}^2 \phi^h \cdot \psi^h \, dxdydz = \int_{S_h} \nabla_{S_h}\phi^h \cdot \nabla_{S_h}\psi^h \, dxdydz \tag{3.23}$$

Für das Skalarprodukt (im L^2) von $L^h\phi^h \in H_S^1(S_h)$ mit $\psi^h \in H_S^1(S_h)$ ergibt sich:

$$\langle L^h\phi^h, \psi^h\rangle = \int_{S_h} (\nabla_{S_h}\phi^h \nabla_{S_h}\psi^h + c\phi^h\psi^h)\, dxdydz \tag{3.24}$$

3.15 Definition: (Bilinearform $a_h(\cdot,\cdot)$ und Funktional $f_h(\cdot)$)
Seien $\phi^h, \psi^h \in H_S^1(S_h)$ und $rhs_n^h \in L^2(S_h)$:

Bilinearform: $$a_h(\phi^h, \psi^h) := \langle L^h\phi^h, \psi^h\rangle \tag{3.25}$$

Funktional: $$f_h(\psi^h) := \int_{S_h} rhs_n^h \cdot \psi^h \, dxdydz \tag{3.26}$$

3.16 Definition: (schwache Formulierung des HELMHOLTZ-Problems auf S_h)

Gesucht ist zu jedem diskreten Zeitpunkt t_{n+1} $(n \in \mathbb{N}_0)$

ein $\phi_{n+1}^h \in H_S^1(S_h)$ mit:

$$\begin{aligned} a_h(\phi_{n+1}^h, \psi^h) &= f_h(\psi^h) \quad \forall \psi^h \in H_S^1(S_h) \\ \int_{S_h} \phi_{n+1}^h \, dxdydz &= c_0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

3.4 Finite-Elemente-Raum

3.4.1 Lösungsraum

Der SOBOLEV[7]-Raum H_S^1 ist ein unendlichdimensionaler Vektorraum. Für die Numerik ist es günstig, endlichdimensionale Räume zu benutzen, die H_S^1 möglichst gut approximieren. Dazu dient der Lösungsraum V_M^k.

3.17 Definition: (Lösungsraum V_M^k)

$$V_M^k := \{\psi \in C^0(S_h) \mid \forall D \in \mathbb{D}_h \text{ gilt: } \psi \in \mathcal{P}^k\} \tag{3.28}$$

$$dim\, V_M^k = M \tag{3.29}$$

Eine Basis von V_M^k besteht aus M linear unabhängigen Basiselementen $b^1, \ldots, b^M$, den so genannten finiten Elementen. Im weiteren wird nur noch V_M^1 betrachtet, d.h. es werden nur lineare finite Elemente verwendet. Alle Ergebnisse lassen sich jedoch auch auf Elemente höherer Ordnung übertragen.
Nach W. Hackbusch [17] (Bemerkungen 8.3.9 bis 8.3.11) sind die folgenden Eigenschaften des Lösungsraumes V_M^1 bekannt:

- **(a)** Die Dimension M des Finite-Elemente-Raums V_M^1 ist gerade gleich der Anzahl der Knoten einer Triangulierung.
- **(b)** $V_M^1 \subset H_S^1(S_h)$
- **(c)** Jede Funktion $\psi \in V_M^1$ ist durch die Werte $\psi(\vec{x}_k)$ in den Knoten $\vec{x}_k\,(1 \leq k \leq M)$ eindeutig festgelegt.
- **(d)** $\vec{x}_k\,(1 \leq k \leq M)$ sind die Knoten von $\mathbb{D}_h$. Für beliebige $\psi^k\,(1 \leq k \leq M)$ existiert genau ein $\psi \in V_M^1$ mit $\psi(\vec{x}_k) = \psi^k$. Es lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\psi = \sum_{k=1}^{M} \psi^k b^k \text{ mit Basisfunktionen } b^k \tag{3.30}$$

$$b^k(\vec{x}_j) := \delta_{kj} \tag{3.31}$$

Bei δ_{kj} handelt es sich um das KRONECKER[8]-Symbol.

In der Veröffentlichung von G. Dziuk [10] wird die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen, diskreten Lösung ϕ_{n+1}^d aus dem endlichdimensionalen Lösungsraum V_M^1 als Unterraum von $H_S^1(S_h)$ gezeigt, wenn das durch die schwache Formulierung (3.27) gegebene Problem folgendermaßen gestellt wird:

3.18 (RITZ[9]-GALERKIN-Lösung von 3.27)

Gesucht ist zu jedem diskreten Zeitpunkt $t_{n+1}\ (n \in \mathbb{N}_0)$ ein $\phi_{n+1}^d \in V_M^1(S_h)$ mit:

$$\begin{aligned} a_h(\phi_{n+1}^d, \psi^d) &= f_h(\psi^d) \quad \forall \psi^d \in V_M^1(S_h) \\ \int_{S_h} \phi_{n+1}^d \, dxdydz &= c_0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

[7] Sergei Lvovich Sobolev, 1908-1989
[8] Leopold Kronecker, 1823-1891
[9] Walther Ritz, 1878-1909

3.4.2 Lineare finite Elemente

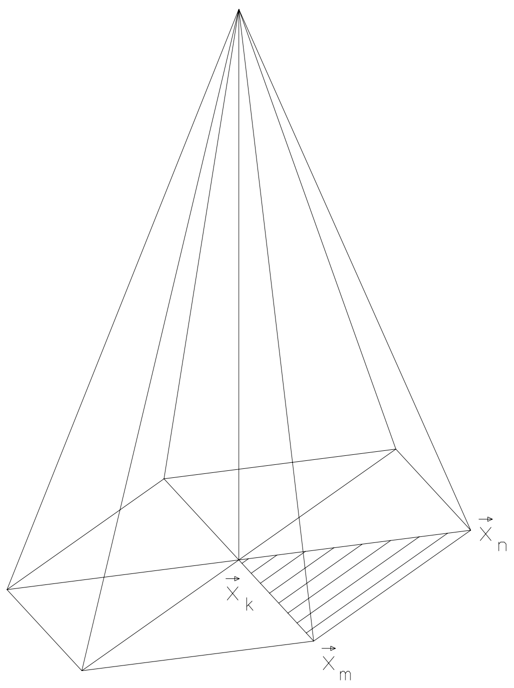


Abbildung 3.7: lineares finites Element b^k mit sechseckigem Träger

Der Träger $supp\ b^k$ eines finiten Elementes b^k besteht aus den zu einem Knoten $\vec{x}_k$ gehörenden Dreiecken.

$$supp\ b^k := \bigcup \{ \overline{D} \mid D \in \mathbb{D}_h \text{ hat } \vec{x}_k \text{ als Ecke} \} \tag{3.33}$$

Im Knoten $\vec{x}_k$ hat b^k den Funktionswert 1, in allen übrigen Knoten den Funktionswert 0. Auf dem ganzen Träger sind lineare finite Elemente stückweise linear. Nebenstehende Abbildung 3.7 zeigt ein solches lineares finites Element im $\mathbb{R}^2$.
Analog dazu werden lineare finite Elemente auf dem Polyeder S_h definiert. Zu jedem Knoten $\vec{x}_k$ des Polyeders bilden diejenigen Dreiecke, deren eine Ecke der Punkt $\vec{x}_k$ ist, den Träger $supp\ b^k$ des finiten Elementes b^k.
Mittels einer affin linearen Transformation F_D lässt sich ein Referenzdreieck, üblicherweise das Einheitsdreieck im $\mathbb{R}^2$ (siehe Abbildung 3.8), auf jedes beliebige Dreieck abbilden. Bei der Methode der finiten Elemente wird diese Tatsache benutzt, um möglichst effektiv die benötigten Integrale in Gleichung (3.27) zu bestimmen. Sie werden nur einmal auf dem Referenzdreieck ausgewertet und durch die Transformation F_D ergibt sich dann der Wert auf jedem anderen Dreieck.

3.19 Definition: (affin lineare Transformation F_D)
Seien $\vec{x}_k$, $\vec{x}_m$ und $\vec{x}_n$ die Ecken des Dreiecks D_j (wie in Abbildung 3.7).

Seite $\vec{s}_1$:

$$\vec{s}_1 := \vec{x}_m - \vec{x}_k \tag{3.34}$$

Seite $\vec{s}_3$:

$$\vec{s}_3 := \vec{x}_k - \vec{x}_n \tag{3.35}$$

Transformation F_D:

$$F_D : D_0 \to D_j$$

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{s}_1 & -\vec{s}_3 \\ | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} + \vec{x}_k \tag{3.36}$$

3.20 Definition: (Spalten $\overrightarrow{sp_1}$ und $\overrightarrow{sp_2}$ und JACOBI[10]-Determinante J)
Seien die Bezeichnungen wie in Definition 3.19 .

Spalte $\overrightarrow{sp_1}$:

$$\overrightarrow{sp_1} := \left(\vec{s}_3 \times \vec{s}_1\right) \times \vec{s}_3 \tag{3.37}$$

Spalte $\overrightarrow{sp_2}$:

$$\overrightarrow{sp_2} := \left(\vec{s}_3 \times \vec{s}_1\right) \times \vec{s}_1 \tag{3.38}$$

JACOBI-Determinante J:

$$J := \left|\vec{s}_3 \times \vec{s}_1\right|^2 \tag{3.39}$$

[10] Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851

3.21 Lemma: Sei $D_j \in \mathbb{D}_h$ ein beliebiges Dreieck und sei D_0 das Einheitsdreieck in $\mathbb{R}^2$. Ist $F_D : D_0 \to D_j$ die affin lineare Transformation, die D_0 auf D_j abbildet, so gilt für jede differenzierbare Funktion ψ auf D_j:

$$\nabla_{S_h} \psi \circ F_D = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} | & | \\ \overrightarrow{sp_1} & \overrightarrow{sp_2} \\ | & | \end{pmatrix} \cdot \widetilde{\nabla} \widehat{\psi} \tag{3.40}$$

Hier bezeichne $\widetilde{\nabla}$ den Gradienten in $\mathbb{R}^2$ und es sei

$$\widehat{\psi} := \psi \circ F_D \tag{3.41}$$

Beweis: siehe Lemma 3.2 in K. Siebert [43]

3.22 Betrachtungen auf dem Referenzdreieck:
Die drei Basisfunktionen $\hat{b}^1, \hat{b}^2$ und $\hat{b}^3$ auf dem Referenzdreieck mit den Knoten $\vec{x}_1$ im Ursprung, $\vec{x}_2$ im Punkt (1,0) und $\vec{x}_3$ im Punkt (0,1) lauten:

$$\hat{b}^1(\zeta, \eta) := 1 - \zeta - \eta \tag{3.42}$$

$$\hat{b}^2(\zeta, \eta) := \zeta \tag{3.43}$$

$$\hat{b}^3(\zeta, \eta) := \eta \tag{3.44}$$

Die Gradienten (im $\mathbb{R}^2$) ergeben:

$$\widetilde{\nabla} \hat{b}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

$$\widetilde{\nabla} \hat{b}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

$$\widetilde{\nabla} \hat{b}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

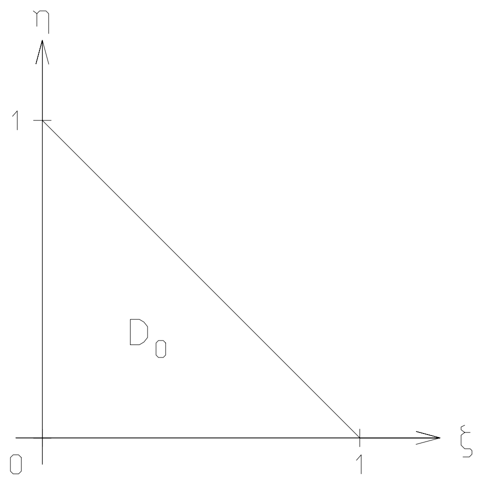


Abbildung 3.8: Referenzdreieck D_0

Wendet man die Ergebnisse aus den Gleichungen (3.40) bis (3.47) auf die Basisfunktionen b^k, b^m und b^n im Dreieck D_j an, so ergibt sich:

$$\nabla_{S_h} b^k = -\frac{1}{J} (\overrightarrow{sp_1} + \overrightarrow{sp_2}) \tag{3.48}$$

$$\nabla_{S_h} b^m = \frac{1}{J} \overrightarrow{sp_1} \tag{3.49}$$

$$\nabla_{S_h} b^n = \frac{1}{J} \overrightarrow{sp_2} \tag{3.50}$$

3.4.3 Matrizen

Um zu gewährleisen, dass die RITZ-GALERKIN-Lösung (Gleichung (3.32)) für alle $\psi^d \in V_M^1(S_h)$ gilt, genügt es, dies für alle Basisfunktionen des Lösungsraumes $V_M^1(S_h)$ zu zeigen. Damit erhält man M Integralgleichungen der Form:

$$a_h(\phi_{n+1}^d, b^i) = f_h(b^i) \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, M\} \tag{3.51}$$

Entwickelt man zusätzlich ϕ_{n+1}^d gemäß Gleichung (3.30) mit den Koeffizienten ϕ^1 bis ϕ^M:

$$\phi_{n+1}^d = \sum_{k=1}^{M} \phi^k b^k \tag{3.52}$$

dann lässt sich Gleichung (3.51) durch

$$\sum_{k=1}^{M} \phi^k \cdot a_h(b^k, b^i) = f_h(b^i) \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, M\} \tag{3.53}$$

darstellen. Dies wiederum entspricht dem linearen Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \vec{\phi} = \vec{f} \tag{3.54}$$

mit dem Lösungsvektor $\vec{\phi} := (\phi^1, \ldots, \phi^M)^T \quad ,$ (3.55)

dem Datenvektor $\vec{f} := (f_h(b^1), \ldots, f_h(b^M))^T$ (3.56)

und der $M \times M$-Matrix $\mathbf{A}$ mit den Elementen

$$\mathbf{A}(i, k) = a_h(b^k, b^i) \tag{3.57}$$

Untersucht man die Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ (Gleichungen (3.24) und (3.25)) genauer, so erkennt man, dass es sich dabei um ein Integral mit zwei Summanden handelt. Der erste Summand berechnet das Integral über die tangentialen Ableitungen und der zweite über die Funktionen selbst. Wegen der besonderen physikalischen Bedeutung dieser beiden Summanden, werden sie im folgenden gesondert betrachtet.

3.23 Definition: (Bilinearformen $s_h(\cdot, \cdot)$ und $m_h(\cdot, \cdot)$)
Seien $\phi^h, \psi^h \in H^1_S(S_h)$:
Bilinearform s_h:

$$s_h(\phi^h, \psi^h) := \int\limits_{S_h} \nabla_{S_h} \phi^h \nabla_{S_h} \psi^h dxdydz \tag{3.58}$$

Bilinearform m_h:

$$m_h(\phi^h, \psi^h) := \int\limits_{S_h} \phi^h \cdot \psi^h \; dxdydz \tag{3.59}$$

3.24 Bemerkung: Offensichtlich gilt:

$$a_h(\phi^h, \psi^h) = s_h(\phi^h, \psi^h) \; + \; c \cdot m_h(\phi^h, \psi^h) \tag{3.60}$$

3.25 Definition: (Steifigkeitsmatrix S und Massenmatrix M)

Steifigkeitsmatrix S:

$$\begin{aligned} &\mathbf{S} \in \mathcal{M}(M \times M) \text{ mit den Elementen} \\ &\mathbf{S}(i, k) = s_h(b^k, b^i) \end{aligned} \tag{3.61}$$

Massenmatrix M:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} \in \mathcal{M}(M \times M) \text{ mit den Elementen} \\ &\mathbf{M}(i, k) = m_h(b^k, b^i) \end{aligned} \tag{3.62}$$

3.26 Bemerkung: Wegen Gleichung (3.60) gilt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \; + \; c \cdot \mathbf{M} \tag{3.63}$$

In der Praxis werden die beiden Matrizen mittels der Elementsteifigkeitsmatrizen $\mathbf{S}^e_j$ und Elementmassenmatrizen $\mathbf{M}^e_j$ aufgebaut. Diese berechnen den Anteil der Integrale, der sich über dem Dreieck D_j ergibt, was in den Gleichungen (3.64) bis (3.75) erläutert wird. Auf die Art und Weise, wie sich daraus die Matrizen S und M ergeben, wird hier nicht eingegangen, sondern auf die sehr ausführliche Darstellung bei H.R. Schwarz [42] ab Seite 156 verwiesen.

3.27 Definition: (Elementsteifigkeitsmatrix S_j^e und Elementmassenmatrix M_j^e)

Elementsteifigkeitsmatrix S_j^e:

$$S_j^e \in \mathcal{M}(3 \times 3) \text{ mit den Elementen}$$
$$S_j^e(i,k) = \int_{D_j} \nabla_{S_h} b^k \nabla_{S_h} b^i \, dx dy dz \tag{3.64}$$

Elementmassenmatrix M_j^e:

$$M_j^e \in \mathcal{M}(3 \times 3) \text{ mit den Elementen}$$
$$M_j^e(i,k) = \int_{D_j} b^k b^i \, dx dy dz \tag{3.65}$$

3.28 Bezeichnungen: Mit den Festlegungen der Definition 3.19 wird eine abkürzende Schreibweise für das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_3$ eingeführt:

$$s_{ij} := \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \quad i,j \in \{1,3\} \tag{3.66}$$

Damit berechnen sich $\overrightarrow{sp_1}$ und $\overrightarrow{sp_2}$ aus den Gleichungen (3.37) und (3.38)

$$\overrightarrow{sp_1} = s_{33} \cdot \vec{s}_1 \; - \; s_{13} \cdot \vec{s}_3 \tag{3.67}$$
$$\overrightarrow{sp_2} = s_{13} \cdot \vec{s}_1 \; - \; s_{11} \cdot \vec{s}_3 \quad , \tag{3.68}$$

sowie die JACOBI-Determinante J aus Gleichung (3.39)

$$J = s_{13} \cdot s_{11} \; - \; s_{13}^2 \quad . \tag{3.69}$$

Für die Skalarprodukte von $\overrightarrow{sp_1}$ und $\overrightarrow{sp_2}$ gilt

$$\overrightarrow{sp_1} \cdot \overrightarrow{sp_1} \; = \; s_{33} \cdot J \tag{3.70}$$
$$\overrightarrow{sp_2} \cdot \overrightarrow{sp_2} \; = \; s_{11} \cdot J \tag{3.71}$$
$$\overrightarrow{sp_1} \cdot \overrightarrow{sp_2} \; = \; s_{13} \cdot J \quad . \tag{3.72}$$

3.29 Bemerkung: Aus der Definition des Vektorprodukts im $\mathbb{R}^3$ ergibt sich, dass der Flächeninhalt eines von zwei Seiten aufgespannten Parallelogramms gleich dem Betrag des Vektorprodukts der beiden Seiten ist. Daraus folgt für den Flächeninhalt $|D_j|$ des Dreiecks D_j

$$2 \cdot |D_j| \; = \; |\vec{s}_3 \times \vec{s}_1| = \sqrt{J} \quad . \tag{3.73}$$

Mit diesen Ergebnissen lassen sich jetzt die Integrale in den Gleichungen (3.64) und (3.65) unter Verwendung der Gleichungen (3.48) bis (3.50) und damit die Elementsteifigkeitsmatrix S_j^e und die Elementmassenmatrix M_j^e bestimmen.

3.30 (Elementsteifigkeitsmatrix S_j^e)

$$S_j^e = \frac{1}{2\sqrt{J}} \begin{pmatrix} s_{11} + s_{33} + 2s_{13} & -(s_{13} + s_{33}) & -(s_{13} + s_{11}) \\ -(s_{13} + s_{33}) & s_{33} & s_{13} \\ -(s_{13} + s_{11}) & s_{13} & s_{11} \end{pmatrix} \tag{3.74}$$

3.31 (Elementmassenmatrix M_j^e)

$$M_j^e = \frac{\sqrt{J}}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

Kapitel 4

Algorithmus

Während sich die letzten beiden Kapitel mit grundsätzlichen Fragen einer numerischen Umsetzung der Flachwassergleichungen beschäftigt haben, befasst sich dieses Kapitel nun mit der konkreten Anwendung der gefundenen Resultate in **FEM*m*E**. Die Ergebnisse der letzten beiden Kapitel legen einen Algorithmus zur Lösung des gestellten Problems nahe, wie er auch von A. Staniforth und J. Côté [44] vorgeschlagen wird:

(a) Extrapoliere das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}_S$ gemäß Gleichung (2.4) und löse das implizite Schema (2.10) für jeden Knoten $\vec{x}_m$ zur Bestimmung der Verschiebung $\vec{\xi}_m := \vec{\xi}(\vec{x}_m)$.

(b) Berechnung der in Gleichung (3.20) angegebenen Terme der rechten Seite rhs_n^h.

(c) Bestimmung des Funktionals f_h aus Gleichung (3.26) für die Basisfunktionen b^1, $b^2, \ldots, b^M$ und damit des Datenvektors $\vec{f}$ (3.56).

(d) Lösung des RITZ-GALERKIN-Problems (3.32) mit linearen finiten Elementen. Dabei ist das lineare Gleichungssystem (3.54) mit einem geeigneten Verfahren zu lösen. Als Ergebnis erhält man den Lösungsvektor $\vec{\phi}$ und damit eine Lösung des diskreten Geopotentialfeldes zum Zeitpunkt t_{n+1}.

(e) Einsetzen dieser Lösung in Gleichung (2.44) und Berechnung von $\vec{v}_{n+1}(\vec{x}_m)$ in jedem Knoten.

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Details der fünf Schritte. Insbesondere wird ein Interpolationsschema vorgestellt, um Felder auch in Punkten auszuwerten, die keine Gitterpunkte sind. Dazu wird in allen Gitterpunkten ein lokales Koordinatensystem eingeführt und erläutert, wie damit auf einfache Weise partielle Ableitungen in den Knoten berechnet werden können. Mit diesem Konzept lassen sich in jedem Knoten $\vec{x}_m$ die Verschiebung $\vec{\xi}_m$ und damit Start- und Mittelpunkt der Trajektorien bestimmen. Zusätzlich wird es benutzt, um in diesen Punkten alle Terme der rechten Seite zu berechnen. Im Anschluss wird aufgezeigt, wie sich daraus ein lineares Gleichungssystem ergibt und mit welchem speziellen iterativen Lösungsverfahren das RITZ-GALERKIN-Problem in **FEM*m*E** gelöst wird.

4.1 Quadratisches Interpolationsverfahren

In Gleichung (2.10) wird die Geschwindigkeit $\vec{V}^*$ im Trajektorienmittelpunkt P^0 benutzt, die sich wiederum aus der Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ in diesem Punkt zu den Zeitpunkten t_n und t_{n-1} zusammensetzt. Durch die Diskretisierung sind die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten von $\vec{v}_S$ jedoch nur in den Knoten bekannt. Im Allgemeinen ist der Punkt P^0 aber kein Knoten des Gitters. Deshalb wird eine Interpolation in diesen Punkt benötigt. Im Artikel von A. McDonald [29] wird darauf hingewiesen, dass das Semi-LAGRANGE-Verfahren sehr sensibel auf die Wahl des Interpolationsschemas reagiert.

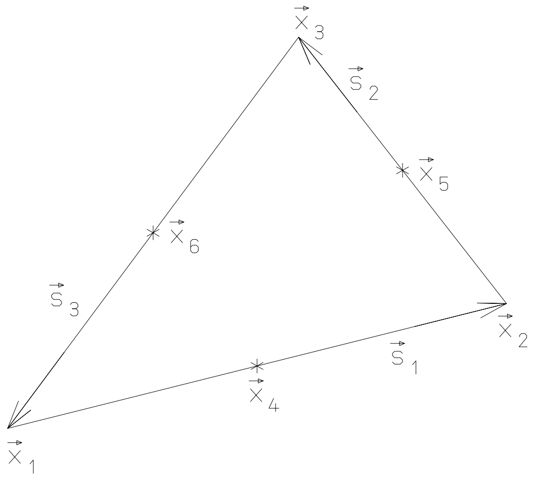


Abbildung 4.1: Bezeichnungen im Dreieck

In **FEM*m*E** wird eine Anregung von J. Baumgardner [3] umgesetzt, der ein Interpolationsschema zweiter Ordnung für die unbekannten Werte eines in den Knoten bekannten skalaren Feldes Θ vorschlägt. Dazu werden zusätzlich zu den bekannten Funktionswerten Θ_1, Θ_2 und Θ_3 in den drei Eckpunkten $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ eines Dreiecks die zunächst unbekannten Funktionswerte Θ_4, Θ_5 und Θ_6 in den Kantenmittelpunkten $\vec{x}_4, \vec{x}_5$ und $\vec{x}_6$ benutzt. Damit lässt sich ein Funktionswert für jeden Punkt $(\rho, \sigma, \tau)^T$ eines Dreiecks durch folgende quadratische Interpolation bestimmen:

$$\begin{aligned}\Theta(\rho,\sigma,\tau) = \rho(2\,\rho-1)\Theta_1 \;+\; \sigma(2\,\sigma-1)\Theta_2 \;+\; \tau(2\,\tau-1)\Theta_3 \\ +\; 4\,(\rho\sigma\Theta_4 \;+\; \sigma\tau\Theta_5 \;+\; \tau\rho\Theta_6)\end{aligned} \tag{4.1}$$

ρ, σ und τ sind die baryzentrischen Koordinaten des Punktes $\vec{x}$, die wie folgt berechnet werden:

$$\vec{s}_1 = \vec{x}_2 \;-\; \vec{x}_1 \tag{4.2}$$

$$\vec{s}_3 = \vec{x}_1 \;-\; \vec{x}_3 \tag{4.3}$$

$$\Gamma_1 = \sqrt{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1} \tag{4.4}$$

$$\Gamma_3 = \sqrt{\vec{s}_3 \cdot \vec{s}_3} \tag{4.5}$$

$$\sigma = \frac{\big((\vec{x} \;-\; \vec{x}_1)\cdot\vec{s}_3\big)(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_3) \;-\; \big((\vec{x} \;-\; \vec{x}_1)\cdot\vec{s}_1\big)\Gamma_3}{(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_3)^2 \;-\; \Gamma_1\,\Gamma_3} \tag{4.6}$$

$$\tau = \frac{\big((\vec{x} \;-\; \vec{x}_1)\cdot\vec{s}_3\big)\Gamma_1 \;-\; \big((\vec{x} \;-\; \vec{x}_1)\cdot\vec{s}_1\big)(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_3)}{(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_3)^2 \;-\; \Gamma_1\,\Gamma_3} \tag{4.7}$$

$$\rho = 1 \;-\; \sigma \;-\; \tau \tag{4.8}$$

Nun gilt es noch, die unbekannten Funktionswerte Θ_4, Θ_5 und Θ_6 in Gleichung (4.1) zu interpolieren. Dazu hat J. Baumgardner vorgeschlagen, zunächst für jeden Knoten $\vec{x}_m$ ein lokales zweidimensionales kartesisches (ζ, η)-Koordinatensystem einzuführen. Der Ursprung dieses Koordinatensystems ist die Projektion des Punkt $\vec{x}_m$ auf die Einheitskugel und die Ordinatenrichtung wird durch den Längenkreis (im üblichen geografischen System) bestimmt, auf dem dieser Punkt liegt. Im vorliegenden Gitter hat jeder Punkt fünf oder sechs Nachbarpunkte. Diese werden ebenfalls in das lokale Koordinatensystem transformiert. Dabei werden alle Punkte zunächst auf die Einheitskugel projiziert und dann unter Beibehaltung der Richtung und des Großkreisabstands zum Ursprung in die Tangentialebene des Ursprungs übertragen. Die Einzelheiten der Transformation zwischen den beiden Koordinatensystemen werden im nächsten Abschnitt dargestellt.
Mit diesen Punkten werden dann die Parameter a_1 bis a_5 des quadratischen Polynoms

$$\Psi_m(\zeta,\eta) \;:=\; \Theta(\vec{x}_m) \;+\; a_1\zeta \;+\; a_2\eta \;+\; a_3\zeta^2 \;+\; a_4\eta^2 \;+\; a_5\zeta\eta \tag{4.9}$$

bestimmt. Im Falle, dass es sich um fünf Nachbarpunkte handelt, lassen sich die Parameter eindeutig bestimmen. Im anderen Falle werden sie über die Methode der kleinsten Fehlerquadrate berechnet, die im Anhang C beschrieben wird.

Offensichtlich gilt:

$$\Psi_m(0,0) = \Theta(\vec{x}_m) \ =: \ \Theta_m \tag{4.10}$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_m(0,0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \Psi_m(0,0) \ = \ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

So lässt sich in jedem Knoten m des Gitters lokal ein Gradient bestimmen und damit auch „Richtungsableitungen“ Ψ'_{mj} in Richtung des Nachbarpunktes j:

$$\Psi'_{mj} \ := \ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_j \\ \eta_j \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Aus der Kenntnis der Funktionswerte Θ_i und Θ_j in den Eckpunkten $\vec{x}_i$ und $\vec{x}_j$ einer Kante, sowie der Richtungsableitungen Ψ'_{ij} und Ψ'_{ji} in diesen Punkten, lässt sich nun der Funktionswert Θ_{mitte} im Kantenmittelpunkt quadratisch interpolieren:

$$\Theta_{mitte} \ = \ \frac{\Theta_i \ + \ \Theta_j}{2} \ + \ \frac{\Psi'_{ij} \ + \ \Psi'_{ji}}{8} \tag{4.13}$$

4.1 Bemerkung: Hier sei darauf hingewiesen, dass bei Gleichung (4.13) implizit benutzt wird, dass der Abstand eines Nachbarpunktes $\vec{x}_j$ zum Ursprung im lokalem Koordinatensystem des Punktes $\vec{x}_m$ genau so groß ist, wie der Abstand des Punktes $\vec{x}_m$ zum Ursprung des lokalen Koordinatensystem, das um den Punkt $\vec{x}_j$ entwickelt wird.

Wendet man Gleichung (4.1) auf die drei Komponenten der Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ an, dann lässt sich die Verschiebung $\vec{\xi}_m$ im Schritt **(a)** des Algorithmus für jeden Punkt $\vec{x}_m$ approximativ berechnen. Obwohl A. Staniforth und J. Côté [44] vorschlagen, dass „ein Interpolationsverfahren kubischer Ordnung ein guter Kompromiss zwischen Genauigkeit und numerischen Kosten“ sei, wird in **FEM*m*E** ein Verfahren niederer Ordnung benutzt. Durch die Verwendung aller Nachbarpunkte eines Dreiecks zur Bestimmung der Koeffizienten a_1, $a_2, \ldots a_5$ in Gleichung (4.9) ist die Ordnung aber größer als zwei. Die numerischen Ergebnisse im nächsten Kapitel belegen, dass dieses numerisch billigere Interpolationsschema ausreicht, um Ergebnisse mit hinreichender Genauigkeit zu erhalten. Beim neuen globalen Vorhersagemodell **GME** des Deutschen Wetterdienstes [27] wird dieses Schema inzwischen auch verwendet.

4.2 Lokales Koordinatensystem

Die Abbildung auf der nächsten Seite verdeutlicht die Situation für die im letzten Abschnitt angesprochene Transformation zwischen den Koordinatensystemen. Sei $\vec{x}_m$ der Punkt, in dem das lokale Gleichungssystem betrachtet wird und $\vec{x}$ ein beliebiger Punkt auf der Kugeloberfläche S, der ins lokale System transformiert werden soll. Einschränkend wird für $\vec{x}$ gefordert, dass

$$\vec{x} \neq \vec{x}_m \tag{4.14}$$

und für den Winkel e zwischen $\vec{x}_m$ und $\vec{x}$ gilt:

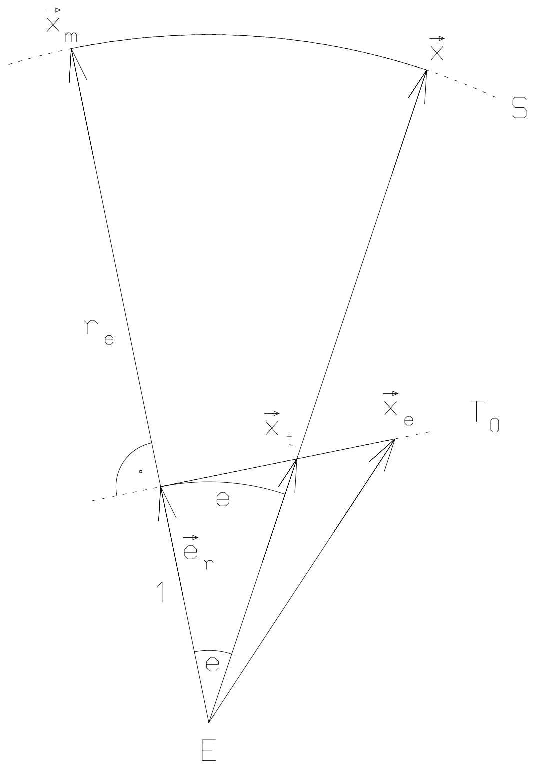
$$-\frac{\pi}{2} < e < \frac{\pi}{2} \tag{4.15}$$

Beide Einschränkungen sind im Grunde keine Beschränkungen, da die Transformation von $\vec{x}_m$ gerade der Ursprung des lokalen Koordinatensystems und somit bekannt ist. Die zweite

Bedingung (4.15) schließt alle Punkte aus, die auf der dem Punkt $\vec{x}_m$ gegenüberliegenden Kugelhälfte liegen, und damit keine nahen Punkte sind, die zu Recht in ein lokales Koordinatensystem transformiert werden sollen. Für beide Punkte auf S gilt:

$$|\vec{x}_m| = |\vec{x}| = r_e \tag{4.16}$$

Ursprung des lokalen Koordinatensystems ist die Projektion von $\vec{x}_m$ auf die Einheitskugel, also der radial nach außen gerichtete Einheitsvektor $\vec{e}_r$:



$$\vec{e}_r = \frac{1}{r_e}\vec{x}_m \tag{4.17}$$

Für jeden Punkt $\vec{p}$ der Tangentialebene T_0 im Punkt $\vec{e}_r$ gilt:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{p} = 1 \tag{4.18}$$

$\vec{x}_t$ sei der Schnittpunkt der Tangentialebene T_0 mit der Gerade durch Erdmittelpunkt E und den Punkt $\vec{x}$.

$$\vec{x}_t = \mu_t\,\vec{x} \tag{4.19}$$

Da $x_t \in T_0$ gilt:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{x}_t = 1 \tag{4.20}$$

$$\Longrightarrow \quad \mu_t = \frac{r_e}{\vec{x}_m \cdot \vec{x}} \tag{4.21}$$

Der Winkel zwischen $\vec{x}_m$ und $\vec{x}$ ist e. Damit ist der Großkreisabstand zwischen den Projektionen dieser beiden Punkte auf der Einheitskugel ebenfalls e. Mit der Definition des Skalarprodukts ergibt sich:

$$\cos e = \frac{1}{r_e^2}\,(\vec{x}_m \cdot \vec{x}) \tag{4.22}$$

$\vec{x}_e$ sei die Transformation von $\vec{x}$ ins lokale Koordinatensystem. Mit den Forderungen aus dem letzten Abschnitt gilt für $\vec{x}_e$:

$$\vec{x}_e = \vec{e}_r + \mu_e\big(\vec{x}_t - \vec{e}_r\big) \tag{4.23}$$

$$\big|\vec{x}_e - \vec{e}_r\big| = e \tag{4.24}$$

mit der Unbekannten $\mu_e > 0$. Aus den letzten beiden Gleichungen ergibt sich, dass

$$\mu_e = \frac{\big|\vec{x}_e - \vec{e}_r\big|}{\big|\vec{x}_t - \vec{e}_r\big|} = \frac{e}{\big|\vec{x}_t - \vec{e}_r\big|} \quad , \tag{4.25}$$

sowie aus den Angaben (4.17), (4.19) und (4.21) über $\vec{e}_r$ und $\vec{x}_t$, dass

$$\big|\vec{x}_t - \vec{e}_r\big| = \frac{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}}{\vec{x}_m \cdot \vec{x}} \tag{4.26}$$

ist. Damit berechnet sich $\vec{x}_e$:

$$\vec{x}_e = \vec{e}_r + \arccos\left(\frac{\vec{x}_m \cdot \vec{x}}{r_e^2}\right) \frac{\vec{x}_m \cdot \vec{x}}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}} \left(\frac{r_e}{\vec{x}_m \cdot \vec{x}}\,\vec{x} - \vec{e}_r\right) \tag{4.23*}$$

4.2.1 Orthonormalbasis

Im globalen kartesischen Koordinatensystem sei $\vec{x}_m = (x_m, y_m, z_m)^T$. Daraus ergibt sich für den radialen Einheitsvektor die Darstellung:

$$\vec{e}_r = \frac{1}{r_e}\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

Als Orthonormalbasis des lokalen Koordinatensystems werden zwei zu $\vec{e}_r$ orthonormale Vektoren $\vec{e}_\zeta$ und $\vec{e}_\eta$ gesucht. Von $\vec{e}_\eta$ ist im Abschnitt 4.1 gefordert worden, dass seine Richtung dem des Längenkreises entspricht, dass heißt, dass der Nordpol $NP = (0,0,1)^T$ in der von $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\eta$ aufgespannten Ebene E_N liegt. Da T_0 orthogonal zu dieser Ebene liegt, erhält man $\vec{e}_\eta$ als Richtungsvektor der Schnittgerade von T_0 und E_N.
Für jeden Punkt $\vec{p} \in E_N$ gilt:

$$\vec{p} = \lambda_p\, \vec{e}_r \;+\; \mu_p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

T_0 geschnitten mit E_N ergibt die Gerade:

$$\vec{p} = \vec{e}_r \;+\; \mu_p \begin{pmatrix} -z_m x_m \\ -z_m y_m \\ r_e^2 - z_m^2 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

Der normierte Richtungsvektor lautet somit unter Verwendung von Gleichung (4.16):

$$\vec{e}_\eta = \frac{1}{r_e\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} \begin{pmatrix} -z_m x_m \\ -z_m y_m \\ x_m^2 + y_m^2 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

Der zweite Basisvektor $\vec{e}_\zeta$ ergibt sich aus dem Vektorprodukt von $\vec{e}_\eta$ und $\vec{e}_r$:

$$\vec{e}_\zeta \;=\; \vec{e}_\eta \times \vec{e}_r = \frac{1}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} \begin{pmatrix} -y_m \\ x_m \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

Sonderfälle bilden die beiden Pole. Dort lässt sich keine Ebene E_N nach dem obigen Schema aufstellen, da der Ortsvektor der Pole parallel zu $\vec{e}_r$ ist. In diesen Punkten gilt folgendes rechtshändiges Basissystem:
Im Nordpol:

$$\vec{e}_\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

Im Südpol:

$$\vec{e}_\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

4.2 Bemerkung: $\vec{e}_\zeta$ und $\vec{e}_\eta$ bilden ein Orthonormalsystem des lokalen Koordinatensystems und zusammen mit $\vec{e}_r$ ein Orthonormalsystem des $\mathbb{R}^3$.

Insbesondere lässt sich $\vec{x}_e$ als Linearkombination von $\vec{e}_\zeta$ und $\vec{e}_\eta$ darstellen:

$$\vec{x}_e = \zeta\,\vec{e}_\zeta \;+\; \eta\,\vec{e}_\eta \tag{4.34}$$

$$\Longrightarrow \quad \zeta = \vec{x}_e \cdot \vec{e}_\zeta \tag{4.35}$$

$$\eta = \vec{x}_e \cdot \vec{e}_\eta \tag{4.36}$$

Zusammen mit der Projektion des Knotens $\vec{x}_m$ in den Ursprung des lokalen Koordinatensystems definiert sich die Transformation F_K vom globalen ins lokale Koordinatensystem.

4.3 Definition: (Transformation F_K)
Transformation F_K:

$$F_K : S \to T_0$$
$$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{cases} \mu_e\,\mu_t \begin{pmatrix} \vec{x}\cdot\vec{e}_\zeta \\ \vec{x}\cdot\vec{e}_\eta \end{pmatrix} & \text{falls } \vec{x} \neq \vec{x}_m \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } \vec{x} = \vec{x}_m \end{cases} \tag{4.37}$$

4.3 Partielle Ableitungen in den Knoten

Schritt **(b)** des Algorithmus fordert die Berechnung von rhs_n^h. Dabei treten unter anderem Terme der Form $\nabla_{S_h}\vec{v}_n^h$ auf. Mit Hilfe der Gleichung (4.11) erkennt man, dass sich die partiellen Ableitungen im Ursprung des lokalen Koordinatensystem sehr einfach berechnen lassen. Mit der Notation aus Abschnitt 4.1 berechnet sich der Gradient eines beliebigen skalaren Feldes Θ über die Kettenregel.

$$\nabla\Theta(\vec{x}_m) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Psi_m}{\partial\zeta}(F_K(\vec{x}_m)) & \dfrac{\partial\Psi_m}{\partial\eta}(F_K(\vec{x}_m)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\zeta}{\partial x}(\vec{x}_m) & \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}(\vec{x}_m) & \dfrac{\partial\zeta}{\partial z}(\vec{x}_m) \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x}(\vec{x}_m) & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}(\vec{x}_m) & \dfrac{\partial\eta}{\partial z}(\vec{x}_m) \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

Die Elemente der ersten Matrix sind mit Gleichung (4.11) bekannt, da $F_K(\vec{x}_m)$ gerade der Ursprung des lokalen Koordinatensystems ist. Zur Bestimmung des Gradienten werden folglich noch die sechs partiellen Ableitungen in der zweiten Matrix benötigt. Im Folgenden werden nun die Matrixelemente der ersten Spalte $\frac{\partial\zeta}{\partial x}(\vec{x}_m)$ und $\frac{\partial\eta}{\partial x}(\vec{x}_m)$ berechnet und dann das Ergebnis auf alle anderen Elemente der Matrix übertragen. Zur Vorbereitung werden zunächst zwei Funktionen definiert, deren Ableitungen bestimmt und anschließend ein Satz mit Hilfe von vier Hilfssätze bewiesen.

4.4 Definition: (Funktionen e und $\tilde{f}$)
Sei $\vec{x}_m = (x_m, y_m, z_m)^T$ und $\vec{x} = (x, y_m, z_m)^T$.
Funktion e:

$$e : \big(-r_e, r_e\big) \setminus \{x_m\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \arccos\left(\frac{\vec{x}_m\cdot\vec{x}}{r_e^2}\right) \tag{4.39}$$

Funktion $\tilde{f}$:

$$\tilde{f} : \big(-r_e, r_e\big) \setminus \{x_m\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m\cdot\vec{x})^2}} \tag{4.40}$$

4.5 (Ableitungen von e und $\tilde{f}$)

$$e'(x) = -\frac{x_m}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m\cdot\vec{x})^2}} \tag{4.41}$$

$$\tilde{f}'(x) = \frac{x_m(\vec{x}_m\cdot\vec{x})}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m\cdot\vec{x})^2}^{\,3}} \tag{4.42}$$

4.6 Hilfssatz: Für e und $\widetilde{f}$ aus Definition 4.4 gilt:

$$\lim_{x \to x_m} e \cdot \widetilde{f} = \frac{1}{r_e^2} \qquad . \tag{4.43}$$

Beweis:

$$e \cdot \widetilde{f} = \frac{e(x)}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}} \tag{4.44}$$

Im Falle $x \to x_m$ gehen sowohl Zähler als auch Nenner des Quotienten gegen 0. Mit der Anwendung der Regel von DE L'HOSPITAL[1] ergibt sich:

$$\lim_{x \to x_m} e \cdot \widetilde{f} = \lim_{x \to x_m} \frac{-x_m}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}} \cdot \frac{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}}{-x_m (\vec{x}_m \cdot \vec{x})} = \lim_{x \to x_m} \frac{1}{\vec{x}_m \cdot \vec{x}} \tag{4.45}$$

Der letzte Grenzwert existiert und berechnet sich zu

$$\lim_{x \to x_m} \frac{1}{\vec{x}_m \cdot \vec{x}} = \frac{1}{r_e^2} \tag{4.46}$$

■

4.7 Hilfssatz: Sei $\widetilde{f}$ aus Definition 4.4 und $\widetilde{g} : (-r_e, r_e) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den beiden Eigenschaften:

$$\widetilde{g}(x_m) = 0 \tag{4.47}$$

$$\widetilde{g}\,'(x) = c_g \;=\; const \;<\infty \qquad . \tag{4.48}$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_m} \widetilde{g} \cdot \widetilde{f}^{\,2} = -\frac{c_g}{2\, x_m\, r_e^2} \qquad . \tag{4.49}$$

Beweis:

$$\widetilde{g} \cdot \widetilde{f}^{\,2} = \frac{\widetilde{g}(x)}{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2} \tag{4.50}$$

Im Falle $x \to x_m$ gehen wieder Zähler und Nenner des Quotienten gegen 0. Nach der Regel von DE L'HOSPITAL gilt:

$$\lim_{x \to x_m} \widetilde{g} \cdot \widetilde{f}^{\,2} = \lim_{x \to x_m} \frac{\widetilde{g}\,'(x)}{(-2) x_m (\vec{x}_m \cdot \vec{x})} \tag{4.51}$$

Der zweite Grenzwert existiert und berechnet sich zu

$$\lim_{x \to x_m} \frac{\widetilde{g}\,'(x)}{(-2) x_m (\vec{x}_m \cdot \vec{x})} = -\frac{c_g}{2\, x_m\, r_e^2} \tag{4.52}$$

■

4.8 Hilfssatz: Sei $\widetilde{g}$ wie in Hilfssatz 4.7 und $e, \widetilde{f}$ aus Definition 4.4 .
Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_m} e \cdot \widetilde{f} \cdot \widetilde{g} \cdot \frac{x_m}{\vec{x}_m \cdot \vec{x}} = 0 \qquad . \tag{4.53}$$

Beweis:

$$e \cdot \widetilde{f} \cdot \widetilde{g} \cdot \frac{x_m}{\vec{x}_m \cdot \vec{x}} = \frac{x_m \cdot e(x) \cdot \widetilde{g}(x)}{(\vec{x}_m \cdot \vec{x}) \sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}} \tag{4.54}$$

Im Falle $x \to x_m$ gehen wieder Zähler und Nenner des Quotienten gegen 0. Vor der Anwendung der Regel von DE L'HOSPITAL wird zunächst der Nenner betrachtet:

$$\begin{aligned} \left((\vec{x}_m \cdot \vec{x}) \sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2} \right)' &= x_m \cdot \sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2} \;+ \\ (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2 \cdot \frac{-x_m}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}} &= \frac{x_m}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}} \left(r_e^4 - 2\, (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2 \right) \end{aligned} \tag{4.55}$$

[1] Guillaume François Antoine Marquis De L'Hospital, 1661-1704

Für den Zähler ergibt sich:

$$\left(x_m \cdot e(x) \cdot \widetilde{g}(x)\right)' = \frac{-x_m^2}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}} \cdot \widetilde{g}(x) \;+\; x_m \cdot c_g \cdot e(x) \tag{4.56}$$

Nach der Anwendung der Regel von DE L'HOSPITAL ergibt sich die Summe:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_m} e \cdot \widetilde{f} \cdot \widetilde{g} \cdot \frac{x_m}{\vec{x}_m \cdot \vec{x}} &= \lim_{x\to x_m} \frac{-x_m \cdot \widetilde{g}(x)}{r_e^4 - 2\,(\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2} \\ &+ \lim_{x\to x_m} \frac{c_g \cdot e(x) \cdot \sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}}{r_e^4 - 2\,(\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}\end{aligned} \tag{4.57}$$

Für den Nenner der beiden Summanden ist der Grenzübergang nun ohne Probleme möglich und es ergibt sich $(-r_e^4)$ als Grenzwert, während der Zähler in beiden Summanden gegen 0 konvergiert. Damit ergibt sich für jeden einzelnen Summanden und insgesamt für die Summe der Grenzwert 0.

$$\lim_{x\to x_m} e \cdot \widetilde{f} \cdot \widetilde{g} \cdot \frac{x_m}{\vec{x}_m \cdot \vec{x}} = 0 \;+\; 0 \;=\; 0 \tag{4.58}$$

■

4.9 Hilfssatz: Sei $\widetilde{g}$ wie in Hilfssatz 4.7 und $e, \widetilde{f}$ aus Definition 4.4 .
Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_m} \widetilde{g} \cdot \big(e \cdot \widetilde{f}\,\big)' = 0 \qquad . \tag{4.59}$$

Beweis:

$$\widetilde{g} \cdot \big(e \cdot \widetilde{f}\,\big)' = \underbrace{\widetilde{g}(x) \cdot e'(x) \cdot \widetilde{f}(x)}_{I} \;+\; \underbrace{\widetilde{g}(x) \cdot e(x) \cdot \widetilde{f}'(x)}_{II} \tag{4.60}$$

Für den Grenzwert des Summanden I gilt:

$$\lim_{x\to x_m} \widetilde{g}(x) \cdot e'(x) \cdot \widetilde{f}(x) = \lim_{x\to x_m} \frac{-x_m}{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2} \cdot \widetilde{g}(x) \;=\; -x_m \lim_{x\to x_m} \widetilde{g}(x) \cdot \widetilde{f}^{\,2} \tag{4.61}$$

Nach dem Hilfssatz 4.7 konvergiert der letzte Grenzwert gegen

$$\lim_{x\to x_m} \widetilde{g} \cdot \widetilde{f}^{\,2} \;=\; -\frac{c_g}{2\,x_m\,r_e^2} \tag{4.62}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_m} \widetilde{g}(x) \cdot e'(x) \cdot \widetilde{f}(x) \;=\; \frac{c_g}{2\,r_e^2} \tag{4.63}$$

Der Summand II hat die Form:

$$\widetilde{g}(x) \cdot e(x) \cdot \widetilde{f}'(x) = \frac{x_m \cdot (\vec{x}_m \cdot \vec{x}) \cdot e(x) \cdot \widetilde{g}(x)}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x}\,)^2}^{\,3}} \tag{4.64}$$

Die Betrachtung für $x \to x_m$ führt wieder auf einen Quotienten, bei dem sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0 konvergieren. Auch hier wird die Regel von DE L'HOSPITAL angewandt. Die Ableitung des Zählers hat folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned}\big(x_m \cdot (\vec{x}_m \cdot \vec{x}) \cdot e(x) \cdot \widetilde{g}(x)\big)' &= x_m^2 \cdot e(x) \cdot \widetilde{g}(x) \\ + x_m \cdot (\vec{x}_m \cdot \vec{x}) \cdot e'(x) \cdot \widetilde{g}(x) \;&+\; c_g \cdot x_m \cdot (\vec{x}_m \cdot \vec{x}) \cdot e(x)\end{aligned} \tag{4.65}$$

Damit erhält man den Grenzwert mittels folgender drei Summanden:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_m} \widetilde{g}(x) \cdot e(x) \cdot \widetilde{f}'(x) &= \underbrace{\lim_{x\to x_m} \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{x_m \cdot e(x) \cdot \widetilde{g}(x)}{(\vec{x}_m \cdot \vec{x}\,) \cdot \sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x}\,)^2}}}_{III} \\ + \underbrace{\lim_{x\to x_m} \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{-x_m \cdot \widetilde{g}(x)}{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x}\,)^2}}_{IV} &+ \underbrace{\lim_{x\to x_m} \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{c_g \cdot e(x)}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x}\,)^2}}}_{V}\end{aligned} \tag{4.66}$$

Für Term III gilt:

$$\lim_{x\to x_m}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{x_m\cdot e(x)\cdot\widetilde{g}(x)}{(\vec{x}_m\cdot\vec{x})\cdot\sqrt{r_e^4-(\vec{x}_m\cdot\vec{x})^2}}=\left(-\frac{1}{3}\right)\lim_{x\to x_m} e\cdot\widetilde{f}\cdot\widetilde{g}\cdot\frac{x_m}{\vec{x}_m\cdot\vec{x}} \tag{4.67}$$

Nach dem Hilfssatz 4.8 konvergiert der letzte Grenzwert gegen

$$\lim_{x\to x_m} e\cdot\widetilde{f}\cdot\widetilde{g}\cdot\frac{x_m}{\vec{x}_m\cdot\vec{x}}=0 \tag{4.68}$$

$$\Longrightarrow\quad\lim_{x\to x_m}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{x_m\cdot e(x)\cdot\widetilde{g}(x)}{(\vec{x}_m\cdot\vec{x})^2\cdot\sqrt{r_e^4-(\vec{x}_m\cdot\vec{x})^2}}=0 \tag{4.69}$$

Für Term IV gilt:

$$\lim_{x\to x_m}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{-x_m\cdot\widetilde{g}(x)}{r_e^4-(\vec{x}_m\cdot\vec{x})^2}=\frac{x_m}{3}\cdot\lim_{x\to x_m}\widetilde{g}\cdot\widetilde{f}^{\,2} \tag{4.70}$$

Nach dem Hilfssatz 4.7 konvergiert der letzte Grenzwert gegen

$$\lim_{x\to x_m}\widetilde{g}\cdot\widetilde{f}^{\,2}=-\frac{c_g}{2\,x_m\,r_e^2} \tag{4.71}$$

$$\Longrightarrow\quad\lim_{x\to x_m}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{-x_m\cdot\widetilde{g}(x)}{r_e^4-(\vec{x}_m\cdot\vec{x})^2}=-\frac{c_g}{6\,r_e^2} \tag{4.72}$$

Für Term V gilt:

$$\lim_{x\to x_m}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{c_g\cdot e(x)}{\sqrt{r_e^4-(\vec{x}_m\cdot\vec{x})^2}}=\left(-\frac{c_g}{3}\right)\lim_{x\to x_m} e\cdot\widetilde{f} \tag{4.73}$$

Nach dem Hilfssatz 4.6 konvergiert der letzte Grenzwert gegen

$$\lim_{x\to x_m} e\cdot\widetilde{f}=\frac{1}{r_e^2} \tag{4.74}$$

$$\Longrightarrow\quad\lim_{x\to x_m}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{c_g\cdot e(x)}{\sqrt{r_e^4-(\vec{x}_m\cdot\vec{x})^2}}=-\frac{c_g}{3\,r_e^2} \tag{4.75}$$

Damit gilt für den Grenzwert des Summanden II:

$$\lim_{x\to x_m}\widetilde{g}(x)\cdot e(x)\cdot\widetilde{f}'(x)\;=\;III\;+\;IV\;+\;V=0\;-\;\frac{c_g}{6\,r_e^2}\;-\;\frac{c_g}{3\,r_e^2}\;=\;-\frac{c_g}{2\,r_e^2} \tag{4.76}$$

Daraus folgt die Behauptung des Hilfssatzes, da nach den Gleichungen (4.60), (4.63) und (4.76):

$$\lim_{x\to x_m}\widetilde{g}\cdot\big(e\cdot\widetilde{f}\,\big)'\;=\;\frac{c_g}{2\,r_e^2}\;-\;\frac{c_g}{2\,r_e^2}=0 \tag{4.77}$$

■

4.10 Satz: Sei $\widetilde{g}$ wie in Hilfssatz 4.7 und $e,\widetilde{f}$ aus Definition 4.4 und $\widetilde{h}:\big(-r_e,r_e\big)\setminus\{x_m\}\to\mathbb{R}$ folgende Funktion:

$$\widetilde{h}(x):=e(x)\cdot\widetilde{f}(x)\cdot\widetilde{g}(x) \tag{4.78}$$

Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_m}\widetilde{h}'(x)=\frac{c_g}{r_e^2}\qquad. \tag{4.79}$$

Beweis:

$$\widetilde{h}'(x)\;=\;\underbrace{\big(e(x)\cdot\widetilde{f}(x)\,\big)'\cdot\widetilde{g}(x)}_{I}+\underbrace{e(x)\cdot\widetilde{f}(x)\cdot\widetilde{g}'(x)}_{II} \tag{4.80}$$

Der Grenzwert für $x\to x_m$ des Term I ist 0 nach Hilfssatz 4.9 und Term II lässt sich umformen zu:

$$\lim_{x\to x_m} e(x)\cdot\widetilde{f}(x)\cdot\widetilde{g}'(x)=c_g\cdot\lim_{x\to x_m} e(x)\cdot\widetilde{f}(x) \tag{4.81}$$

Nach Hilfssatz 4.6 berechnet sich dieser Grenzwert zu:

$$\lim_{x \to x_m} e(x) \cdot \widetilde{f}(x) = \frac{1}{r_e^2} \tag{4.82}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_m} \widetilde{h}'(x) = 0 \; + \; c_g \cdot \frac{1}{r_e^2} \; = \; \frac{c_g}{r_e^2} \tag{4.83}$$

■

4.11 Folgerung: ($\frac{\partial \zeta}{\partial x}(\vec{x}_m)$ und $\frac{\partial \eta}{\partial x}(\vec{x}_m)$)
Gemäß Gleichung (4.37) werden zwei Funktionen $\zeta(x)$ und $\eta(x)$ definiert.
Funktion ζ:

$$\begin{aligned} \zeta : \big(-r_e, r_e\big) \setminus \{x_m\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto r_e \cdot e(x) \cdot \widetilde{f}(x) \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}_\zeta) \end{aligned} \tag{4.84}$$

Funktion η:

$$\begin{aligned} \eta : \big(-r_e, r_e\big) \setminus \{x_m\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto r_e \cdot e(x) \cdot \widetilde{f}(x) \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}_\eta) \end{aligned} \tag{4.85}$$

(a) Mit $\widetilde{g}(x) = r_e \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}_\zeta)$ und

$$c_g = \begin{cases} 0 & \text{für } x_m = y_m = 0 \\ -\dfrac{r_e\, y_m}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.86}$$

erfüllt $\zeta(x)$ die Voraussetzungen des Satzes 4.10.

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}(\vec{x}_m) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_m = y_m = 0 \\ -\dfrac{y_m}{r_e \sqrt{x_m^2 + y_m^2}} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.87}$$

(b) Mit $\widetilde{g}(x) = r_e \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}_\eta)$ und

$$c_g = \begin{cases} r_e & \text{für } x_m = y_m = 0 \\ -\dfrac{z_m\, x_m}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.88}$$

erfüllt $\eta(x)$ die Voraussetzungen des Satzes 4.10.

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial x}(\vec{x}_m) = \begin{cases} \dfrac{1}{r_e} & \text{für } x_m = y_m = 0 \\ -\dfrac{z_m\, x_m}{r_e^2 \sqrt{x_m^2 + y_m^2}} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.89}$$

Untersucht man die Funktionen e und $\widetilde{f}$ genauer, so erkennt man, dass sich ihr Verhalten in Richtung y oder z nicht von dem in x-Richtung unterscheidet. Treten Terme der Form $x \cdot x_m$ auf, so auch immer gleichzeitig Terme der Form $y \cdot y_m$ und $z \cdot z_m$. Mit dieser Erkenntnis lassen sich alle Aussagen, die für die x-Komponente gewonnen wurden, direkt auf die y- und z-Komponente übertragen.

4.12 Satz: Sei $\vec{x}_m = (x_m, y_m, z_m)^T$, $\vec{x} = (x_m, y, z_m)^T$ und die Funktionen $e, \widetilde{f}$ und $\widetilde{h} : (-r_e, r_e) \setminus \{y_m\} \to \mathbb{R}$ definiert über

$$e(y) = \arccos\left(\frac{\vec{x}_m \cdot \vec{x}}{r_e^2}\right) \tag{4.90}$$

$$\widetilde{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}} \tag{4.91}$$

$$\widetilde{h}(y) = e(y) \cdot \widetilde{f}(y) \cdot \widetilde{g}(y) \tag{4.92}$$

mit einer Funktion $\widetilde{g} : (-r_e, r_e) \to \mathbb{R}$ der beiden Eigenschaften:

$$\widetilde{g}(y_m) = 0 \tag{4.93}$$

$$\widetilde{g}\,'(y) = c_g = const < \infty \tag{4.94}$$

Dann gilt:

$$\lim_{y \to y_m} \widetilde{h}'(y) = \frac{c_g}{r_e^2} \quad . \tag{4.95}$$

4.13 Folgerung: ($\frac{\partial \zeta}{\partial y}(\vec{x}_m)$ und $\frac{\partial \eta}{\partial y}(\vec{x}_m)$)
Analog zur letzten Folgerung werden zwei Funktionen $\zeta(y)$ und $\eta(y)$ definiert.
Funktion ζ:

$$\begin{aligned} \zeta &: (-r_e, r_e) \setminus \{y_m\} \to \mathbb{R} \\ y &\mapsto r_e \cdot e(y) \cdot \widetilde{f}(y) \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}_\zeta) \end{aligned} \tag{4.96}$$

Funktion η:

$$\begin{aligned} \eta &: (-r_e, r_e) \setminus \{y_m\} \to \mathbb{R} \\ y &\mapsto r_e \cdot e(y) \cdot \widetilde{f}(y) \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}_\eta) \end{aligned} \tag{4.97}$$

(a) Mit $\widetilde{g}(y) = r_e \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}_\zeta)$ und

$$c_g = \begin{cases} -r_e & \text{für } x_m = y_m = 0, z_m = r_e \\ r_e & \text{für } x_m = y_m = 0, z_m = -r_e \\ \dfrac{r_e\, x_m}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.98}$$

erfüllt $\zeta(y)$ die Voraussetzungen des Satzes 4.12.

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\vec{x}_m) = \begin{cases} -\dfrac{1}{r_e} & \text{für } x_m = y_m = 0, z_m = r_e \\ \dfrac{1}{r_e} & \text{für } x_m = y_m = 0, z_m = -r_e \\ \dfrac{x_m}{r_e \sqrt{x_m^2 + y_m^2}} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.99}$$

(b) Mit $\widetilde{g}(y) = r_e \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}_\eta)$ und

$$c_g = \begin{cases} 0 & \text{für } x_m = y_m = 0 \\ -\dfrac{z_m\, y_m}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.100}$$

erfüllt $\eta(y)$ die Voraussetzungen des Satzes 4.12.

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial y}(\vec{x}_m) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_m = y_m = 0 \\ -\dfrac{z_m\, y_m}{r_e^2 \sqrt{x_m^2 + y_m^2}} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.101}$$

4.14 Satz: Sei $\vec{x}_m = (x_m, y_m, z_m)^T$, $\vec{x} = (x_m, y_m, z)^T$ und

die Funktionen $e, \widetilde{f}$ und $\widetilde{h} : (-r_e, r_e) \setminus \{z_m\} \to \mathbb{R}$ definiert über

$$e(z) = \arccos\left(\frac{\vec{x}_m \cdot \vec{x}}{r_e^2}\right) \tag{4.102}$$

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{r_e^4 - (\vec{x}_m \cdot \vec{x})^2}} \tag{4.103}$$

$$\widetilde{h}(z) = e(z) \cdot \widetilde{f}(z) \cdot \widetilde{g}(z) \tag{4.104}$$

mit einer Funktion $\widetilde{g} : (-r_e, r_e) \to \mathbb{R}$ der beiden Eigenschaften:

$$\widetilde{g}(z_m) = 0 \tag{4.105}$$

$$\widetilde{g}\,'(z) = c_g \;=\; const \;< \infty \tag{4.106}$$

Dann gilt:

$$\lim_{z \to z_m} \widetilde{h}'(z) = \frac{c_g}{r_e^2} \qquad . \tag{4.107}$$

4.15 Folgerung: ($\frac{\partial \zeta}{\partial z}(\vec{x}_m)$ und $\frac{\partial \eta}{\partial z}(\vec{x}_m)$)
Analog zu den letzten beiden Folgerung werden wieder zwei Funktionen $\zeta(z)$ und $\eta(z)$ definiert.
Funktion ζ:

$$\begin{aligned} \zeta &: (-r_e, r_e) \setminus \{z_m\} \to \mathbb{R} \\ z &\mapsto r_e \cdot e(z) \cdot \widetilde{f}(z) \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}_\zeta) \end{aligned} \tag{4.108}$$

Funktion η:

$$\begin{aligned} \eta &: (-r_e, r_e) \setminus \{z_m\} \to \mathbb{R} \\ z &\mapsto r_e \cdot e(z) \cdot \widetilde{f}(z) \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}_\eta) \end{aligned} \tag{4.109}$$

(a) Mit $\widetilde{g}(z) = r_e \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}_\zeta)$ und

$$c_g = 0 \tag{4.110}$$

erfüllt $\zeta(z)$ die Voraussetzungen des Satzes 4.14.

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z}(\vec{x}_m) = 0 \tag{4.111}$$

(b) Mit $\widetilde{g}(z) = r_e \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}_\eta)$ und

$$c_g = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \tag{4.112}$$

erfüllt $\eta(z)$ die Voraussetzungen des Satzes 4.14.

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial z}(\vec{x}_m) = \frac{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}}{r_e^2} \tag{4.113}$$

4.16 Folgerung: Fasst man die Ergebnisse der letzten Folgerungen zusammen, so ergeben sich sehr einfache Darstellungen der Gradienten von ζ und η im Knoten $\vec{x}_m$:

$$\nabla\zeta(\vec{x}_m) = \frac{1}{r_e}\,\vec{e}_\zeta \tag{4.114}$$

$$\nabla\eta(\vec{x}_m) = \frac{1}{r_e}\,\vec{e}_\eta \tag{4.115}$$

Damit lässt sich die Berechnung des Gradienten über die Kettenregel aus Gleichung (4.38) ebenfalls sehr einfach ausführen:

$$\nabla\Theta(\vec{x}_m) = \frac{1}{r_e}\left(\frac{\partial\Psi_m}{\partial\zeta}(F_K(\vec{x}_m))\cdot\vec{e}_\zeta \;+\; \frac{\partial\Psi_m}{\partial\eta}(F_K(\vec{x}_m))\cdot\vec{e}_\eta\right) \tag{4.116}$$

Da die Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\zeta$ und $\vec{e}_\eta$ nach Bemerkung 4.2 ein Orthonormalsystem bilden, gilt:

$$\nabla_S\,\Theta(\vec{x}_m) = \nabla\Theta(\vec{x}_m) \tag{4.117}$$

4.17 Folgerung: Sei $\vec{v}_S = (u, v, w)^T$ die Darstellung der tangentialen Geschwindigkeit im globalen Koordinatensystem. Für die vektorwertige Größe gelten ähnliche Aussagen, wie für die skalaren Größen.

$$\big((\vec{e}_r\cdot\nabla)\vec{v}_S\big)(\vec{x}_m) = \begin{pmatrix}\vec{e}_r\cdot\nabla u(\vec{x}_m)\\ \vec{e}_r\cdot\nabla v(\vec{x}_m)\\ \vec{e}_r\cdot\nabla w(\vec{x}_m)\end{pmatrix} = \vec{\mathcal{O}} \quad , \tag{4.118}$$

da in jeder Komponente Gleichung (4.116) angewendet werden darf.

$$\Longrightarrow \quad \nabla_S\,\vec{v}_S(\vec{x}_m) = \nabla\vec{v}_S(\vec{x}_m) \tag{4.119}$$

Die Berechnung von $\nabla\vec{v}_S(\vec{x}_m)$ erfolgt ähnlich wie in Gleichung (4.116).

$$\nabla v_S(\vec{x}_m) = \begin{pmatrix}\frac{\partial u_m}{\partial\zeta}(F_K(\vec{x}_m)) & \frac{\partial u_m}{\partial\eta}(F_K(\vec{x}_m))\\ \frac{\partial v_m}{\partial\zeta}(F_K(\vec{x}_m)) & \frac{\partial v_m}{\partial\eta}(F_K(\vec{x}_m))\\ \frac{\partial w_m}{\partial\zeta}(F_K(\vec{x}_m)) & \frac{\partial w_m}{\partial\eta}(F_K(\vec{x}_m))\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}- & \vec{e}_\zeta^{\,T} & -\\ - & \vec{e}_\eta^{\,T} & -\end{pmatrix} \tag{4.120}$$

Dabei sei u_m, v_m und w_m das quadratische Polynom, das u, v und w im lokalen Koordinatensystem des Knotens $\vec{x}_m$ repräsentiert (vergleiche dazu Gleichung (4.9)).

4.4 Auswertung im Start-, Mittel- und Endpunkt der Trajektorie

Die rechten Seite rhs_n^h enthält Terme, die sowohl mit dem gerade vorgestellten Schema berechnet, als auch in Punkten ausgewertet werden müssen, die keine Gitterpunkte sind. A. Staniforth und J. Côté [44][2] weisen ausdrücklich darauf hin, dass es notwendig ist, zunächst diese Terme in den Knoten zu berechnen und erst anschließend die Interpolation in Nichtgitterpunkte durchzuführen. Diese Reihenfolge darf nicht vertauscht werden.

4.4.1 Interpolation im Trajektorienstartpunkt

In Gleichung (3.20) muss $\nabla_{S_h}\vec{v}_n^{\,h}$ im Trajektorienstartpunkt berechnet werden. Dieses Feld lässt sich in den Knoten nach dem im letzten Abschnitt dargestellten Schema berechnen. Der Trajektorienstartpunkt ist im Allgemeinen kein Gitterpunkt. Der gesuchte Wert muss somit interpoliert werden. Da es sich dabei um eine skalare Größe handelt, bietet sich das in Abschnitt 4.1 vorgestellte quadratische Interpolationsverfahren an.

$$\Theta(\vec{x}_m) := -\frac{1}{\omega^2\,\Delta t}\nabla_{S_h}\vec{v}_n^{\,h}(\vec{x}_m) \quad \text{für } m = 1, 2, \ldots, M \tag{4.121}$$

Zu jedem Knoten $\vec{x}_m$ wurde bereits im Schritt **(a)** des Algorithmus die Verschiebung $\vec{\xi}_m$ bestimmt. Der Trajektorienstartpunkt $\vec{x}_m^{\,S}$ berechnet sich durch

$$\vec{x}_m^{\,S} = \vec{x}_m \;-\; 2\,\vec{\xi}_m \quad . \tag{4.122}$$

[2] A. Staniforth und J. Côté [44], Seite 2214

In jedem dieser Punkte wird nun das Feld Θ aus (4.121) mit dem quadratischen Interpolationsschema ausgewertet und zum Datenvektor

$$\vec{\Theta} = \big(\Theta(\vec{x}_1^S), \Theta(\vec{x}_2^S), \ldots, \Theta(\vec{x}_M^S)\big)^T \tag{4.123}$$

zusammengefasst.

4.4.2 Extrapolation in den Zwischenzeitpunkt t_n^*

Neben den Termen, die in Gleichung (3.20) im Trajektorienstartpunkt ausgewertet werden, gehen auch die Werte im Trajektorienmittelpunkt der mit einem * indizierten Summanden in rhs_n^h ein. Zusätzlich zu der räumlichen Verschiebung muss bei diesen Termen noch beachtet werden, dass sie zu einem Zwischenzeitpunkt ausgewertet werden, zu dem eigentlich keine diskreten Funktionswerte vorliegen. Um den numerischen Aufwand zu verringern, werden Terme, die im gleichen Punkt ausgewertet werden, vor der Interpolation zusammengefasst. Für $m = 1, 2, \ldots, M$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\Theta_n^\star(\vec{x}_m) \;:=\; \frac{1}{\omega}\left[\nabla_{S_h}\big(f(\vec{e}_r \times \vec{v}_n^h)\big)(\vec{x}_m) - \frac{1}{\omega\,\overline{\phi}\,\Delta t}\big(\phi_n^h \nabla_{S_h}\vec{v}_n^h\big)(\vec{x}_m)\right] \tag{4.124}$$

definiert. Anschließend wird dieses skalare Feld in allen Knoten in den Zwischenzeitpunkt t_n^* mit einem zu Gleichung (2.33) analogen Schema extrapoliert:

$$\begin{aligned} \Theta_n^*(\vec{x}_m) &:= \frac{3}{2}\,\Theta_n^\star(\vec{x}_m) \;-\; \frac{1}{2}\,\Theta_{n-1}^\star(\vec{x}_m) \\ \text{mit}\quad \Theta_{(-1)}^\star(\vec{x}_m) &:= \Theta_0^\star(\vec{x}_m) \end{aligned} \tag{4.125}$$

Danach wird wie im letzten Abschnitt in den Trajektorienmittelpunkt $\vec{x}_m^M$

$$\vec{x}_m^M = \vec{x}_m \;-\; \vec{\xi}_m \tag{4.126}$$

die Interpolation nach dem Schema aus Abschnitt 4.1 durchgeführt und die Ergebnisse zum Datenvektor

$$\vec{\Theta}^* = \big(\Theta_n^*(\vec{x}_1^M), \Theta_n^*(\vec{x}_2^M), \ldots, \Theta_n^*(\vec{x}_M^M)\big)^T \tag{4.127}$$

zusammengefasst.

4.4.3 Auswertung des Geopotentials und der Orografie

Vor der Berechnung der übrigen Terme in Gleichung (3.20) sei darauf hingewiesen, dass sie, bis auf Konstanten, eine ähnliche Struktur haben, wie die Terme auf der linken Seite in Gleichung (3.19). Mit dem Ansatz der finiten Elemente ergeben sich daraus Steifigkeits- und Massenmatrix (vergleiche Abschnitt 3.4.3). Wendet man denselben Ansatz auf das Geopotential an

$$\phi_n^h = \sum_{k=1}^{M} \widehat{\phi}_n^k b^k \text{ mit Basisfunktionen } b^k \tag{4.128}$$

so genügt es offensichtlich, die Koeffizienten $\widehat{\phi}_n^k$ zu kennen. Diese sind aber gerade

$$\widehat{\phi}_n^k = \phi_n^h(\vec{x}_k^S) \tag{4.129}$$

und lassen sich zu $\quad \vec{\phi}_n = \big(\widehat{\phi}_1^k, \widehat{\phi}_2^k, \ldots, \widehat{\phi}_M^k\big)^T \quad$ zusammenfassen.

Beim Orografiefeld H gilt es noch zu berücksichtigen, dass es sich um ein statisches Feld handelt. Das bedeutet, dass nur die Interpolation in die Trajektorienstartpunkte in jedem Zeitschritt durchgeführt werden muss. Alle Vorbereitungen dafür werden nur einmal am Anfang des Programmlaufes ausgeführt und fest gespeichert. Zur Weiterverarbeitung merkt man sich die beiden Vektoren

$$\vec{H} = \left(H^h_{n+1}(\vec{x}_1), H^h_{n+1}(\vec{x}_2), \ldots, H^h_{n+1}(\vec{x}_M)\right)^T \quad , \tag{4.130}$$

der die festen Orografiehöhen in den Knoten enthält und

$$\vec{H}_n = \left(H^h_n(\vec{x}^S_1), H^h_n(\vec{x}^S_2), \ldots, H^h_n(\vec{x}^S_M)\right)^T \tag{4.131}$$

der zu jedem Zeitpunkt t_n die interpolierten Orografiehöhen in den Trajektorienstartpunkten enthält.

4.5 Lineares Gleichungssystem

Mit den Vorbereitungen ergibt sich der Datenvektor $\vec{f}$ aus Gleichung (3.56) zu

$$\vec{f} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}\,\mathbf{S} + c\,\mathbf{M}\right)\cdot\vec{\phi}_n \;+\; \mathbf{S}\cdot\left(\vec{H} + \frac{1-\omega}{\omega}\,\vec{H}_n\right) \;+\; \mathbf{M}\cdot\left(\vec{\Theta} + \vec{\Theta}^*\right) \tag{4.132}$$

mit den Matrizen **S** und **M**, die ebenfalls nur einmal zu Beginn des Algorithmus aufgestellt werden müssen und sich nicht verändern, da in sie nur das feste Gitter und die Basis der linearen finiten Elemente eingehen (siehe (3.61) und (3.62)). Damit lässt sich das lineare Gleichungssystem (3.54) vollständig aufstellen. Zum Lösen wird in **FEM*m*E** ein vorkonditioniertes Gradientenverfahren verwendet, das im Folgenden kurz vorgestellt wird.

4.5.1 Gradientenverfahren

Die Gradientenverfahren beruhen auf der Erkenntnis, dass das Minimum der Funktion $\widetilde{m}$

$$\begin{aligned} \widetilde{m} &: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \\ \widetilde{m}(\vec{\phi}\,) &:= \frac{1}{2}\vec{\phi}^{\,T}\mathbf{A}\vec{\phi} \;-\; \vec{f}^{\,T}\vec{\phi} \end{aligned} \tag{4.133}$$

mit positiv definiter Matrix **A** gerade die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\vec{\phi} = \vec{f} \tag{4.134}$$

ist. Nach D. Braess [5] entwickelt sich daraus das Gradientenverfahren:

4.18 (Gradientenverfahren mit vollständiger linearer Suche)

Wähle $\vec{\phi}_0 \in \mathbb{R}^N$. Führe für $k = 0, 1, 2, \ldots$ folgende Rechnung durch:

(a) *Bestimmung der Richtung:* Berechne den negativen Gradienten

$$\vec{d}_k = -\nabla\widetilde{m}(\vec{\phi}_k) \tag{4.135}$$

(b) *Liniensuche:* Man suche das Minimum von $\widetilde{m}$ auf der Linie $\mathbb{L}$

$$\mathbb{L} = \left\{\vec{\phi}_k + q\cdot\vec{d}_k, \quad q > 0\right\} \tag{4.136}$$

Das Minimum werde bei

$$q = q_k \tag{4.137}$$

angenommen. Setze:

$$\vec{\phi}_{k+1} = \vec{\phi}_k + q_k\vec{d}_k \tag{4.138}$$

Zusammen mit einem dem Problem angepassten Orthogonalitätsbegriff lassen sich damit sehr effektive numerische Verfahren entwickeln.

4.19 Definition: (konjugierte Vektoren)
Sei $\mathbf{A}$ eine symmetrische, nichtsinguläre Matrix. Zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ heißen konjugiert oder A-orthogonal, wenn

$$\vec{x}^T \mathbf{A}\, \vec{y} = 0 \tag{4.139}$$

ist.

„Ein Grundgedanke der Methode der konjugierten Gradienten (englisch: conjugate gradient method, daher kurz cg-Verfahren) besteht darin, dafür zu sorgen, dass aufeinander folgende Richtungen nicht fast parallel sind. “ [3]

Erläuterungen des cg-Verfahrens in allen Einzelheiten finden sich zum Beispiel bei D. Braess [5] oder H.R. Schwarz [42]. Deshalb wird an dieser Stelle nicht weiter darauf eingegangen.

4.5.2 Vorkonditionierung

Das cg-Verfahren ist ein iteratives Verfahren. Die Anzahl der Iterationen, die benötigt werden, damit die Lösung des linearen Gleichungssystems (4.134) eine vorher festgelegte Genauigkeit erreicht, hängt stark von der Kondition der Matrix $\mathbf{A}$ ab (vergleiche H.R. Schwarz [42], Kapitel 4, § 4.6.3). Sinn der Vorkonditionierung ist es, durch die Wahl einer einfach invertierbaren, positiv definiten Matrix $\mathbf{C}$ ein zu (4.134) äquivalentes lineares Gleichungssystem zu erhalten, das bessere numerische Eigenschaften hat. Das bedeutet, dass weniger Iterationen benötigt werden, um die gewünschte Genauigkeit der Lösung zu erreichen.

4.20 (äquivalentes lineares Gleichunggssystem)

$$\underbrace{\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}}_{\widetilde{\mathbf{A}}}\,\underbrace{\mathbf{C}^{-1}\vec{\phi}}_{\vec{\phi}_*} = \underbrace{\mathbf{C}^T\vec{f}}_{\vec{f}_*} \tag{4.140}$$

4.21 Bemerkung: Dabei ist die Berechnung der Inversen der Matrix $\mathbf{C}$ nicht notwendig, denn aus der Lösung $\vec{\phi}_*$ des äquivalenten Gleichungssystems (4.140) berechnet sich die Lösung $\vec{\phi}$ des ursprünglichen Gleichungsystems (4.134) durch

$$\vec{\phi} = \mathbf{C} \cdot \vec{\phi}_* \tag{4.141}$$

Bei **FEM*m*E** wird ein pcg-Verfahren (englisch: preconditioned cg-method) mit einer sehr einfachen Wahl der Matrix $\mathbf{C}$ verwendet. Die Matrix $\mathbf{C}$ ist die Diagonalmatrix, deren Elemente sich aus den Diagonalelementen der Matrix $\mathbf{A}$ durch

$$c_{ii} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, M \tag{4.142}$$

ergeben. Dadurch wird erreicht, dass die Diagonalelemente der Matrix $\widetilde{\mathbf{A}}$ alle 1 sind und wegen der positiven Definitheit der Matrix $\mathbf{A}$ gilt für alle anderen Elemente, dass $\widetilde{a}_{ij}^2 < 1$ $(i \neq j)$. Es wird nur diese einfache Vorkonditionierung gewählt, weil sich dadurch

[3] D. Braess [5], Kapitel IV, §3

Matrix $\widetilde{\mathbf{A}}$ sehr schnell und einfach berechnen lässt und, wie die Tabellen 4.1 und 4.2 zeigen, damit bereits eine genügende Reduzierung der Iterationen und der Rechenzeit erreicht wird. Als Abbruchkriterium der Iteration wird in **FEMmE**

$$\left\|\vec{\phi}_{k+1} - \vec{\phi}_k\right\|_\infty < 10^{-8} \tag{4.143}$$

benutzt. Damit ergeben sich bei ausgewählten Testfällen, die im nächsten Kapitel vorgestellt werden, folgende Anzahl an Iterationen mit dem pcg-Verfahren.

Verfeinerungsstufe	0	1	2	3	4
Testfall 2, Δt = 900s	4 - 7	4 - 11	4 - 13	4 - 10	4 - 9
Testfall 5, Δt = 900s				4 - 14	8 - 15
Testfall 6, Δt = 900s				8 - 13	18 - 26

Tabelle 4.1: Anzahl der Iterationen im pcg-Verfahren

4.6 Vergleich von CPU-Zeiten

Zum Schluss dieses Kapitels folgt noch eine kurze Übersicht über die verbrauchten CPU[4]-Zeiten in den verschiedenen Schritten des Algorithmus. Entgegen der Erwartung, dass die meiste Zeit für das Lösen des linearen Gleichungssystems verwendet wird, zeigt Tabelle 4.2, dass dafür in der Regel weniger als 5 % der gesamten Rechenzeit benötigt wird. In den ausgewählten Zeitschritten, die in der Tabelle dargestellt sind, wird das pcg-Verfahren im 2.Testfall mit 4 Iterationsschritten und im 6.Testfall mit 18 Iterationsschritten durchgeführt. Wie die Tabelle deutlich zeigt, wird der überwiegende Teil der CPU-Zeit hauptsächlich für das Berechnen des Datenvektors $\vec{f}$ der rechten Seite (Schritte **(a)** - **(c)**) verbraucht und nur zu einem geringen Teil für die Berechnung der Lösung des linearen Gleichungssystems (Schritt **(d)**). Ursache dafür ist, dass in **FEMmE** durch eine objektorientierte Implementierung des Algorithmus mit Matrizen und Vektoren als Klassen in der verwendeten Programmiersprache C++ eine sehr effektive Umsetzung des vorgestellten pcg-Verfahrens gelungen ist.

	2.Testfall		6.Testfall	
	CPU-Zeit	Anteil an Gesamtzeit	CPU-Zeit	Anteil an Gesamtzeit
Initialisierung	5.34 s	10.35 %	5.29 s	10.09 %
Schritt **(a)** - **(c)**	44.63 s	86.54 %	44.52 s	84.93 %
Schritt **(d)**	0.49 s	0.96 %	1.44 s	2.75 %
Schritt **(e)**	1.11 s	2.15 %	1.17 s	2.23 %
Gesamt	51.57 s	100.00 %	52.42 s	100.00 %

Tabelle 4.2: CPU-Zeiten eines Durchgangs des Algorithmus im 2. und 6.Testfall mit 4.Verfeinerung zu einem willkürlich ausgewählten Zeitpunkt

[4]Central Processor Unit

Kapitel 5

Numerische Ergebnisse

Mit dem in den letzten Kapitel vorgestellten Programmpaket **FEMmE** sind fünf Testfälle gerechnet worden. Vier davon sind einem Standarddatensatz [54] zum Testen der Flachwassergleichungen entnommen, der vom NCAR[1] 1992 zusammengestellt worden ist. Anfang der neunziger Jahre war die Anzahl der Flachwassermodelle mit unterschiedlichen numerischen Ansätzen soweit angestiegen, dass es sinnvoll wurde, eine Möglichkeit zu schaffen, sie miteinander zu vergleichen, um Aussagen über ihre Güte zu treffen. Diesem Zweck dient der Datensatz, der sieben in der Literatur bearbeitete Testfälle sammelt. Zu einigen der Testfälle ist keine explizite analytische Lösung bekannt. Am NCAR wurde mit einem zur damaligen Zeit hochauflösenden Spektralmodell die Testfälle durchgerechnet und nach jedem vollen Modelltag die Werte der Parameter für den Datensatz aufbereitet und zur Verfügung gestellt. Für das Verständnis der atmosphärischen Vorgänge sind gerade diese Testfälle von Interesse, weil versucht wird „komplexe" Probleme zu untersuchen. Auf der anderen Seite haben die Testprobleme, zu denen die analytische Lösung bekannt sind, den Vorteil, dass sich der numerische Fehler genau kontrollieren lässt.
In allen NCAR-Testfällen sind die Anfangsfelder für jeden Ort in geografischen Koordinaten der Länge λ und Breite φ gegeben. Die Transformation dieser sphärischen Koordinaten in die kartesischen Koordinaten $(x, y, z)^T$ erfolgt durch

$$x = r_e \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda \tag{5.1}$$

$$y = r_e \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda \tag{5.2}$$

$$z = r_e \cdot \sin\varphi \tag{5.3}$$

Desweiteren sind für die Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ jeweils die Komponenten in zonaler $v_\zeta := \vec{v}_S \cdot \vec{e}_\zeta$ und meridionaler Richtung $v_\eta := \vec{v}_S \cdot \vec{e}_\eta$ vorgegeben. Die kartesischen Komponenten $(u, v, w)^T$ der Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ ergeben sich daraus nach K. Cassirer et al.[6]:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\sin\varphi\cdot\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\varphi\cdot\sin\lambda \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_\zeta \\ v_\eta \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

In dieser Arbeit werden die Ergebnisse von **FEMmE** für die passive Advektion einer Kosinusglocke (Testfall 1), den stationären geostrophischen Fluss (Testfall 2), das Überströmen eines einzelnen Berges (Testfall 5) und die ROSSBY-HAURWITZ-Welle (Testfall 6) dargestellt. Zusätzlich ist noch ein weiterer Test durchgeführt worden, der auf einen Vorschlag von G. Dziuk [10] zurückgeht und hier der Kugelgeometrie angepasst worden ist. Er untersucht die numerischen Umsetzung der HELMHOLTZ-Gleichung mit finiten Elementen. Das Problem der passiven Advektion dient nicht dem Testen der kompletten Flachwassergleichungen, sondern nur des Semi-LAGRANGE-Schemas.
Nur im fünften Testfall wird eine Orografie berücksichtigt. In allen anderen Fällen gibt es

[1] National Center for Atmospheric Research in Boulder, Colorado

keine Orografie, d.h. $H_o = 0\,\mathrm{m^2 s^{-2}}$. Der Parameter ω, der eine Wichtung der Werte am Start- und Endpunkt einer Trajektorie vornimmt, ist in allen Fällen nach einem Vorschlag von D. Majewski [28] mit $\omega = 0.7$ festgelegt worden.
Bevor auf die Testfälle im Einzelnen eingegangen wird, werden im ersten Abschnitt die numerischen Testgrößen vorgestellt, mit denen die Untersuchungen durchgeführt werden.
Die Grafiken sind mit der Software GMT-3 ([51], [52]) erzeugt worden. Zur Darstellung der Felder auf der Kugel ist die flächentreue MOLLWEIDE[2]-Projektion ausgewählt worden. Zur besseren Übersicht sind die meisten Bilder anstatt eines Koordinatensystems mit Kontinentumrissen unterlegt worden. Da in allen betrachteten Testfällen die reale Topografie der Erde keine Rolle spielt, dienen sie ausschließlich der Orientierung.

5.1 Testgrößen

In der Meteorologie ist es üblich, statt des Geopotentials Karten einer mit dem Betrag g der Schwerebeschleunigung $\vec{g}$ normierte Größe zu betrachten, die so genannte geopotientielle Höhe Φ. Die Definition findet sich z.B. im Abschnitt 4.2 bei J.A. Dutton [9]. In dieser Arbeit wird sie für das diskrete Gitter modifiziert:

5.1 Definition: (Geopotentielle Höhe Φ_k)
Geopotentielle Höhe:

$$\Phi_m := \frac{1}{g}\left(\overline{\phi} \;+\; \phi_n^d(\vec{x}_m)\right) \qquad m = 1, 2, \ldots, M \tag{5.5}$$

5.2 Definition: (Maximum Φ_{max} und Minimum Φ_{min})
Maximum:

$$\Phi_{max} := \max\left\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_M\right\} \tag{5.6}$$

Minimum:

$$\Phi_{min} := \min\left\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_M\right\} \tag{5.7}$$

Im Falle vorhandener Orografie werden diese Extrema leicht abgewandelt.

5.3 Definition: (Maximum $\widetilde{\Phi}_{max}$ und Minimum $\widetilde{\Phi}_{min}$)
Maximum:

$$\widetilde{\Phi}_{max} := \max\left\{\Phi_1 - h_1, \Phi_2 - h_2, \ldots, \Phi_M - h_M\right\} \tag{5.8}$$

Minimum:

$$\widetilde{\Phi}_{min} := \min\left\{\Phi_1 - h_1, \Phi_2 - h_2, \ldots, \Phi_M - h_M\right\} \tag{5.9}$$

dabei ist

$$h_m := \frac{1}{g} H_o(\vec{x}_m) \qquad m = 1, 2, \ldots, M \tag{5.10}$$

Neben den Extrema der physikalischen Felder interessieren Messgrößen, die eine Aussage über die Erhaltung von Masse und Energie machen.

5.4 Definition: (Ratio of First Moments RFM)
Ratio of First Moments:

$$RFM(t_n) = \frac{\displaystyle\int_{S_h} \phi_n^d(\vec{x}\,)\; d\vec{x}}{\displaystyle\int_{S_h} \phi_0^d(\vec{x}\,)\; d\vec{x}} \tag{5.11}$$

[2]Karl Brendan Mollweide, 1774-1825

5.5 Definition: (Ratio of Second Moments RSM)
Ratio of Second Moments:

$$RSM(t_n) = \frac{\sqrt{\int\limits_{S_h} \left[\phi_n^d(\vec{x})\right]^2 d\vec{x}}}{\sqrt{\int\limits_{S_h} \left[\phi_0^d(\vec{x})\right]^2 d\vec{x}}} \tag{5.12}$$

Diese Definitionen sind den Veröffentlichungen von A. Priestley [34] und dem Abschnitt 6.5 von J. Behrens [4] entnommen. RFM ist ein Maß für die Massenerhaltung des Systems, RSM für die Erhaltung von potentieller und verfügbarer potentieller Energie. Im Falle, dass sich die Gestalt des Geopotentialfeldes nicht ändert, ist RSM auch ein Maß für die Erhaltung der kinetischen und der Gesamtenergie. Die genauen Zusammenhänge sind im Anhang D dargestellt. Im Falle der Änderung der Gestalt des Geopotentialfeldes, was bei den untersuchten Testfällen nur im fünften Testfall auftritt, ist eine andere Testgröße notwendig, um die Erhaltung der gesamten Energie zu untersuchen. Dazu wird das Verhältnis der Gesamtenergie verwendet.

5.6 Definition: (Ratio of Total Energy RTE)
Ratio of Total Energy:

$$RTE(t_n) = \frac{\int\limits_{S_h} \left[\phi_n^d(\vec{x}) + \overline{\phi}\,\right] \cdot \left[\vec{v}_n^{\,d}(\vec{x})\right]^2 + \left[\phi_n^d(\vec{x}) + \overline{\phi}\,\right]^2 - \left[H_n^d(\vec{x})\right]^2 d\vec{x}}{\int\limits_{S_h} \left[\phi_0^d(\vec{x}) + \overline{\phi}\,\right] \cdot \left[\vec{v}_0^{\,d}(\vec{x})\right]^2 + \left[\phi_0^d(\vec{x}) + \overline{\phi}\,\right]^2 - \left[H_0^d(\vec{x})\right]^2 d\vec{x}} \tag{5.13}$$

Die Definition der Gesamtenergie geht auf die Betrachtungen von L.L. Takacs in [47] zurück. Weitere Details dazu findet man ebenfalls im Anhang D.

Eine weitere Frage richtet sich nach der zeitlichen Entwicklung des numerischen Fehlers, wenn zum Zeitpunkt t_n eine explizite Lösung $\phi^e(t_n)$ bekannt ist.

5.7 Bezeichnungen:

$$\phi_n^e = \phi^e(t_n) \tag{5.14}$$
$$\vec{\phi}_n^e = \left(\phi_n^e(\vec{x}_1), \phi_n^e(\vec{x}_2), \ldots, \phi_n^e(\vec{x}_M)\right)^T \tag{5.15}$$
$$\vec{\phi}_n^d = \left(\phi_n^d(\vec{x}_1), \phi_n^d(\vec{x}_2), \ldots, \phi_n^d(\vec{x}_M)\right)^T \tag{5.16}$$

5.8 Definition: (normalized Root Mean Square $nRMS$)
normalized Root Mean Square:

$$nRMS(t_n) = \frac{\sqrt{\int\limits_{S_h} \left[\phi_n^d(\vec{x}) - \phi_n^e(\vec{x})\right]^2 d\vec{x}}}{\sqrt{\int\limits_{S_h} \left[\phi_n^e(\vec{x})\right]^2 d\vec{x}}} \tag{5.17}$$

Der $nRMS$ beurteilt zu jedem Zeitpunkt t_n den mittleren quadratischen Fehler.

5.9 Definition: (normalized l_p error nl_p)
normalized l_p error, $p \in \mathbb{N}$:

$$nl_p(t_n) = \frac{\left(\int\limits_{S_h} \left| \phi_n^d(\vec{x}) - \phi_n^e(\vec{x}) \right|^p d\vec{x} \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_{S_h} \left| \phi_n^e(\vec{x}) \right|^p d\vec{x} \right)^{\frac{1}{p}}} \tag{5.18}$$

5.10 Bemerkung: $nRMS$ und nl_2 sind identisch.

5.11 Definition: (normalized l_∞ error nl_∞)
normalized l_∞ error:

$$nl_\infty(t_n) = \frac{\left\| \vec{\phi}_n^d - \vec{\phi}_n^e \right\|_\infty}{\left\| \vec{\phi}_n^e \right\|_\infty} \tag{5.19}$$

Der nullte Testfall ist insofern eine Ausnahme, weil nur eine mathematische Funktion ohne physikalischen Hintergrund betrachtet wird. Deshalb werden dort direkt die Extremwerte ϕ_{max} und ϕ_{min} angegeben.

5.12 Definition: (Maximum ϕ_{max} und Minimum ϕ_{min})
Maximum:

$$\phi_{max} := \max\left\{ \phi_0^d(\vec{x}_1), \phi_0^d(\vec{x}_2), \ldots, \phi_0^d(\vec{x}_M) \right\} \tag{5.20}$$

Minimum:

$$\phi_{min} := \min\left\{ \phi_0^d(\vec{x}_1), \phi_0^d(\vec{x}_2), \ldots, \phi_0^d(\vec{x}_M) \right\} \tag{5.21}$$

Da einer der zentralen Punkte bei der Untersuchung dieses Testfalles das Konvergenzverhalten des Finite-Elemente-Ansatzes ist, wird die experimentelle Konvergenzordnung eingeführt. Dazu benötigt man in jeder Verfeinerungsstufe j den Fehler E_j und die längste Seite h_j.

5.13 Definition: (Fehler E_j und längste Seite h_j)
Für $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
Fehler :

$$E_j = nRMS(t_0) \tag{5.22}$$

längste Seite:

$$h_j = h \qquad \text{(vergleiche Gleichung (3.10))} \tag{5.23}$$

5.14 Definition: (Experimental Order of Convergence EOC_j)
Experimental Order of Convergence :

$$EOC_j = \frac{\ln \dfrac{E_{j-1}}{E_j}}{\ln \dfrac{h_{j-1}}{h_j}} \quad \text{für } j \in \{1, 2, 3, 4\} \tag{5.24}$$

Die letzten beiden Definitionen gehen auf G.Dziuk [10] zurück.

5.2 Testfall 0: HELMHOLTZ-Gleichung

Die im dritten Kapitel vorgestellte Methode der finiten Elemente wird in **FEM*m*E** zur Lösung des HELMHOLTZ-Problems aus Gleichung (2.53) benutzt. Um zu untersuchen, ob die Auswahl der linearen finiten Elementen vernünftige Ergebnisse liefert, wird eine von G. Dziuk in [10] ausgewählte Funktion auf das hier betrachtete Problem übertragen. Es lässt sich durch

$$L\phi = \frac{7}{r_e^2}\, x \cdot y \quad \text{in } S \tag{5.25}$$

mit den Parametern

$$c = \frac{1}{r_e^2} \tag{5.26}$$

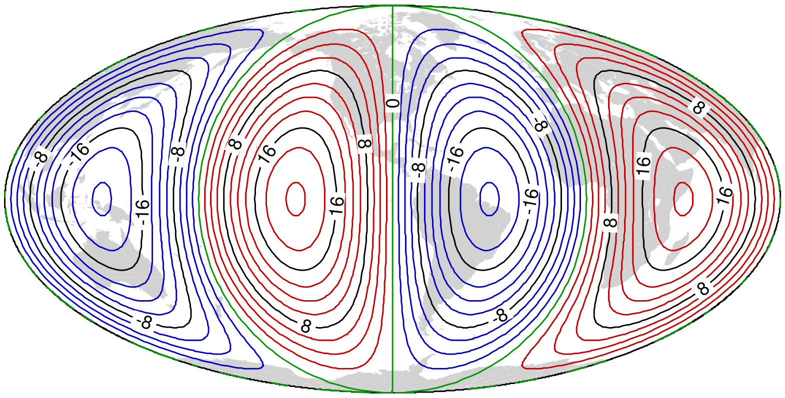
$$r_e = \frac{2}{\pi} \cdot 10^7 \text{ m} \approx 6371,22 \text{ km} \tag{5.27}$$

formulieren. Die analytische Lösung dazu ist bekannt und lautet

$$\phi(x, y, z) = x \cdot y \qquad \text{in } S \tag{5.28}$$

Die folgenden Abbildungen zeigen die numerischen Ergebnisse. Zur besseren Darstellung ist in Abbildung 5.1**(a)** das Feld mit 10^{12} m^2 und in den übrigen Abbildungen mit 10^{10} m^2 normiert worden. Man beachte außerdem die unterschiedlichen Niveaulinienabstände.

(a)



(b)

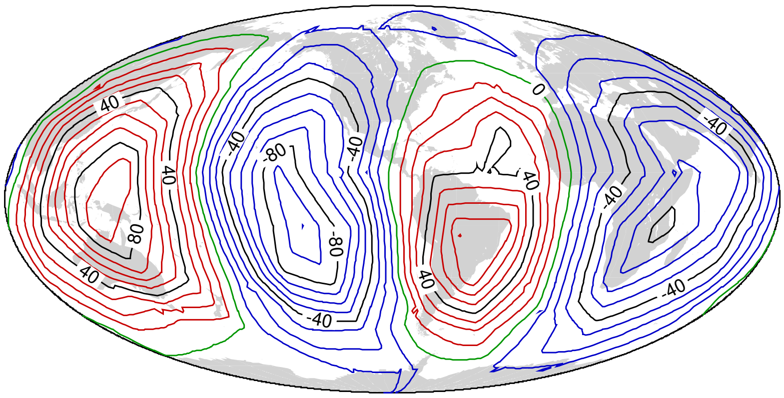


Abbildung 5.1: numerische Ergebnisse

(a) numerische Lösung mit 4.Verfeinerung, Isolinienabstand 2 * 10^{12} m^2
(b) numerischer Fehler mit 0.Verfeinerung, Isolinienabstand 10 * 10^{10} m^2

(c)

(d)

(e)

(f)

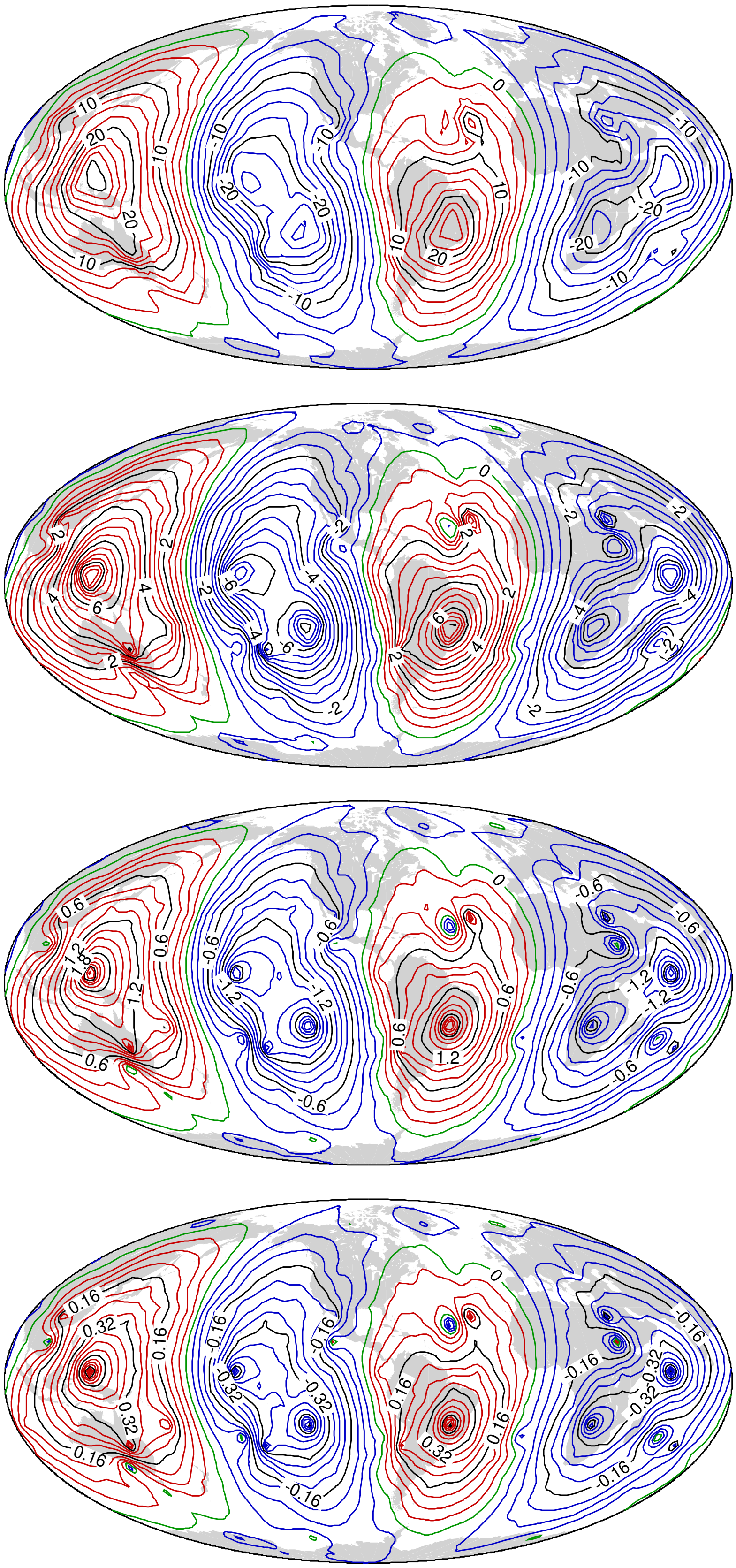


Abbildung 5.2: numerischer Fehler mit

(c) 1.Verfeinerung, Isolinienabstand 2.5 * 10^{10} m^2
(d) 2.Verfeinerung, Isolinienabstand 0.5 * 10^{10} m^2
(e) 3.Verfeinerung, Isolinienabstand 0.15 * 10^{10} m^2
(f) 4.Verfeinerung, Isolinienabstand 0.04 * 10^{10} m^2

Tabelle 5.1 zeigt die Entwicklung der Extrema und der Fehler beim Übergang zu feineren Gittern. Von besonderem Interesse ist die letzte Spalte, der EOC. Von „ebenen" Problemen weiss man, dass Ansätze mit linearen finiten Elementen eine Konvergenzordnung 2 besitzen. G. Dziuk hat in [10] gezeigt, dass das auch für elliptische Differentialgleichungen auf beliebigen zweidimensionalen Oberflächen gilt. So überrascht das Eintreffen des erwarteten Ergebnisses im hier vorgestellten Testfall nicht.

Stufe	ϕ_{max} in m^2	ϕ_{min} in m^2	nl_1	$nRMS$	nl_∞	längste Kante	EOC
0	1.917 * 10^{13}	-1.917 * 10^{13}	4.1889 %	4.2928 %	5.1473 %	2625.493 km	
							2.040
1	1.997 * 10^{13}	-1.997 * 10^{13}	1.0341 %	1.0900 %	1.5799 %	1340.933 km	
							2.003
2	2.011 * 10^{13}	-2.011 * 10^{13}	0.2584 %	0.2748 %	0.4704 %	674.136 km	
							1.999
3	2.025 * 10^{13}	-2.025 * 10^{13}	0.0646 %	0.0690 %	0.1368 %	337.531 km	
							1.999
4	2.026 * 10^{13}	-2.026 * 10^{13}	0.0161 %	0.0173 %	0.0394 %	168.824 km	

Tabelle 5.1: Entwicklung der Testgrößen beim Verfeinern des Gitters

5.15 Bemerkung: Der Leser könnte sich an dieser Stelle wundern, dass sich die Werte von ϕ_{max} und ϕ_{min} in den einzelnen Stufen so deutliche unterscheiden. Das liegt an der unterschiedlichen räumlichen Auflösung. In einer Verfeinerungsstufe werden Knoten $\vec{x}_m$ dem Gitter hinzugefügt, in denen die Werte von ϕ größer als ϕ_{max} des Ausgangsgitters sind.
Die maximale analytische Lösung beträgt in den Punkten $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,r_e, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,r_e, 0\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,r_e, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,r_e, 0\right)$:

$$\phi_{max} = \frac{1}{2} r_e^2 \;\approx\; 2.026 * 10^{13}\,\mathrm{m}^2 \tag{5.29}$$

5.2.1 Diskussion

Tabelle 5.1 entnimmt man, dass die analytische Lösung umso besser angenähert wird, je feiner das Gitter ist. Die numerischen Fehler reduzieren sich von Stufe zu Stufe um etwa ein Viertel. Somit liefert die in dieser Arbeit entwickelte Finite-Element-Methode ein zweiter Ordnung konvergentes Verfahren. Dies erkennt man auch in den Abbildungen der numerischen Fehler, wobei festzustellen ist, dass der Algorithmus die exakte Lösung leicht unterschätzt und die numerische Lösung zur Abflachung der gesuchten Funktion tendiert. Durch die Verkleinerung der Niveaulinienabstände fällt auf, dass die Struktur der numerischen Fehler in allen Stufen ähnlich ist. Insbesondere befinden sich die Extrema der Fehler immer an denselben Stellen. Daraus kann man schliessen, dass das Fehlermuster durch das Gitter induziert ist. In diesem Fall kommen die Mittelpunkte der Fünfecke des Ursprungsgitters als Ursache in Betracht, da sie, im Gegensatz zu allen anderen Punkten, zusammen mit den beiden Polen die einzigen Punkte sind, die nur fünf Nachbarpunkte besitzen. Die Vermutung, dass es sich bei den Extrema der Fehler um diese Punkt handelt, bestätigt sich bei genauer Analyse jedoch nicht. Gegen die Vermutung, dass das Gitter für die Struktur verantwortlich ist, spricht auch, dass sich keine Symmetrien in der Struktur erkennen lassen, obwohl sowohl das Gitter als auch die gesuchte Funktion punktsymmetrisch zum Erdmittelpunkt sind. Ohne eingehende Untersuchung lässt sich daher zur Zeit keine Erklärung für dieses Phänomen geben.

5.3 Testfall 1: Passive Advektion einer Kosinusglocke

Mit Hilfe dieses Testfalls wird das Verhalten des Semi-LAGRANGE-Schemas untersucht. Dazu wird das Problem der passiven Advektion (2.12) mit dem vorgestellten Ansatz (2.15) diskretisiert. Es wird ein festes Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}_o = (v_{\zeta o}, v_{\eta o})^T$ mit

$$v_{\zeta o} = U_o\big(\cos\varphi\cos\upsilon \;+\; \sin\varphi\cos\lambda\sin\upsilon\big) \tag{5.30}$$

$$v_{\eta o} = -U_o\sin\lambda\sin\upsilon \tag{5.31}$$

vorgegeben, das sich im Laufe des Experiments nicht ändert. λ und φ bezeichnen die geografische Länge und Breite eines Ortes und υ ist der Winkel, mit der die Strömung den Äquator überquert, gemessen im Gegenuhrzeigersinn, wobei durch $\upsilon = 0°$ Westwind festgelegt wird. Die Geschwindigkeit U_o wird so gewählt, dass ein Partikel, das auf einem Großkreis, z.B. dem Äquator, um den Globus transportiert wird, sich nach genau zwölf Tagen Aufenthalt in dieser Strömung wieder am Ausgangsort befindet.

$$U_o = \frac{2\,\pi\,r_e}{12\text{ d}} \;=\; \frac{5^5\text{ m}}{3^4\text{ s}} \;\approx\; 38.58\text{ m s}^{-1} \tag{5.32}$$

Im Punkt $Z\,(-\frac{\pi}{2}, 0)$ befindet sich das Zentrum einer Kosinusglocke der maximalen Höhe B_{max} = 1000 m und dem Radius $R = \frac{r_e}{3}$. Als Anfangsfeld des Geopotentials ergibt sich damit:

$$\phi_o = \begin{cases} \dfrac{g B_{max}}{2}\left(1 + \cos\dfrac{\pi r(\vec{x}\,)}{R}\right) & \text{wenn} \quad r(\vec{x}\,) < R \\ 0 & \text{wenn} \quad r(\vec{x}\,) \geq R \end{cases} \tag{5.33}$$

mit

$$r(\vec{x}\,) : \text{Großkreisabstand des Punktes } \vec{x} \text{ zum Zentrum Z} \tag{5.34}$$

und den Parametern

$$r_e = \frac{2}{\pi}\cdot 10^7\text{ m} \;\approx\; 6371,22\,\text{km} \tag{5.35}$$

$$g = 9,80616\text{ m s}^{-2} \tag{5.36}$$

Die Glocke wird durch das vorgegebenen Windfeld um die Erde rotiert. Dabei soll sich ihre Gestalt nicht ändern. Von Interesse ist das Verhalten des Semi-LAGRANGE-Schemas bei Variation der Auflösung des Gitters, der Dauer des Zeitschrittes Δt und des Überströmwinkels υ.

Zunächst werden die Ergebnisse mit einem Zeitschritt von sechs Stunden und dem Winkel $\upsilon = 0°$ in der zweiten, dritten und vierten Verfeinerungsstufe verglichen. Sie finden sich in Tabelle 5.2.

Tage	Stufe	Φ_{max}	Φ_{min}	RFM	RSM	nl_1	$nRMS$	nl_∞
0 d		1000.0 m	0.0 m	1.000	1.000			
6d	2	814.6 m	-27.2 m	0.999	0.919	32.34 %	19.81 %	18.54 %
	3	981.4 m	-10.3 m	1.000	0.988	5.71 %	3.48 %	2.90 %
	4	999.3 m	-2.1 m	1.000	0.999	0.42 %	0.31 %	0.34 %
12 d	2	707.0 m	-30.8 m	1.000	0.873	50.38 %	29.85 %	29.30 %
	3	962.1 m	-13.4 m	0.999	0.977	9.95 %	6.08 %	4.89 %
	4	998.6 m	-3.1 m	1.000	0.999	0.75 %	0.53 %	0.60 %

Tabelle 5.2: Entwicklung der Testgrößen mit $\Delta t = 6$ h und Winkel $\upsilon = 0°$

Da sich der Träger $supp\,\phi$ der Glocke auf einen sehr kleinen Bereich konzentriert, ist für sinnvolle Resultate bereits ein hochauflösendes Gitter notwendig. Bei denen in **FEMmE** verwendeten Gitter befinden sich in der zweiten Verfeinerungsstufe 37 (von 1442) Knoten und in der dritten Verfeinerung 155 (von 5762) Knoten innerhalb des Radius R. Die numerischen Ergebnisse in Tabelle 5.2 zeigen, dass mindestens die dritte Stufe ausgewählt werden muss, um brauchbare Resultate zu erreichen.
In der nächsten Untersuchung wird mit dieser Auflösung und dem Winkel $\upsilon = 0°$ Zeitschritte von einer halben, einer, drei und sechs Stunden Dauer verglichen. Tabelle 5.3 zeigt die Entwicklung der Testgrößen der letzten drei Zeitschritte nach sechs und zwölf Tagen.

Tage	Δt	N	Φ_{max}	Φ_{min}	RFM	RSM	nl_1	$nRMS$	nl_∞
0 d			1000.0 m	0.0 m	1.000	1.000			
6 d	1 h	144	901.4 m	-26.4 m	1.000	0.951	19.61 %	12.38 %	9.85 %
	3 h	48	970.8 m	-19.2 m	1.000	0.983	8.49 %	5.28 %	3.95 %
	6 h	24	981.4 m	-10.3 m	1.000	0.988	5.71 %	3.48 %	2.90 %
12 d	1 h	288	827.7 m	-32.4 m	0.999	0.920	31.32 %	19.65 %	17.23 %
	3 h	96	939.1 m	-27.8 m	0.999	0.968	14.77 %	9.24 %	7.45 %
	6 h	48	962.1 m	-13.4 m	0.999	0.977	9.95 %	6.08 %	4.89 %

Tabelle 5.3: Entwicklung der Testgrößen der 3.Verfeinerung mit Winkel $\upsilon = 0°$

Aufgrund des ersten Eindrucks bei der Fehlerentwicklung, wie sie in Abbildung 5.3 dargestellt ist, lässt sich vermuten, dass je größer der Zeitschritt ist, desto kleiner ist der numerische Fehler. Das bedeutet, dass der Fehler mehr von der Anzahl der Interpolationen, die in jedem Zeitschritt durchgeführt werden müssen, als von der Dauer des Zeitschrittes bestimmt wird. Diese Aussage ist nur richtig, wenn man die Fehler zu festen Zeitpunkten vergleicht. Betrachtet man jedoch die Fehler nach einer bestimmten Anzahl von Zeitschritten, dann dreht sich das Verhältnis gerade um. Hier gilt: je kleiner der Zeitschritt, desto geringer der Fehler, wie Abbildungen 5.4 verdeutlicht.

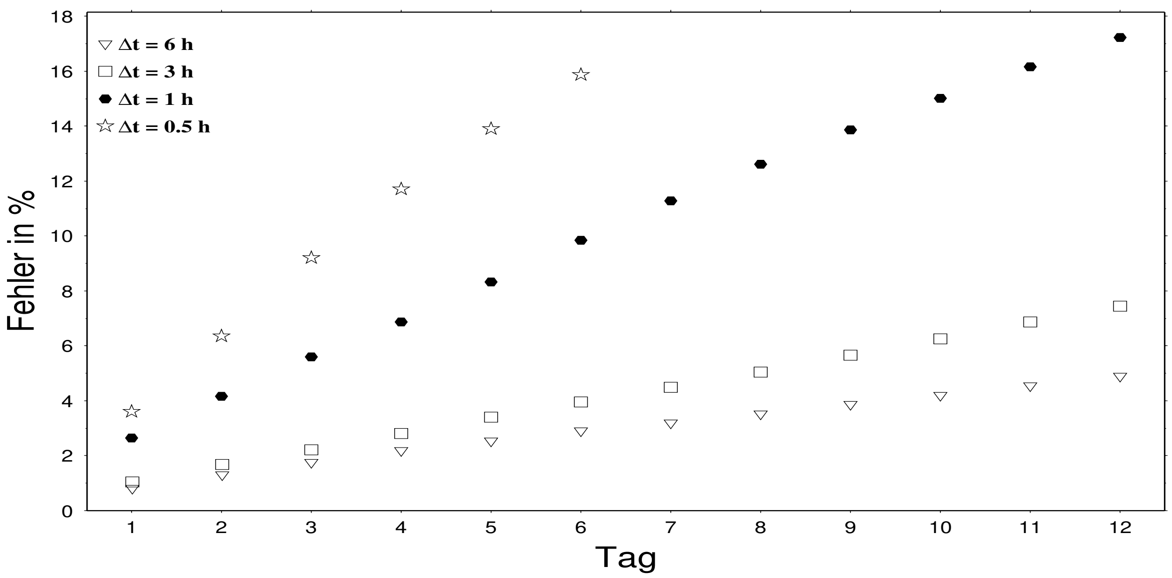


Abbildung 5.3: Entwicklung von nl_∞ in der 3. Verfeinerung mit Winkel $\upsilon = 0°$ nach Tagen

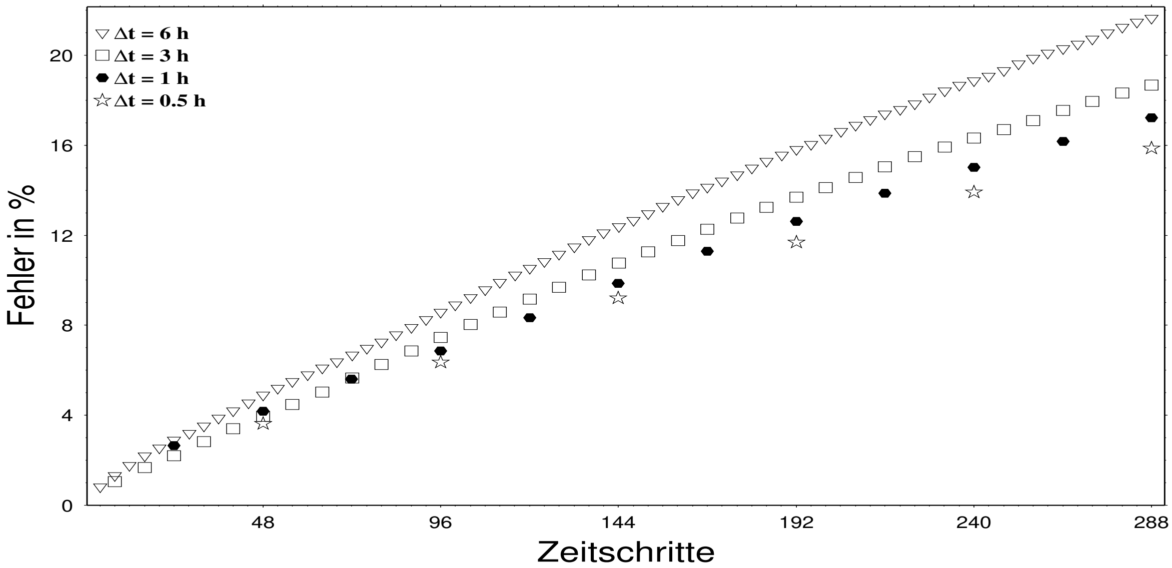


Abbildung 5.4: wie Abbildung 5.3, aber nach Anzahl von Zeitschritten

Als letzter Aspekt im Rahmen dieses Testfalles wird das Verhalten des Semi-LAGRANGE-Schemas bei Änderung des Überströmungswinkel υ betrachtet, um festzustellen, welchen Einfluss die Struktur des Gitters auf die numerischen Fehler hat. Dazu sind bei einem Zeitschritt von 6 h in der dritten und vierten Verfeinerungsstufe weitere Simulationen mit den Winkeln 0.05 °, 90 ° und 140 ° durchgeführt worden. Tabelle 5.4 zeigt die Ergebnisse.

Tage	Stufe	Winkel υ	Φ_{max}	Φ_{min}	RFM	RSM	nl_1	$nRMS$	nl_∞
0 d			1000.0 m	0.0 m	1.000	1.000			
6 d	3	0.05 °	981.5 m	-10.3 m	1.000	0.988	5.71 %	3.48 %	2.90 %
		90 °	986.8 m	-7.9 m	1.000	0.991	4.10 %	2.48 %	1.85 %
		140 °	989.9 m	-7.1 m	1.000	0.993	3.78 %	2.26 %	1.75 %
	4	0.05 °	999.3 m	-2.1 m	1.000	0.999	0.41 %	0.30 %	0.34 %
		90 °	999.1 m	-2.4 m	1.000	0.999	0.51 %	0.37 %	0.38 %
		140 °	999.0 m	-2.5 m	1.000	0.999	0.54 %	0.38 %	0.36 %
12 d	3	0.05 °	962.4 m	-13.4 m	0.999	0.978	9.95 %	6.07 %	4.89 %
		90 °	974.1 m	-9.9 m	0.999	0.983	7.22 %	4.31 %	2.98 %
		140 °	979.9 m	-10.3 m	1.001	0.986	6.62 %	3.89 %	2.65 %
	4	0.05 °	998.6 m	-3.1 m	1.000	0.999	0.74 %	0.53 %	0.60 %
		90 °	998.2 m	-3.1 m	1.000	0.999	0.89 %	0.61 %	0.52 %
		140 °	998.1 m	-3.6 m	1.000	0.999	0.96 %	0.64 %	0.55 %

Tabelle 5.4: Entwicklung der Testgrößen mit $\Delta t = 6$ h

Die Abbildungen auf der folgenden Seite zeigen die geopotentiellen Höhe und die Windfelder verschiedener hier vorgestellter Experimente. Der gelbe Kreis (man beachte dabei die Verzerrung durch die Projektion) gibt die Lage des Trägers der Kosinusglocke im Ausgangszustand an. In Abbildung 5.6 werden die numerischen Fehler der Simulationen der dritten Verfeinerungsstufe und in Abbildung 5.7 die der vierten Verfeinerungsstufe dargestellt. Beim Vergleich der Fehler muss beachtet werden, dass sich der Abstand der Niveaulinien von 10 m in Abbildung 5.6 auf 1.6 m in Abbildung 5.7 verringert.

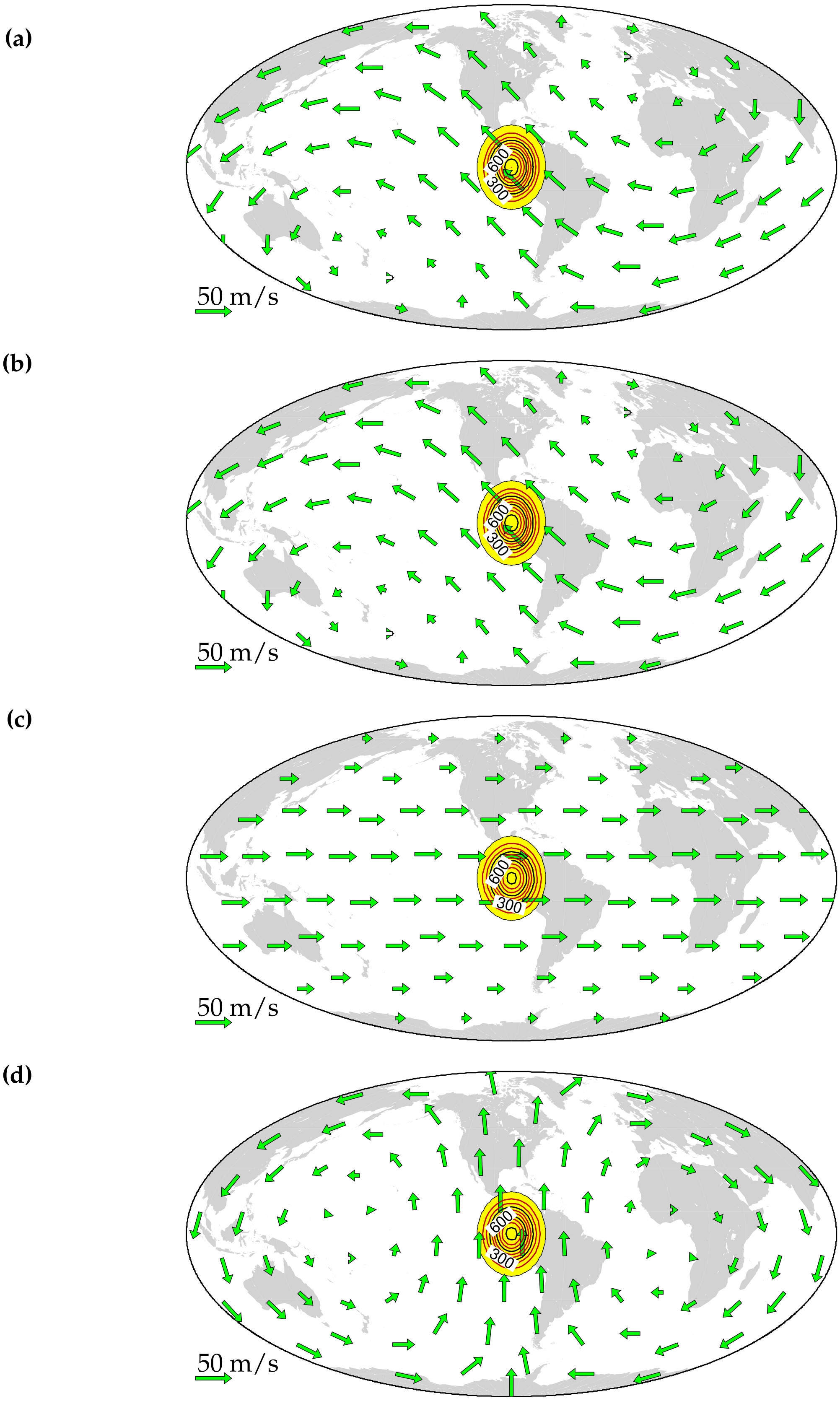
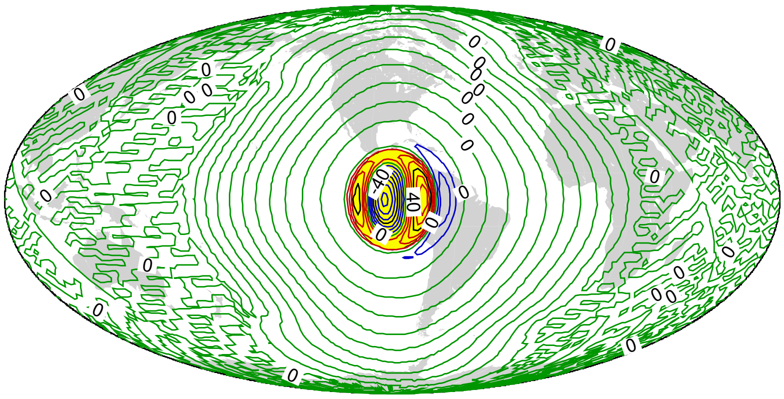


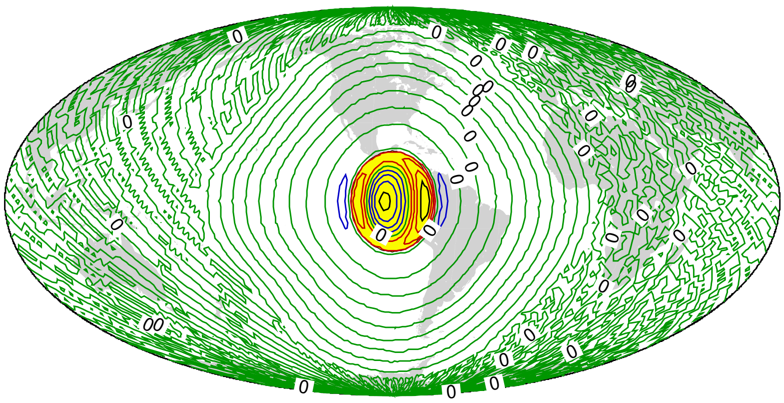
Abbildung 5.5: Geopotentielle Höhe und Wind

(a) Anfangsfeld für $\upsilon = 140\,^\circ$
(b) nach 12 Tagen mit 4.Verfeinerung, $\Delta t = 6$ h und $\upsilon = 140\,^\circ$
(c) nach 12 Tagen mit 3.Verfeinerung, $\Delta t = 6$ h und $\upsilon = 0\,^\circ$
(d) nach 12 Tagen mit 3.Verfeinerung, $\Delta t = 6$ h und $\upsilon = 90\,^\circ$

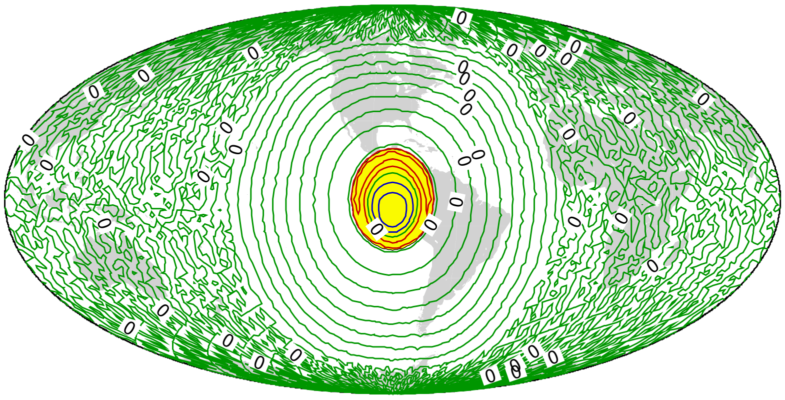
(a)



(b)



(c)



(d)

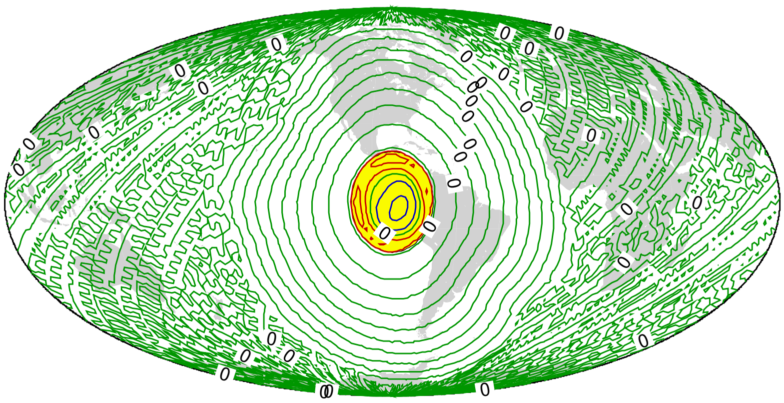
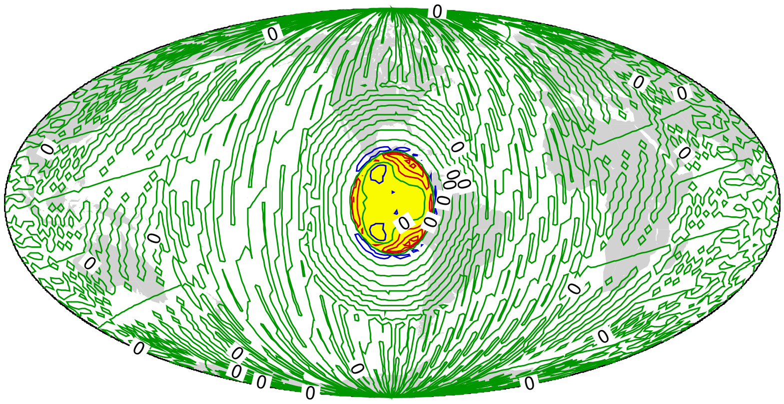


Abbildung 5.6: Geopotentielle Höhe, Fehler nach 12 Tagen mit 3.Verfeinerung,

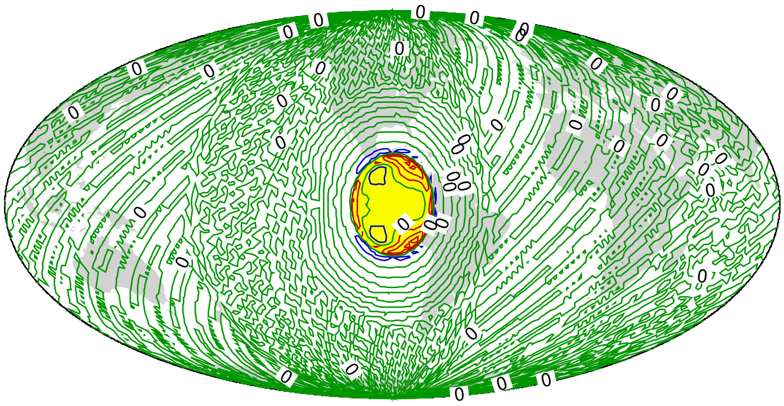
(a) $\Delta t = 3\,\mathrm{h}$ und $\upsilon = 0\,^{\circ}$
(b) $\Delta t = 6\,\mathrm{h}$ und $\upsilon = 0\,^{\circ}$
(c) $\Delta t = 6\,\mathrm{h}$ und $\upsilon = 90\,^{\circ}$
(d) $\Delta t = 6\,\mathrm{h}$ und $\upsilon = 140\,^{\circ}$

Der Isolinienabstand beträgt bei den Abbildungen (a) bis (d) 10 m.

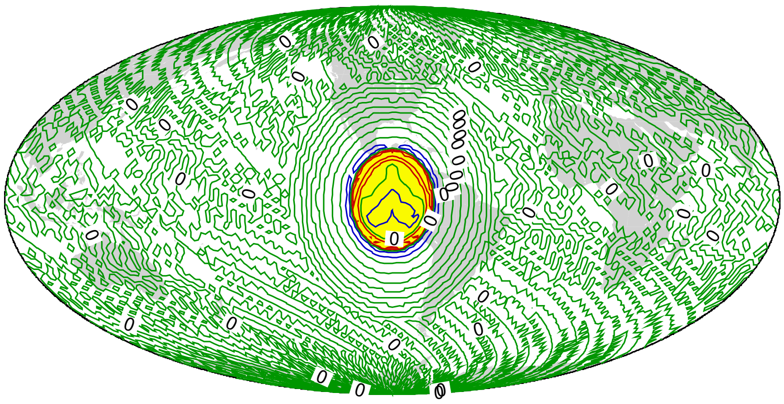
(e)



(f)



(g)



(h)

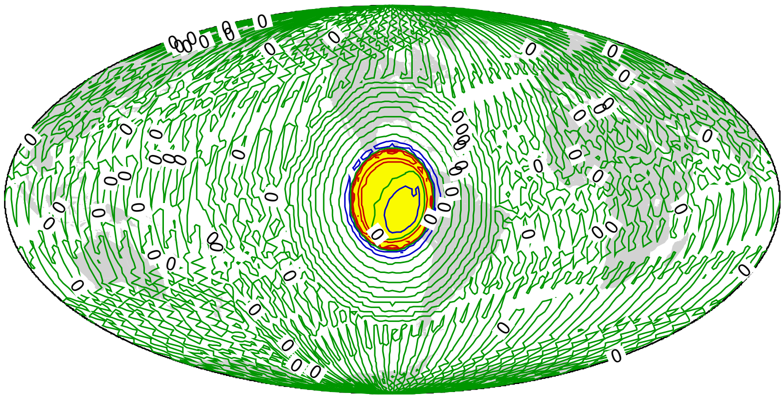


Abbildung 5.7: Geopotentielle Höhe, Fehler nach 12 Tagen mit 4.Verfeinerung,

(e) $\Delta t = 6\,\text{h}$ und $\upsilon = 0\,^\circ$
(f) $\Delta t = 6\,\text{h}$ und $\upsilon = 0.5\,^\circ$
(g) $\Delta t = 6\,\text{h}$ und $\upsilon = 90\,^\circ$
(h) $\Delta t = 6\,\text{h}$ und $\upsilon = 140\,^\circ$

Der Isolinienabstand beträgt bei den Abbildungen (e) bis (h) 1.6 m.

5.3.1 Diskussion

Das auffälligste Ergebnis dieses Testfalls sind die guten Erhaltungseigenschaften der ersten (RFM) und zweiten (RSM) Momente. Dies ist besonders bemerkenswert, da dies im gesamten Algorithmus nirgends explizit gefordert wird und anderen numerischen Verfahren gerade bezüglich dieser Erhaltungseigenschaften oft Schwächen zeigen. Als Beispiel sei hier auf das BARGLO[3]-Modell[6] des Deutschen Wetterdienstes verwiesen.
Bei den numerischen Fehlern zeigt sich, neben dem schon angesprochenen Verhalten in Abhängigkeit von der Dauer des Zeitschrittes, dass sie in der dritten Verfeinerungsstufe in etwa eine Ordnung größer sind als in der vierten Verfeinerungsstufe. In ihrer zeitlichen Entwicklung ist aus Abbildungen 5.3 ein lineares Ansteigen zu entnehmen. Der Winkel, mit dem das Windfeld den Äquator überströmt, hat keine Auswirkungen auf den numerischen Fehler. Man erkennt zwar Unterschiede in den Ergebnissen bei verschiedenen Windfeldern, aber die Fehler bewegen sich alle in der gleichen Größenordnung bei gleichem Gitter und gleicher Dauer des Zeitschrittes. Es lässt sich auch keine Richtung angeben, die ein besonders gutes numerisches Verhalten zeigt. So entnimmt man zum Beispiel Tabelle 5.4, dass die Richtung $v = 140°$ in der Auflösung der dritten Stufe die geringsten Fehler hat, in der vierten Stufe dagegen die größten im Vergleich mit den anderen durchgeführten Experimenten.
In Abbildung 5.5 lassen sich mit dem bloßen Auge keine wesentlichen Unterschiede zwischen den einzelnen Simulationen erkennen. Die Kosinusglocke befindet sich nach zwölf Tagen in allen dargestellten Fällen wieder in der Ausgangslage. Bei den Experimenten, die mit dem Gitter der dritten Verfeinerung durchgeführt worden sind, beobachtet man eine leichte Abflachung in der Spitze der Glocke. Dieser größere Fehler in der dritten Verfeinerungsstufe ist auch der markanteste Unterschied in den Darstellungen der numerischen Fehler (Abbildungen 5.6 und 5.7). In beiden Auflösungen erkennt man deutlich Oszillation, die sich kreisförmig um den Träger der Ausgangslage ausdehnt. Ihr Durchmesser beträgt im Falle der dritten Verfeinerung etwa einen halben Erdumfang, in der vierten dagegen nur noch ein Viertel des Erdumfangs. Die maximale Amplitude dieser Oszillation außerhalb des Trägers beträgt allerdings weniger als 1% der Höhe B_{max} der Kosinusglocke.
Die Struktur außerhalb der Kreise wird im wesentlichen durch die verwendete Software bestimmt, die zur grafischen Darstellung die Daten auf einem äquidistanten geografischen Gitter benötigt. Deshalb ist eine Interpolation vom **FEM*m*E**-Gitter auf ein $2° \times 2°$ - Gitter durchgeführt worden, die, wegen der kleinen Werte der Fehler in diesen Gebieten, für die unregelmäßige Struktur verantwortlich ist.
Innerhalb des gelben Kreises fällt auf, dass die Glocke leicht deformiert wird. Der in Windrichtung vordere Bereich der Glocke wird überschätzt, während der hintere unterschätzt wird.
Insgesamt liegen die Ergebnisse im gleichen Rahmen wie bei anderen Semi-LAGRANGE-Ansätzen. Die auftretende Oszillation und die Änderung der Gestalt der Glocke sind jedoch zwei unerwünschte Nebeneffekte. Sie verfälschen allerdings die Ergebnisse nicht so sehr, dass die in **FEM*m*E** gewählte Umsetzung prinzipiell zu verwerfen wäre. Bei einer Weiterentwicklung des Modells sollte aber auf eine Verbesserung dieser beiden Punkte besonderer Wert gelegt werden.

[3]BARotropes GLObalmodell

5.4 Testfall 2 : Stationärer geostrophischer Fluss

Dieser Testfall ergibt sich aus der stationären Lösung der Flachwassergleichungen ohne Orografie. Aus dem Gleichungssystem (1.63) ist offensichtlich, dass nur eine divergenzfreie Strömung eine solche Lösung generieren kann. Hier wird dies durch eine zonales Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}_o = (v_{\zeta o}, v_{\eta o})^T$ mit

$$v_{\zeta o} = U_o \cos\varphi \tag{5.37}$$

$$v_{\eta o} = 0 \tag{5.38}$$

gewährleistet. Die Geschwindigkeit U_o wird wie im ersten Testfall gewählt. Daraus ergibt sich das balancierte Geopotentialfeld:

$$\phi_o = \overline{\phi} \; + \; \cos^2\varphi \left(r_e \, \Omega \, U_o \; + \; \frac{1}{2} U_o^2 \right) \tag{5.39}$$

$$\overline{\phi} = g h_o \; - \; \left(r_e \, \Omega \, U_o \; + \; \frac{1}{2} U_o^2 \right) \tag{5.40}$$

mit den Parametern

$$r_e = \frac{2}{\pi} \cdot 10^7 \text{ m} \; \approx \; 6371,22 \, \text{km} \tag{5.41}$$

$$\Omega = |\,\vec{\Omega}\,| \; \approx \; 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-2} \tag{5.42}$$

$$U_o = \frac{5^5 \text{ m}}{3^4 \text{ s}} \; \approx \; 38.58 \, \text{m s}^{-1} \tag{5.43}$$

$$g h_o = 29400 \, \text{m}^2 \text{s}^{-2} \tag{5.44}$$

φ bezeichne wieder die geografische Breite eines Ortes.
Dieser Testfall wird mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 900$ s auf allen fünf Gitter durchgeführt. Es wird erwartet, dass sich keiner der Parameter wesentlich ändert. Untersucht werden sowohl die Erhaltungsgrößen Φ_{max}, Φ_{min}, RFM, RSM und $\|\vec{v}\,\|_\infty$, als auch die zeitliche Entwicklung der Fehler nl_1, $nRMS$ und nl_∞. Das folgende Schaubild fasst die Entwicklung einiger Fehlergrößen zusammen und Tabelle 5.5 gibt einen Überblick über die anderen Testgrößen.

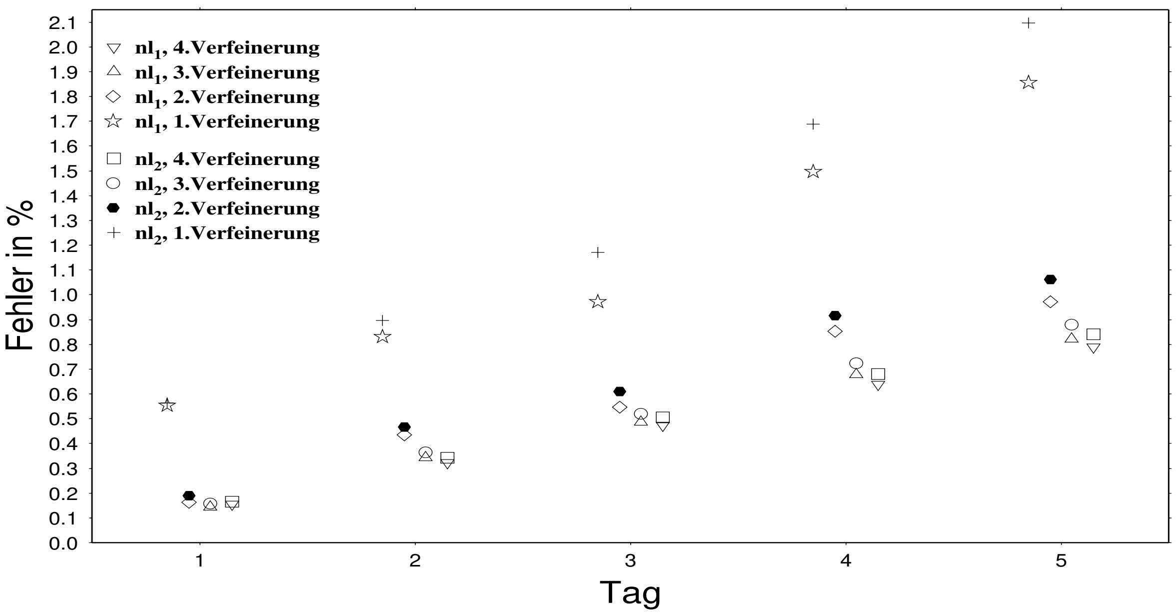


Abbildung 5.8: zeitliche Entwicklung von nl_1 und $nRMS$ in der 1. bis 4. Verfeinerung

Tage	Stufe	Φ_{max}	Φ_{min}	RFM	RSM	$\lVert\vec{v}\rVert_\infty$	$nRMS$	nl_∞
0 d	0	2942.1 m	1095.8 m	1.000	1.000	38.01 ms^{-1}		
	1 - 4	2998.1 m	1095.8 m	1.000	1.000	38.58 ms^{-1}		
1 d	0	2967.4 m	1145.8 m	1.003	1.002	36.60 ms^{-1}	1.536 %	2.705 %
	1	3010.8 m	1115.0 m	1.001	1.001	38.50 ms^{-1}	0.563 %	1.007 %
	2	2999.5 m	1105.1 m	1.000	1.000	38.52 ms^{-1}	0.189 %	0.491 %
	3	2996.8 m	1102.3 m	1.000	0.999	38.53 ms^{-1}	0.159 %	0.341 %
	4	2996.0 m	1101.4 m	1.000	0.999	38.53 ms^{-1}	0.165 %	0.296 %
2 d	0	2953.7 m	1194.1 m	1.007	1.001	35.75 ms^{-1}	2.092 %	5.325 %
	1	2990.8 m	1131.0 m	1.001	0.998	38.42 ms^{-1}	0.897 %	1.852 %
	2	2992.2 m	1113.5 m	1.000	0.998	38.47 ms^{-1}	0.467 %	0.928 %
	3	2993.2 m	1108.4 m	1.000	0.999	38.47 ms^{-1}	0.365 %	0.660 %
	4	2993.5 m	1106.9 m	1.000	0.999	38.47 ms^{-1}	0.342 %	0.585 %
3 d	0	2918.0 m	1240.3 m	1.012	0.998	35.27 ms^{-1}	3.662 %	7.826 %
	1	2995.7 m	1146.3 m	1.002	0.998	38.34 ms^{-1}	1.171 %	2.655 %
	2	2993.0 m	1120.6 m	1.000	0.998	38.41 ms^{-1}	0.609 %	1.304 %
	3	2991.8 m	1114.1 m	1.000	0.998	38.42 ms^{-1}	0.520 %	0.964 %
	4	2991.5 m	1112.3 m	1.000	0.998	38.42 ms^{-1}	0.505 %	0.870 %
4 d	0	2921.1 m	1281.4 m	1.015	0.997	33.93 ms^{-1}	4.644 %	10.051 %
	1	2984.8 m	1162.1 m	1.003	0.996	38.27 ms^{-1}	1.689 %	3.485 %
	2	2986.3 m	1128.5 m	1.000	0.997	38.35 ms^{-1}	0.917 %	1.717 %
	3	2988.4 m	1120.1 m	1.000	0.997	38.36 ms^{-1}	0.723 %	1.276 %
	4	2988.9 m	1117.8 m	1.000	0.997	38.36 ms^{-1}	0.679 %	1.154 %
5 d	0	2915.0 m	1324.2 m	1.018	0.997	32.93 ms^{-1}	5.621 %	12.370 %
	1	2980.6 m	1177.0 m	1.004	0.995	38.18 ms^{-1}	2.096 %	4.269 %
	2	2986.8 m	1135.6 m	1.000	0.996	38.30 ms^{-1}	1.063 %	2.092 %
	3	2986.9 m	1125.8 m	1.000	0.997	38.31 ms^{-1}	0.879 %	1.576 %
	4	2987.0 m	1123.1 m	1.000	0.997	38.31 ms^{-1}	0.840 %	1.436 %

Tabelle 5.5: Entwicklung der Testgrößen mit Zeitschritt $\Delta t = 900$ s

5.16 Bemerkung: Die Differenzen in den Anfangsfeldern zwischen Makrotriangulierung und Verfeinerungen beruhen auch hier auf der unterschiedlichen räumlichen Auflösung.

Die folgenden Abbildungen geben das Anfangsfeld von Wind und geopotentieller Höhe, sowie den Zustand dieser Parameter nach fünf Tagen mit der 4.Verfeinerung und der Makrotriangulierung wieder. Darüberhinaus sind die Differenzfelder zwischen Anfangsfeld und Zustandsfeld der geopotentiellen Höhe nach fünf Tagen für alle Auflösungen dargestellt.

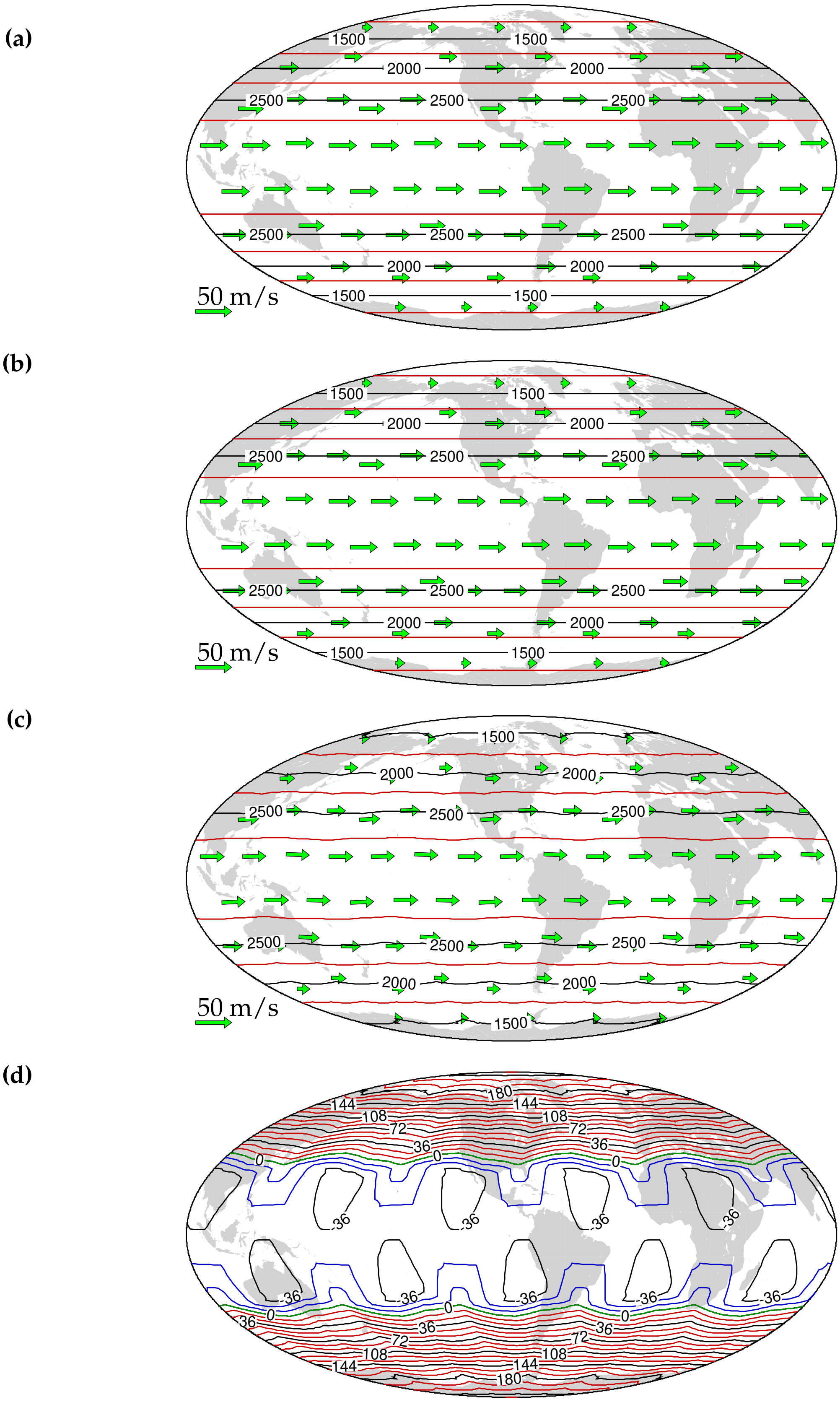


Abbildung 5.9: Geopotentielle Höhe und Wind

(a) Anfangsfeld
(b) nach 5 Tagen mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$
(c) nach 5 Tagen mit Makrotriangulierung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$
(d) Fehler nach 5 Tagen mit Makrotriangulierung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$

Der Isolinienabstand beträgt bei Abbildung (d) 12 m.

(e) **(f)** **(g)** **(h)**

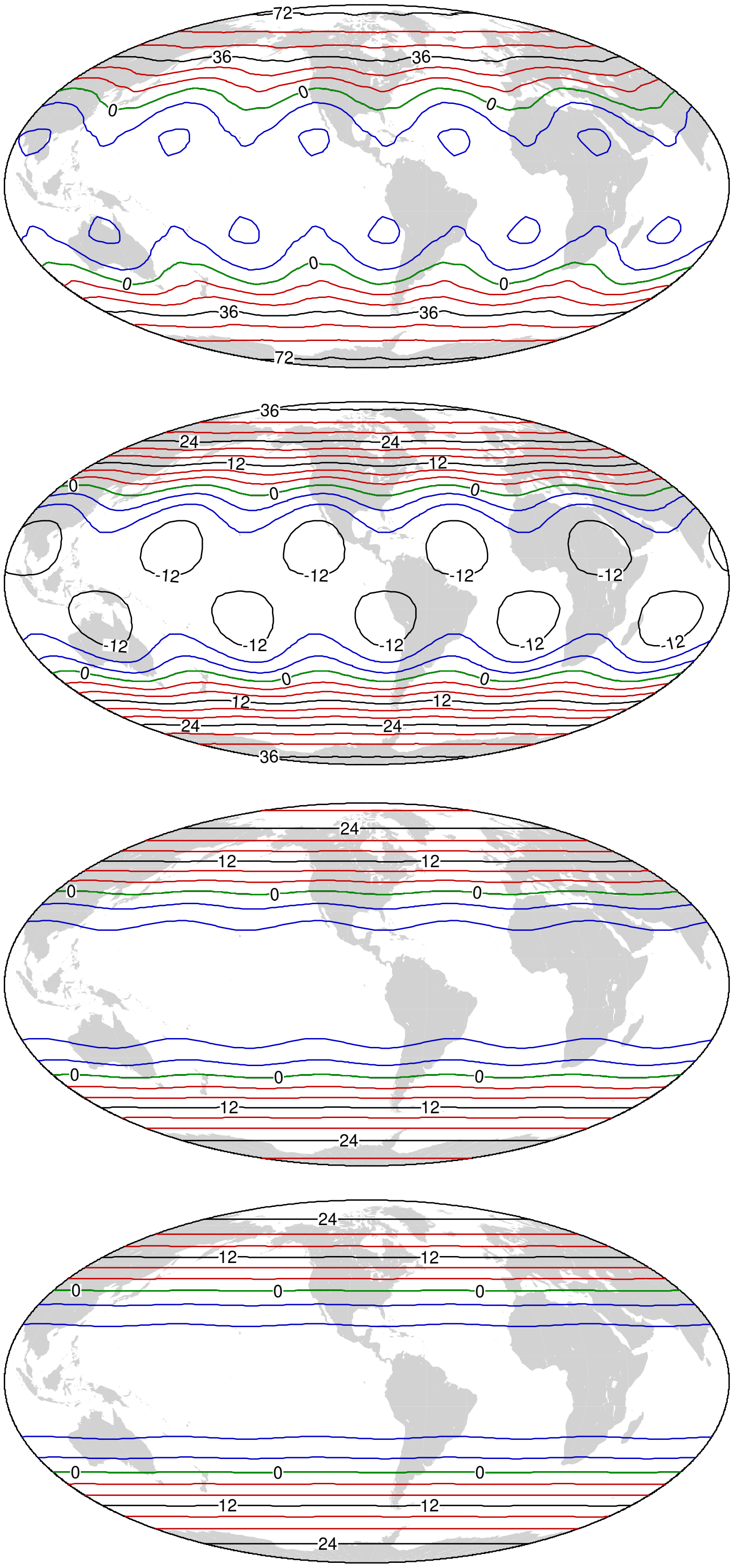


Abbildung 5.10: Geopotentielle Höhe, Fehler nach 5 Tagen

(e) mit 1.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$
(f) mit 2.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$
(g) mit 3.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$
(h) mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$

Der Isolinienabstand beträgt bei Abbildung (e) 12 m, bei den Abbildungen (f) bis (h) 4 m.

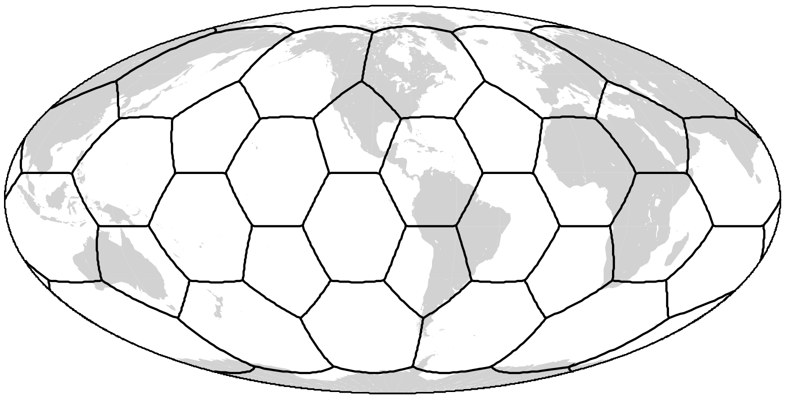


Abbildung 5.11: Fußball in der MOLLWEIDE-Projektion

5.4.1 Diskussion

Die Ergebnisse der Tabelle 5.5 zeigen, dass innerhalb der ersten fünf Tage abgesehen von der Makrotriangulierung alle untersuchten Messgrößen annähernd erhalten bleiben. Dies gelingt umso besser, je feiner räumlich aufgelöst wird. Es tritt eine leichte Abflachung der Extrema Φ_{max} und Φ_{min} und eine leichte Verminderung der Spitzengeschwindigkeit $\|\vec{v}\|_\infty$ auf. Ab der zweiten Verfeinerungsstufe bleibt die Masse erhalten und es ergibt sich nur ein geringer Verlust von weniger als $0.5\,‰$ im zweiten Moment. Aus Abbildung 5.8 entnimmt man, dass die numerischen Fehler in etwa linear ansteigen und nach fünf Tagen, zumindest bei den drei feinsten Auflösungen, weniger als 1.1 % bei nl_1 und $nRMS$ bzw. weniger als 2.1 % bei nl_∞ betragen. nl_∞ ist zu allen ausgewerteten Zeitpunkten circa doppelt so groß wie $nRMS$. Aus den Niveaulinienbildern 5.9 **(b)** und 5.9 **(c)** lassen sich auf den ersten Blick keine großen Unterschiede zum Anfangsfeld 5.9 **(a)** erkennen. In den Differenzenbildern 5.9 **(d)** bis 5.10 **(h)** treten, bedingt durch die kleinere Skala, dann aber deutliche Unterschiede auf. Man beachte dabei die Änderung des Isolinienabstandes von 12 m in den Abbildungen **(d)** und **(e)** zu 4 m in den letzten drei. In den Abbildungen **(d)** bis **(f)** ist in den niederen Breiten deutlich eine Struktur erkennbar, die genau mit den Mittelpunkten der ursprünglichen Fünfecke des Fußballs (Abbildung 5.11) korrespondiert. Wie schon erwähnt, sind diese neben den Polen die einzigen Punkte, die nur fünf Nachbarpunkte besitzen, während alle anderen Knoten sechs Nachbarpunkte haben. Dieses Phänomen ist auch schon bei anderen Gitterpunktsmodellen, die den Ikosaeder als Ausgangskörper benutzen, aufgetreten und ist in der Literatur als „Wellenzahl-5-Problem“ bekannt. Bei der dritten und vierten Verfeinerungsstufe ist diese Erscheinung jedoch nahezu veschwunden und es tritt nur noch ein numerischer Fehler auf, der von der geografischen Breite abhängt. Dies ist ein erstes Indiz für die Schwierigkeiten, die beim Bestimmen der Trajektorienpunkte auftreten, und im sechsten Testfall noch ausführlich diskutiert werden. Aufgrund der hier gefundenen Ergebnisse werden bei den folgenden Testfällen nur noch die dritte und vierte Verfeinerungsstufe als Gitter benutzt.

5.5 Testfall 5 : Überströmen eines einzelnen Berges

Dieser Testfall ist konstruiert worden, um die Erhaltung von Masse und Energie zu überprüfen. Deshalb gilt hier das besondere Augenmerk den Testgrößen RFM, RSM und RTE. Im Punkt $Z\,(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$ befindet sich das Zentrum eines spitzen Berges der maximalen Höhe B_{max} = 2000 m. Die Orografie H_o des Berges wird durch Gleichung (5.45) bestimmt.

$$H_o(\vec{x}\,) = g B_{max} \left(1 \; - \; \frac{r(\vec{x}\,)}{R}\right) \tag{5.45}$$

$$R = \frac{\pi}{9} \tag{5.46}$$

$$r(\vec{x}\,(\lambda, \varphi)) = \sqrt{\min\left\{\mathrm{R}^2, (\lambda + \frac{\pi}{2})^2 \; + \; (\varphi - \frac{\pi}{6})^2\right\}} \tag{5.47}$$

Dieser Berg wird zu Beginn der Simulation mit dem zonalen Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}_o = (v_{\zeta o}, v_{\eta o})^T$

$$v_{\zeta o} = U_o \cos\varphi \tag{5.48}$$

$$v_{\eta o} = 0 \tag{5.49}$$

überströmt und vom zonal symmetrischen Geopotentialfeld ϕ

$$\phi_o = \overline{\phi} \; + \; \cos^2\!\varphi \left(r_e\,\Omega\,U_o \; + \; \frac{1}{2}\,U_o^2\right) \; + \; g B_{max} \tag{5.50}$$

$$\overline{\phi} = g h_o \; - \; \left(r_e\,\Omega\,U_o \; + \; \frac{1}{2}\,U_o^2\right) \; - \; g B_{max} \tag{5.51}$$

mit den Parametern

$$r_e = \frac{2}{\pi} \cdot 10^7 \text{ m} \;\approx\; 6371,22\,\text{km} \tag{5.52}$$

$$g = 9,80616\,\text{m s}^{-2} \tag{5.53}$$

$$\Omega = |\,\vec{\Omega}\,| \;\approx\; 7,292 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-2} \tag{5.54}$$

$$U_o = 20 \text{ m s}^{-1} \tag{5.55}$$

$$h_o = 5960 \text{ m} \tag{5.56}$$

$$B_{max} = 2000 \text{ m} \tag{5.57}$$

überlagert. λ und φ bezeichnen wieder die geografische Länge und Breite eines Ortes.
Die Anfangsfelder sind bis auf andere Konstanten U_o und h_o identisch mit den Verhältnissen des stationären geostrophischen Flusses (Testfall 2). Es werden in diesem Test aber keine stationären Verhältnisse erwartet, sondern beim Überströmen des Berges eine Störung des geostrophischen Gleichgewichts, was zur Auslösung von Wellen führt.
Im Anhang D wird gezeigt, dass im kontinuierlichen Fall bei den Flachwassergleichungen Masse und Gesamtenergie erhalten werden. Von den untersuchten Testfällen ist dies der einzige Testfall, bei dem aufgrund des Berges eine Umwandlung von potentieller in kinetische Energie stattfindet. Deshalb liegt das besondere Gewicht bei der Untersuchung auf den Testgrößen für Massen- und Energieerhaltung RFM und RTE. RSM ist, im Gegensatz zu allen anderen Testfällen, hier nur ein Maß dafür, wie groß die Energieumwandlung im Verhältnis zur verfügbaren potentiellen Energie ist.
Als räumliche Auflösung des Gitters werden für die numerischen Experimente die dritte und vierte Verfeinerungsstufe gewählt. Als Zeitschritt werden jeweils 450 und 900 Sekunden benutzt und zusätzlich in der vierten Verfeinerungsstufe noch 1800 Sekunden. Nach jeweils einem ganzen Modelltag sind die Ergebnisse der Testgrößen in den folgenden beiden Tabellen dargestellt.

Tage	Δt	N	$\widetilde{\Phi}_{max}$	$\widetilde{\Phi}_{min}$	RFM	RTE	RSM	$\|\vec{v}\|_{max}$
0 d		0	5960.0 m	3854.9 m	1.000	1.000	1.000	20.00 ms^{-1}
1 d	0.25 h	96	5966.0 m	3876.0 m	1.000	1.000	1.000	26.46 ms^{-1}
	0.125 h	192	5966.6 m	3876.3 m	1.000	1.000	1.000	26.56 ms^{-1}
2 d	0.25 h	192	5963.0 m	3876.8 m	1.000	1.000	1.000	34.34 ms^{-1}
	0.125 h	384	5963.9 m	3871.7 m	1.000	1.000	1.000	34.73 ms^{-1}
3 d	0.25 h	288	5959.7 m	3876.7 m	1.000	1.000	1.000	36.63 ms^{-1}
	0.125 h	576	5961.4 m	3877.0 m	1.000	1.000	1.000	37.13 ms^{-1}
4 d	0.25 h	384	5965.3 m	3874.9 m	1.000	1.000	1.000	37.16 ms^{-1}
	0.125 h	768	5967.3 m	3873.3 m	1.000	1.000	1.000	37.68 ms^{-1}
5 d	0.25 h	480	5964.9 m	3878.5 m	1.000	1.000	1.000	37.87 ms^{-1}
	0.125 h	960	5968.8 m	3879.5 m	1.000	1.000	1.000	38.35 ms^{-1}

Tabelle 5.6: Entwicklung der Testgrößen der 3.Verfeinerung

Tage	Δt	N	$\widetilde{\Phi}_{max}$	$\widetilde{\Phi}_{min}$	RFM	RTE	RSM	$\|\vec{v}\|_{max}$
0 d		0	5960.0 m	3757.2 m	1.000	1.000	1.000	20.00 ms^{-1}
1 d	0.5 h	48	5964.9 m	3757.2 m	1.000	1.000	1.000	26.23 ms^{-1}
	0.25 h	96	5965.9 m	3773.5 m	1.000	1.000	1.000	26.54 ms^{-1}
	0.125 h	192	5966.5 m	3773.7 m	1.000	1.000	1.000	26.62 ms^{-1}
2 d	0.5 h	96	5961.2 m	3778.4 m	1.000	1.000	1.000	33.86 ms^{-1}
	0.25 h	192	5963.1 m	3775.1 m	1.000	1.000	1.000	34.69 ms^{-1}
	0.125 h	384	5963.8 m	3770.6 m	1.000	1.000	1.000	34.92 ms^{-1}
3 d	0.5 h	144	5957.0 m	3775.5 m	1.000	1.000	1.000	36.16 ms^{-1}
	0.25 h	288	5960.0 m	3774.7 m	1.000	1.000	1.000	37.03 ms^{-1}
	0.125 h	576	5961.4 m	3774.4 m	1.000	1.000	1.000	37.42 ms^{-1}
4 d	0.5 h	192	5961.5 m	3774.1 m	1.000	1.000	0.999	36.60 ms^{-1}
	0.25 h	384	5966.5 m	3772.8 m	1.000	1.000	1.000	37.35 ms^{-1}
	0.125 h	768	5969.2 m	3771.3 m	1.000	1.000	1.000	37.78 ms^{-1}
5 d	0.5 h	240	5960.4 m	3776.7 m	1.000	1.000	0.999	37.19 ms^{-1}
	0.25 h	480	5966.7 m	3776.7 m	1.000	1.000	1.000	37.98 ms^{-1}
	0.125 h	960	5970.1 m	3777.3 m	1.000	1.000	1.000	38.43 ms^{-1}

Tabelle 5.7: Entwicklung der Testgrößen der 4.Verfeinerung

5.17 Bemerkung: Auch hier erklärt sich die Differenz in den Anfangsfeldern von $\widetilde{\Phi}_{min}$ aus der schon erwähnten unterschiedlichen räumlichen Auflösung.

Aus den Tabellen entnimmt man, dass innerhalb der ersten fünf Tage die umgewandelte potentielle Energie im Verhältnis zur verfügbaren potentiellen Energie sehr klein ist. Deshalb wurde für den 900-Sekunden-Zeitschritt mit beiden Verfeinerungen zusätzlich untersucht, ob das in den nächsten zehn Tagen der Simulation so bleibt oder sich eine Änderung ergibt.

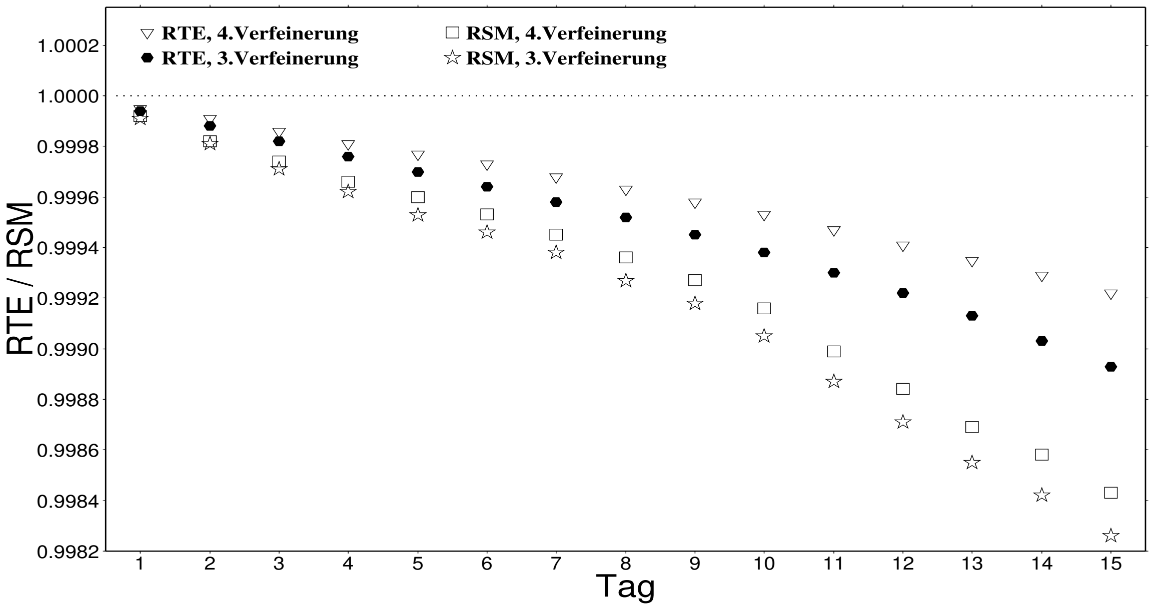


Abbildung 5.12: Entwicklung von RTE und RSM in der 3. und 4.Verfeinerung

Bei der hochauflösenden Skala in Abbildung 5.12 erkennt man, dass von Anfang an RSM kleiner als RTE ist. Das bedeutet, dass eine Umwandlung von potentieller in kinetische Energie stattfindet. Bei beiden Größen wird ein linearer Abfall beobachtet, wobei er beim zweiten Moment in zwei Phasen aufgeteilt werden kann. Der Abfall ab dem zehnten Tag ist stärker als der in den ersten neun Tagen. Das lässt auf ein größeres Maß an Energieumwandlung in der späteren Phase schließen. Allerdings beträgt der Verlust des zweiten Momentes nach 15 Tagen weniger als 0.18 %, so dass insgesamt nur ein sehr kleiner Teil der verfügbaren potentiellen Energie umgewandelt worden ist.
Die folgende Abbildung 5.13 zeigt die Anfangsfelder von Wind und geopotentieller Höhe, sowie die Lage und Höhe des Berges. Die zeitliche Entwicklung einer Welle hinter dem Berg wird nach 1, 2, 3 und 5 Tagen im Schattenwurf bei Anstrahlung von rechts und als Niveaulinienbild mit Windpfeilen auf den nächsten beiden Seiten dokumentiert. Zu diesen Zeitpunkten werden in Abbildung 5.16 die Differenzen zum NCAR-Referenzfeld gezeigt und in Abbildung 5.17 diese Differenzen aller anderen Simulationen nach fünf Tagen.

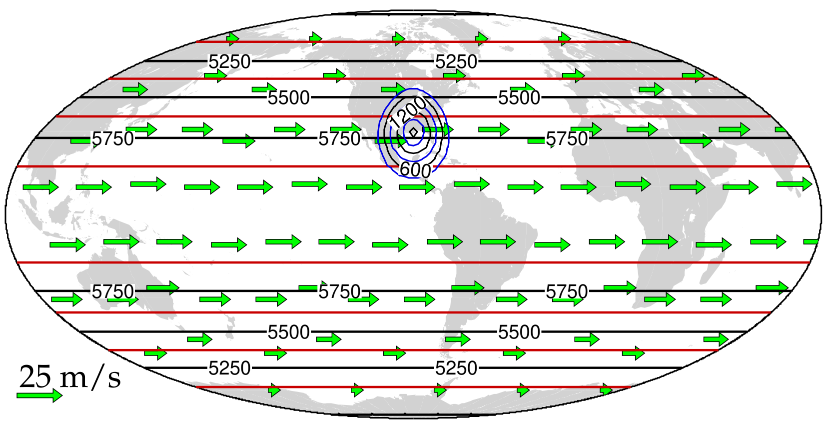


Abbildung 5.13: Topografie des Berges und Anfangsfelder für Wind und geopotentielle Höhe

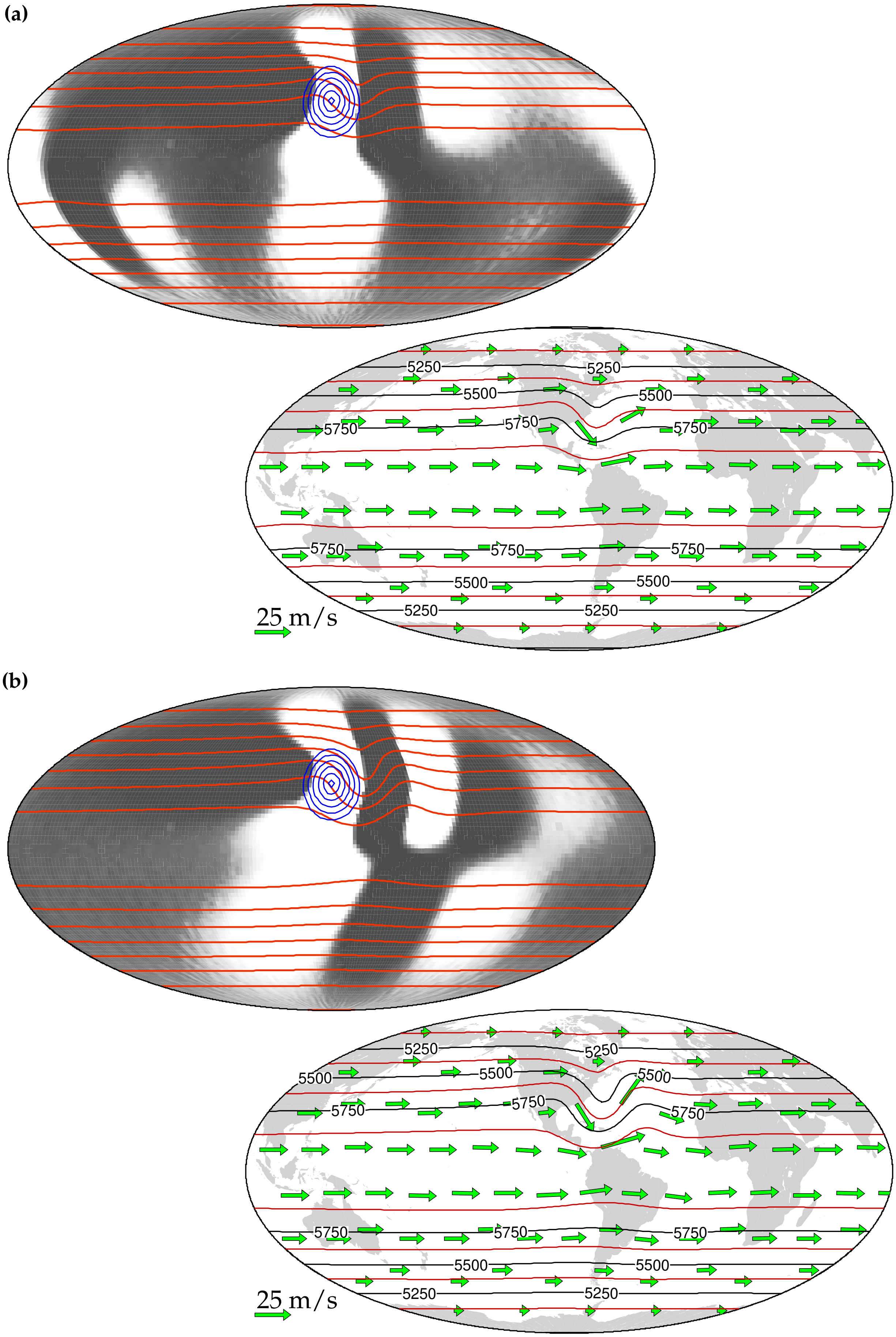
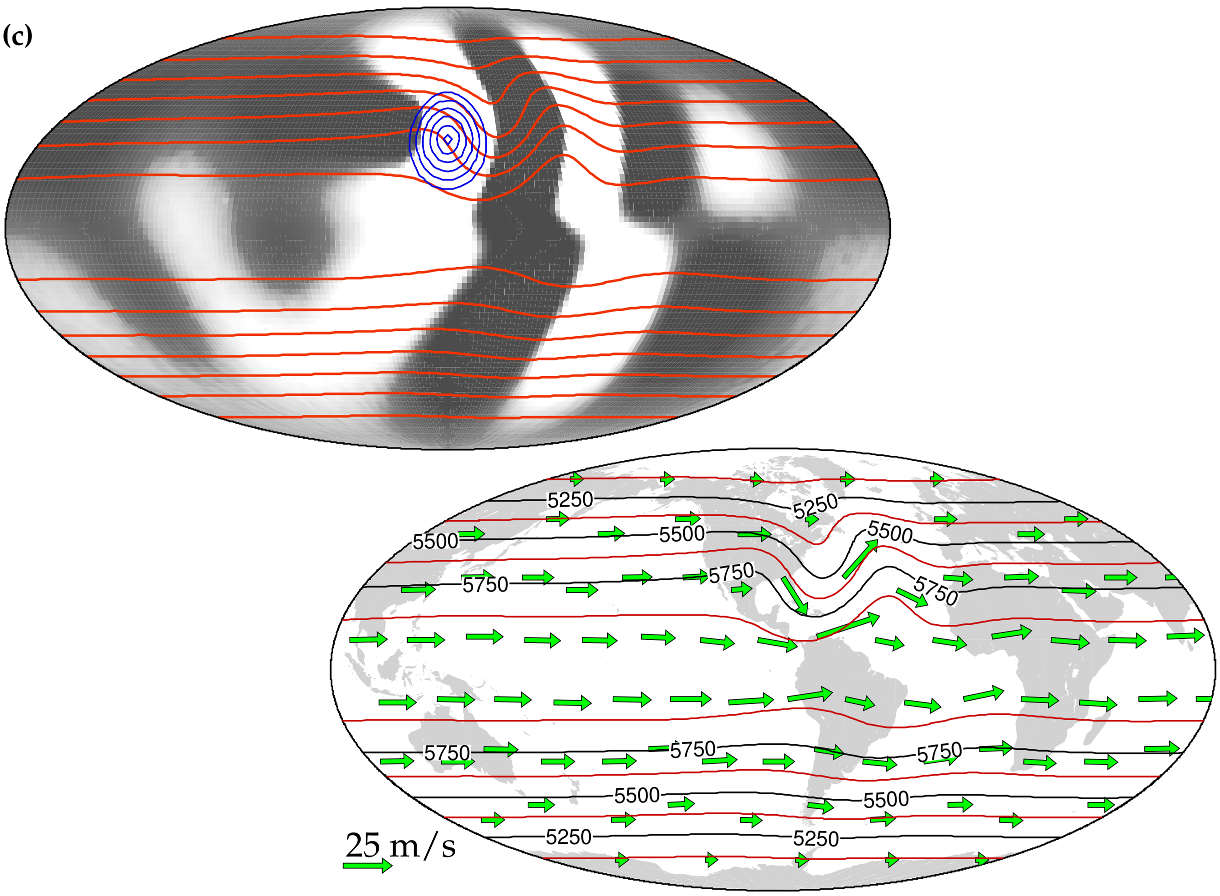


Abbildung 5.14: Wind und geopotentielle Höhe

(a) nach 1 Tag mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$

(b) nach 2 Tagen mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$

(c)



(d)

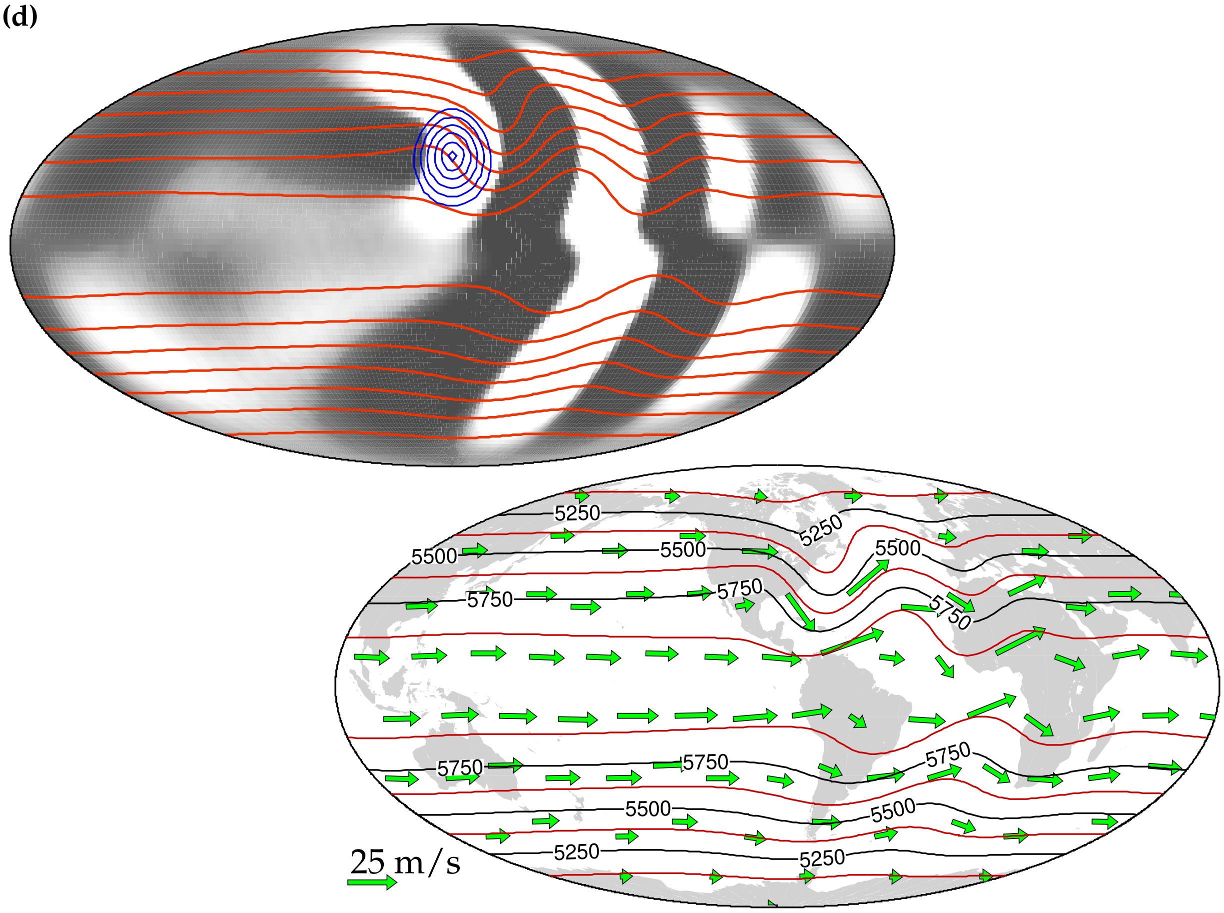
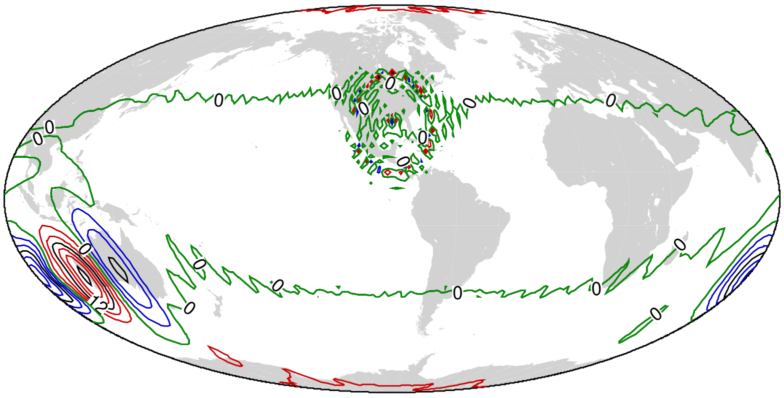


Abbildung 5.15: Wind und geopotentielle Höhe

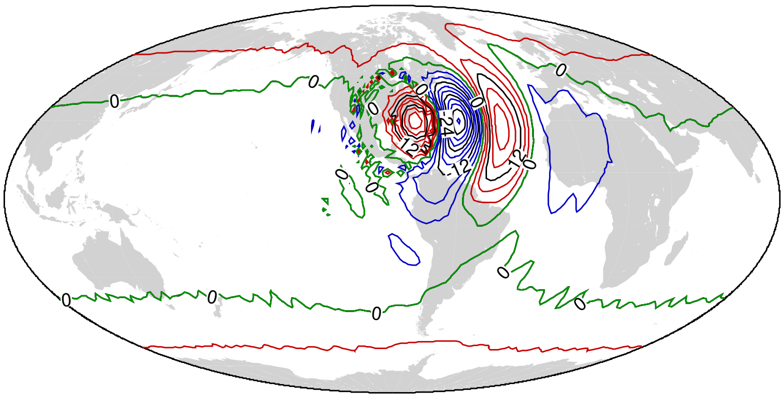
(c) nach 3 Tagen mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$

(d) nach 5 Tagen mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$

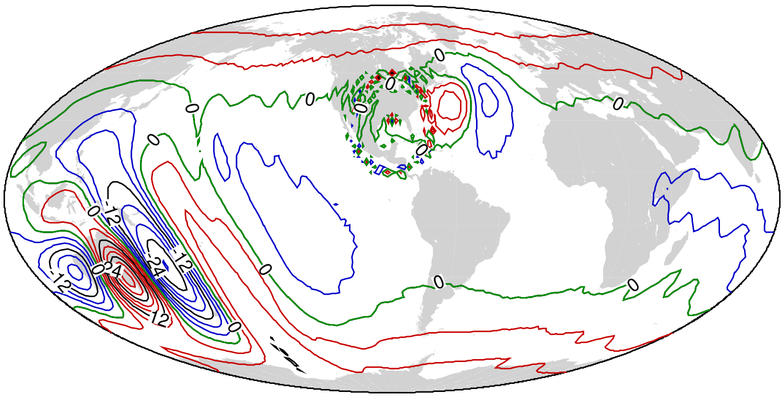
(a)



(b)



(c)



(d)

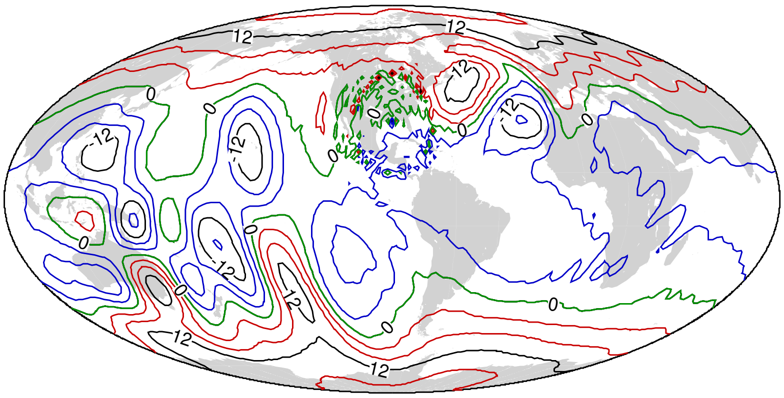
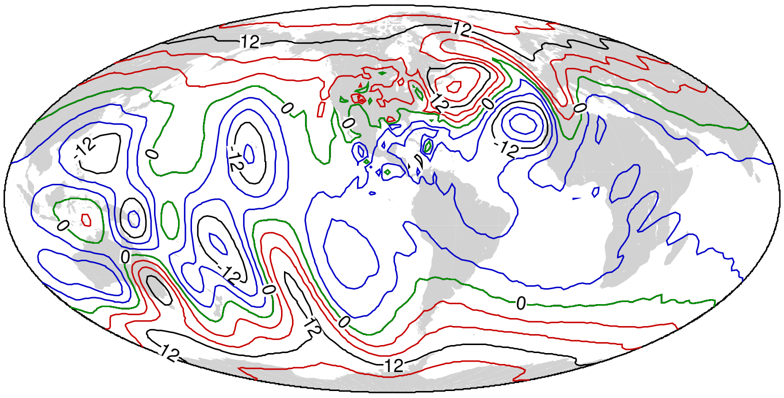


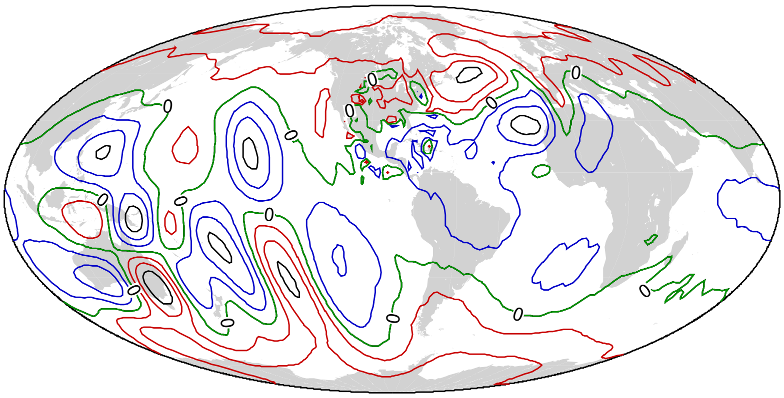
Abbildung 5.16: Geopotentielle Höhe, Differenz zum Referenzfeld

(a) nach 1 Tag mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$
(b) nach 2 Tagen mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$
(c) nach 3 Tagen mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$
(d) nach 5 Tagen mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$

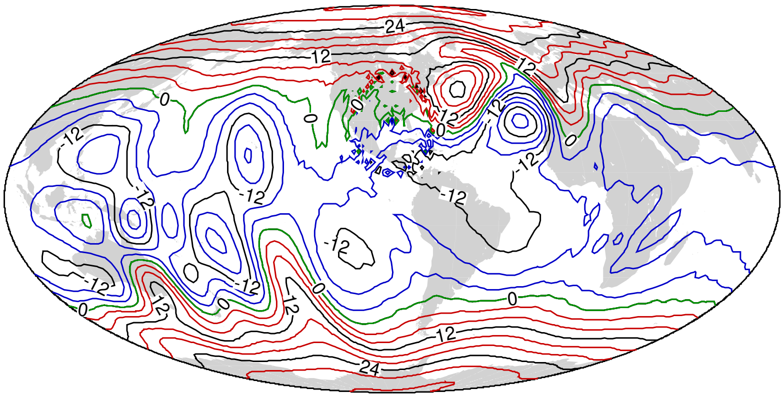
(a)



(b)



(c)



(d)

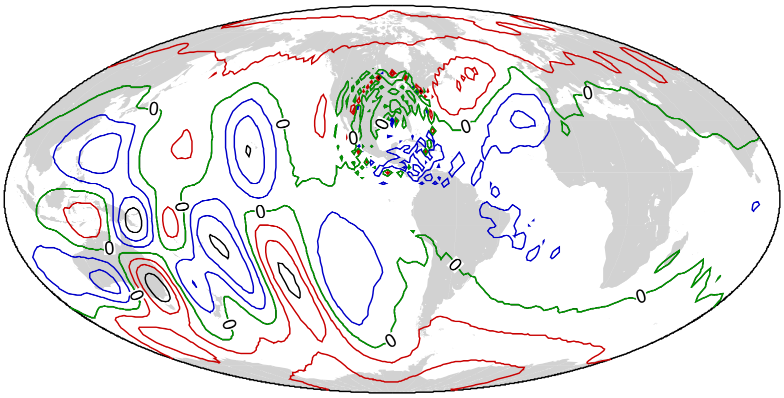


Abbildung 5.17: Geopotentielle Höhe, Differenz zum Referenzfeld nach 5 Tagen

(a) mit 3.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$
(b) mit 3.Verfeinerung und $\Delta t = 450\,\mathrm{s}$
(c) mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 1800\,\mathrm{s}$
(d) mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 450\,\mathrm{s}$

Der Isolinienabstand beträgt bei allen Abbildungen 4 m.

5.5.1 Diskussion

Als herausragendes Ergebnis fallen beim Blick in die Tabellen 5.6 und 5.7 die Werte in den Spalten RFM, RSM und RTE auf. Es ergibt sich weder bei der Masse (RFM), bei der Gesamtenergie (RTE), noch bei der verfügbaren potentiellen Energie (RSM) innerhalb der ersten fünf Tage eine nennenswerte Änderung. Mit Abbildung 5.12 wird gezeigt, dass das im Falle der Energieerhaltung auch für die nächsten zehn Tagen gilt und nur ein sehr kleiner Teil der verfügbaren potentiellen Energie in kinetische Energie umgewandelt wird. Dies ist in diesem Falle besonders bemerkenswert, da dieser Testfall genau zur Untersuchung dieser Kriterien konstruiert worden ist.
Die anderen Testgrößen sind bei diesem Experiment nur von untergeordnetem Interesse. Aufgrund des Berges ist zu erwarten, dass Wind und Geopotential starken Veränderungen unterworfen sind, die sich auch in den nichtkonservativen Messgrößen wiederspiegeln.
In den Abbildungen 5.14 und 5.15 sieht man deutlich, dass durch den Berg eine großskalige Welle ausgelöst wird. Innerhalb des betrachteten Zeitraumes breitet sie sich über den halben Globus mit Auswirkungen bis in die hohen Breiten beider Hemisphären aus. In einer Sequenz von Abbildungen, die aus den Daten kurz aufeinanderfolgender Zeitpunkte erzeugt werden, erkennt man, dass neben der langsamen großen Welle auch schnelle kleinskalige Wellen erzeugt werden. Diese sind die Auslöser der Differenzen, die in der Abbildung 5.16 im Bereich der Antipode des Berges auf der Kugel zu erkennen sind. Die maximalen Unterschiede in diesem Gebiet sind mit 41 m, was weniger als 2 % der Differenz $\widetilde{\Phi}_{max} - \widetilde{\Phi}_{min}$ ist, zwar klein, aber doch die größten Differenzen, die überhaupt beobachtet werden.
Bei der Frage nach der Ursache müssen mehrere Punkte berücksichtigt werden. Zum einen ist bereits im vorherigen Testfall ein systematischer breitenabhängiger Fehler festgestellt worden, der auch bei diesem Test zu erwarten ist. Im nächsten Testfall wird deutlich, dass dieser auf den Ansatz bei der Bestimmung der Trajektorienpunkte zurückzuführen ist. Zum anderen stellt sich die Frage, in wie weit der Referenzdatensatz, der aus einem Spektralmodell mit expliziter Zeitintegration gewonnen worden ist, mit den hier erzeugten Daten vergleichbar ist. Neben dem grundsätzlich anderen Ansatz bedingt das explizite Verfahren die Berücksichtigung des CFL-Kriterium (siehe Anhang Gleichung (A.46)), was bei feiner Auflösung kurze Zeitschritte erforderlich macht. Ein weiterer Hinweis, dass die Dauer des Zeitschrittes bei der Größe der Differenz eine Rolle spielt, findet sich in den Abbildungen 5.16**(d)** und 5.17. Obwohl die Struktur der Differenz bei allen Simulationen ähnlich ist, wird doch deutlich, dass die Amplitude dieser Differenz eher durch kurze Zeitschritte als durch feinere Auflösung verringert wird. Andererseits entnimmt man den Tabellen 5.7 und 5.6, dass sich, wie beim ersten Testfall, die stärksten Änderungen der Extrema beim kleinsten Zeitschritt ergeben.
Der Autor hat im Laufe der Modellentwicklung diesen Testfall 5 auch mit einem anderem Gitterpunktsmodell [19] durchgeführt. In diesem Modell wird ebenfalls ein explizites Zeitschrittverfahren mit kurzen Zeitschritten bei feiner räumlicher Auflösung verwendet. Beim Vergleich mit dem NCAR-Datensatz ergeben sich Unterschiede in derselben Größenordnung, wie in den Abbildungen 5.16 und 5.17, und ähnliche Muster der Differenzenfelder. Diese Ergebnisse können so interpretiert werden, dass sich bereits aus den unterschiedlichen Ansätzen, zum einen ein Gitterpunktsmodell, zum anderen ein Spektralmodell, solche Differenzen ergeben.
Die dargelegten Gesichtspunkte machen deutlich, dass die Unterschiede nicht durch ein einziges Argument erklärt werden können, sondern es sich dabei um ein komplexes Zusammenspiel mehrerer Faktoren handelt. Wegen möglicher gegenseitiger Wechselwirkungen, die die auftretenden Effekte verstärken oder dämpfen können, lässt sich nicht einmal abschätzen, welcher Faktor den größten Einfluss hat.

5.6 Testfall 6 : ROSSBY-HAURWITZ-Welle

Die ROSSBY[4]-HAURWITZ[5]-Wellen ([18],[40]) sind die analytischen Lösungen der nichtlinearen barotropen Vorticity-Gleichung[6] auf der Kugel, allerdings keine Lösung der Flachwassergleichungen. Trotzdem werden sie bereits seit den fünfziger Jahren regelmäßig zum Testen der Flachwassergleichungen benutzt.
Die Untersuchung beschränkt sich auf die ROSSBY-HAURWITZ-Welle der Wellenzahl 4. Das divergenzfreie Anfangsfeld der Geschwindigkeit $\vec{v}_o$ wird durch die zonale Geschwindigkeit $v_{\zeta o}$ und die meridionale Geschwindigkeit $v_{\eta o}$ festgelegt:

$$v_{\zeta o} = r_e \left[\mu \cos\varphi \;+\; \kappa \cos^3\!\varphi \left(5 \sin^2\!\varphi - 1\right) \cos 4\lambda\right] \tag{5.58}$$

$$v_{\eta o} = -4 r_e \kappa \, \cos^3\!\varphi \, \sin\varphi \, \sin 4\lambda \tag{5.59}$$

Das balancierte Geopotentialfeld ist durch Gleichung (5.60)

$$\phi_o = \overline{\phi} \;+\; r_e^2 \left[A(\varphi) \;+\; B(\varphi) \cos 4\lambda \;+\; C(\varphi) \cos 8\lambda\right] \tag{5.60}$$

$$\overline{\phi} = g h_o \tag{5.61}$$

$$A(\varphi) = \frac{\mu}{2}(2\,\Omega \;+\; \mu) \cos^2\!\varphi \;+\; \kappa^2 \left[\frac{5}{4}\cos^{10}\!\varphi \;+\; \frac{13}{2}\cos^8\!\varphi \;-\; 8\cos^6\!\varphi\right] \tag{5.62}$$

$$B(\varphi) = \kappa\,(\Omega \;+\; \mu) \left[\frac{26}{15}\cos^4\!\varphi \;-\; \frac{5}{3}\cos^6\!\varphi\right] \tag{5.63}$$

$$C(\varphi) = \kappa^2 \left[\frac{5}{4}\cos^{10}\!\varphi \;-\; \frac{3}{2}\cos^8\!\varphi\right] \tag{5.64}$$

mit den Parametern

$$r_e = \frac{2}{\pi} \cdot 10^7 \text{ m} \;\approx\; 6371,22\,\text{km} \tag{5.65}$$

$$g = 9,80616\,\text{m s}^{-2} \tag{5.66}$$

$$\Omega = |\,\vec{\Omega}\,| \;\approx\; 7,292 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-2} \tag{5.67}$$

$$r_e\,\mu = r_e \kappa \;=\; 50\ \text{m s}^{-1} \tag{5.68}$$

$$h_o = 8000\,\text{m} \tag{5.69}$$

gegeben. λ und φ bezeichnen wieder die geografische Länge und Breite eines Ortes.
In der zeitlichen Entwicklung wird erwartet, dass die Welle um den Erdball propagiert, ohne ihre Gestalt zu verändern. Die vorgegebenen Parameter werden seit der ersten Veröffentlichung von N.A. Phillips [32] so gewählt, dass die Welle innerhalb von 2531250 Sekunden (29 d 7 h 7 min 30 s) genau einmal um den Globus transportiert wird.
Die Experimente sind mit unterschiedlichen räumlichen und zeitlichen Auflösungen durchgeführt worden. In der dritten Verfeinerungsstufe sind Zeitschritte von 300 s und 900 s ausgewählt worden, in der vierten Zeitschritte von 450 s, 900 s und 1800 s. Die folgenden Tabellen zeigen die Entwicklung der Testgrößen nach jeweils einem ganzen Modelltag. Es folgen Darstellungen der geopotentiellen Höhe mit Isolinien und als Schattenwurf bei Anstrahlung von rechts mit Windfeld für die 4.Verfeinerungsstufe und dem Zeitschritt Δt = 900 s zu den Zeitpunkten 0, 1, 3 und 5 Tagen. Für die letzten drei Zeitpunkte gibt es zusätzlich Differenzenfelder zwischen der Referenzlösung des NCAR-Datensatzes und der durch **FEM*m*E** generierten Lösung. Am Schluss finden sich Darstellungen dieser Differenzenfelder für alle anderen Experimente nach 5 Tagen.

[4]Carl-Gustaf Arvid Rossby, 1898-1957
[5]Bernhard Haurwitz, 1905-1986
[6]siehe z.B. J.R. Holton [23], Abschnitt 4.5

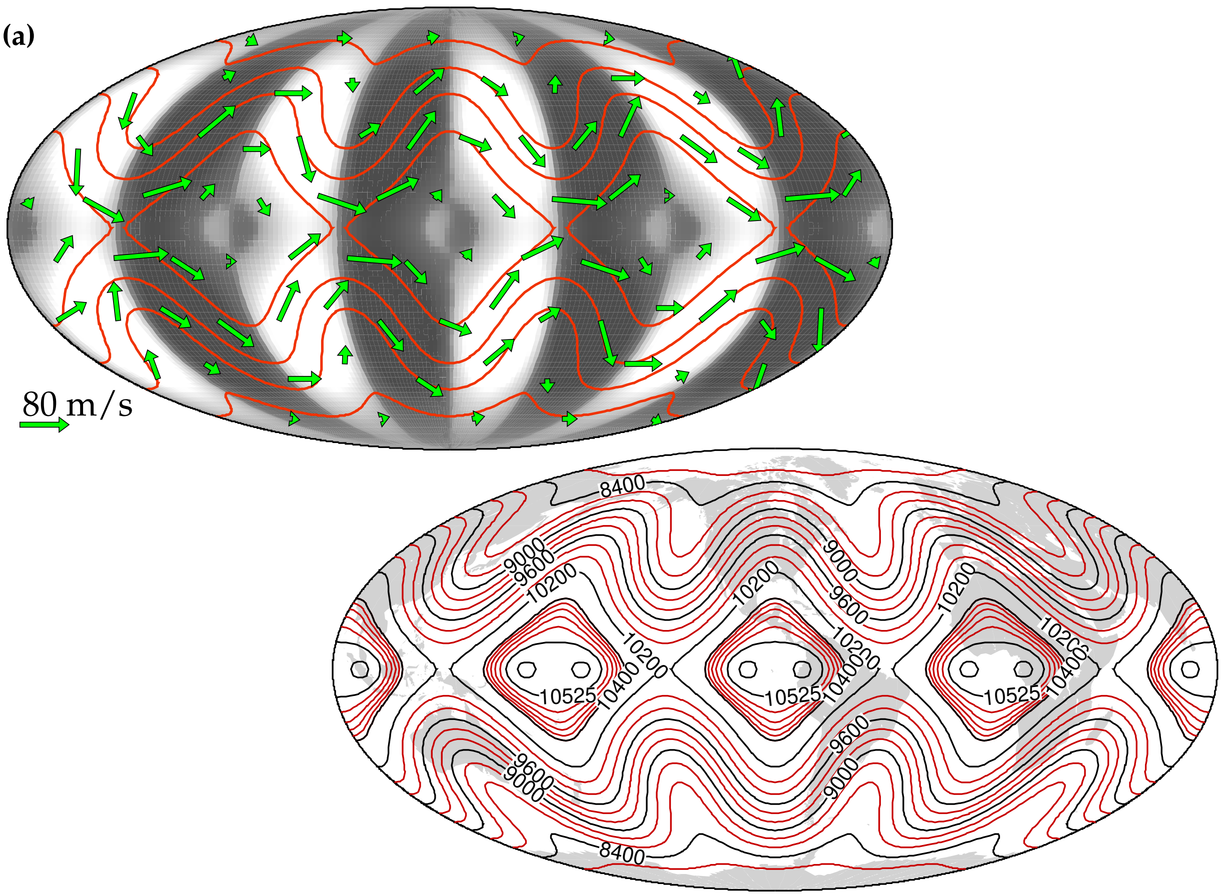
Tage	Δt	N	Φ_{max}	Φ_{min}	RFM	RSM	$\|\vec{v}\|_\infty$
0 d		0	10554.4 m	8000.0 m	1.000	1.000	99.99 ms^{-1}
1 d	0.25 h	96	10531.9 m	7983.0 m	1.000	0.996	99.65 ms^{-1}
	0.083 h	288	10550.6 m	7993.3 m	1.000	0.999	99.80 ms^{-1}
2 d	0.25 h	192	10519.6 m	8016.4 m	1.000	0.994	96.70 ms^{-1}
	0.083 h	576	10538.0 m	8029.2 m	1.000	0.995	97.56 ms^{-1}
3 d	0.25 h	288	10490.9 m	8062.0 m	0.999	0.987	93.51 ms^{-1}
	0.083 h	864	10524.0 m	8077.0 m	1.000	0.991	95.86 ms^{-1}
4 d	0.25 h	384	10460.9 m	8115.6 m	0.999	0.980	90.49 ms^{-1}
	0.083 h	1152	10500.9 m	8116.3 m	1.000	0.986	93.87 ms^{-1}
5 d	0.25 h	480	10429.7 m	8178.1 m	0.999	0.972	87.69 ms^{-1}
	0.083 h	1440	10482.4 m	8167.8 m	1.000	0.981	92.70 ms^{-1}

Tabelle 5.8: Entwicklung der Testgrößen der 3.Verfeinerung

Tage	Δt	N	Φ_{max}	Φ_{min}	RFM	RSM	$\|\vec{v}\|_\infty$
0 d		0	10554.4 m	8000.0 m	1.000	1.000	99.99 ms^{-1}
	0.5 h	48	10526.0 m	7967.1 m	0.999	0.999	99.58 ms^{-1}
1 d	0.25 h	96	10536.0 m	7980.1 m	1.000	0.999	99.94 ms^{-1}
	0.125 h	192	10547.1 m	7988.9 m	1.000	0.999	100.10 ms^{-1}
	0.5 h	96	10505.4 m	8001.6 m	0.998	0.994	96.22 ms^{-1}
2 d	0.25 h	192	10524.7 m	8011.1 m	1.000	0.995	97.34 ms^{-1}
	0.125 h	384	10536.0 m	8022.9 m	1.000	0.995	98.00 ms^{-1}
	0.5 h	144	10469.7 m	8053.6 m	0.998	0.986	91.54 ms^{-1}
3 d	0.25 h	288	10499.3 m	8053.9 m	1.000	0.989	94.43 ms^{-1}
	0.125 h	576	10518.6 m	8068.0 m	1.000	0.990	96.20 ms^{-1}
	0.5 h	192	10432.1 m	8116.2 m	0.997	0.977	89.10 ms^{-1}
4 d	0.25 h	384	10471.4 m	8104.6 m	0.999	0.982	91.95 ms^{-1}
	0.125 h	768	10496.4 m	8111.5 m	1.000	0.984	94.20 ms^{-1}
	0.5 h	240	10394.0 m	8185.3 m	0.997	0.968	84.69 ms^{-1}
5 d	0.25 h	480	10443.4 m	8166.8 m	0.999	0.975	89.08 ms^{-1}
	0.125 h	960	10475.7 m	8167.6 m	1.000	0.979	92.41 ms^{-1}

Tabelle 5.9: Entwicklung der Testgrößen der 4.Verfeinerung

(a)



(b)

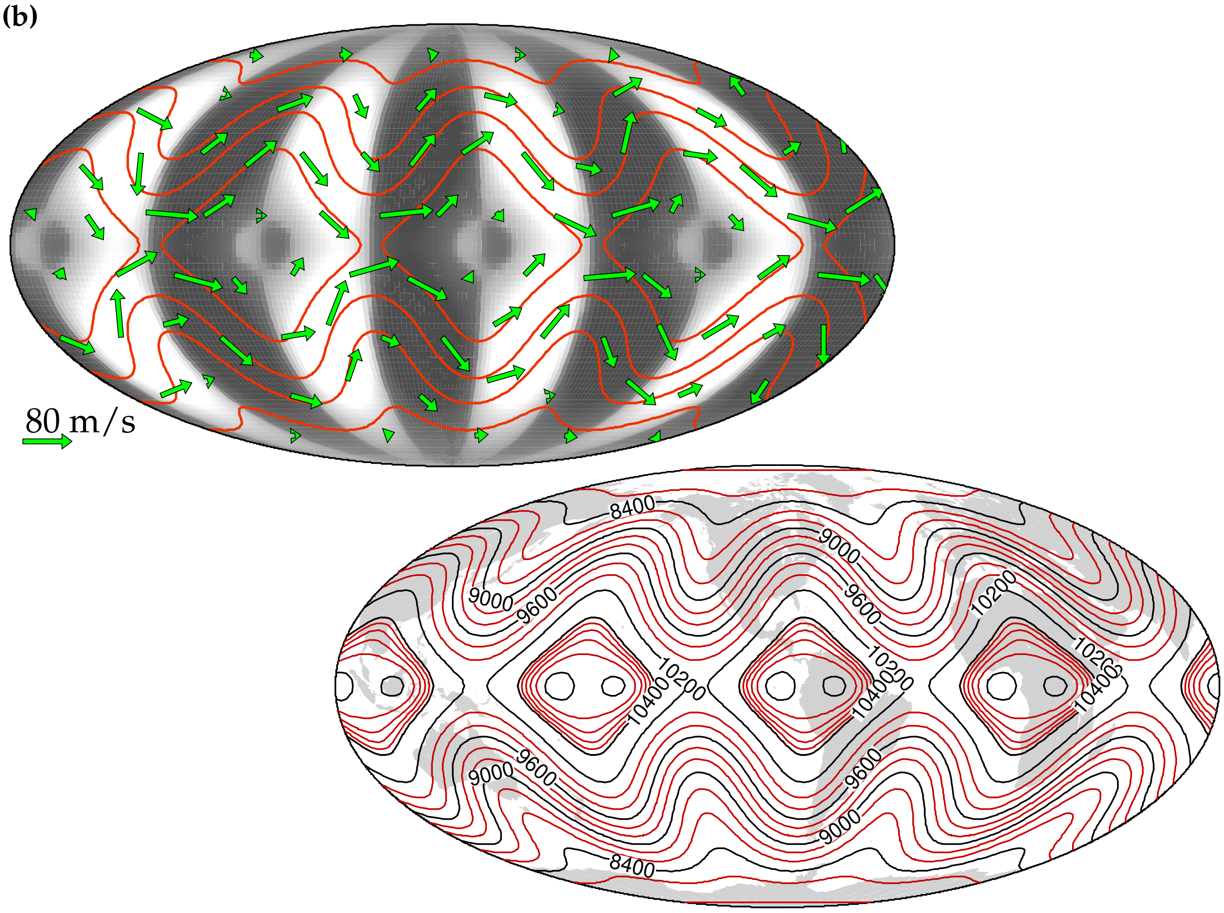
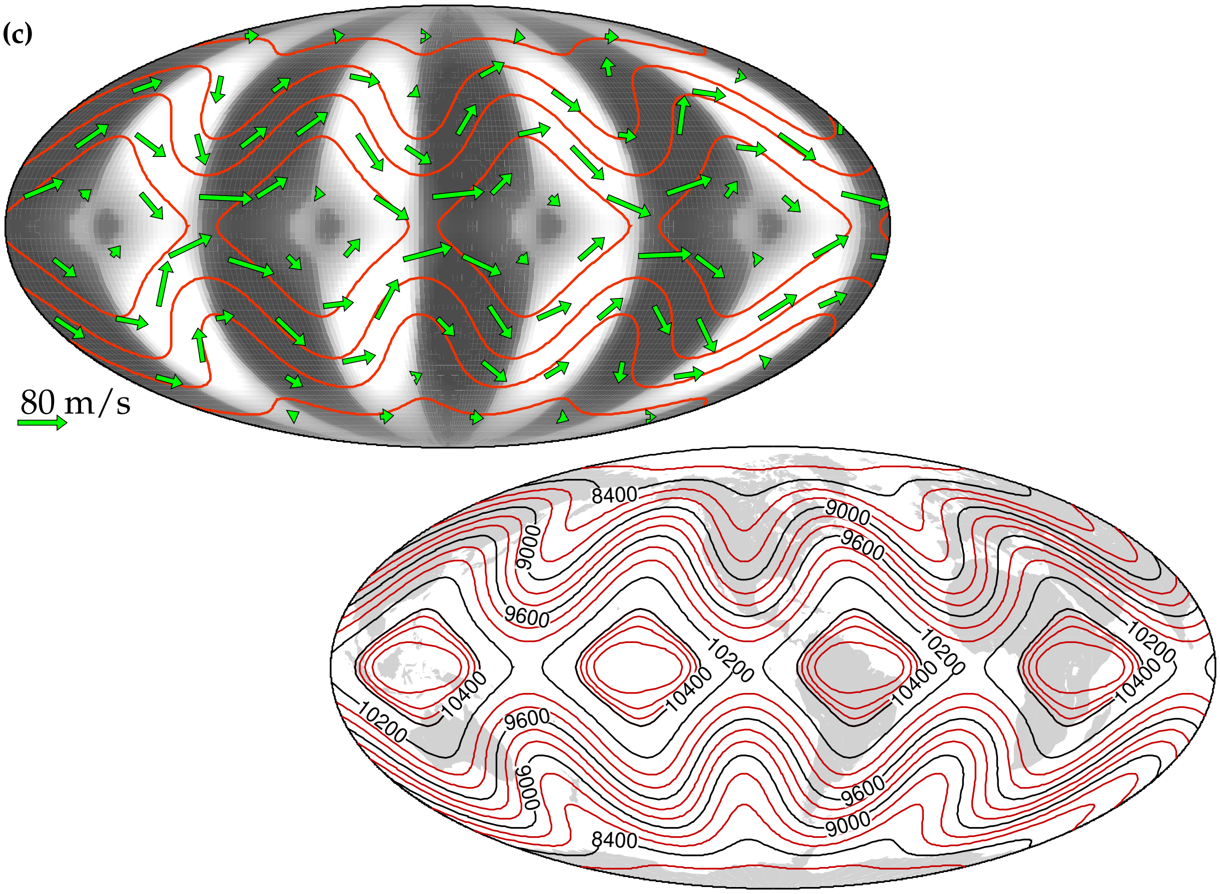


Abbildung 5.18: Wind und geopotentielle Höhe

(a) Anfangsfeld für 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$

(b) nach 1 Tag mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$

(c)



(d)

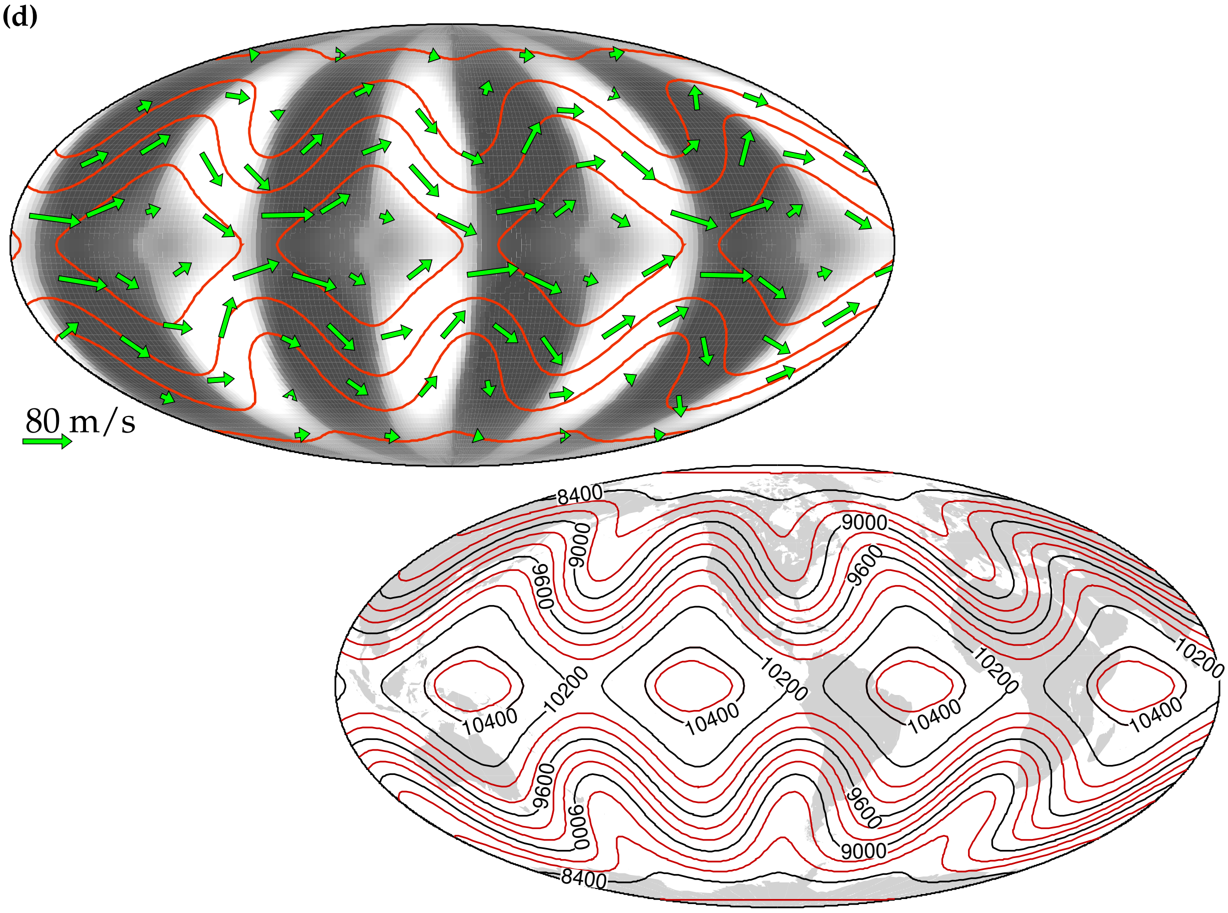
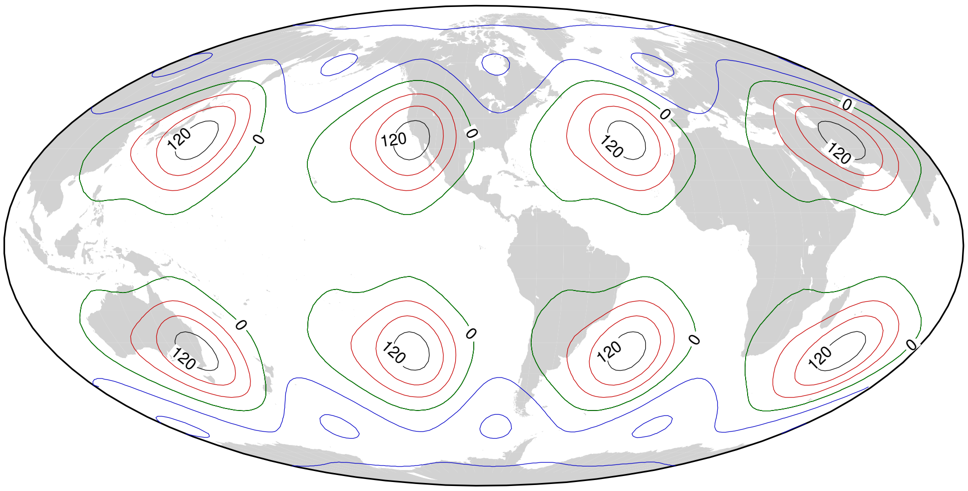


Abbildung 5.19: Wind und geopotentielle Höhe

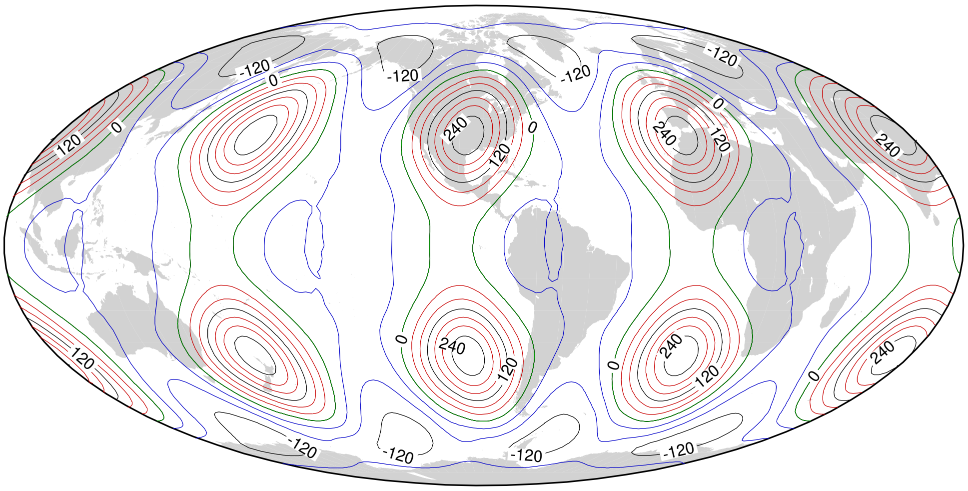
(c) nach 3 Tagen mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$

(d) nach 5 Tagen mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$

(a)



(b)



(c)

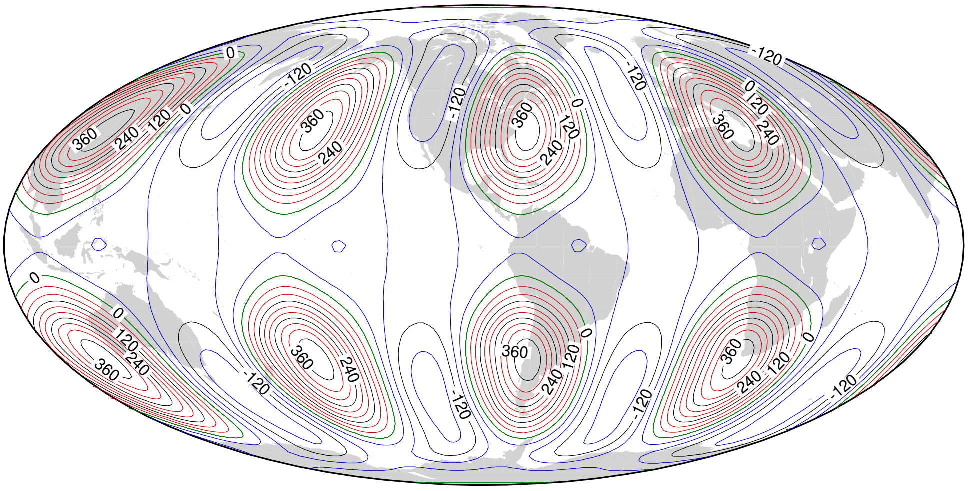


Abbildung 5.20: Geopotentielle Höhe, Differenz zum Referenzfeld

(a) nach 1 Tag mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$
(b) nach 3 Tagen mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$
(c) nach 5 Tagen mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$

(a)
(b)
(c)
(d)

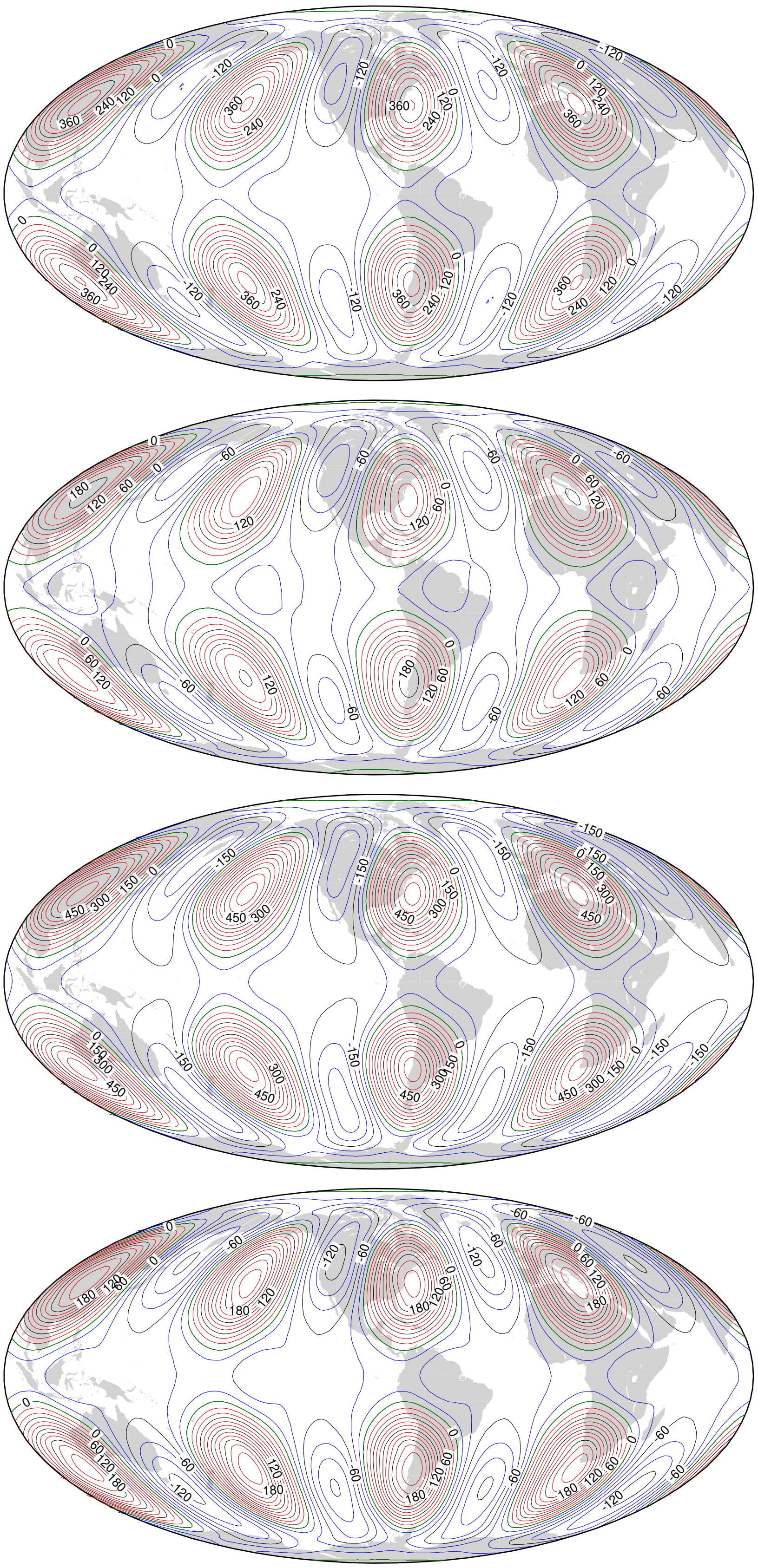


Abbildung 5.21: Geopotentielle Höhe, Differenz zum Referenzfeld nach 5 Tagen

(a) mit 3.Verfeinerung und $\Delta t = 900\,\mathrm{s}$
(b) mit 3.Verfeinerung und $\Delta t = 300\,\mathrm{s}$
(c) mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 1800\,\mathrm{s}$
(d) mit 4.Verfeinerung und $\Delta t = 450\,\mathrm{s}$

Der Isolinienabstand beträgt bei Abbildung (a) 40 m, bei den Abbildungen (b) und (d) 20 m und bei Abbildung (c) 50 m.

5.6.1 Diskussion

Beim Bick in die Tabellen 5.8 und 5.9 fallen auch bei diesem Test die Werte in den Spalten RFM und RSM auf. Bei der Masse (RFM) beträgt der größte Verlust weniger als 0,4 % und bei der kinetischen Energie (RSM) höchstens 3,2 % nach 5 Tagen. Allerdings treten bedingt durch die hohe Windgeschwindigkeit erstmals Schwächen auf. Man erkennt ein deutliches Absinken von Φ_{max} und $\|\vec{v}\|_\infty$ und ein Ansteigen von Φ_{min}, obwohl sich die Gestalt der ROSSBY-HAURWITZ-Welle im Laufe der Zeit nicht ändern sollte, sondern nur ihre Lage. Diese Effekte sind umso größer, je gröber die räumliche Auflösung und je größer der Zeitschritt ist. Es findet eine Abflachung der Struktur statt, was sich auch gut in der zeitlichen Entwicklung der Schattenwürfe in den Abbildungen 5.18 und 5.19 erkennen lässt.
Aus Abbildung 5.20 kann man entnehmen, dass sich nach einem Tag in den mittleren Breiten eine deutliche Differenz zum Referenzfeld ergibt, die sich im Laufe von vier Tagen verdreifacht und deren Wirkung sich auch in die äquatorialen Regionen ausdehnt. Diese Differenzen waren mit dem ursprünglich verwendeten Iterationsschema (2.5) sogar mehr als doppelt so groß und erst das neue Schema (2.10) hat hier eine Verbesserung, wenn auch keine optimale Lösung, erbracht. Hier findet sich auch ein Hinweis auf die mögliche Ursache dieses Phänomens. Aufgrund der hohen Windgeschwindigkeiten, die im Anfangsfeld dieses Tests vorgegeben werden, ist die Bestimmung der Trajektorienstart- und Mittelpunkte mit einem höheren Fehler verbunden, als in den anderen Testfällen. Der Ansatz, dass es sich bei den Trajektorien um Geraden auf einem Großkreis handelt, führt gerade dort zu falschen Trajektorienpunkten, wo sich die Windrichtung stark ändert, wie zum Beispiel im Bereich vor den Rücken im Geopotentialfeld. Die dadurch ausgelösten numerischen Fehler bei der Trajektorienbestimmung verstärken sich während des Modelllaufes selbst und führen so zu den dargestellten Fehlern. In Abbildung 5.21 erkennt man, dass dieser Effekt umso deutlicher ist, je größer der Zeitschritt und je gröber die räumliche Auflösung ist, was sich gut mit den Zahlen in den Tabellen 5.8 und 5.9 deckt. Für eine weitere Verbesserung des Algorithmus in der Zukunft stellt diese Erkenntnis einen wichtigen Ansatzpunkt dar.
Allerdings muss an dieser Stelle noch einmal deutlich darauf hingewiesen werden, dass die Daten des Referenzmodells aus einem expliziten Spektralmodell gewonnen worden sind. Insbesondere muss dabei das CFL-Kriterium (siehe Anhang Gleichung (A.46)) beachtet werden, was bei einer feinen räumlichen Auflösung nur sehr kleine Zeitschritte zulässt. Ob ein ähnlicher Ansatz auch bei **FEM*m*E** zum Erfolg führen würde, ist vom Autor wegen der langen Dauer einer solchen Berechnung und den Ergebnissen des Testfall 5, die schon gezeigt haben, dass diese Differenzen durchaus auch vom spektralen Ansatz herrühren können, nicht durchgeführt worden.
Mit dem in der Diskussion des Testfall 5 schon erwähnten Gitterpunktsmodell [19] ist auch dieser Testfall 6 durchgeführt worden. Dabei wird in der feinsten Auflösung, die in etwa mit der vierten Verfeinerung von **FEM*m*E** vergleichbar ist, bereits bei einer Dauer des Zeitschrittes von Δt = 150 s das CFL-Kriterium verletzt. Die sich mit diesem Modell ergebenden Differenzen sind zwar deutlich kleiner, aber es stellt sich auch hier die Frage der Vergleichbarkeit, weil insbesondere ein numerischer Ansatz mit Diffusionsparametrisierung vierter Ordnung in jenem Modell verwendet wird. Darauf wird in **FEM*m*E** verzichtet, weil weder mit linearen finiten Elementen noch mit dem Diskretisierungsschema zur Bestimmung der partiellen Ableitungen aus Abschnitt 4.3 eine Parametrisierung vierter Ordnung ohne großen numerischen Aufwand in sinnvoller Art und Weise umgesetzt werden kann.

5.7 Zusammenfassung der numerischen Ergebnisse

Die ersten zwei Testfälle, die beide jeweils nur einen Teilaspekt des gesamten gekoppelten Problems betrachten, zeigen, dass sowohl der Finite-Elemente-Ansatz als auch das Semi-LAGRANGE-Schema gute numerische Ergebnisse liefern. Im nullten Testfall wird aufgezeigt, dass durch die linearen finiten Elemente ein Verfahren der Konvergenzordnung 2 erzeugt wird. Das Semi-LAGRANGE-Schema erhält die ersten beiden Momente nahezu vollständig, verändert die Gestalt der Kosinusglocke bei Verschiebung durch eine vorgegebene Strömung kaum und transportiert sie an die richtige Stelle. Als unerwünschte Nebeneffekte beobachtet man leichte Oszillation und in beiden Testfällen eine Tendenz zur Abflachung der Extrema.
Bei den übrigen Testfällen, die das gesamte gekoppelte System der Flachwassergleichungen näher untersuchen, fallen ebenfalls die sehr guten Erhaltungseigenschaften von RFM und RSM bzw. RTE im fünften Testfall ins Auge. Die Abflachung der Extrema findet sich allerdings auch überall wieder.
Bei grober Auflösung erkennt man beim zweiten Testfall das „Wellenzahl-5-Problem“, das offensichtlich auf das verwendete Gitter zurückzuführen ist. Aus diesem Grund sind Testfall 5 und 6 nur auf den beiden feinsten Gittern betrachtet worden. Zusätzlich stellt man einen kleinen systematischen numerischen Fehler fest, der abhängig von der geografischen Breite und, wie die Diskussion des letzten Testfalles gezeigt hat, auf den Ansatz bei der Bestimmung der Trajektorienpunkte zurückzuführen ist.
Bemerkenswert an den numerischen Ergebnissen des fünften Testfalls sind die Erhaltung von Masse und Gesamtenergie und die Erkenntnis, dass der Anteil der verfügbaren potentiellen Energie, die in kinetische Energie umgewandelt wird, auch nach 15 Tagen weniger als 0.18 % beträgt. Ansonsten entsprechen sie der Erwartung, dass bei der Überströmung des Berges schnelle und langsame Wellen ausgelöst werden. Die langsamen werden durch den Algorithmus im Vergleich zu der Referenzlösung sehr gut erfasst. Bei den schnellen Wellen steht man hingegen vor der Schwierigkeit, numerische Ergebnisse, die mit sehr unterschiedlichen Modellansätzen erzeugt wurden, zu vergleichen. Wegen des Zusammenwirkens mehrerer Faktoren lässt sich nicht klären, welche Ursachen für die Unterschiede zum Referenzdatensatz verantwortlich sind.
Der letzte Testfall unterscheidet sich von allen anderen dadurch, dass sich im Vergleich mit dem Referenzdaten deutliche Differenzen ergeben, die sich nicht nur durch unterschiedliche Diskretisierungsansätze erklären lassen, obgleich die großskaligen Strukturen sehr gut wiedergegeben werden. Bei genauer Analyse zeigt sich, dass **FEM***m***E** bei der Trajektorienbestimmung in Bereichen, in denen sich die Windrichtung auf kleinem Raum stark ändert, noch nicht voll ausgereift ist. Besonders fatal wirkt sich das dadurch aus, dass dieser Effekt selbstverstärkenden Charakter hat. Dieses Schwäche kann auch bei den schnellen Wellen im fünften Testfall eine Rolle spielen.
Abschließend lässt sich jedoch feststellen, dass der Algorithmus in allen Testfällen zufriedenstellende Ergebnisse liefert.

Resümee und Ausblick

Die im letzten Kapitel vorgestellten Ergebnisse beantworten die in der Einleitung gestellte Frage, ob es möglich ist, die Flachwassergleichungen mit einer Kombination aus Semi-LAGRANGE-Methode, finiten Elementen und dem Fußball als Ausgangsgitter numerisch zu lösen, eindeutig mit ja. Es gelingt sogar gut in Anbetracht der Einfachheit der verwendeten Konzepte. Dabei sei nur an die Erhaltung von Masse und Energie in allen Testfällen erinnert, ohne dass eine solche Forderung ausdrücklich aufgestellt worden ist.
Der Algorithmus bietet sogar einige Vorteile gegenüber denjenigen, die bisher verwendet werden. Der Finite-Elemente-Ansatz ist zwar aus theoretischer Sicht aufwendiger als ein Finite-Differenzen-Ansatz, aber in der praktischen Anwendung, gerade in Verbindung mit einem Semi-LAGRANGE-Schema, diesem doch überlegen. Aus numerischer Sicht ist er nicht aufwendiger, da in beiden Fällen ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss, das im Falle der finiten Elemente den Vorteil hat, dass die dazugehörige Matrix positiv definit und dünn besetzt ist. In dem hier untersuchten Fall lässt sich das lineare Gleichungssystem sogar mit einem ganz einfach vorkonditionierten cg-Verfahren sehr effizient lösen. Beim Semi-LAGRANGE-Verfahren muss kein CFL-Kriterium erfüllt sein, was auch bei feiner Auflösung lange Zeitschritte erlaubt. Die Stärke der Kombination dieser beiden Methoden ist die Eigenschaft, dass nur das Verhalten in einer lokalen Umgebung in die Berechnung der neuen Werte an einem Gitterpunkt eingeht. Gerade in Hinsicht auf eine mögliche Parallelisierung des Algorithmus ist das ein großer Vorteil.
Aus numerischer Sicht ist zudem ein billiger Algorithmus gelungen. So ist es an keiner Stelle nötig, kubisch zu interpolieren, was zum Beispiel in der Arbeit von J.R. Bates et al. [1] benutzt worden ist. Die Trajektorienpunkte im iterativen Semi-LAGRANGE-Verfahren lassen sich mit nur zwei Iterationen bestimmen und die Berechnung der partiellen Ableitungen gelingt mit Hilfe von Differentialkoeffizienten, die für alle physikalische Größen gemeinsam nur ein einziges Mal bestimmt werden müssen, da sie nur von der Lage der Punkte zueinander abhängen. Bei der Auswahl geeigneter finiter Elemente sind die linearen die einfachste Möglichkeit. Der Fußball hat sich als Gitter bewährt und erzeugt Ergebnisse von ähnlicher Qualität wie vergleichbare Gitter, zum Beispiel einem Ikosaeder.
Die in der Diskussion der einzelnen Testfälle angesprochenen Kritikpunkte geben aber dennoch Anlass, nach weiteren Verbesserungen zu suchen. Hier muss trotz der Ausführungen von H. Ritchie in [37], in der die Großkreisapproximation als gut geeignete Möglichkeit dargestellt wird, versucht werden, eine Alternative bei der Bestimmung der Trajektorienpunkte zu finden. Darüberhinaus gilt es die auftretende Oszillation im ersten Testfall zu beseitigen oder, falls das nicht möglich ist, zumindest zu verringern. Dabei ist wegen der komplexen Zusammenhänge zu erwarten, dass die Lösung eines Problems auch bei dem anderen zu Verbesserungen führt.
Als Fernziel sollen auch längere Simulationen - statt weniger Tage auch Monate oder Jahre - angestrebt werden. Voraussetzung dazu ist aber, dass das System über lange Zeit massen- und energieerhaltend arbeitet. Das bedeutet, dass die bereits guten Erhaltungseigenschaften von RFM und RSM bzw. RTE weiter verbessert werden müssen. Unter diesem Aspekt fällt auch eine verbesserte Erhaltung der Gestalt der Kosinusglocke im ersten Testfall.
Abschließend lässt sich feststellen, dass dieser Algorithmus bereits einige Ansätze verei-

nigt, die als Anforderung an die nächste Generation gekoppelter Ozean-Klimamodelle gestellt werden. Insbesondere gilt das für den lokalen Charakter von Semi-LAGRANGE- und Finite-Elemente-Methode und der Möglichkeit, diese Konzepte einfach in einem parallelen Algorithmus umzusetzen, für das Gitter, das für eine gleichmäßige Auflösung der Erdoberfläche sorgt, und für den großen Zeitschritt. Aus der Sicht des Autors sollte dieses Konzept bei Verbesserung der angesprochenen Punkte daher unbedingt weiter verfolgt werden. Dabei sind in einem nächsten Schritt Antworten auf folgende Fragen von Interesse:

- Führen andere Diskretisierungen, zum Beispiel ein voll implizites Schema, zu besseren Ergebnissen ?
- Erfordern eine andere Diskretisierung oder die Parallelisierung ein anderes Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems ? Wegen der hierarchischen Gitter, die durch die Verfeinerungen erzeugt werden, wäre ein geeignetes Mehrgitterverfahren hier ein erfolgversprechender Ansatz.
- Wie können unregelmäßige Gitter, die sich zum Beispiel aus dem routinemäßig betriebenen Messnetz der Wetterdienste ergeben, hier eingefügt werden ?
- Wie lassen sich Ozeanränder behandeln ? Mit dieser Antwort lässt sich das Modell zu einem einfachen Ozeanmodell erweitern.

Anhang A

Mathematische Hilfsmittel

Mengen und Vektorräume

A.1 Bezeichnungen:

Vektor: $\nu := (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{N}_0^3$ (A.1)

Betrag von ν: $|\nu| := \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ (A.2)

Vektoren: $\vec{x} := (x, y, z),\ \vec{y} = (y_1, y_2, y_3),\ \vec{z},\ \vec{e}_r \in \mathbb{R}^3$ (A.3)

$\vec{e}_r$: auf einer Oberfläche nach außen gerichteter Einheitsvektor

Träger $supp\, u$ einer Funktion $u \in \mathbb{R}^n$:

$$supp\, u := \overline{\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid u(\vec{x}) \neq 0\}} \tag{A.4}$$

A.2 Definition: (Skalar-, Vektorprodukt und Norm in $\mathbb{R}^3$)
$\vec{z} \in \mathbb{R}^3$:

Skalarprodukt: $$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \vec{x} \cdot \vec{y} := x \cdot y_1 + y \cdot y_2 + z \cdot y_3 \tag{A.5}$$

Norm: $$|\vec{x}\,|_{\mathbb{R}^3} = |\vec{x}\,| := \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \tag{A.6}$$

Vektorprodukt: $$\vec{z} := \vec{x} \times \vec{y} \tag{A.7}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\vec{x}, \vec{y}$ und $\vec{z}$ bilden ein rechtshändiges System (A.8)

(ii) $\vec{x} \cdot \vec{z} = 0$ (A.9)

(iii) $\vec{y} \cdot \vec{z} = 0$ (A.10)

(iv) $|\vec{z}\,| = |\vec{x}\,| \cdot |\vec{y}\,|\,|\sin v\,|$ (A.11)

wobei $$v = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}\,| \cdot |\vec{y}\,|} \tag{A.12}$$

A.3 Definition: (Maximumnorm in $\mathbb{R}^n$)
$\vec{z} \in \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}$:

Maximumnorm: $$\|\vec{z}\,\|_{\mathbb{R}^n} = \|\vec{z}\,\|_\infty := \max\left\{|z_i| \;\middle|\; i = 1, 2, \ldots, n\right\} \tag{A.13}$$

A.4 Definition: (LEBESGUE[1]-Raum L^2)
G sei ein Gebiet, $G \subset \mathbb{R}^3$:

$$L^2(G) := \left\{ \text{Funktionen } u \;\middle|\; \int_G |u(x,y,z)|^2 dx dy dz < \infty \right\} \tag{A.14}$$

[1] Henri Lebesgue, 1875-1941

A.5 Definition: (Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\| \cdot \|$ in L^2)
$u, v \in L^2(G)$:

Skalarprodukt: $$\langle u, v\rangle_{L^2} = \langle u, v\rangle := \int_G u \cdot v \; dxdydz \tag{A.15}$$

Norm: $$|u|_{L^2} = \|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle} \tag{A.16}$$

A.6 Bemerkung: Der LEBESGUE-Raum L^2 bildet mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der Norm $\| \cdot \|$ einen HILBERT[2]-Raum.

A.7 Definition: (Differentialoperatoren D und D_S)

Differentialoperator D: $$D^{\nu} := \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x^{\nu_1} \partial y^{\nu_2} \partial z^{\nu_3}} \tag{A.17}$$

Differentialoperator D_S: $$D_S^{\nu} := D^{\nu} - \vec{e}_r \left(\vec{e}_r \cdot D^{\nu}\right) \tag{A.18}$$

A.8 Definition: (C^k und C_0^k)
Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

$$C^k(G) := \{ \text{ stetige und k-mal stetig differenzierbare Funktionen } u \text{ auf } G\} \tag{A.19}$$
$$C_0^k(G) := \{u \in C^k \mid supp\, u \text{ kompakt in } G\} \tag{A.20}$$

A.9 Definition: (Raum der HÖLDER[3]-stetigen Funktionen C^{α})
Sei $\alpha \in [0, 1]$.
$$\begin{aligned} C^{\alpha}(\overline{G}) \; := \; \Big\{ u \in C^0(\overline{G}) \;\Big|\; & \exists \text{ Konstante } c = c(u) : \\ & |u(\vec{x}\,) - u(\vec{y})| \le c\, |\vec{x} - \vec{y}\,|^{\alpha} \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \overline{G} \Big\} \end{aligned} \tag{A.21}$$

A.10 Definition: (Raum der k-fach HÖLDER-stetig differenzierbaren Funktionen $C^{k,\alpha}$)

$$C^{k,\alpha}(\overline{G}) := \big\{ u \in C^0(\overline{G}) \;\big|\; D^{\nu} u \in C^{\alpha}(\overline{G}) \quad \forall\, |\nu| \le k \big\} \tag{A.22}$$

A.11 Definition: (schwache Ableitung v)

$u \in L^2(G)$ besitzt eine schwache Ableitung

$$v := D^{\nu} u \;\in L^2(G), \tag{A.23}$$

falls für dieses $v \in L^2(G)$ gilt:

$$\langle w, v\rangle = (-1)^{|\nu|} \langle D^{\nu} w, u\rangle \qquad \forall\, w \in C_0^{\infty}(G). \tag{A.24}$$

A.12 Definition: (schwache tangentiale Ableitung v)

$u \in L^2(G)$ besitzt eine schwache tangentiale Ableitung

$$v := D_S^{\nu} u \;\in L^2(G), \tag{A.25}$$

falls für dieses $v \in L^2(G)$ gilt:

$$\langle w, v\rangle = (-1)^{|\nu|} \langle D_S^{\nu} w, u\rangle \qquad \forall\, w \in C_0^{\infty}(G). \tag{A.26}$$

[2] David Hilbert, 1862-1943
[3] Otto Hölder, 1859 - 1937

A.13 Definition: (SOBOLEV-Räume H^k und H^k_S)

$$H^k(G) := \left\{ u \in L^2(G) \;\middle|\; D^\nu u \in L^2(G) \quad \forall\, |\nu| \le k \right\} \tag{A.27}$$
$$H^k_S(G) := \left\{ u \in L^2(G) \;\middle|\; D^\nu_S u \in L^2(G) \quad \forall\, |\nu| \le k \right\} \tag{A.28}$$

A.14 Definition: (Skalarprodukt und Norm in H^k und H^k_S)
$u, v \in H^k(G)$ bzw. H^k_S:

Skalarprodukt:

$$\langle u, v\rangle_{H^k} \;=\; \langle u, v\rangle_k := \sum_{|\nu|\le k} \langle D^\nu u, D^\nu v\rangle \tag{A.29}$$
$$\langle u, v\rangle_{H^k_S} \;=\; \langle u, v\rangle_{k,S} := \sum_{|\nu|\le k} \langle D^\nu_S u, D^\nu_S v\rangle \tag{A.30}$$

Norm:

$$|u|_{H^k} \;=\; |u|_k := \sqrt{\sum_{|\nu|\le k} \|D^\nu u\|^2} \tag{A.31}$$
$$|u|_{H^k_S} \;=\; |u|_{k,S} := \sqrt{\sum_{|\nu|\le k} \|D^\nu_S u\|^2} \tag{A.32}$$

A.15 Bemerkung:

(a) Der SOBOLEV-Raum H^k bildet mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ und der Norm $|\cdot|_k$ einen HILBERT-Raum.

(b) Der SOBOLEV-Raum H^k_S bildet mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{k,S}$ und der Norm $|\cdot|_{k,S}$ einen HILBERT-Raum.

(c) $H^0(G) \;=\; L^2(G)$

A.16 Definition: ($\mathcal{P}^m$)
Raum der Polynome $P \in \mathbb{R}^2$ vom Grad $\le\; m \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathcal{P}^m := \left\{ P(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; P(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{j=0\\ i=k-j}}^{k} c_{ij} x^i y^j \;,\; c_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \tag{A.33}$$

A.17 Definition: ($\mathcal{M}(n \times n)$)
Menge der quadratischen Matrizen M der Dimension $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{M}(n \times n) := \left\{ \text{M ist quadratische Matrix} \;\middle|\; dim\text{M} = n \right\} \tag{A.34}$$

Weitere Operatoren

A.18 Bezeichnungen:

Geschwindigkeitsvektor :	$\vec{v} \;\in\; \mathbb{R}^3$	(A.35)
Ortsvektor :	$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$	(A.36)
Einheitsvektor in Richtung $\vec{x}_k$:	$\vec{e}_k \in \mathbb{R}^n$	(A.37)
Zeit :	$t \in \mathbb{R}^+_0$	(A.38)
Intervall :	$I \subset \mathbb{R}^+_0$	(A.39)

A.19 Definition: (Operatoren)
Partielle Ableitung von $u \in C^k(G)$, $k > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} := \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{u(\ldots, x_j + \Delta x_j, \ldots) - u(\ldots, x_j, \ldots)}{\Delta x_j} \tag{A.40}$$

Nablaoperator im $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla := \sum_{k=1}^{n} \vec{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{A.41}$$

EULER-Operator : Sei $u(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times I$

$$\frac{\partial u}{\partial t} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(\vec{x}, t + \Delta t) - u(\vec{x}, t)}{\Delta t} \tag{A.42}$$

LAGRANGE-Operator :

$$\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\,\nabla) \tag{A.43}$$

Übrige Bezeichnungen

A.20 Definition: (KRONECKER-Symbol)
KRONECKER-Symbol:

$$\delta_{kj} := \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad k = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.44}$$

A.21 Definition: (COURANT[4]-Zahl ϑ)
Gegeben sei ein explizites Differenzenschema. Δx sei der kleinste räumlichen Abstand zwischen zwei Punkten und Δt der größte Zeitschritt. Dann bestimmt sich die COURANT-Zahl ϑ:

$$\vartheta := \frac{\|\vec{v}\|_\infty \cdot \Delta t}{\Delta x} \tag{A.45}$$

A.22 Lemma: (COURANT-FRIEDRICHS[5]-LEWY[6]- oder CFL-Kriterium)
Ein explizites Finite-Differenzen-Schema ist stabil, falls für die COURANT-Zahl ϑ gilt:

$$0 < \vartheta \leq 1 \tag{A.46}$$

Mehr Details dazu finden sich bei R. Courant et al.[7] oder Ch. Hirsch [22].

[4] Richard Courant, 1888-1972
[5] Kurt Otto Friedrichs, 1901-1982
[6] Hans Lewy, 1904-1988

Anhang B

Gitter

B.1 Makrotriangulierung

Die Triangulierung eines Gebietes ist die Unterteilung dieses Gebietes in Dreiecke. Die Makrotriangulierung ist das gröbste Gitter dieser Art, das durch weitere Unterteilungen verfeinert werden kann. Eine Vorgehensweise bei der Suche nach einer Makrotriangulierung der Kugel ist es, einen geeigneten Polyeder auszuwählen, dessen Ecken auf der Kugeloberfläche liegen. Danach werden die Seitenflächen in Dreiecke unterteilt und dabei eventuell entstehende neue Punkte längs des radialen Einheitsvektors $\vec{e}_r$ auf die Kugeloberfläche verschoben.
Dieser Ansatz wird in der vorliegenden Arbeit verfolgt. Der ausgewählte Polyeder ist ein Fußball (siehe Abbildung 3.3). Dieser besteht aus zwölf Fünfecken und zwanzig Sechsecken, mit der besonderen Eigenschaft, dass alle Kanten gleich lang sind. Diese Länge wird mit a bezeichnet. Die Seitenflächen werden unter Hinzunahme ihrer Mittelpunkte in fünf beziehungsweise sechs gleichschenklige Dreiecke unterteilt und die 32 Mittelpunkte längs $\vec{e}_r$ radial auf die Kugeloberfläche verschoben. Die Kugel wird somit durch einen Polyeder mit 92 Ecken und 180 Dreiecken als Oberfläche angenähert (siehe Abbildung 3.4). Die 92 Ecken heißen Knoten der Makrotriangulierung.
Der Polyeder ist so ausgerichtet, dass der Mittelpunkt eines Fünfecks den Südpol repräsentiert und sich eine Ecke dieses Fünfecks auf dem Nullmeridian befindet. Im Folgenden wird im Detail dargestellt, wie sich die Koordinaten aller Knoten berechnen lassen. Dazu werden die Winkel betrachtet, die sich im Erdmittelpunkt ergeben, wenn man sich auf dem Nullmeridian vom Süd- zum Nordpol bewegt.
Zunächst gelangt man vom Südpol, dem Mittelpunkt eines Fünfecks, zu einem Eckpunkt. Anschließend folgt man einer Kante zwischen zwei Sechsecken, um danach wieder auf ein Fünfeck zu stoßen. Das wird vom Eckpunkt über den Mittelpunkt bis zu einem Punkt durchquert, der gerade in der Mitte zwischen zwei Knoten liegt, aber nicht auf der Kugeloberfläche. Es folgen zwei Sechsecke, die jeweils von einem solchen Kantenmittelpunkt über ihren Mittelpunkt zum gegenüberliegenden Kantenmittelpunkt durchquert werden müssen. Zum Schluss gelangt man zum Nordpol, indem die Strecke vom Kantenmittelpunkt zum Mittelpunkt des dem Südpol gegenüberliegenden Fünfecks zurückgelegt wird. Insgesamt sind somit vier Fälle zu unterscheiden:

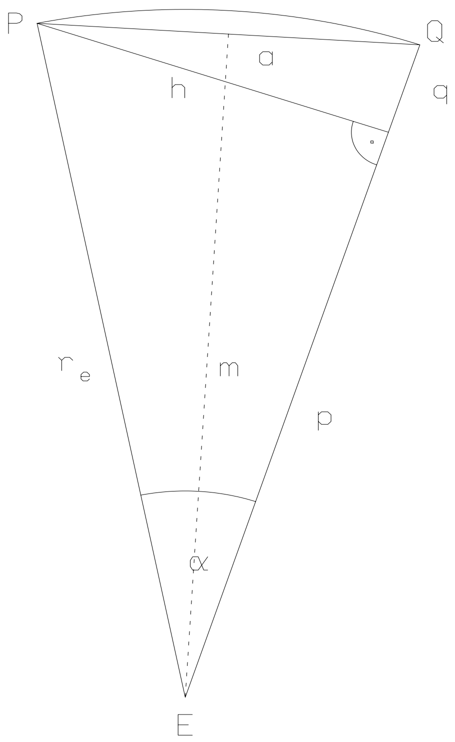
- Kante zwischen zwei Knoten P und Q der Länge a (Winkel α)
- Seitenhalbierende im gleichschenkligen Dreieck, das aus einem Sechseck hervorgegangen ist (Winkel α_s)
- Kante zwischen dem Mittelpunkt eines Fünfecks M und einem Eckpunkt Q (Winkel β)
- Seitenhalbierende im gleichschenkligen Dreieck, das aus einem Fünfeck hervorgegangen ist (Winkel β_s)

Die Summe dieser Winkel entspricht genau dem Drehwinkel eines Halbkreises.

$$\pi \;=\; 2\,\beta_s + 2\,\beta + 4\,\alpha_s + \alpha \tag{B.1}$$

Winkel α

Der Winkel α bezeichnet den Winkel, den zwei Knoten P und Q im Erdmittelpunkt E bilden, wie im Schaubild dargestellt. r_e ist der Erdradius und a ist die Länge der Strecke zwischen P und Q.



Es gilt:

$$\begin{aligned} r_e &= p + q \\ r_e^2 &= p^2 + h^2 \\ a^2 &= q^2 + h^2 \\ \sin\alpha &= \frac{h}{r_e} \end{aligned}$$

Durch Kombination der ersten drei Gleichungen erhält man:

$$q = \frac{a^2}{2r_e}$$

Eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt sich:

$$h = a\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2r_e}\right)^2}$$

Damit gilt:

$$\sin\alpha = \frac{a}{r_e}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2r_e}\right)^2}$$

Mit der Substitution $\sigma = \; a/r_e$ erhält man:

$$\begin{aligned} &\sin\alpha = \sigma\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{4}} \\ \Longrightarrow\quad & \sigma^4 - 4\,\sigma^2 \; + 4\sin^2\alpha \;=\; 0 \\ \Longrightarrow\quad & \sigma^2 = 2 - \sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}^{\,*} \\ \Longrightarrow\quad & \sigma^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \sin^2\alpha} \\ \Longrightarrow\quad & \sigma^2 = 2 - 2\sqrt{\cos^2\alpha} \\ \Longrightarrow\quad & \sigma^2 = 2\,(1 - \cos\alpha) \\ \Longrightarrow\quad & \frac{a}{r_e} = \sqrt{2\,(1 - \cos\alpha)}^{\,**} \\ \Longrightarrow\quad & a = r_e \cdot \sqrt{2\,(1 - \cos\alpha)} \end{aligned} \tag{B.2}$$

*Eine grobe Abschätzung des Winkels α ergibt: $0 \leq \alpha \leq \pi/6$. Aus Plausibilitätsgründen kann man damit das positive Vorzeichen vor der Wurzel vernachlässigen. Andernfalls wäre die Länge von a etwa doppelt so groß wie r_e.

**$a > 0$ und $r_e > 0$, damit gibt es nur für das positive Vorzeichen vor der Wurzel eine sinnvolle Lösung

Zur Vereinfachung von Gleichung (B.2) wird der Winkel θ eingeführt:

$$\theta := \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \tag{B.3}$$

Damit gilt :

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \cos\frac{\alpha}{2} \\
\cos\theta &= \sin\frac{\alpha}{2} \\
\cos\alpha &= \sin^2\theta - \cos^2\theta \\
1 - \cos\alpha &= 2\cos^2\theta \\
\sqrt{2\,(1-\cos\alpha)} &= 2\cos\theta \\
a &= 2\,r_e\cos\theta \qquad \text{(B.2*)}
\end{aligned}$$

Winkel θ lässt sich auch in Gleichung (B.1) einsetzen. Man erhält:

$$\theta = \beta_s + \beta + 2\,\alpha_s \tag{B.4}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden zwei weitere Winkel definiert:

$$\delta := \beta_s + \beta \tag{B.5}$$

$$\varepsilon := 2\,\alpha_s \tag{B.6}$$

Damit gilt:

$$\theta = \delta + \varepsilon$$

$$\cos\theta = \cos\delta\cos\varepsilon - \sin\delta\sin\varepsilon \tag{B.7}$$

$$\cos\delta = \cos\beta\cos\beta_s - \sin\beta\sin\beta_s \tag{B.8}$$

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\beta_s + \cos\beta\sin\beta_s \tag{B.9}$$

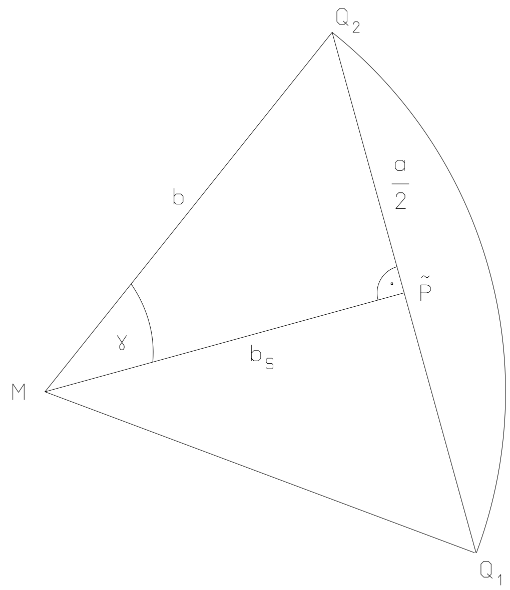
$$\cos\varepsilon = \cos^2\alpha_s - \sin^2\alpha_s \tag{B.10}$$

$$\sin\varepsilon = 2\sin\alpha_s\cos\alpha_s \tag{B.11}$$

In den folgenden Abschnitten werden die unbekannten Terme $\sin\alpha_s$, $\cos\alpha_s$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\sin\beta_s$ und $\cos\beta_s$ in Abhängigkeit vom Referenzwinkel θ hergeleitet. Somit lassen sich diese Terme über die Gleichungen (B.8) bis (B.11) in Gleichung (B.7) einsetzen und mit einem geeigneten Iterationsverfahren den Referenzwinkel θ bestimmen. Damit können dann alle anderen unbekannten Winkel berechnet werden.

Winkel β und β_s

Die Kantenlänge der regelmäßigen Fünf- und Sechsecke ist a. Wenn im Folgenden davon gesprochen wird, dass eine Seite einen Winkel im Erdmittelpunkt bildet, so soll damit zum Ausdruck gebracht werden, dass sich durch Verbindung der beiden Randpunkte der Seite mit dem Erdmittelpunkt dort ein Öffnungswinkel ergibt, durch den sich diese Seite repräsentieren lässt. Mit dieser Vereinbarung ist der Winkel α der Winkel, den eine Seite der Länge a im Erdmittelpunkt bildet. Der Winkel β ist der Winkel im Erdmittelpunkt, den eine Strecke der Länge b bildet, die den Mittelpunkt eines regelmäßigen Fünfecks mit einem seiner Eckpunkte verbindet; der Winkel β_s ist derjenige, den eine Seitenhalbierende b_s von der Art, wie sie im folgenden Schaubild dargestellt ist, ebenfalls im Erdmittelpunkt bildet.



Nebenstehendes Schaubild veranschaulicht die Situation im Fünfeck. Verbindet man den Mittelpunkt M eines Fünfecks mit seinen Eckpunkten Q_1,Q_2,...,Q_5, so erhält man fünf gleichschenklige Dreiecke. Für den Winkel γ und die Seiten b und b_s gilt:

$$\gamma = \frac{2\pi}{5 \cdot 2}$$
$$\sin\gamma = \frac{a}{2b}$$
$$b = \frac{a}{2\sin\gamma} = \frac{r_e}{\sin\frac{\pi}{5}}\cos\theta \qquad \text{(B.12)}$$
$$\cos\gamma = \frac{b_s}{b}$$
$$b_s = b\cos\gamma = \frac{r_e}{\tan\frac{\pi}{5}}\cos\theta \qquad \text{(B.13)}$$

Im Gegensatz zu den Eckpunkten der n-Ecke liegen alle anderen Punkte, insbesondere die Mittelpunkte der Kanten, nicht auf der Kugel, sondern in den Ebenen, die von den Eckpunkten der n-Ecke aufgespannt werden, wie im Diagramm auf der nächsten Seite dargestellt.
Bei der Frage, welchen Winkel die Seitenhalbierende dieser Dreiecke im Erdmittelpunkt bildet, erweist sich eine kleine Vorbetrachtung als hilfreich. Wie lang ist eine Seitenhalbierende m im Dreieck EPQ auf Seite 92 ?
Mit dem Satz des PYTHAGORAS[1] erhält man:

$$r_e^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$m = \frac{1}{2}\sqrt{4\,r_e^2 - a^2}$$

Mit der Gleichung (B.2*) gilt:

$$m = \frac{2r_e}{2}\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$m = r_e\sin\theta \qquad \text{(B.14)}$$

Das Schaubild auf der nächsten Seite zeigt einen Schnitt durch den Globus längs des Meridians, auf dem der Eckpunkt Q_4 liegt. Die Punkte M und $\tilde{P}$ sind in dieser und der vorangehenden Abbildung dieselben Punkte. Es gilt:

$$\sin\beta = \frac{b}{r_e}$$
$$\sin\beta_s = \frac{b_s}{m}$$

Mit den Gleichungen (B.12), (B.13) und (B.14) ergibt sich:

$$\sin\beta = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}}\cos\theta \qquad \text{(B.15)}$$
$$\sin\beta_s = \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{(B.16)}$$

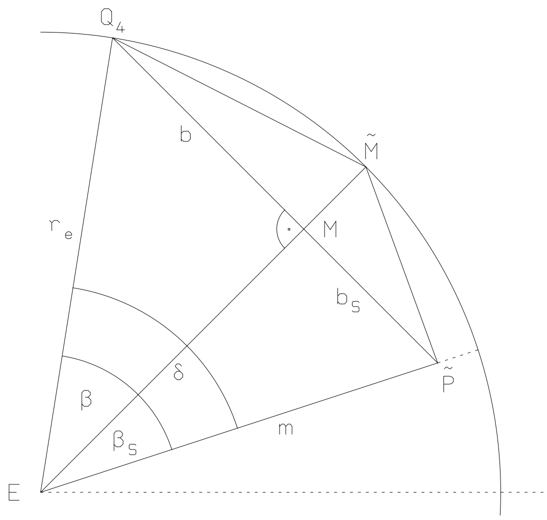
[1]Pythagoras von Samos (570-497 v.Chr.)

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{5}-\cos^2\theta} \tag{B.17}$$

$$\cos\beta_s = \sqrt{1-\sin^2\beta_s}$$

$$\cos\beta_s = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}\sin\theta}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{5}-\cos^2\theta} \tag{B.18}$$



Aus den Gleichungen (B.15) und (B.16) bzw. (B.17) und (B.18) erkennt man leicht:

$$\sin\beta_s = \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\theta}\sin\beta \tag{B.19}$$

$$\cos\beta_s = \frac{1}{\sin\theta}\cos\beta \tag{B.20}$$

Mit diesen Angaben lassen sich folgende Aussagen über den Winkel δ in den Gleichungen (B.8) und (B.9) machen:

$$\begin{aligned}
\cos\beta\cos\beta_s &= \frac{1}{\sin\theta}\cos^2\beta \\
\sin\beta\sin\beta_s &= \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\theta}\sin^2\beta \\
\cos\delta &= \frac{1}{\sin\theta}(1-\sin^2\beta) - \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\theta}\sin^2\beta \\
&= \frac{1}{\sin\theta}\left[1-\left(1+\cos\frac{\pi}{5}\right)\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\frac{\pi}{5}}\right] \\
&= \frac{1}{\sin\theta}\left[1-\frac{\cos^2\theta}{1-\cos\frac{\pi}{5}}\right] \qquad \text{(B.21)} \\
\sin\beta\cos\beta_s &= \frac{1}{\sin\theta}\sin\beta\cos\beta \\
\cos\beta\sin\beta_s &= \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\theta}\sin\beta\cos\beta \\
\sin\delta &= \frac{1}{\sin\theta}\left(1+\cos\frac{\pi}{5}\right)\sin\beta\cos\beta \\
&= \frac{1}{\sin\theta}\frac{1+\cos\frac{\pi}{5}}{\sin^2\frac{\pi}{5}}\cos\theta\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{5}-\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{1-\cos\frac{\pi}{5}}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{5}-\cos^2\theta} \qquad \text{(B.22)}
\end{aligned}$$

Winkel α_s

Die Seitenhalbierenden a_s, die sich zwischen Sechseckmittelpunkt und einem Kantenmittelpunkt befindet, bildet im Erdmittelpunkt den Winkel α_s. Bei der Berechnung der gesuchten Größen in den Gleichungen (B.10) und (B.11) wird analog vorgegangen, wie bei der Bestimmung des Winkel β_s, allerdings mit dem Unterschied, dass die Länge von a_s in einem gleichseitigen Dreieck, das sich bei der Zerlegung des regelmäßigen Sechsecks in sechs gleich große Dreiecke ergibt, bestimmt wird.

$$\begin{aligned}
a_s^2 &= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
a_s &= \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a \;=\; \sqrt{3}\,r_e \cos\theta \\
\sin\alpha_s &= \frac{a_s}{m} \;=\; \sqrt{3}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta} && \text{(B.23)} \\
\cos\alpha_s &= \sqrt{1-\sin^2\alpha_s} \;=\; \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{1-4\cos^2\theta} && \text{(B.24)}
\end{aligned}$$

Mit diesen Angaben lassen sich folgende Aussagen über den Winkel ε machen:

$$\begin{aligned}
\cos\varepsilon &= \frac{1-4\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{3\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \;=\; \frac{1-7\cos^2\theta}{\sin^2\theta} && \text{(B.25)} \\
\sin\varepsilon &= 2\sqrt{3}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{1-4\cos^2\theta} \\
&= \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\sqrt{3(1-4\cos^2\theta)} && \text{(B.26)}
\end{aligned}$$

Sekantenverfahren

Nach Einsetzen der Gleichungen (B.21), (B.22), (B.25) und (B.26) in Gleichung (B.7) erhält man einen Ausdruck, der nur noch vom Winkel θ abhängt:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{1}{\sin\theta}\left[1-\frac{\cos^2\theta}{1-\cos\frac{\pi}{5}}\right]\frac{1-7\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \\
&\quad - \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\cos\theta}{1-\cos\frac{\pi}{5}}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{5}-\cos^2\theta}\,\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\sqrt{3(1-4\cos^2\theta)} \\
&= \frac{1}{\sin^3\theta(1-\cos\frac{\pi}{5})}\left[(1-\cos\frac{\pi}{5}-cos^2\theta)(1-7\cos^2\theta)\right. \\
&\quad \left. - 2\cos^2\theta\sqrt{3(\sin^2\frac{\pi}{5}-\cos^2\theta)(1-4\cos^2\theta)}\right] && \text{(B.7*)}
\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung definiert sich eine Funktion $f(\theta)$, deren Nullstelle Lösung dieser Gleichung ist.

$$\begin{aligned}
f(\theta) &:= (1-\cos\frac{\pi}{5})(sin^3\theta\cos\theta - 1) \\
&\quad - cos^2\theta\left[7(\cos\frac{\pi}{5}+cos^2\theta) - 8 - 2\sqrt{3(\sin^2\frac{\pi}{5}-\cos^2\theta)(1-4\cos^2\theta)}\right] && \text{(B.27)}
\end{aligned}$$

Mit der bereits benutzten groben Abschätzung für den Winkel α: $\quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{6}$,
erhält man auch eine Abschätzung für den Winkel θ: $\quad \frac{5\pi}{12} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.
Die Grenzen des Iterationsverfahrens sind:

$$f(\frac{5\pi}{12}) \approx 0.084 > 0 \qquad \text{und} \qquad f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{5} - 1 < 0$$

Die Nullstelle der Funktion f im Intervall $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ wird in **FEM*m*E** mit dem Sekantenverfahren bestimmt. Damit erhält man als Nährungslösung der Winkel:

$$\begin{array}{lll} \delta \approx 0.6379 \simeq 36.55^0 & \alpha \approx 0,4063 \simeq 23,28^0 & \beta \approx 0,3504 \simeq 20,08^0 \\ \varepsilon \approx 0.7297 \simeq 41.81^0 & \alpha_s \approx 0,3649 \simeq 20,91^0 & \beta_s \approx 0,2875 \simeq 16,47^0 \\ \theta \approx 1.3676 \simeq 78.36^0 & & \end{array} \tag{B.28}$$

Längste Seite

Die längste Strecke der Makrotriangulierung ist die Kante a_m, die den auf die Sphäre verschobenen Mittelpunkt eines ursprünglichen Sechsecks mit einem Eckpunkt verbindet. Der dazugehörige Winkel im Erdmittelpunkt wird mit α_m bezeichnet. Analog zum Winkel β berechnet sich α_m folgendermaßen:

$$\sin \alpha_m = 2 \cos \theta \tag{B.29}$$

$$\alpha_m \approx 0.4155 \simeq 23.80^0 \tag{B.30}$$

Mit dem Kosinussatz ergibt sich a_m zu

$$a_m = r_e \sqrt{2\,(1 - \cos \alpha_m)}\,. \tag{B.31}$$

$$a_m \approx 2625,49\,\text{km} \tag{B.32}$$

Zum Vergleich die Länge eines Bogens $\widetilde{a_m}$ zum Winkel α_m auf der Erdoberfläche:

$$\widetilde{a_m} = r_e \cdot \alpha_m \tag{B.33}$$

$$\widetilde{a_m} \approx 2644,47\,\text{km} \tag{B.34}$$

Das ergibt eine relative Abweichung von a_m zu $\widetilde{a_m}$ von $7,2$ ‰ .

Koordinaten der Knoten

Nachdem nun die Winkel bekannt sind, lassen sich mit ihrer Hilfe die Koordinaten aller Punkte der Makrotriangulierung berechnen. Beginnend mit dem Südpol werden sukzessive zunächst die 46 Punkte der Südhalbkugel berechnet und daraus durch Spiegelung am Erdmittelpunkt die diesen Punkten gegenüberliegenden Punkte der Nordhemisphäre.
Zur Orientierung werden auf dem Globus zehn Längenkreise und sieben Breitenkreise besonders hervorgehoben. 26 der 46 Punkte liegen auf zehn äquidistanten Längenkreisen mit einem Abstand von $\frac{\pi}{5}$. Der erste so ausgezeichnete Längenkreis ist der Nullmeridian und entsprechend der sechste die Datumsgrenze.
Alle Punkte der Makrotriagulierung liegen auf sieben Breitenkreisen. Die genauen Werte können Tabelle B.1 entnommen werden. Zusätzlich ist in der Tabelle noch die Berechnungsvorschrift angegeben, wie man ausgehend vom Südpol mit den zuvor berechneten Winkeln die einzelnen Breitenkreise erreicht.

Pole

Ausgangspunkt der Makrotriangulation ist der Südpol. Er ist ein Sonderfall, weil es in diesem Punkt, wie dem gegenüberliegenden Nordpol, in dem hier verwendeten geografischen (λ, φ)-Koordinatensystem zwar eine φ-, aber keine sinnvolle λ-Komponente gibt. Sie wird auf 0 gesetzt. Die Koordinaten lauten demnach:

$$SP\,(0, -\frac{\pi}{2}) \qquad \text{und} \qquad NP\,(0, \frac{\pi}{2})$$

Breitenkreis	Berechnungsvorschrift	Bogenmaß	Gradmaß
Südpol	$-\frac{\pi}{2}$	-1.5708	-90^0
1	$-\frac{\pi}{2}+\beta$	-1.2204	-69.92^0
2	$-\frac{\pi}{2}+\beta_s+\alpha_s$	-0.9184	-52.62^0
3	$-\frac{\pi}{2}+\beta+\alpha$	-0.8141	-46.64^0
4	$-\frac{\pi}{2}+\beta_s+2\alpha_s$	-0.5409	-30.99^0
5	$-\frac{\pi}{2}+2\beta+\alpha$	-0.4636	-26.57^0
6	$-\frac{\pi}{2}+\beta_s+3\alpha_s$	-0.1887	-10.81^0
7	$-\frac{\pi}{2}+2\beta+\alpha+\alpha_s$	-0.1725	-9.88^0

Tabelle B.1: Breitenkreise der Makrotriangulierung

Die fünf Nachbarpunkte des Südpols haben die Koordinaten:

$$Q_i(\frac{(-6+2i)\pi}{5}, -\frac{\pi}{2}+\beta) \qquad i=1,\ldots,5$$

Die Mittelpunkte M_i der fünf Nachbarsechsecke lauten:

$$M_i(\frac{(-7+2i)\pi}{5}, -\frac{\pi}{2}+\beta_s+\alpha_s) \qquad i=1,\ldots,5$$

Alle zehn Punkte bestimmen somit die oben erwähnten Längenkreise. Entlang dieser Meridiane werden nun die entsprechenden Winkel der Tabelle abgetragen. So erhält man weitere 15 Punkte.

Spezialfälle

Auf dem vierten und siebten Breitenkreis befinden sich jeweils zehn Punkte, die auf keinem der ausgezeichneten Längenkreise liegen. Für diese Punkte muß ein anderen Weg zur Berechnung gefunden werden.
Dazu verwendet man die Angaben, die schon bekannt sind:

(a) Den Breitenkreis φ, auf dem sich die Punkte befinden, und damit auch den Kreisradius R, der sich durch $R = r_e \cos\varphi$ berechnet.

(b) Den Abstand zweier durch eine Kante verbundener Nachbarpunkte eines n-Ecks, nämlich die Länge a.

(c) Jeweils fünf Punkte liegen äquidistant mit dem Winkel $\frac{2\pi}{5}$.

Es gelten ähnliche Verhältnisse wie im Schaubild auf Seite 94. Mit den obigen Angaben lässt sich der Winkel υ der beiden Nachbarpunkte im Mittelpunkt des Breitenkreises bestimmen:

$$\sin\frac{\upsilon}{2} = \frac{a}{2R} \tag{B.35}$$

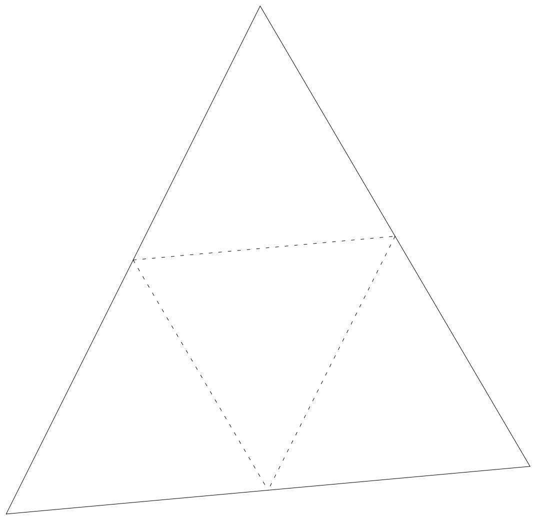
$$\upsilon = 2\,\arcsin\left(\frac{a}{2\,r_e\,\cos\varphi}\right) \tag{B.36}$$

Je zwei der betrachteten Punkte des vierten Kreises liegen symmetrisch zur Datumsgrenze, je zwei des siebten symmetrisch zum Nullmeridian. Damit kann man die Koordinaten der restlichen Punkte bestimmen. Tabelle B.2 gibt die Koordinaten aller 92 Punkte der Makrotriangulierung an.

$\varphi-$Koordinate	(Index) $\lambda-$Koordinate `rad/deg`		
-1.5708 / -90^0	(1) 0 / 0^0		
-1.2204 / -69.92^0	(2) -2.5133 / -144^0	(3) -1.2566 / -72^0	(4) 0 / 0^0
	(5) 1.2566 / 72^0	(6) 2.5133 / 144^0	
-0.9184 / -52.62^0	(7) -3.1416 / -180^0	(11) -1.8850 / -108^0	(15) -0.6283 / -36^0
	(19) 0.6283 / 36^0	(23) 1.8850 / 108^0	
-0.8141 / -46.64^0	(8) 2.5133 / 144^0	(12) -2.5133 / -144^0	(16) -1.2566 / -72^0
	(20) 0 / 0^0	(24) 1.2566 / 72^0	
-0.5409 / -30.99^0	(9) 2.9040 / 166.39^0	(10) -2.9040 / -166.39^0	(13) -2.1226 / -121.61^0
	(14) -1.6473 / -94.39^0	(17) -0.8659 / -49.61^0	(18) -0.3907 / -22.39^0
	(21) 0.3907 / 22.39^0	(22) 0.8659 / 49.61^0	(25) 1.6473 / 94.39^0
	(26) 2.1226 / 121.61^0		
-0.4636 / -26.57^0	(27) -2.5133 / -144^0	(31) -1.2566 / -72^0	(35) 0 / 0^0
	(39) 1.2566 / 72^0	(43) 2.5133 / 144^0	
-0.1887 / -10.81^0	(30) -1.8850 / -108^0	(34) -0.6283 / -36^0	(38) 0.6283 / 36^0
	(42) 1.8850 / 108^0	(46) -3.1416 / -180^0	
-0.1725 / -9.88^0	(28) -2.7195 / -155.82^0	(29) -2.3070 / -132.18^0	(32) -1.4629 / -83.82^0
	(33) -1.0504 / -60.18^0	(36) -0.2063 / -11.82^0	(37) 0.2063 / 11.82^0
	(40) 1.0504 / 60.18^0	(41) 1.4629 / 83.82^0	(44) 2.3070 / 132.18^0
	(45) 2.7195 / 155.82^0		
0.1725 / 9.88^0	(48) -0.4220 / -24.18^0	(49) -0.8346 / -47.82^0	(52) -1.6787 / -96.18^0
	(53) -2.0912 / -119.82^0	(56) -2.9353 / -168.18^0	(57) 2.9353 / 168.18^0
	(60) 2.0912 / 119.82^0	(61) 1.6787 / 96.18^0	(64) 0.8346 / 47.82^0
	(65) 0.4220 / 24.18^0		
0.1887 / 10.81^0	(47) 0 / 0^0	(51) -1.2566 / -72^0	(55) -2.5133 / -144^0
	(59) 2.5133 / 144^0	(63) 1.2566 / 72^0	
0.4636 / 26.57^0	(50) -0.6283 / -36^0	(54) -1.8850 / -108^0	(58) -3.1416 / -180^0
	(62) 1.8850 / 108^0	(66) 0.6283 / 36^0	
0.5409 / 30.99^0	(67) -1.0190 / -58.39^0	(68) -1.4942 / -85.61^0	(71) -2.2757 / -130.39^0
	(72) -2.7509 / -157.61^0	(75) 2.7509 / 157.61^0	(76) 2.2757 / 130.39^0
	(79) 1.4942 / 85.61^0	(80) 1.0190 / 58.39^0	(83) 0.2376 / 13.61^0
	(84) -0.2376 / -13.61^0		
0.8141 / 46.64^0	(69) -1.8850 / -108^0	(73) -3.1416 / -180^0	(77) 1.8850 / 108^0
	(81) 0.6283 / 36^0	(85) -0.6283 / -36^0	
0.9184 / 52.62^0	(70) -1.2566 / -72^0	(74) -2.5133 / -144^0	(78) 2.5133 / 144^0
	(82) 1.2566 / 72^0		
1.2204 / 69.92^0	(87) -0.6283 / -36^0	(88) -1.8850 / -108^0	(89) -3.1416 / -180^0
	(90) 1.8850 / 108^0	(91) 0.6283 / 36^0	
1.5708 / 90^0	(92) 0 / 0^0		

Tabelle B.2: Koordinaten der Makrotriangulierung
linke Spalte: Koordinaten des Breitenkreises im Bogen- und Gradmaß
rechte Spalte: Koordinaten des Längenkreises im Bogen- und Gradmaß
in Klammern: Index des Punktes in der Makrotriangulierung

B.2 Verfeinerung der Triangulierungen



In diesem Abschnitt wird eine kurze Beschreibung der Vorgehensweise beim Verfeinern einer Triangulierung gegeben.
Das nebenstehende Schaubild zeigt die Verfeinerung eines Dreiecks. Zunächst werden neue Knoten auf den Kantenmittelpunkten erzeugt. Die Strecken, die diese neuen Knoten verbinden, sind die neuen Kanten. Dadurch entstehen vier verfeinerte Dreiecke mit 9 Kanten.
Zur Berechnung der genauen Anzahl der Knoten(Kn), Kanten(Ka) und Dreiecke(D) wird die EULER-Charakteristik verwendet. Man unterscheidet die EULER-Charakteristik der 1.Art für ebene geometrische Objekte und die EULER-Charakteristik der 2.Art für dreidimensionale geometrische Körper.

$$\text{1.Art:} \quad Kn + D = Ka + 1 \tag{B.37}$$
$$\text{2.Art:} \quad Kn + D = Ka + 2 \tag{B.38}$$

Die Makrotriangulierung besteht aus 92 Knoten und 180 Dreiecken. Eine Kugel ist ein dreidimensionaler geometrischer Körper. Deshalb errechnet sich die Anzahl der Kanten mit (B.38). In der nächsten Verfeinerungsstufe vervierfacht sich die Anzahl der Dreiecke und zu den alten Knoten kommt auf jeder Kante ein weiterer Knoten hinzu. Damit Berechnen sich Anzahl der Knoten, Kanten und Dreiecke für jede Verfeinerungsstufe $n \in \mathbb{N}$:

$$Ka(n) = Kn(n) + D(n) - 2 \tag{B.38*}$$
$$D(n+1) = 4 \cdot D(n) \tag{B.39}$$
$$Kn(n+1) = Kn(n) + Ka(n) \tag{B.40}$$

In folgender Tabelle ist das Ergebnis dieser Berechnung für die ersten vier Verfeinerungsstufen dargestellt.

Verfeinerungsstufe	#Knoten	#Dreiecke	#Kanten
0	92	180	270
1	362	720	1080
2	1442	2880	4320
3	5762	11520	17280
4	23042	46080	69120

Tabelle B.3: Anzahl der Knoten, Dreiecke und Kanten

Anhang C

Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Im 4. Kapitel wird eine von J. Baumgardner [3] vorgeschlagenen Methode zur Berechnung der partiellen Ableitungen im lokalen Koordinatensystem dargestellt. Im Falle, dass ein Knoten sechs Nachbarpunkte aufweist, wird dabei die Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet. In diesem Kapitel wird diese Methode auf das gestellte Problem angewandt und eine Abwandlung vorgestellt, die eine besonders effiziente numerische Berechnung dieser partiellen Ableitungen ermöglicht.
Der Ursprung $(0, 0)$ des lokalen Koordinatensystems ist derjenige Punkt, in dem die partiellen Ableitungen berechnet werden sollen. Im Ursprung und seinen Nachbarpunkten (ζ_i, η_i) $(i = 1, \ldots, 6)$ wird ein zweidimensionales Polynom $P \in \mathcal{P}^2$ so bestimmt, dass die Summe S aller Abweichungen von den bekannten Werte $q_i := q\,(\zeta_i, \eta_i)$ in diesen Punkten minimal ist.
Das gesuchte Polynom P erfüllt die folgenden Bedingungen:

$$P\,(\zeta, \eta) := c_0 + c_1\,\zeta + c_2\,\eta + c_3\,\zeta^2 + c_4\,\eta^2 + c_5\,\zeta\,\eta \tag{C.1}$$

$$P\,(0, 0) = c_0 \tag{C.2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta}(0, 0) = c_1 \tag{C.3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta}(0, 0) = c_2 \tag{C.4}$$

Da das Interesse in diesem Zusammenhang ausschließlich den Ableitungen gilt, wird der Koeffizient c_0 mit dem bekannten Wert $q_0 := q(0, 0)$ fest vorgegeben.

$$S := \sum_{i=1}^{6} \left(q_i - P\,(\zeta_i, \eta_i)\right)^2 \tag{C.5}$$

S ist minimal, d.h.

$$\frac{\partial S}{\partial c_j} = 0 \;\text{ für alle }\; j \in \{1, 2 \ldots, 5\} \tag{C.6}$$

Die letzte Bedingung führt zu fünf Gleichungen, die sich als lineares Gleichungsystem

$$\mathbf{A} \cdot \vec{c} = \vec{d} \tag{C.7}$$

darstellen lassen. Die Elemente a_{ij} der (5x5)-Matrix $\mathbf{A}$ berechnen sich folgendermaßen:

$$a_{ij} := \sum_{k=1}^{6} \frac{\partial P}{\partial c_i}(\zeta_k, \eta_k) \cdot \frac{\partial P}{\partial c_j}(\zeta_k, \eta_k) \qquad i, j \in \{1, 2, \ldots, 5\} \tag{C.8}$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist symmetrisch. Ihre Elemente a_{ij} hängen nur von der Lage der Nachbarpunkte zum Ursprung ab. Bei dem gewählten Gitter ist Matrix $\mathbf{A}$ auch regulär. $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_5)^T$ ist die gesuchte Lösung der Koeffizienten des Polynoms P mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Die rechte Seite $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_5)^T$ wird durch

$$d_j := \sum_{i=1}^{6} (q_i - q_0) \frac{\partial P}{\partial c_j}(\zeta_i, \eta_i) \qquad j \in \{1, 2, \ldots, 5\} \tag{C.9}$$

bestimmt. Vektor $\vec{d}$ lässt sich auch als Ergebnis einer Multiplikation einer (6x5)-Matrix $\mathbf{D}$ mit einem Vektor $\vec{q}$ auffassen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial c_1}(\zeta_1, \eta_1) & \frac{\partial P}{\partial c_1}(\zeta_2, \eta_2) & \cdots & \frac{\partial P}{\partial c_1}(\zeta_6, \eta_6) \\ \frac{\partial P}{\partial c_2}(\zeta_1, \eta_1) & \frac{\partial P}{\partial c_2}(\zeta_2, \eta_2) & \cdots & \frac{\partial P}{\partial c_2}(\zeta_6, \eta_6) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial c_5}(\zeta_1, \eta_1) & \frac{\partial P}{\partial c_5}(\zeta_2, \eta_2) & \cdots & \frac{\partial P}{\partial c_5}(\zeta_6, \eta_6) \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 - q_0 \\ q_2 - q_0 \\ q_3 - q_0 \\ q_4 - q_0 \\ q_5 - q_0 \\ q_6 - q_0 \end{pmatrix}}_{\vec{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix}}_{\vec{d}} \tag{C.10}$$

Zur Bestimmung der gesuchten Koeffizienten c_j wählt man folgenden Ansatz mit den unbekannten Koeffizienten β_{ij}:

$$c_j := \sum_{i=1}^{6} \beta_{ij} (q_i - q_0) \qquad j \in \{1, 2, \ldots, 5\} \tag{C.11}$$

Analog zum Vorgehen in Gleichung (C.10) erhält man auf diese Weise ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{B} \cdot \vec{q} = \vec{c}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{61} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{62} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{15} & \beta_{25} & \cdots & \beta_{65} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 - q_0 \\ q_2 - q_0 \\ q_3 - q_0 \\ q_4 - q_0 \\ q_5 - q_0 \\ q_6 - q_0 \end{pmatrix}}_{\vec{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}}_{\vec{c}} \tag{C.12}$$

Setzt man die beiden Bedingungen aus den Gleichungen (C.10) und (C.12) in Gleichung (C.7) ein, so ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\,\vec{q} = \mathbf{D}\,\vec{q} \tag{C.13}$$

Da $\vec{q}$ beliebig ist, Gleichung (C.13) für jeden Vektor $\vec{q}$ lösbar sein soll und wegen der Regularität von $\mathbf{A}$ sich die Matrix $\mathbf{B}$ mittels

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D} \tag{C.14}$$

bestimmen lässt, ist der in Gleichung (C.11) gewählte Ansatz sinnvoll. Aus Sicht der Numerik hat er den Vorteil, dass das lineare Gleichungssystem aus Gleichung (C.14) unabhängig von einer physikalischen Größe, die in diesem Kapitel stellvertretend mit $\vec{q}$ bezeichnet wird, ist und nur noch von der Lage der Nachbarpunkte zum Ursprung im gewählten Gitter

abhängt. Das bedeutet insbesondere, dass bei festem Gitter dieses Gleichungssystem für jeden Punkt nur einmal gelöst werden muss und nicht in jedem Iterationsschritt und für jede physikalische Größe noch einmal.
Zur Lösung von Gleichung (C.14) benutzt man die Inverse der Matrix $\mathbf{A}$. Dazu wird in **FEM*m*E** ein Algorithmus verwendet, den H.R. Schwarz [41][1] angegeben hat. Dieser Algorithmus berechnet $\mathbf{A}^{-1}$ durch einen modifizierten GAUSS[2]-Algorithmus mit Pivotstrategie. Nach der Multiplikation $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}$ erhält man die Matrix $\mathbf{B}$. In jeder Zeile enthält sie die Koeffizienten, die zur Berechnung einer der Koeffizienten c_j des Polynoms P benötigt werden. Mittels der bekannten Werte q_i in den Nachbarpunkten und den Bedingungen (C.3) und (C.4) werden somit über die ersten beiden Zeilen der Matrix die gesuchten partiellen Ableitungen nach ζ und η bestimmt.
Wenn auf diesem Weg nur die partiellen Ableitungen erster Ordnung berechnet werden sollen, dann müssen für jeden Punkt nur die zwölf Differentialkoeffizienten β_{11} bis β_{61} und β_{12} bis β_{62} gespeichert werden, was den Speicherbedarf vermindert.
Bei **FEM*m*E** hat die Bestimmung der partiellen Ableitungen nach dem Lösungsalgorithmus, der aus den Gleichungen (C.11) und (C.14) folgt, zu einem Gewinn an Rechenzeit von 40% gegenüber demjenigen geführt, der sich direkt aus Gleichung (C.7) ergibt.

[1]H.R. Schwarz[41], Seite 52
[2]Carl Friedrich Gauß, 1777-1855

Anhang D

Betrachtungen über Erhaltungsgrößen

Ausgehend vom Gleichungssystem (1.56)

$$\frac{d(\phi - H)}{dt} = -\,(\phi - H)\,\nabla_S\,\vec{v}_S \qquad \text{in } S \times I \tag{D.1}$$

$$\frac{d\vec{v}_S}{dt} = -\nabla_S\,\phi - f(\vec{e}_r \times \vec{v}_S) \qquad \text{in } S \times I \tag{D.2}$$

$$\phi(\vec{x},0) = \phi_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \tag{D.3}$$

$$H(\vec{x},t) = H_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \tag{D.4}$$

$$\vec{v}_S(\vec{x},0) = \vec{v}_o(\vec{x}) \qquad \text{in } S \tag{D.5}$$

stellt sich die Frage, ob es physikalische Größen gibt, die im kontinuierlichen System immer erhalten bleiben ? Die Antworten findet man im Artikel von L.L. Takacs [47].
In diesem Kapitel werden die Ergebnisse für die Kugeloberfläche S formuliert und der Zusammenhang mit dem ersten und zweiten Moment aus dem fünften Kapitel erläutert.
Zu Beginn sei darauf hingewiesen, dass auch für die tangentiellen Gradienten und Divergenzen folgende Aufspaltungen gelten:

$$\nabla_S\,(\psi_1 \cdot \psi_2) = \psi_1 \cdot \nabla_S\,\psi_2 \;+\; \psi_2 \cdot \nabla_S\,\psi_1 \tag{D.6}$$

$$\nabla_S\,(\psi \cdot \vec{q}\,) = \psi \cdot \nabla_S\,\vec{q} \;+\; \vec{q} \cdot \nabla_S\,\psi \tag{D.7}$$

Der Nachweis ergibt sich durch einfaches Nachrechnen.
Die totalzeitliche Ableitung wird analog zum ebenen Fall mittels der lokalzeitlichen Änderung und der Advektion bestimmt:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} \;+\; (\vec{v}_S \cdot \nabla_S\,)\vec{q} \tag{D.8}$$

Für eine skalare Größe ψ statt $\vec{q}$ gilt dies ebenfalls.

D.1 Masse

Als erste Erhaltungsgröße definiert L.L. Takacs die Masse M.

D.1 Definition: (Masse M)

Masse: $\qquad M : I \to \mathbb{R}$

$$M(t) := \int_S (\phi(t) - H)\; dx\,dy\,dz \tag{D.9}$$

Umformulierung von Gleichung (D.1) nach Schema (D.8) ergibt:

$$\frac{\partial(\phi - H)}{\partial t} = -\,(\phi - H)\,\nabla_S\,\vec{v}_S \;-\; \vec{v}_S \cdot \nabla_S\;(\phi - H) \;\overset{(D.7)}{=}\; -\nabla_S\left[(\phi - H)\,\vec{v}_S\right] \tag{D.10}$$

Für die lokalzeitliche Änderung der Masse ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S (\phi - H)\; dxdydz \;=\; \int\limits_S \frac{\partial(\phi - H)}{\partial t}\; dxdydz \\ &= -\int\limits_S \nabla_S \left[(\phi - H)\,\vec{v}_S\right]\; dxdydz \;=\; 0\end{aligned} \tag{D.11}$$

Man beachte, dass das Vertauschen von Integration und Differentiation in diesem Fall erlaubt ist und sich die letzte Gleichung aus einer Anwendung des GAUSSschen Satzes für die Kugel ergibt.
Nach Gleichung (1.58) gilt:

$$\widehat{\phi} + \overline{\phi} = \phi - H \tag{D.12}$$

und somit für die lokalzeitliche Ableitung

$$\frac{\partial(\widehat{\phi} + \overline{\phi})}{\partial t} = \frac{\partial(\phi - H)}{\partial t} \tag{D.13}$$

Da $\overline{\phi}$ invariant ist, gilt

$$\frac{\partial(\widehat{\phi} + \overline{\phi})}{\partial t} = \frac{\partial\widehat{\phi}}{\partial t} \tag{D.14}$$

Die Erhaltung des Verhältnisses der ersten Momente zu den Zeitpunkten t_n und t_0 (siehe Gleichung (5.4)) bedeutet aber nicht anderes, als dass

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \widehat{\phi}\; dxdydz = 0 \tag{D.15}$$

gilt. Mit den vorher gemachten Betrachtungen folgt daraus, dass RFM ein Maß für die Erhaltung der Masse ist.

D.2 Energie

Die zweite Erhaltungsgröße ist die Gesamtenergie E_T.

D.2 Definition: (Gesamtenergie E_T)
Gesamtenergie: $E_T : I \to \mathbb{R}$

$$E_T(t) := \int\limits_S (\phi(t) - H)\cdot \frac{1}{2}\,\vec{v}_S^{\,2}(t) \;+\; \frac{1}{2}\left(\phi^2(t) - H^2\right)\; dxdydz \tag{D.16}$$

Unter Berücksichtigung, dass sich H mit der Zeit nicht ändert, dass heisst

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{D.17}$$

lässt sich die lokalzeitliche Ableitung des Integranten aus Gleichung (D.16) bestimmen zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big((\phi - H)\cdot\frac{1}{2}\,\vec{v}_S^{\,2} \;+\; \frac{1}{2}\left(\phi^2 - H^2\right)\Big) &= (\phi - H)\,\vec{v}_s\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial t} \;+\; \frac{1}{2}\,\vec{v}_S^{\,2}\,\frac{\partial(\phi - H)}{\partial t} \;+\; \phi\frac{\partial\phi}{\partial t} \\ &= (\phi - H)\,\vec{v}_s\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}\,\vec{v}_S^{\,2} + \phi\right)\frac{\partial(\phi - H)}{\partial t} \qquad \text{mit (D.17).}\end{aligned} \tag{D.18}$$

Umformulierung von Gleichung (D.2) nach Schema (D.8) ergibt:

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} = -\,\nabla_S\,\phi \;-\; f(\vec{e}_r \times \vec{v}_S) \;-\; (\vec{v}_S \cdot \nabla_S\,)\vec{v}_S \tag{D.19}$$

Multiplikation mit $(\phi - H)\,\vec{v}_S$ unter Berücksichtigung der Identität

$$\vec{v}_S\,\nabla_S\left(\frac{1}{2}\vec{v}_S^{\,2}\right) = \vec{v}_S\,(\vec{v}_S\nabla_S\,)\,\vec{v}_S \tag{D.20}$$

ergibt:

$$\begin{aligned}(\phi - H)\,\vec{v}_s\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} &= -\,(\phi - H)\,\vec{v}_S\,\nabla_S\,\phi \;-\; (\phi - H)\,\vec{v}_S\,(\vec{v}_S \cdot \nabla_S\,)\vec{v}_S \\ &= -\,(\phi - H)\,\vec{v}_S\,\nabla_S\,\phi \;-\; (\phi - H)\,\vec{v}_S\,\nabla_S\left(\frac{1}{2}\vec{v}_S^{\,2}\right) \\ &= -\,(\phi - H)\,\vec{v}_S\nabla_S\left(\phi + \frac{1}{2}\vec{v}_S^{\,2}\right)\end{aligned} \tag{D.21}$$

Multiplikation von Gleichung (D.10) mit $\left(\phi + \frac{1}{2}\,\vec{v}_S^{\,2}\right)$ ergibt:

$$\left(\phi \,+\, \frac{1}{2}\vec{v}_S^{\,2}\right)\frac{\partial(\phi - H)}{\partial t} = -\left(\phi \,+\, \frac{1}{2}\,\vec{v}_S^{\,2}\right)\nabla_S\left[(\phi - H)\,\vec{v}_S\right] \tag{D.22}$$

Addition der letzten beiden Gleichungen führt zu:

$$\begin{aligned}&-\left(\phi \,+\, \frac{1}{2}\,\vec{v}_S^{\,2}\right)\nabla_S\left[(\phi - H)\,\vec{v}_S\right] \;-\; (\phi - H)\,\vec{v}_S\,\nabla_S\left(\phi + \frac{1}{2}\vec{v}_S^{\,2}\right) \\ &\quad = \;-\nabla_S\left[(\phi - H)\,\vec{v}_S\left(\phi \,+\, \frac{1}{2}\,\vec{v}_S^{\,2}\right)\right]\end{aligned} \tag{D.23}$$

Insgesamt ergibt sich somit für die lokalzeitliche Änderung der Gesamtenergie:

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} \;=\; -\int\limits_S \nabla_S\left[(\phi - H)\,\vec{v}_S\left(\phi \,+\, \frac{1}{2}\,\vec{v}_S^{\,2}\right)\right]\,dxdydz \;=\; 0 \tag{D.24}$$

Ausgehend von der Gesamtenergie hat L.L. Takacs drei weitere Energieformen eingeführt:

D.3 Definition: (kinetische Energie E_K)
kinetische Energie: $E_K : I \to \mathbb{R}$

$$E_K(t) := \int\limits_S (\phi(t) - H)\cdot\frac{1}{2}\,\vec{v}_S^{\,2}(t)\;dxdydz \tag{D.25}$$

D.4 Definition: (potentielle Energie E_P)
potentielle Energie: $E_P : I \to \mathbb{R}$

$$E_P(t) := \int\limits_S \frac{1}{2}\left(\phi^2(t) - H^2\right)\;dxdydz \tag{D.26}$$

D.5 Definition: (verfügbare potentielle Energie E_{APE})
verfügbare potentielle Energie: $E_{APE} : I \to \mathbb{R}$

$$E_{APE}(t) := \int\limits_S \frac{1}{2}\widehat{\phi}^{\,2}(t)\;dxdydz \tag{D.27}$$

Zwischen diesen Energieformen bestehen folgende Zusammenhänge:

$$E_T = E_K \; + \; E_P \tag{D.28}$$

$$-\frac{\partial E_K}{\partial t} = \frac{\partial E_P}{\partial t} \qquad \text{wegen (D.24)} \tag{D.29}$$

$$\frac{\partial E_{APE}}{\partial t} = \frac{\partial E_P}{\partial t} \qquad \text{wegen (1.58) und (D.17)} \tag{D.30}$$

Das Verhältnis der zweiten Momente (siehe Gleichung (5.5)) ist nach Gleichung (D.27) ein Maß für die Erhaltung der verfügbaren potentiellen und wegen Gleichung (D.30) damit auch der potentiellen Energie. In allen Fällen, in denen diese Energiearten sich nicht ändern, ist RSM indirekt wegen Gleichung (D.29) auch ein Maß für die Erhaltung der kinetischen und der Gesamtenergie. Von den betrachteten Testfällen trifft das für alle außer dem fünften Testfall zu.

Literaturverzeichnis

[1] Bates, J.R., F.H.M. Semazzi, R.W. Higgins and S.R.M. Barros, 1990: Integration of the Shallow Water Equation on the Sphere Using a Vector Semi-Lagrangian Scheme with a Multigrid Solver, *Mon.Wea.Rev.*, **118,** 1615-1627

[2] Baumgardner, J.R. and P.O. Frederickson, 1985: Icosahedral Discretization of the Two-Sphere, *SIAM J.Numer.Anal.*, **22(6),** 1107-1115

[3] Baumgardner, J.R., 1995: A Semi-Implicit Semi-Lagrange Method for the Shallow Water Equations on a Triangular Mesh, *Vortrag am 17.10. bei GMD-SCAI* [1], Sankt Augustin

[4] Behrens, J., 1995: Adaptive Semi-Lagrange-Finite-Elemente-Methode zur Lösung der Flachwassergleichungen, *Dissertation*, FBMI[2], Bremen

[5] Braess, D., 1992: Finite Elemente, Springer, Berlin

[6] Casirer, K., R. Hess, C. Jablonowski and W. Joppich, 1996: The Shallow Water Test Cases for a Global Model with Documentation of the Results, *Arbeitspapiere der GMD*, **999**, GMD-SCAI, Schloss Birlinghoven, Sankt Augustin

[7] Courant, R., K.O. Friedrichs und H. Lewy, 1928: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, **100,** 32-74

[8] Cullen, M.J.P., 1974: Integration of the Primitive Equations on a Sphere Using the Finite Element Method, *Quart.J.R.Met.Soc.*, **100,** 555-562

[9] Dutton, J.A., 1976: The Ceaseless Wind, McGraw-Hill Book Comp., New York

[10] Dziuk, G., 1988: Finite Elements for the Beltrami-Operator on Arbitrary Surfaces, in: Partial Differential Equations and Calculus of Variations (S. Hildebrandt and R. Leis, eds.), *Lecture Notes in Mathematics,* Springer, Berlin

[11] ECMWF[3], 1988: Techniques for Horizontal Discretization in Numerical Weather Prediction Models, 1987/11/2-4, *Workshop Proceedings*, ECMWF, Reading

[12] Geiben, M., 1990: Lösen der rotationssymmetrischen Navier-Stokes-Gleichungen mit dem Transport-Diffusions-Algorithmus, *Diplomarbeit*, IAM[4], Bonn

[13] Gilbarg, D. and N.S. Trudinger, 1983: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, Berlin

[14] Gill, A.E., 1982: Atmosphere-Ocean Dynamics, *Int.Geophy.Ser.*, **30**, Academic Press, San Diego

---

[1] GMD - Forschungszentrum Informationstechnik, Institut für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen
[2] Fachbereich Mathematik und Informatik an der Universität Bremen
[3] European Center for Medium-Range Weather Forecast
[4] Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn

[15] Giraldo, F.X., 1997: Lagrange-Galerkin Methods on Spherical Geodesic Grids, *J.Comp.Phys.*, **136**, 197-213

[16] Green, G., 1828: An Essay on the Applications of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism, Nottingham

[17] Hackbusch, W., 1986: Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen, Teubner, Stuttgart

[18] Haurwitz, B., 1940: The Motion of Atmospheric Disturbances on a Spherical Earth, *J.Mar.Res.*, **3**, 254-267

[19] Heinze, Th., 1996: Vergleich der Flachwasserversion des GME mit dem Modell **FEM*m*E** der Universität Bonn, *Werkvertrag mit DWD*[5]*- Abteilung Forschung und Entwicklung*, Sankt Augustin [6]

[20] Hense, A., 1992: Theoretische Meteorologie 2.Teil, *Skript zur Vorlesung*, MIUB[7], Bonn

[21] Hermann, U. und L. Götze, 1996: Die neue deutsche Rechtschreibung, Bertelsmann, Gütersloh

[22] Hirsch, Ch., 1988: Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization, John Wiley & Sons, Chichester

[23] Holton, J.R., 1992: An Introduction to Dynamic Meteorology, $3^{\underline{\text{rd}}}$ Ed., *Int.Geophy.Ser.*, **48**, Academic Press, San Diego

[24] Hsu, Y.-J.G. and A. Arakawa, 1990: Numerical Modeling of the Atmosphere with an Isentropic Vertical Coordinate, *Mon.Wea.Rev.*, **118**, 1933-1959

[25] Klaßen, J., 1990: Entwicklung eines berandeten Flachwassermodells zur Instabilitätsanalyse barotroper Wirbel, *Diplomarbeit*, MIUB, Bonn

[26] Kroto, H.W., J.R. Heath, S.C. O'Brien, R.F. Curl, R.E. Smalley, 1985: C_{60}: Buckminsterfullerene, *Nature*, **318**, 162 ff.

[27] Majewski, D., 1996: Documentation of the New Global Model (GME) of the DWD, *Programmdokumentation*, DWD - Abteilung Forschung und Entwicklung, Offenbach

[28] Majewski, D., 1996: Was sie schon immer über Semi-Lagrange-Verfahren wissen wollten, aber nie zu fragen wagten ? *persönliche Mitteilung*

[29] McDonald, A., 1984: Accuracy of Multiply-Upstream, Semi-Lagrangian Advective Schemes, *Mon.Wea.Rev.*, **112**, 1267-1275

[30] McDonald, A. and J.R. Bates, 1987: Improving the Estimate of the Departure Point Position in a Two-Time-Level Semi-Lagrangian and Semi-Implicit Scheme, *Mon.Wea.Rev.*, **115**, 737-739

[31] Pedlosky, J., 1987: Geophysical Fluid Dynamics, $2^{\underline{\text{nd}}}$ Ed., Springer, New York

[32] Phillips, N.A., 1959: Numerical Integration of the Primitive Equations on a Hemisphere, *Mon.Wea.Rev.*, **87**, 333-345

[33] Priestley, A., 1992: The Taylor-Galerkin Method for the Shallow-Water Equations on the Sphere, *Mon.Wea.Rev.*, **120**, 3003-3015

[5] Deutscher Wetterdienst
[6] kann über den Autor bezogen werden
[7] Meteorologisches Institut der Universität Bonn

[34] Priestley, A., 1993: A Quasi-Conservative Version of the Semi-Lagrangian Advection Scheme, *Mon.Wea.Rev.*, **121**, 621-629

[35] Priestley, A., 1994: The Lagrange-Galerkin Method, *Workshop on Aspects of Parallelization Regarding Finite Elements and Ocean Modelling*, AWI[8], Report **52**, Bremerhaven

[36] Prohl, P., 1995: Barotropes Globalmodell in einem Dreiecksgitter, *Programmdokumentation*, DWD - Abteilung Forschung und Entwicklung, Offenbach

[37] Ritchie, H., 1987: Semi-Lagrangian Advection on a Gaussian Grid, *Mon.Wea.Rev.*, **115**, 608-619

[38] Robert, A., 1981: A Stable Numerical Integration Scheme for the Primitive Meteorological Equations, *Atmos.Ocean*, **19**, 35-46

[39] Robert, A., 1982: A Semi-Lagrangian and Semi-Implicit Numerical Integration Scheme for the Primitive Meteorological Equations, *J.Meteor.Soc.Japan*, **60**, 319-324

[40] Rossby, C.-G., 1940: Planetary Flow Patterns in the Atmosphere, *Quart.J.R.Met.Soc.*, **66**, 68-87

[41] Schwarz, H.R., 1988: Numerische Mathematik, 2.Auflage, Teubner, Stuttgart

[42] Schwarz, H.R., 1991: Methode der finiten Elemente, 3.Auflage, Teubner, Stuttgart

[43] Siebert, K., 1990: Lösen der Eulergleichung auf der Sphäre mit finiten Elementen, *Diplomarbeit*, IAM, Bonn

[44] Staniforth, A. and J. Côté, 1991: Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models - a Review, *Mon.Wea.Rev.*, **119**, 2206-2223

[45] Staniforth, A. and C. Temperton, 1986: Semi-Implicit Semi-Lagrangian Integration Schemes for a Barotropic Finite-Element Regional Model, *Mon.Wea.Rev.*, **114**, 2078-2090

[46] Stoker, J.J., 1957: Water Waves, *Pure&Appl.Math.*, **IV**, Interscience Publishers Inc., New York

[47] Takacs, L.L., 1988: Effects of Using a Posteriori Methods for the Conservation of Integral Invariants, *Mon.Wea.Rev.*, **116**, 525-545

[48] Temperton, C. and A. Staniforth, 1987: An Efficient Two-Time-Level Semi-Lagrangian Semi-Implicit Integration Scheme, *Quart.J.R.Met.Soc.*, **113,** 1025-1039

[49] Washington, W.M. and C.L. Parkinson, 1986: An Introduction to Three-Dimensional Climate Modeling, Oxford University Press, Oxford

[50] Weiß, P., 1993: Die Semi-Lagrange-Methode in einem quasigeostrophischen, barotropen, globalen Modell, *Diplomarbeit*, MIUB, Bonn

[51] Wessel, P., and W. H. F. Smith, 1991: Free Software helps Map and Display Data, *EOS Trans.AGU*, **72**, 441, 445-446.

[52] Wessel, P., and W. H. F. Smith, 1995: New Version of the Generic Mapping Tools Released, *EOS Trans.AGU*, **76**, 329

[53] Wiin-Nielsen, A., 1959: On the Application of Trajectory Methods in Numerical Forecasting, *Tellus*, **11**, 180-196

[8] Alfred-Wegener-Institut

[54] Williamson, D.L., J.B. Drake, J.J. Hack, R. Jakob and P.S. Swarztrauber, 1992: A Standard Test Set for Numerical Approximations to the Shallow Water Equations in Spherical Geometry, *J.Comp.Phys.*, **102**, 211-224

Danksagung

Die erste Konzeption dieser Arbeit entstammt einer Diskussion mit Andreas Hense am Meteorologischen Institut der Universität Bonn. Im Laufe der Anfertigung hat er sich intensiv um den Fortgang gekümmert und mir immer wieder wertvolle Hinweise gegeben, die mir die meteorologischen und physikalischen Zusammenhänge verständlich gemacht haben. Dafür bedanke ich mich an dieser Stelle.
Darüberhinaus danke ich allen anderen am Meteorologischen Institut, an dem ich eine sehr angenehme Arbeitsatmosphäre vorgefunden habe. Mein Dank gilt allen Teilnehmern des Klimaseminars für ihre vielen Anregungen. Stellvertretend seien hier Judith Berner, die einen Teil der Schaubilder dieser Arbeit erzeugt hat, Ulrich Römer, der mir seine Klassendefinitionen der Objekte „Vektor" und „Matrix" überlassen hat, sowie Kai Born, Petra Friederichs, Martin Göber und Christiane Jablonowski für rege Diskussionen genannt.
Die Methoden, die bei der Lösung der HELMHOLTZ-Gleichung auf der Kugel verwendet werden, beruhen zum großen Teil auf Vorarbeiten einer Arbeitsgruppe, die sich inzwischen am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Freiburg zusammengefunden hat, namentlich Gerhard Dziuk, Dietmar Kröner, Kunibert Siebert und Monika Wierse, geborene Geiben.
Bei der erfolgreichen Umsetzung des **FEM*m*E**-Konzeptes halfen mir wesentliche Anregungen von André Robert, Andrew Staniforth, Harold Ritchie und Jean Côté vom AES in Dorval (Kanada), Philip Rasch vom NCAR in Boulder, John Baumgardner vom LANL in Los Alamos, Detlev Majewski vom DWD in Offenbach und Jörn Behrens vom AWI in Bremerhaven.
Ohne die Unterstützung mit leistungsfähigen Rechnern am Institut für Wissenschaftliches Rechnen der GMD in Sankt Augustin wäre das Modell nicht in dieser Form zustande gekommen. Hier möchte ich mich bei den Mitarbeitern des METEO-Projektes bedanken, insbesondere bei Reinhold Hess, der mir sein Programm zur Interpolation von einem unregelmäßigem auf ein regelmäßiges Gradgitter zur Verfügung stellte, und Wolfgang Joppich für die kritische Durchsicht früherer Versionen dieses Textes.
In selber Funktion gilt mein Dank auch Katja Horneffer, die mich wieder mit der grammatikalischen Funktion von Genitiv und Dativ vertraut gemacht hat.
Michael Griebel vom Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn danke ich für die Übernahme des Referates.
Ich bedanke mich auch bei Stefanie Sauerland, Sabine Trinkaus und Anja Pfennig, die mich wiederholt davon überzeugen konnten, dass das Leben nicht nur aus Studieren besteht, und mich auch in Zeiten des Stillstands darin bestärkt haben, den eingeschlagenen Weg weiter zu gehen. Für die Unterstützung danke ich meinen Mitbewohnern Roland Jungblut, Joachim Lauterjung und Ronald von Rekowski. In besonderer Erinnerung werden mir ihre Kochkünste bleiben. Roland danke ich darüberhinaus für den Epilog, der in einem Teil der Auflage enthalten ist.
Zum Schluss möchte ich ganz besonders meinen Eltern und Geschwistern danken, denn ohne das Vertrauen, das sie mir geschenkt haben, und ihre Unterstützung in allen Lebenslagen wäre der erfolgreiche Abschluss dieser Diplomarbeit nicht möglich gewesen.