DIPLOMARBEIT

# Numerische Simulation von Sprung-Diffusions-Prozessen zur Optionspreisbewertung

Angefertigt am
Institut für Numerische Simulation

Vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Juni 2006

Von
Melanie Reiferscheid
Aus
Bonn

# Inhaltsverzeichnis

# Bezeichnungen

## Finanzmathematische Bezeichnungen

| | |
|---|---|
| $V(S,t)$ | Wert der Option |
| $V^*(S,t)$ | Payoff-Funktion |
| $S(t)$ | Kurs |
| $t$ | Zeit |
| $T$ | Verfallsdatum der Option |
| $K$ | Ausübungspreis |
| $\sigma$ | Volatilität |
| $\mu$ | Drift |
| $r$ | Risikofreier Zinssatz |
| $S_T$ | Kurs zum Zeitpunkt $T$ |
| $V_C(S,t)$ | Wert einer Call-Option |
| $V_P(S,t)$ | Wert einer Put-Option |
| $\Pi$, $\Pi_C$, $\Pi_P$ | Werte eines Portfolios |
| $\lambda$ | Sprungintensität |
| $\tau = T - t$ | Restlaufzeit einer Option |
| $B(t)$ | Wert eines Wertpapierkorbs |
| $d_1, d_2$ | Parameter der Black-Scholes-Formel |
| $BS_C()$ | Black-Scholes-Formel für eine Call-Option |
| $d_{1,n}, d_{2,n}$ | Parameter der geschlossenen Lösung des Merton-Modells |
| $r_n$ | Zinsrate der Lösungsformel des Merton-Modells |
| $\nu_n^2$ | Varianz der Lösungsformel des Merton-Modells |
| $\lambda'$ | Sprungintensität der Lösungsformel des Merton-Modells |
| $S(t_-)$ | Wert eines Aktienkurses vor einem Sprung |

## Allgemeine Mathematische Bezeichnungen

| | |
|---|---|
| $W(t)$ | Wiener Prozess |
| $\Omega$ | Wahrscheinlichkeitsraum |
| $\mathbb{P}$ | Wahrscheinlichkeitsmaß |
| $\mathcal{F}$ | Filtration |
| $X_t$ | Stochastischer Prozess |
| $P()$ | Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis |
| $f^+ := \max\{f, 0\}$ | Maximumsfunktion |
| $N(x)$ | Kumulative Normalverteilung |
| $\mathrm{E}[\cdot]$ | Erwartungswert |
| $\mathrm{var}[\cdot]$ | Varianz |

| | |
|---|---|
| $\mu$ | Erwartungswert einer Verteilungsfunktion |
| $\sigma^2$ | Varianz einer Verteilungsfunktion |
| $\mu_J$ | Erwartungswert einer Sprungverteilungsfunktion |
| $\sigma_J^2$ | Varianz einer Sprungverteilungsfunktion |
| $\phi$ | Charakteristische Funktion einer Verteilung |
| $Z_i$ | Zufallszahlen |
| $\vartheta(u)$ | Momentengenerierende Funktion |
| $\psi(u)$ | Charakteristischer Exponent |
| $(\gamma, \sigma^2, \nu(dx))$ | Lévy-Triplet |
| $\nu(dx)$ | Lévy-Maß |
| $\text{Gamma}(a, b)$ | Gamma-Verteilung |
| $\text{VG}(\sigma, \nu, \theta)$ | Varianz-Gamma-Verteilung |
| $\text{Poisson}(\lambda)$ | Poisson-Verteilung |
| $\text{CGMY}(C, G, M, Y)$ | CGMY-Verteilung |
| $g(\cdot), f(\cdot)$ | Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen |
| $\Gamma()$ | Gammafunktion |
| $q(t)$ | Poisson-Prozess |
| $E^*$ | Erwartungswert unter äquivalentem Martingalmaß |
| $J(t)$ | Zähl-Prozess |
| $\kappa$ | Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion |
| $(Y-1)$ | Prozentuale Änderung eines Aktienkurses |
| $LN()$ | Lognormalverteilung |
| $\alpha$ | Erwarteter Ertrag eines Aktienkurses |
| $\text{E}_{0,X_n}$ | Erwartungswert bezüglich der Verteilung der $X_n$ zum Zeitpunkt 0 |
| $Mk$ | Anzahl der Zeitdiskretisierungspunkte |
| $N$ | Anzahl der Ortsdiskretisierungspunkte |
| $M$ | Anzahl der Integraldiskretisierungspunkte |
| $\Delta x, \Delta y$ | Maschenweiten der Ortsdiskretisierungspunkte |
| $\Delta\tau$ | Maschenweite der Zeitdiskretisierung |
| $\Omega_R$ | Diskretisierungsgebiet der eindimensionalen PIDE |
| $\Omega_{R_d}$ | Diskretisierungsgebiet der d-dimensionalen PIDE |
| $\Omega_I$ | Diskretisierungsgebiet des Integrals |
| $I_\tau$ | Zeitintervall |
| $\Sigma$ | Korrelationsmatrix |
| $\rho$ | Korrelationskoeffizient |
| $e_{rel}$ | Relativer Fehler |
| $V_R$ | Optionspreis der Referenzlösung |
| $V_E$ | Optionspreis der Erwartungswertentwicklung |
| $V_{MC}$ | Optionspreis des Monte-Carlo-Verfahrens |
| $V_{PIDE}$ | Optionspreis des PIDE |

# Kapitel 1

# Einleitung

Viele Problemstellungen in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften lassen sich durch mathematische Modelle beschreiben und z.B. als eine Differentialgleichung oder Integro-Differentialgleichung formulieren. Nur in seltenen Fällen besitzen diese Probleme eine analytische Lösung. Somit müssen numerische Verfahren zur Approximation der Lösung angewendet werden. Zwei Kernpunkte des wissenschaftlichen Rechnens sind die Diskretisierung des mathematischen Modells mittels Verfahren wie z.B. Finite Differenzen oder Finite Elemente sowie die schnelle Lösung der entstehenden Gleichungssysteme.

Wir werden uns in dieser Arbeit dem Bereich der Finanzmathematik zuwenden und uns dort auf die Optionsbewertung konzentrieren. Die Finanzmathematik beschäftigt sich mit Themen aus dem Bereich von Finanzdienstleistern, wie etwa Banken und Versicherungen. Ein Teilgebiet der Finanzmathematik ist die Bewertung verschiedener Finanzprodukte. Ziel dieser Bewertung ist es, den fairen Preis eines (derivativen) Finanzproduktes zu ermitteln. Derivative Finanzprodukte sind solche, deren Zahlungen von anderen Finanzprodukten abhängen. Ein Beispiel für derivative Finanzprodukte sind Optionen. Sie bieten dem Käufer das Recht, den zugrunde liegenden Basiswert zu einem festen, vor Beginn der Optionslaufzeit bestimmten, Ausübungspreis zu kaufen (Call-Option) oder zu verkaufen (Put-Option). Grundlegend für die Bewertung von Optionen ist die Wahl eines geeigneten stochastischen Modells der zeitlichen Entwicklung des zugrunde liegenden Basiswertes. Erst wenn das Kursmodell eine gute Approximation der Kursbewegungen in der Realität ist, ist es auch möglich, einen fairen Preis der Option zu berechnen.
Lévy-Prozesse bilden im Allgemeinen die Basis der Kursmodellierung. Abhängig von der Wahl des zugrunde liegenden Lévy-Prozesses entstehen verschiedene Modelle, die zur Kursmodellierung eingesetzt werden können. So bildet beispielsweise die Brownsche Bewegung die Grundlage des bahnbrechenden Modells der Optionspreisbewertung von F. Black, M. Scholes und R. Merton, das 1973 entwickelt wurde. Hierbei sind die Kursinkremente normalverteilt.
Empirische Untersuchungen haben jedoch ergeben, dass normalverteilte Zuwächse die Bewegungen eines Aktienmarktes nicht gut approximieren. Bei einer Analyse der Marktbewegungen fällt auf, dass wesentlich mehr Bewegungen existieren, die einen Abfall des Kurses bewirken als solche, die eine Steigerung eines Kurses bedeuten. Dies führt zu der Forderung, dass eine die Marktbewegungen wiederspiegelnde Verteilungsfunktion nicht symmetrisch sein sollte. Des weiteren werden unendlich viele kleine Bewegungen beobachtet, die sich in einer Singularität der Verteilungsfunktion äußern müssten, die bei einer Normalverteilung jedoch nicht gegeben ist. Ein zusätzliches Problem, das bei der Verwendung von normalverteilten Bewegungen entsteht, ist, dass auch große Änderungen im Wert des Kurses nicht realistisch genug dargestellt werden können. Dies ist auf den schnellen Abfall der Normalverteilung zu beiden Seiten zurückzuführen. Eine weitere Eigenschaft der Brownschen Bewegung ist, dass der modellierte Kursverlauf stetig ist. In der Realität ist das nicht wiederzuerkennen, denn plötzliche und unerwartete Ereignisse rufen Sprünge im

Kursverlauf hervor, die nicht durch eine Normalverteilung zu modellieren sind.
Eine Alternative der Kursmodellierung, in der die Nachteile der Brownschen Bewegung nicht weiter auftreten, ist die Verwendung von Sprung-Diffusions-Modellen. Diese beruhen auf zwei Komponenten, dem Sprung- und dem Diffusionsteil. Die Diffusionskomponente besteht aus einer normalen Brownschen Bewegung. Die zweite Komponente, der Sprung-Teil, besteht aus einer Impuls- und einer Verteilungsfunktion. Die Impulsfunktion gibt den Anstoß für eine Kursänderung, deren Größe durch die Verteilungsfunktion bestimmt wird. Der Sprung-Teil ermöglicht es, plötzliche und unerwartete Kursänderungen zu modellieren. Ein besonders bekanntes Sprung-Diffusions-Modell zur Bewertung Europäischer Optionen wurde 1976 von R. Merton vorgestellt. In [Mer76] wird gezeigt, dass der faire Preis einer Option eine partielle Integro-Differentialgleichung (PIDE) erfüllt. Diese umfasst neben einem Differential-Operator zweiter Ordnung auch einen nicht-lokalen Integralterm, der spezielle Behandlung, sowohl theoretisch als auch numerisch, benötigt. Nur unter speziellen Annahmen einer Sprung-Verteilung ist es möglich, eine geschlossene Lösung zur Berechnung eines Optionspreises zu verwenden. Werden andere Sprung-Verteilungsfunktionen betrachtet, so sind keine analytischen Lösungen bekannt und es müssen numerische Verfahren zur Optionspreisbewertung herangezogen werden.

Zur numerischen Lösung von Integro-Differentialgleichungen werden in der Regel Finite Differenzen oder Finite Elemente Methoden verwendet. Wird dann ein $\theta$-Schema mit $\theta > 0$ für die Zeitdiskretisierung eingesetzt, muss in jedem Zeitschritt ein Gleichungssystem gelöst werden.
Eine Galerkin-Diskretisierung des Integral-Operators führt dabei zu einer vollbesetzten Matrix. Der Aufwand für einen Zeitschritt beträgt bei Einsatz eines iterativen Lösers mindestens $O(N^2)$, für einen direkten Löser $O(N^3)$. T. von Petersdorff und C. Schwab verwenden in [PS01] eine Wavelet-Basis-Matrix-Kompression zur Reduktion der Komplexität. Die Kernidee ist die Darstellung der Galerkin-Approximation in einer Wavelet-Basis. Zur Lösung wird als iterativer Löser ein GMRES-Verfahren benutzt. Eine Vorkonditionierung der Matrix geschieht ebenfalls mittels Wavelets.
Von R. Cont und E. Voltchkova wird in [CV05] eine numerische Lösung vorgestellt, die auf einem Operator-Splitting in einen lokalen und einen nicht-lokalen Teil beruht. Der nicht-lokale Teil wird explizit mit Hilfe von Kollokationsverfahren behandelt, der lokale Teil wird implizit mit Finiten Differenzen diskretisiert. Die Lösung erfolgt implizit in der Zeit. L. Andersen und J. Andreasen verwenden in [AA00] zur Lösung des Problems ebenfalls ein Operator-Splitting. Sie behandeln den Integral-Term auch explizit, verwenden jedoch eine Crank-Nicolson Diskretisierung in der Zeit.

Die explizite Behandlung des Integral-Terms bietet einen entscheidenden Vorteil: Das Problem reduziert sich von einer Integro-Differential-Gleichung auf eine Differential-Gleichung für jeden Zeitschritt, denn in dieser Form muss das Integral nur ausgewertet, nicht jedoch gelöst werden.
Die Matrix des entstehenden Problems ist folglich nur noch dünn besetzt und hat eine Bandstruktur. Somit ist es möglich das Gleichungssystem direkt mit einem Bandlöser in $O(N)$ Operationen zu lösen. In [CV05] wird bewiesen, dass die explizite Behandlung des Integrals ausreichend ist, um eine Konvergenz des Verfahrens zu erreichen. Die Stabilität der Crank-Nicolson-Diskretisierung für die behandelte PIDE unter moderaten Einschränkungen wird in [dFV04] gezeigt.
Aus diesem Grund folgen wir [CV05] und [AA00] und verwenden eine Finite-Differenzen Diskretisierung für den Differential-Teil, behandeln den Integral-Term explizit und lösen das Gleichungssystem in jedem Schritt des Crank-Nikolson-Verfahrens mittels eines direk-

ten Lösers für Bandmatrizen.
Da keine analytische Lösung für den nicht lokalen Integral-Teil bekannt ist, muss auch dieser mittels numerischer Methoden berechnet werden. Dazu bieten sich vor allem verschiedene Kollokationsverfahren an, da es bei einer expliziten Behandlung des Integrals nur notwendig ist, das Integral auszuwerten, nicht jedoch zu lösen. Der Nachteil der expliziten Berechnung ist jedoch der erhebliche Aufwand, da das Integral für jeden Ortsdiskretisierungspunkt berechnet werden muss.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein robustes Verfahren zur Lösung der PIDE zu erhalten. Dabei bezeichnet die Robustheit die Eigenschaft des Verfahrens für jegliche Wahl der Parameter und nicht nur für ausgewählte zu konvergieren. Diese Untersuchung der Robustheit wird in Form einer Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Dabei wird beobachtet, wie sich die Änderung der Modellparameter (Zins $r$, Laufzeit $T$ der Option, Volatilität $\sigma$ und Ausübungspreis $K$) auf die Konvergenz auswirken.
Wir werden feststellen, dass sich das Verfahren als robust gegenüber dem Zins $r$ und der Laufzeit $T$ herausstellt. Jedoch beobachten wir zunächst eine Reduktion der Konvergenzrate für besonders kleine Volatilitäten und sehr große Ausübungspreise. Diese Verschlechterung kann jedoch durch eine stabile Diskretisierung und eine Verschiebung des Diskretisierungsgebietes behoben werden. Dies werden wir im weiteren Verlauf der Arbeit zeigen.

Die numerische Lösung der PIDE ermöglicht es, verschiedene Sprung-Verteilungsfunktionen zu betrachten. Zum einen untersuchen wir die Lognormalverteilung, die erstmals 1976 von Merton vorgeschlagen wurde und zu der eine geschlossene Lösung angegeben werden kann [Mer76]. Zum anderen werden die Varianz-Gamma- und die CGMY-Verteilung betrachtet [MCC98], [CGMY02], [GMY99]. Die CGMY-Verteilung zeichnet sich durch ihre große Flexibilität aus, denn abhängig von der Wahl der Parameter können unterschiedliche Eigenschaften der Verteilungsfunktion realisiert werden. So besteht die Möglichkeit, durch Wahl der Parameter eine Varianz-Gamma-Verteilung oder eine Verteilung mit endlicher oder unendlicher Aktivität und Variation darzustellen. Eine besonders realistische Widerspiegelung der Marktdaten wird der CGMY-Verteilung mit unendlicher Variation zugeschrieben. Die Eigenschaft der unendlichen Variation schlägt sich jedoch in einer Singularität der Verteilungsfunktion nieder, wodurch die numerische Integration erschwert wird und besondere Behandlung erfordert.
Kleine Bewegungen in Aktienkursen lassen sich jedoch durch eine Brownsche Bewegung modellieren. Aus diesem Grund verfolgen wir den Ansatz von [CV05], in dem zur Berechnung der CGMY-Verteilung mit unendlicher Aktivität die Singularität abgeschnitten und durch eine Verstärkung der Brownschen Bewegung ausgeglichen wird.
Weiterhin werden wir verschiedene Kollokationsverfahren zur Auswertung des Integrals vorstellen und hinsichtlich ihrer Eignung zur Berechnung der unterschiedlichen Verteilungsfunktionen untersuchen.

Neben dem Verfahren zur Lösung der PIDE werden in dieser Arbeit auch andere Verfahren zur Bewertung Europäischer Optionen beschrieben und zu Vergleichszwecken eingesetzt. So werden zum einen die geschlossenen Lösungen, die für zwei bestimmte Sprungverteilungsfunktionen erhalten werden können, untersucht. Eine analytische Lösung kann für den Fall des „plötzlichen Ruins“ erhalten werden. Der plötzliche Ruin ist dadurch definiert, dass im Fall eines Sprungs während der Laufzeit der Option der Kurs auf den Wert 0 fällt. In diesem Fall ist die geschlossene Lösung durch eine Anwendung der Black-Scholes-Formel mit modifiziertem Zinsparameter gegeben. Die zweite analytische Lösung kann angegeben werden, wenn die Sprungverteilungsfunktion eine Lognormalverteilung ist. Die geschlos-

sene Lösung ist dann eine unendliche Summe, deren Summanden durch eine modifizierte Black-Scholes-Formel gegeben sind. Zusätzlich werden die Summanden mit einer Poisson-Verteilung gewichtet.
Weiter wird die Form der Erwartungswertentwicklung zur Bestimmung des fairen Optionspreises dargestellt und untersucht. In der unendlichen Summe der Erwartungswertentwicklung besteht jeder Summand aus der Berechnung eines zukünftigen Kurswertes, dessen Optionspreis dann wiederum durch die Black-Scholes-Formel bestimmt wird. Auch hier wird dieser berechnete Wert mit einer Poisson-Verteilung gewichtet. Zur Bestimmung des zukünftigen Kurspreises wird in jedem Summanden ein Monte-Carlo-Verfahren verwendet.
Eine andere Möglichkeit zur Bewertung Europäischer Optionen ist die direkte Simulation des Aktienkursverlaufs mittels Monte-Carlo-Verfahren. Hierbei werden die Kursbewegungen für die Laufzeit der Option explizit simuliert. Durch eine Wiederholung dieser Simulation und der Bestimmung eines Mittelwertes für den Kurspreis am Ende der Laufzeit kann schliesslich ebenfalls der Optionspreis bestimmt werden. Ein Problem, das bei der Verwendung des Monte-Carlo-Verfahrens auftritt, ist die Ziehung von Zufallszahlen, die einer speziellen Verteilung zugrunde liegen. Um diese Zufallszahlen zu erhalten, muss die Berechnung der inversen Verteilungsfunktion möglich sein. Diese sind im Allgemeinen jedoch schwer zu berechnen. Bekannt sind nur Verfahren zur Bestimmung normalverteilter [Mor95] und lognormalverteilter [Gla04] Zufallszahlen, die in dieser Arbeit verwendet werden.

Neben dem eindimensionalen Sprung-Diffusions-Modell wird weiterhin ein Modell zur Bewertung von Basket-Optionen auf Grundlage eines Sprung-Diffusions-Modells vorgestellt und in zwei Dimensionen numerisch umgesetzt. Das Kursmodell, das in diesem Fall zugrunde gelegt wird, hat folgende Eigenschaften: Dem Diffusions-Teil unterliegt eine Brownsche Bewegung, die für alle Kurse unterschiedlich sein kann. Der Sprung-Teil jedoch ist für alle Kurse gleich, was bedeutet, dass die relative Änderung (nicht jedoch die absolute) und die Zeitpunkte der Sprünge für alle Aktienkurse des Baskets gleich sind. In den „normalen“, regelmäßig auftretenden Bewegungen (modelliert durch die Brownsche Bewegung) können die Kurse unabhängig sein oder korrelieren, d.h. sie können sich positiv oder negativ in ihren Bewegungen beeinflussen. Zur Umsetzung der Bewertung eines zweidimensionalen Baskets verfolgen wir den bereits für die eindimensionale PIDE vorgestellten Ansatz. Auch hier wird der Integral-Teil explizit behandelt und die Diskretisierung mittels Finiter Differenzen vorgenommen. Die entstehende Matrix des Gleichungssystems ist nicht länger tridiagonal und somit kann das direkte Lösungsverfahren aus Effizienzgründen nicht weiter verwendet werden. Es wird zur Lösung auf ein iteratives Verfahren (GMRES) mit einem Jacobi-Vorkonditionierer zurückgegriffen.

Die Beiträge dieser Arbeit lassen sich folgendermaßen zusamenfassen:

- Umsetzung eines Verfahrens zur Lösung der PIDE mittels Finiter Differenzen, expliziter Behandlung des Integrals und direkter Lösung der entstehenden linearen Gleichungssysteme
- Untersuchung der Robustheit des Verfahrens anhand einer Sensitivitätsanalyse
- Sicherstellen der Robustheit durch stabile Diskretisierung und Anpassung des Diskretisierungsgebietes
- Untersuchung der Anwendbarkeit des Verfahrens auf verschiedene Verteilungsfunktionen (Lognormalverteilung, Varianz-Gamma- und CGMY-Verteilung)
- Umsetzung verschiedener Vergleichsverfahren zur Bestimmung des Optionspreises

- Vorstellung eines Sprung-Diffusions-Modells zur Bewertung von Basket-Optionen und seine numerische Umsetzung in zwei Dimensionen

Der weitere Aufbau der Arbei stellt sich wie folgt dar:
Im *zweiten Kapitel* werden die Grundlagen der Optionspreisbewertung beschrieben. Es werden die wichtigsten Definitionen der verwendeten Optionstypen angegeben und die Struktur der Ausübung und der Auszahlung dargestellt. Nach der Einführung verwendeter Begriffe im Zusammenhang mit Optionen werden verschiedene Möglichkeiten der Anwendung von Optionen geschildert.
*Kapitel* 3 gibt einen Überblick über Lévy-Prozesse. Nach einer allgemeinen Definition eines Lévy-Prozesses werden verschiedene Beispiele von Lévy-Prozessen gegeben und beschrieben. Ein Abschnitt über die Kursmodellierung mit Lévy-Prozessen beschreibt zunächst die Geometrische Brownsche Bewegung und die Nachteile derselben bei der Kursmodellierung. Als verbessertes Modell wird das Sprung-Diffusions-Modell vorgestellt.
Das *vierte Kapitel* stellt verschiedene Möglichkeiten zur Bewertung Europäischer Optionen dar. Dabei wird zum einen die Bewertung Europäischer Optionen nach dem Black-Scholes-Modell betrachtet. Es werden die Annahmen des Modells, die Black-Scholes-Gleichung und die analytische Lösung derselben, die Black-Scholes-Formel, beschrieben. Vergleichend wird zum anderen die Bewertung Europäischer Optionen anhand des Merton-Modells, das auf einem Sprung-Diffusions-Modell beruht, untersucht. Für dieses Modell werden dann die Annahmen und die partielle Integro-Differentialgleichung, zur Berechnung des fairen Optionspreises dargestellt. Weiterhin werden die verschiedenen numerischen Verfahren zur Bestimmung des Optionspreises nach dem Merton-Modell behandelt. So werden die geschlossenen Lösungen, die Erwartungswertentwicklung, das Monte-Carlo-Verfahren und die Diskretisierung der PIDE beschrieben.
Im *fünften Kapitel* wird die Bewertung von Basket-Optionen betrachtet. Das entsprechende Modell und die entstehende PIDE zur Berechnung eines Optionspreises auf einen Basket werden vorgestellt und die Diskretisierungs- und Lösungsverfahren beschrieben.
Das *sechste Kapitel* beinhaltet die numerischen Ergebnisse der vorgestellten Verfahren. Die numerischen Verfahren zur Bewertung Europäischer Optionen werden hinsichtlich ihrer Konvergenz und der Flexibilität zur Berechnung verschiedener Sprungverteilungsfunktionen untersucht. Abschließend werden die Ergebnisse der Bewertung von Basket-Optionen dargestellt und die Konvergenz des Verfahrens diskutiert.
In *Kapitel* 7 werden eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit und ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen gegeben.

**Danksagung:**
An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein Dank gilt insbesondere Prof. Dr. Michael Griebel für die Überlassung des Themas und die gute Betreuung, sowie Dr. Thomas Gerstner für die Anregungen und Unterstützungen bei der Entwicklung dieser Arbeit. Ebenfalls danken möchte ich Claudia Warawko und Vera Gerig für die gemeinsame Zeit in unserem Büro.

# Kapitel 2

# Optionen

Optionen wurden bereits im 17ten Jahrhundert gehandelt, jedoch hat erst in den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts der Handel mit Optionen zugenommen. In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Optionstheorie, die im Folgenden benötigt werden, zusammengefasst. Zur Beschreibung verschiedener Optionstypen, ihre Grundstruktur und der Verwendung von Optionen werden besonders [Hul01], [KE99] und [Sey00] verwendet.

## 2.1 Definitionen und Begriffe

**Definition 2.1.1** [OPTION]
*Der Käufer einer* Option *erwirbt durch den Kauf derselben das Recht, aber nicht die Pflicht, einen zugrunde liegenden Basiswert zu einem speziellen Preis $K$, dem* Ausübungspreis*, zu kaufen (*Call-Option *oder kurz* Call*) oder zu verkaufen (*Put-Option *oder kurz* Put*).*

Die Option ist ein Vertrag, bei dem die Laufzeit $T$, der Ausübungspreis $K$ und der Basiswert vor Abschluss festgelegt werden. Der Wert $V$ einer Option hängt sowohl vom Kurs $S$ des Basiswertes als auch von der Zeit $t$ ab. Der Kurs kann sich mit der Zeit $t$ verändern, d.h. $S = S(t)$. Deshalb wird der Optionswert mit $V(S(t), t)$ bezeichnet. Sind Missverständnisse ausgeschlossen, bezeichnet man ihn auch kurz mit $V(S, t)$ oder nur $V$. Neben der Laufzeit $T$ und dem Kurs $S$ sind vor allem auch der Zinssatz $r$ und die Schwankungsbreite (Volatilität) $\sigma$ von großer Bedeutung für den Wert der Option.

## 2.2 Optionstypen

Optionen werden aufgrund ihrer Ausübungsmöglichkeiten und ihres zugrunde liegenden Basiswertes unterschieden.

**Definition 2.2.1** [EUROPÄISCHE OPTIONEN]
*Hat ein Käufer einer Option das Recht die Option nur zum Fälligkeitszeitpunkt $T$ auszuüben, handelt es sich um eine* Europäische Option.

**Definition 2.2.2** [AMERIKANISCHE OPTIONEN]
*Bietet eine Option dem Käufer das Recht, die Option bereits während der Laufzeit auszuüben, heißt sie* Amerikanische Option.

**Definition 2.2.3** [BASKET OPTIONEN]
*Eine* Basket-Option *ist eine Option, deren Auszahlung von mehreren Wertpapieren abhängt. Dabei bezeichnet $S_i$ den Kurs des $i$-ten Wertpapiers. Wir definieren einen Korb von $d$ Wertpapieren durch das gewichtete Mittel*

$$B(t) := \sum_{i=1}^{d} w_i S_i(t) \quad mit \quad \sum_{i=1}^{d} w_i = 1.$$

Da die zugrunde liegenden Basiswerte von Aktien, Schatzbriefen, Rohstoffen bis hin zu Fremdwährungen variieren, werden Optionen auch als derivative Wertpapiere bezeichnet. Im Folgenden wird angenommen, dass der Basiswert eine Aktie ohne Dividendenzahlungen ist.
Außer den vorgestellten Optionen (Standard-Optionen), von denen im Weiteren die Europäischen und die Basket Optionen betrachtet werden, existieren weitere sogenannte *Exotische Optionen*. Diese Optionsarten besitzen im Allgemeinen kompliziertere Auszahlungsstrukturen als vergleichbare Standard-Optionen. Besonders häufig trifft man dabei auch auf pfadabhängige Optionen, deren Auszahlung nicht nur vom Wert des zugrundeliegenden Basiswertes zum Fälligkeitszeitpunkt, sondern vom gesamten Verlauf des Kurses abhängt. Beispiele dafür sind so genannte *Barrier* oder *Asiatische Optionen*.

## 2.3 Bezeichnungen

In diesem Abschnitt sollen die verwendeten Bezeichnungen aufgelistet werden.

| Bezeichnung | Bedeutung |
|---|---|
| $S(t) \in \mathbb{R}^+$ | Preis des zugrunde liegenden Basiswertes zum Zeitpunkt $t$ |
| $T \in \mathbb{R}^+$ | Verfallsdatum, Fälligkeitszeitpunkt, Laufzeit |
| $K \in \mathbb{R}^+$ | Ausübungspreis, Strike |
| $r \in \mathbb{R}^+$ | Risikoloser Zinssatz |
| $\sigma \in \mathbb{R}^+$ | Volatilität, (jährliche) Schwankungsbreite des Kurses |
| $V(S,t) \in \mathbb{R}^+$ | Wert einer Option zum Zeitpunkt $t$ bei aktuellem Kurs $S = S(t)$ |

Tabelle 2.1: Bezeichnungen im Zusammenhang mit Optionen

## 2.4 Ausübung und Auszahlung

Das Einlösen einer Option wird als Ausübung bezeichnet. Die Ausübung und die damit zusammenhängende Auszahlung einer Option ist abhängig vom Optionstyp. Es werden in diesem Abschnitt die Ausübung und Auszahlung der betrachteten Optionen beschrieben.

### 2.4.1 Ausübung und Auszahlung für Europäische Optionen

Wir betrachten zunächst einen Europäischen Call. Das Verhalten des Besitzers richtet sich nach der Entwicklung des Kurses $S$ des Basiswertes und des davon abhängigen Wertes $V$ der Option. Der Kurs $S$ schwankt mit der Zeit, was durch die Bezeichnung $S_t$ oder $S(t)$ ausgedrückt wird. Der Inhaber einer Option wird zum Zeitpunkt $T$ die Option nur ausüben (also den Basiswert zum Preis $K$ kaufen), wenn $K < S$, für den dann herrschenden Marktpreis $S = S(T)$. In diesem Fall wird ein Gewinn $S - K$ erzielt, und die Option hat den inneren Wert[1] $V = S - K$. Im Fall $K > S$ wird die Option nicht ausgeübt, weil dann der Basiswert günstiger zum Marktpreis $S$ gekauft werden kann. Die Option ist dann wertlos, $V = 0$. Somit ist der Wert $V(S,T)$ der Call-Option beim Kurs $S(T)$ zum Fälligkeitsdatum $T$ gegeben durch

$$V_C(S,T) := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad S(T) \le K \quad \text{(Verfall der Option)} \\ S(T) - K & \text{falls} \quad S(T) > K \quad \text{(Ausübung der Option).} \end{cases}$$

[1] Als inneren Wert einer Option bezeichnet man denjenigen Wert, den die Option hätte, wenn sie sofort ausgeübt werden müsste.

Es gilt demnach

$$V_C(S,T) = \max\{S-K,0\}. \tag{2.1}$$

Für alle möglichen Kurse $S > 0$ betrachtet, ist $V(S,T)$ eine Funktion von $S$ und wird *Auszahlungsfunktion* oder *Payoff-Funktion* genannt. Mit der Bezeichnung

$$f^+ := \max\{f,0\}$$

lässt sich die Auszahlungsfunktion kompakt schreiben als

$$V_C(S,T) = (S-K)^+.$$

Mit einer Europäischen Put-Option erwirbt der Käufer das Recht, den Basiswert zum Verfallszeitpunkt $T$ zum Preis $K$ zu verkaufen. In diesem Fall hat die Ausübung der Option nur dann einen Sinn, falls $K > S$. Die Auszahlungsfunktion einer Put-Option ist

$$V_P(S,T) := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad K \leq S(T) \quad \text{(Verfall der Option)} \\ K - S(T) & \text{falls} \quad K > S(T) \quad \text{(Ausübung der Option).} \end{cases}$$

Also

$$V_P(S,T) = \max\{K-S,0\} \quad \text{oder} \quad V_P(S,T) = (K-S)^+.$$

In Abbildung 2.1 sind vergleichend die Auszahlungsfunktionen für eine Call- und eine Put-Option dargestellt.

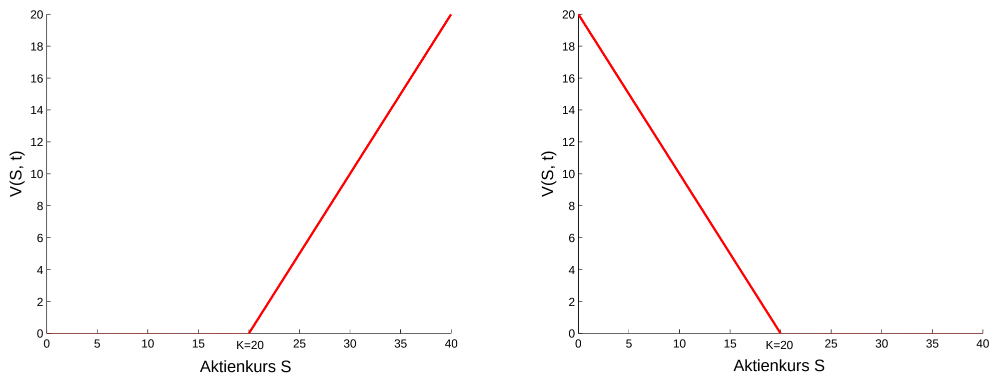


Abbildung 2.1: Auszahlungsfunktionen einer Call-Option (links) und einer Put-Option (rechts)

### 2.4.2 Ausübung und Auszahlung für Basket Optionen

Sei $S_i$ für $i=1,\dots,d$ der Preis des $i$-ten Wertpapiers. Dann gilt für $\mathbf{S} = (S_1 \dots S_d)^T$, dass die Auszahlungsfunktion für eine Call-Option gegeben ist durch

$$V_C(\mathbf{S},t) = (B(t)-K)^+.$$

Die Auszahlungsfunktion für eine Put-Option ist beschrieben durch

$$V_P(\mathbf{S},t) = (K-B(t))^+.$$

## 2.5 Begriffe im Zusammenhang mit Optionen

In diesem Abschnitt werden einige Begriffe definiert, die für das weitere Verständnis von Optionen von Bedeutung sind. Ein zentraler Begriff, der im Zusammenhang mit Finanzmärkten auftritt, ist die Arbitragemöglichkeit.

**Definition 2.5.1** [ARBITRAGEMÖGLICHKEIT]
*Die* Arbitragemöglichkeit *ist eine Handelsstrategie, mit der man durch Erkennen und Ausnutzen von Preisungleichheiten und -ungleichgewichten bei Wertpapieren, Optionsscheinen/Optionen und Futures*[2] *ohne eigenen Kapitaleinsatz einen risikolosen Gewinn erzielen kann.*

Die Abwesenheit vom Arbitragemöglichkeiten ist eines der fundamentalen Konzepte der Optionspreistheorie. Erst mit der Annahme, dass keine Arbitragemöglichkeiten auftreten, sind viele Optionspreismodelle umzusetzen.

**Beispiel 2.5.2**
*Nehmen wir an, dass der Preis einer gegebenen Aktie an einer Börse A und einer Börse B gehandelt. Diese Aktie wird an Börse A für 99 € und an Börse B für 101 € gehandelt wird. Wenn angenommen wird, dass es keine Transaktionskosten gibt, kann ein risikoloser Profit von 2 € gemacht werden, indem eine Aktie an Markt A gekauft und an B wieder verkauft wird. Der Händler, der sich mit solchen Transaktionen befasst, wird als* Arbitrageur *bezeichnet. Wenn der Finanzmarkt richtig funktioniert, kann eine Arbitragemöglichkeit nicht auftreten, da die Händler sehr aufmerksam sind und durch die Konkurrenz diese Möglichkeit entfernt wird. Existieren jedoch Transaktionskosten, welche eine natürliche Erscheinung von Marktreibung sind, so kann eine kleine Preisdifferenz existieren. Falls zum Beispiel die Transaktionskosten für Kauf und Verkauf einer Aktie in beiden Märkten 1,5 € betragen, werden die gesamten Transaktionskosten von 3 € den Arbitrageur abhalten nach einer Arbitrage-Möglichkeit mit einer Preisdifferenz von 2 € zu suchen.*

Die Werte einer europäischen Call- und Put-Option sind verknüpft durch die Put-Call-Parität.

**Definition 2.5.3** [PUT-CALL-PARITÄT]
*Die* Put-Call-Parität *stellt die Beziehung zwischen dem Preis einer Europäischen Call-Option und einer Europäischen Put-Option mit gleichem Ausübungspreis $K$ und gleicher Laufzeit $T$ dar. Es gilt*

$$S(t) + V_P = V_C + Ke^{-r(T-t)} \tag{2.2}$$

*Beweis: (vgl.[KE99]).* Die linke Seite der Gleichung 2.2 entspricht der Strategie, ein Portfolio, bestehend aus einer Put-Option und einer Aktie, zu kaufen. Dieses Portfolio $\Pi_P$ hat zum Zeitpunkt $T$ den Wert

$$\Pi_P = \begin{cases} K & \text{falls} \quad S \leq K \quad \text{(Der Put hat den Wert } K - S\text{, die Aktie den Wert } S\text{)} \\ S & \text{falls} \quad S \geq K \quad \text{(Der Put hat den Wert 0, die Aktie den Wert } S\text{).} \end{cases} \tag{2.3}$$

Auf der rechten Seite hat ein Portfolio $\Pi_C$ aus einem Call und $Ke^{-r(T-t)}$ Geldeinheiten

[2] Ein Future ist eine Art von börsengehandelten Termingeschäften. Es bezeichnet einen verbindlichen Börsenvertrag (Kontrakt) zwischen zwei Parteien (im Gegensatz zu halbseitig verpflichtenden Verträgen bei Optionen).

aus einem Bond[3] zum Zeitpunkt $T$ einen Wert von

$$\Pi_C = \begin{cases} K & \text{falls} \quad S \leq K \quad \text{(Der Call hat den Wert 0, der Bond den Wert } K\text{)} \\ S & \text{falls} \quad S \geq K \quad \text{(Der Call hat den Wert } K - S\text{, der Bond den Wert } S\text{).} \end{cases} \tag{2.4}$$

Da die beiden Portfolios denselben Wert zum Zeitpunkt $T$ haben, müssen sie zu jedem Zeitpunkt $t < T$ denselben Wert haben. Um dies zu beweisen, wird angenommen, dass zu einem Zeitpunkt $t < T$ ein Portfolio billiger ist als das andere. Dann hätte man die Möglichkeit das billigere Portfolio zu kaufen und das teurere zu verkaufen. Dies würde eine Arbitragemöglichkeit bedeuten und der Gewinn aus dieser Arbitragemöglichkeit könnte risikolos angelegt werden. Da die Werte der beiden Portfolios zum Endzeitpunkt gleich sind, hätte man ohne Anfangsvermögen ein strikt positives Endvermögen erzielt. Also muß die Put-Call-Parität (2.2) für alle $t \in [0, T]$ gelten. □

## 2.6 Verwendung von Optionen

Optionsstrategien können sehr risikobehaftet, aber auch hilfreich sein, denn sie ermöglichen den Einfluss auf eine Aktie zu steigern. Optionen können ebenfalls ein nützliches Werkzeug gegen ungünstige Marktbewegungen sein. Dies ist eine wichtige Eigenschaft für Investoren, die spekulativen Strategien folgen. Jedoch bedeutet Spekulieren mit Optionen, dass man offene Bestände beobachten und eine höhere Risikotoleranz haben sollte. Das Handeln mit Optionen setzt mehr als nur Grundkenntnisse über Aktienmärkte voraus. Die häufigste Verwendung finden Optionen in Hedging und Spekulation. Diese beiden Anwendungsmöglichkeiten werden im folgenden Abschnitt beschrieben.

### 2.6.1 Hedging

**Definition 2.6.1** [HEDGING]
*Das Hedgegeschäft (kurz:* Hedging*) dient zur Absicherung einer Transaktion gegen Risiken wie beispielsweise Wechselkursschwankungen oder Veränderungen in den Rohstoffpreisen. Eine Person oder ein Unternehmen, die ein Geschäft „hedgen“ möchte, geht zu diesem Zweck eine weitere Transaktion ein, die mit dem zugrunde liegenden Geschäft gekoppelt ist. Dies findet gewöhnlich in der Form eines Termingeschäfts statt. Ein „perfekter Hedge“ eliminiert jegliches Risiko, ist aber eigentlich nur theoretisch möglich.*

Dem Hedgegeschäft liegt die Absicht zugrunde, einen gegenwärtig als annehmbar empfundenen Preis wie etwa den Börsenkurs eines Wertpapiers, den Wechselkurs einer Währung oder einen Zinssatz für die Zukunft festzulegen. Hedgegeschäfte lassen sich grundsätzlich sowohl mit börsengehandelten Instrumenten wie Futures und Optionen als auch außerbörslich im so genannten „over-the-counter Markt“ mittels nichtstandardisierter Derivate einrichten. Der Erfolg des Kurssicherungsgeschäftes beruht auf einer preisausgleichenden Wirkung der Kursschwankungen des Grundgeschäftes durch ein entgegengerichtetes Engagement im Terminmarkt. Stimmen Kursrichtung und das Ausmaß der Kursänderungen im Kassamarkt[4] und Terminmarkt[5] vollständig überein, so lässt sich durch die Einnahme einer Gegenposition im Terminmarkt die Ungewissheit über die zukünftige Kursentwicklung

[3] Ein Bond bezeichnet festverzinslich angelegte Wertpapiere.
[4] Im Kassamarkt werden alle Geschäfte zum Kassakurs abgewickelt. Das ist der Kurs für die Wertpapiere, die nur mit einem Kurs während der Börsenzeit gehandelt werden.
[5] Der Terminmarkt ist ein Handelsplatz an dem Futures und Optionen gehandelt werden.

des Grundgeschäftes vollständig beseitigen. Durch eine Parallelbewegung der Terminkurse zu den Kassakursen eines Marktgegenstandes gleichen sich Kursgewinne und Kursverluste mithin idealerweise vollständig aus.

**Beispiel 2.6.2**
*(verändertes Beispiel aus [Hul01, S. 11]) Ein europäisches Unternehmen verkauft Produkte in die Vereinigten Staaten. Es schließt heute einen Vertrag und muss Ende des Jahres 10.000 Bleistifte zum Preis von einem Dollar pro Stift liefern. Im Augenblick erhält man pro Dollar einen Euro. Der Verkäufer der Stifte bekommt nach heutigem Wechselkurs also 10.000€. Liegt der Wechselkurs am Ende des Jahres bei 0,9€ (1,1€) pro Dollar erhält der Verkäufer umgerechnet nur noch 9.000€ (11.000€). Diese 1.000€ Verlust (Gewinn) stammen aus Wechselkursschwankungen und haben mit dem eigentlichen Geschäft nichts zu tun. Um sich gegen diese Schwankungen abzusichern, gibt es verschiedene Möglichkeiten.*

1. **Sicherer Wechselkurs**
   *Das Unternehmen kann heute schon einen fixen Wechselkurs erhalten und daher mit Sicherheit einen bestimmten Betrag erlösen. Mit Hilfe von Futures kann das Unternehmen heute schon die 10.000$ , die es am Ende des Jahres erhält, zu einem bestimmten Kurs verkaufen. Dies nennt man auch Leerverkauf. Der Kurs dieses Futures für Dollar am Jahresende ist beispielsweise 0,99€ pro US-Dollar. Indem die Unternehmung eine entsprechende Anzahl von Kontrakten verkauft, bekommt sie aus dem Geschäft mit Sicherheit 9.900€.*

2. **Minimaler Wechselkurs**
   *Die Unternehmung kann mithilfe von Optionen einen minimalen Wechselkurs absichern und erhält daher einen Mindestbetrag mit der Möglichkeit auf Steigerung. Sie kauft dazu eine entsprechende Anzahl von Kontrakten mit dem Recht, Ende des Jahres 10.000 $ zum Kurs von 0,99€ zu verkaufen. Diese Option kostet 100€. Liegt der Kurs am Jahresende bei 1,1€, verfällt die Option wertlos und das Unternehmen erhält am Markt 11.000€ aus dem Verkauf der Bleistifte. Das Geschäft bringt dem Unternehmen daher 10.900€ – das Geld aus dem Verkauf der Bleistifte, abzüglich der Kosten zum Kauf der Option. Liegt der Kurs am Jahresende bei 0,95€, nimmt das Unternehmen das Recht zum Verkauf wahr und erhält mittels Ausübung der Option 9.900€. Das Geschäft bringt daher abzüglich der Kosten für die Option 9.800€.*

Dieses Beispiel zeigt die Möglichkeit, aus unsicheren zukünftigen 10.000€ entweder sichere heutige 9.900€ oder eine Kombination aus sicheren zukünftigen 9.800€ und unsicheren 11.000€ zu machen.
Wie oben beschrieben bietet „Hedging“ bestimmte Vorteile. Es ist jedoch keinesfalls so, dass ein Unternehmen aus Sicht seiner Besitzer unbedingt jedes Geschäft absichern sollte. Vielmehr haben Aktionäre oder Gesellschafter die Möglichkeit, den aus dem Besitz des Unternehmens resultierenden Kapitalfluss dadurch abzusichern, dass sie ihre Anlagen diversifizieren.

### 2.6.2 Spekulation

**Definition 2.6.3** [SPEKULATION]
*Der Ausdruck* Spekulation *bezeichnet die geplante Handlung einer wirtschaftenden Person, die nach lukrativen, zumeist kurzfristigen Investitionsmöglichkeiten Ausschau hält.*

Ziel einer jeden Spekulation ist es, aus dem Eintreten einer Markteinschätzung einen finanziellen Vorteil zu erzielen. Das finanzielle Ergebnis, dies kann Gewinn oder Verlust sein, einer jeden Spekulation besteht dabei stets in der Differenz zwischen Kaufpreis und Verkaufspreis eines Marktgegenstandes, bereinigt um Kosten des Handels (Transaktionskosten). Erfolgreiche Spekulationen sind hauptsächlich auf das frühzeitige Erkennen und Ausnutzen von vermuteten Fehleinschätzungen des Marktes durch Marktbeteiligte über künftige Kursentwicklungen zurückzuführen, die sich wiederum durch ungleich verteiltes Wissen und Können zwischen Käufern und Verkäufern erklären lassen. Insbesondere Optionen sind interessant für Spekulanten, weil sie im Vergleich zum zugrunde liegenden Basiswert weniger kosten, aber mit geringem Einsatz von Kapital unter Umständen relativ große Gewinne erzielen können. Nicht vergessen werden sollte jedoch, dass auch die Verluste, im Fall eines Fehlschlags der Spekulation, groß sein können.

# Kapitel 3

# Lévy-Prozesse

In diesem Kapitel werden stochastische Modelle zur Simulation von Kursbewegungen vorgestellt. Die Kursbewegung folgt einem stochastischen Prozess dessen Werte sich über die Zeit in einer ungewöhnlichen Art und Weise verändern. Zur Vereinfachung gehen wir von zeitkontinuierlichen stochastischen Prozessen zur Modellierung von Aktienpreisbewegungen aus, damit analytische Werkzeuge aus der stochastischen Analysis angewendet werden können.
Der erste Schritt der Derivatbewertung ist die Spezifizierung des stochastischen Prozesses des zugrunde liegenden Basiswertes. Im Folgenden werden verschiedene Modelle, basierend auf unterschiedlichen stochastischen Prozessen, zur Optionsbewertung vorgestellt. Problematisch ist jedoch, ein Modell zu finden, das zwar einerseits realistisch ist und somit auftretende Marktdaten widerspiegelt, andererseits jedoch nicht zu viele Parameter enthält, deren Bestimmung sehr aufwändig ist. Denn je größer die Anzahl der zu bestimmenden Parameter desto größer ist der Aufwand der Berechnungen. Um derivative Sicherheiten zu bepreisen und zu hedgen ist es äußerst wichtig, ein gutes Modell zu finden, bei dem die logarithmischen Zuwächse des Basiswertes einer Verteilungsfunktion entsprechen. Diese Verteilungsfunktion sollte die Markdaten wiedergeben, d.h. die Zuwächse der in der Realität beobachteten Kurse sollten mit denen der Verteilungsfunktion übereinstimmen. Das weitverbreiteste zeitkontinuierliche Modell ist das Black-Scholes-Modell. Diesem Modell liegt die Normalverteilung zugrunde, um die logarithmierten Zuwächse des Underlyings zu simulieren.
Eines der größten Probleme des Black-Scholes-Modells ist jedoch, dass die logarithmierten Erträge von Aktien oder Indizes nicht normalverteilt sind, wie im Black-Scholes-Modell angenommen und somit nicht mir beobachteten Marktdaten übereinstimmen. Sie sind asymmetrisch und haben eine Kurtosis, die höher ist als die der Normalverteilung. Daher werden fexiblere Verteilungen zur Modellierung benötigt, d.h. solche, die nicht nur statisch sind, sondern auch die Veränderung über die Zeit wiedergeben können. In den späten 80er und in den 90er Jahren wurden Modelle mit diesen Eigenschaften zur Modellierung von Finanzdaten vorgeschlagen. Beispiele solcher Verteilungen, die Asymmetrie und eine Kurtosis berücksichtigen, sind unter anderem der Varianz-Gamma-Prozess (VG). Madan und Senata schlugen einen Lévy-Prozess mit VG verteilten Inkrementen vor [MCC98]. Jüngst wurde das CGMY Modell durch Carr, Geman, Madan und Yor vorgestellt [CGMY02].
Im Folgenden wird der theoretische Hintergrund für Lévy-Prozesse vorgestellt. Anschließend soll gezeigt werden, dass Lévy-Modelle die Daten aus der Realität besser verwirklichen und zu einer signifikanten Verbesserung im Bezug auf das Black-Scholes-Modell führen.
Zur Darstellung des Lévy-Prozesses, seiner Eigenschaften und zur Beschreibung verschiedener Beispiele von Lévy-Prozessen wird Bezug genommen auf [Sch05], [Sat99], [Rai00] und [BNMR01]. Die Beschreibung des Varianz-Gamma-Prozesses beruht auf [MCC98]. Zur Darstellung des CGMY-Prozesses werden [GMY99] und [CGMY02] verwendet.

## 3.1 Lévy-Prozesse

Um einige Modelle zur Kursmodellierung darstellen zu können, werden zuerst einige benötigte Definitionen angegeben. Weitere Grundlagen zur Wahrscheinlichkeitstheorie sind in [Bau02] zu finden.

**Definition 3.1.1** [CHARAKTERISTISCHE FUNKTION]
*Die* Charakteristische Funktion $\phi$ *einer Verteilung, oder äquivalent einer Zufallsvariable* $X$ *ist die Fourier-Stieltjes-Transformation der Verteilungsfunktion* $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\phi_X(u) = \mathrm{E}[\exp(iuX)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) dF(x), \tag{3.1}$$

wobei $\mathrm{E}[\cdot]$ den Erwartungswert bezeichnet. Eigenschaften der Charakteristischen Funktion sind $\phi(0) = 1$ und $|\phi(u)| \leq 1$ für alle $u \in \mathbb{R}$. Außerdem existiert die Charakteristische Funktion immer und sie ist stetig. Die wichtigste Tatsache ist, dass $\phi$ die Verteilungsfunktion $F$ eindeutig bestimmt. Die Momente von $X$ können ebenfalls über $\phi$ bestimmt werden. Wird angenommen, dass für $X$ das $k$-te Moment ($k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$) existiert, d.h. $\mathrm{E}[|X|^k] < \infty$, dann ist

$$\mathrm{E}[X^k] = i^{-k} \frac{d}{du^k} \phi(u) \bigg|_{u=0}. \tag{3.2}$$

**Definition 3.1.2** [UNENDLICH OFT TEILBAR]
*Eine Zufallsvariable* $X$ *oder ihre Verteilung ist* unendlich oft teilbar, *wenn für alle* $n \in \mathbb{N}$ *Zufallsvariablen* $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ *existieren, so dass gilt*

$$X \stackrel{V}{=} Y_1^{(n)} + \ldots + Y_n^{(n)}, \tag{3.3}$$

*wobei* $\stackrel{V}{=}$ *Gleichheit in der Verteilung bedeutet.*

Die kumulante charakteristische Funktion $\psi(u) = \log \phi(u)$ wird auch häufig als *charakteristischer Exponent* bezeichnet, welcher der *Lévy-Khintchine-Formel*

$$\psi(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(iux) - 1 - iux 1_{\{|x|<1\}}) \nu(dx) \tag{3.4}$$

genügt. Hierbei ist $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ und $\nu$ ist ein Maß auf $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} inf\{1, x^2\} \nu(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty.$$

Die unendlich teilbare Verteilung ist ein Triplet von Lévy-Charakteristiken (oder kurz: ein Lévy-Triplet) $(\gamma, \sigma^2, \nu(dx))$. Das Maß wird *Lévy-Maß* von $X$ genannt. Falls das Lévy-Maß von der Form $\nu(dx) = u(x)dx$ ist, wird $u(x)$ als *Lévy-Dichte* bezeichnet. Die Lévy-Dichte $u(x)$ beschreibt die Häufigkeit der Sprünge der Größe $x$ in $X$.
Die Lévy-Dichte hat dieselbe mathematische Anforderung wie die Wahrscheinlichkeitsdichte, mit der Ausnahme, dass sie nicht integrierbar sein muss und nicht die Eigenschaft $X_0 = 0$ erfüllen muss. Zunächst wird der bekannteste zeitkontinuierliche stochastische Prozess für Aktienkurse dargestellt.

**Definition 3.1.3** [LÉVY-PROZESS]
*Ein reellwertiger stochastischer Prozess* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ist ein* Lévy-Prozess, *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$X_0 = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher.*

2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 < t_1 \ldots < t_n$ sind die Zufallsvariablen $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ unabängig (unabhängige Zuwächse).*

3. *Die Verteilung von $X_{s+t} - X_s$ hängt nicht von $s$ ab (zeitliche Homogenität oder stationäre Zuwächse).*

4. *$X_t$ ist stochastisch stetig, d.h. $\forall t \geq 0$ und $\epsilon > 0$: $\lim_{s \to t} \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \epsilon) = 0$.*

5. *$X$ besitzt die Càdlàg Eigenschaft, d.h. $\exists \Omega_0 \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, so dass für alle $\omega \in \Omega_0$ gilt: $X_t(\omega)$ ist rechtsstetig in $t \geq 0$ und hat linksseitige Grenzwerte in $t > 0$.*

In der Lévy-Khintchine-Formel (3.4) spiegelt sich wider, dass ein Lévy-Prozess im Allgemeinen aus drei unabhängigen Teilen besteht:

1. einem linear deterministischen Teil, bestimmt durch $\gamma$ im Lévy-Triplet,
2. einem Brownschen Teil, ausgedrückt durch $\sigma^2$ und
3. einem puren Sprungteil, der durch $\nu(dx)$ spezifiziert wird.

Nach [Sat99] lässt sich ein Lévy-Prozess in eine der folgenden drei Klassen einteilen:

1. Klasse $A$, falls $\sigma^2 = 0$ und $\nu(\mathbb{R}) < \infty$,
2. Klasse $B$, falls $\sigma^2 = 0$, $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ und $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$,
3. Klasse $C$, falls $\sigma^2 \neq 0$ oder $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) = \infty$.

Der Pfadverlauf eines Prozesses ist für jede dieser drei Klassen unterschiedlich. $\sigma^2 = 0$ bedeutet endliche Aktivität, d.h. der Prozess hat in jedem Intervall eine endliche Anzahl von Sprüngen. Für $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ oder $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ und $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ gilt, dass der Prozess von endlicher Variation ist. Ist der Prozess $X_t$ aus der ersten Kategorie, so ist er von endlicher Aktivität. Für Prozesse aus Klasse $A$ und $B$ gilt, dass sie in jedem endlichen Intervall von endlicher Variation sind. In Klasse $C$ sind alle Prozesse von unbegrenzter Variation in jedem Intervall.

## 3.2 Beispiele verschiedener Lévy-Prozesse

Die wichtigsten Beispiele von Lévy-Prozessen, die im weiteren Verlauf verwendet werden, sind hier dargestellt. Weitere Beispiele mit ihren Eigenschaften sind beschrieben in [Sch05].

### 3.2.1 Deterministische Bewegung

Ein Lévy-Prozess $X$ mit dem charakteristischen Tripel $(\mu, 0, 0)$ hat die Charakteristische Funktion

$$\phi_{X_t}(u) = \mathrm{E}[e^{iuX_t}] = e^{iu\mu t}, \; u \in \mathbb{R}, \; t \geq 0, \tag{3.5}$$

und ist daher eine lineare Funktion $X_t = \mu t$, $t \geq 0$.

### 3.2.2 Brownsche Bewegung

Wenn ein Lévy-Prozess $X$ das charakteristische Tripel $(\mu, \sigma^2, 0)$ hat, ist die Charakteristische Funktion gegeben durch

$$\phi_{X_t}(u) = e^{-t\psi(u)} = \exp\left(iu\mu t - \frac{1}{2}t\sigma^2 u^2\right),\ u\in\mathbb{R},\ t\geq 0. \tag{3.6}$$

Die Funktion $\phi$ bezeichnet $\forall t\geq 0$ die Charakteristische Funktion der Normalverteilung, die auch kurz als $N(\mu t, \sigma^2 t)$ geschrieben wird. Daher ist $X_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t), \forall t \geq 0$, d.h. $X$ ist eine *Brownsche Bewegung* mit Drift $\mu t$ und Varianz $\sigma^2 t$. Ist $\mu = 0$, bezeichnet man $X$ als Brownsche Bewegung oder als *Wiener Prozess*. Wenn $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ ist, heißt $X$ *Standard Brownsche Bewegung*. Da das Lévy-Maß in diesem Fall 0 ist, hat die Brownsche Bewegung mit Drift keine Sprünge und ist nach [Sat99] der einzige Lévy-Prozess mit stetigen Pfaden.

### 3.2.3 Poisson-Prozess

Sei $0 < \lambda < \infty$. Ein Lévy-Prozess $X$ mit dem charakteristischen Tripel $(0, 0, \lambda\delta_1)$, wobei $\delta_1$ das Dirac-Maß am Punkt 1 bezeichnet, hat den charakteristischen Exponenten

$$\psi(u;\lambda) = \lambda(1 - e^{iu}),\ u\in\mathbb{R} \tag{3.7}$$

und die Charakteristische Funktion

$$\phi_{X_t}(u;\lambda) = e^{\lambda t(e^{iu}-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ u\in\mathbb{R},\ t\geq 0. \tag{3.8}$$

$X$ wird *Poisson-Prozess* mit Intensität $\lambda$ genannt. Er nimmt Werte $n\in\mathbb{N}_0$ mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\ t\geq 0. \tag{3.9}$$

an. Der Poisson-Prozess ist ein Sprungprozess mit konstanter Sprunggröße 1. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sprüngen folgt einer Exponentialverteilung mit Mittelwert $\lambda^{-1}$. In Abbildung (3.1) sind Beispiele eines Poissonprozesses mit unterschiedlichen Intensitäten dargestellt.

### 3.2.4 Zusammengesetzter Poisson-Prozess

Sei $N = \{N_t, t\geq 0\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensitätsparameter $\lambda > 0$ und $Z_i$, $i = 1, 2, \ldots$ sei eine unabhängig und identisch verteilte Folge von Zufallsvariablen, unabhängig von $N$, die einem Gesetz $L$ mit Charakteristischer Funktion $\phi_Z(u)$ folgen. Den *zusammengesetzten Poisson-Prozess* $X$ definiert man als

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_i,\ t\geq 0.$$

Der Wert $X_t$ des Prozesses zur Zeit $t$ ist die Summe von $N_t$ Zufallsvariablen mit Gesetz $L$. Für eine Verteilungsfunktion des Gesetzes $L$ und für eine Borelsche Menge $A$ gilt

$$P(Z_i\in A) = \frac{\nu(A)}{\lambda},$$

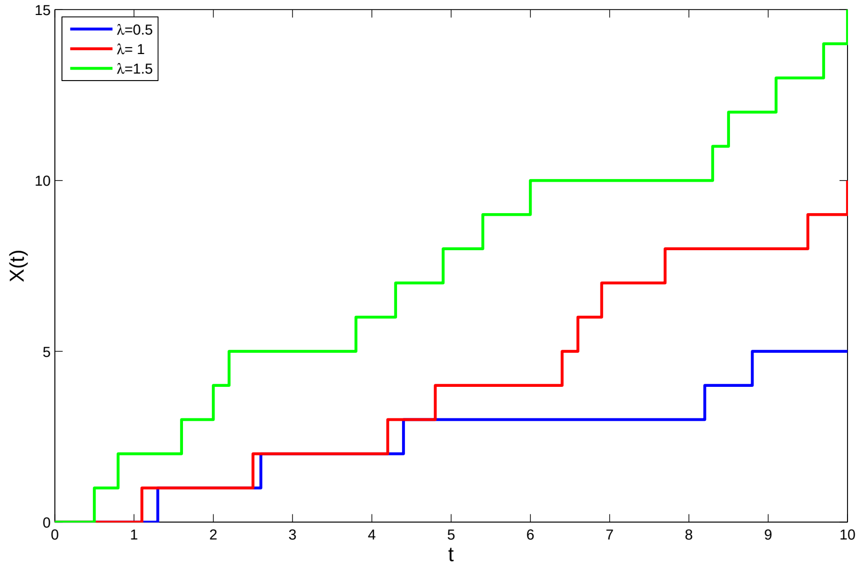


Abbildung 3.1: Realisierungen eines Poissonprozesses mit unterschiedlichen Intensitäten.

wobei $\nu(\mathbb{R}) = \lambda < \infty$ und es wird gefordert, dass $\nu(\{0\}) = 0$ ist. Der charakteristische Exponent des Lévy-Prozesses ist dann

$$\psi(u) = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iux})\nu(dx),\ u \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

und die Charakteristische Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi_{X_t}(u) = \mathrm{E}[\exp(iuX_t)] &= \exp\left(t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1)\nu(dx)\right) \\ &= \exp(t\lambda(\phi_Z(u) - 1)). \end{aligned}$$

So entsteht das Lévy-Triplet:

$$\left[\int_{-1}^{+1} x\nu(dx), 0, \nu(dx)\right].$$

### 3.2.5 Gamma-Prozess

Der *Gamma-Prozess* $X_t$ mit dem Lévy-Triplet

$$[a(1 - \exp(-b))/b, 0, a\exp(-bx)x^{-1}1_{(x>0)}dx]$$

hat die Charakteristische Funktion

$$\phi_{X_t}(u; a, b) = (1 - iu/b)^{-a}.$$

Dies ist die Charakteristische Funktion der Gamma-Verteilung mit den Parametern $a > 0$, $b > 0$. Diese wird auch mit Gamma$(a, b)$ abgekürzt. Die Verteilung ist gegeben durch

$$f_{Gamma}(x; a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-xb), \quad x > 0.$$

**Bemerkung 3.2.1**
*Es gilt die* Skalierungseigenschaft*: Falls X eine Gamma(a, b)-Verteilung, so ist für* $c>0$*, cX eine Gamma(a, b/c)-Verteilung.*

### 3.2.6 Varianz-Gamma-Prozess

Die Charakteristische Funktion der *Varianz-Gamma-Verteilung* $\mathrm{VG}(\sigma,\ \nu,\ \theta)$ ist gegeben durch
$$\phi_{VG}(u;\sigma,\nu,\theta) = (1 - iu\theta\nu + \frac{1}{2}\sigma^2\nu u^2)^{-1/\nu}.$$
Die Zuwächse eines *Varianz-Gamma-Prozesses* $X_t$ (kurz: VG-Prozess) folgen einer Varianz-Gamma-Verteilung $\mathrm{VG}(\sigma\sqrt{t}, \nu/t, t\theta)$.
Es gilt
$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\exp(iuX_t)] &= \phi_{X_t}(u;\sigma\sqrt{t},\nu/t,t\theta) \\ &= (\phi_{X_t}(u;\sigma,\nu,\theta))^t \\ &= (1 - iu\theta\nu + \frac{1}{2}\sigma^2\nu u^2)^{-t/\nu}. \end{aligned}$$
Der VG-Prozess kann auch ausgedrückt werden als Differenz zweier unabhängiger Gamma-Prozesse. Hierzu wird Folgendes ausgenutzt: Die Charakteristische Funktion lässt sich in zwei Faktoren
$$\frac{1}{1 - i\theta\nu u + \sigma^2\nu u^2/2} = \left(\frac{1}{1 - i\eta_p u}\right)\left(\frac{1}{1 + i\eta_n u}\right).$$
zerlegen. Hierbei gilt für $\eta_p$ und $\eta_n$
$$\begin{aligned} \eta_p - \eta_n &= \theta\nu, \\ \eta_p\eta_n &= \frac{\sigma^2\nu}{2}. \end{aligned}$$
Es folgt, dass $\eta_p$ und $-\eta_n$ die Wurzeln der Gleichung
$$x^2 - \theta\nu x - \sigma^2\nu/2 = 0$$
sind, wobei
$$\begin{aligned} \eta_p &= \sqrt{\frac{\theta^2\nu^2}{4} + \frac{\sigma^2\nu}{2}} + \frac{\theta\nu}{2} \\ \eta_n &= \sqrt{\frac{\theta^2\nu^2}{4} + \frac{\sigma^2\nu}{2}} - \frac{\theta\nu}{2}. \end{aligned}$$
Diese beiden Gamma-Prozesse können mit $G_p(t;\mu_p,\nu_p)$ und $G_n(t;\mu_n,\nu_n)$ bezeichnet werden. Dabei sind $\mu_p$ und $\mu_n$ die entsprechenden Erwartungswerte. Die zugehörigen Varianzen sind $\nu_p$ und $\nu_n$. Es gelten dabei die Beziehungen $\mu_p = \eta_p/\nu$, $\mu_n = \eta_n/\nu$, während $\nu_p = \mu_p^2\nu$ und $\nu_n^2 = \mu_n^2\nu$ sind. So ergibt sich, dass
$$X_{VG} = G_p(t;\mu_p,\nu_p) - G_n(t;\mu_n,\nu_n). \tag{3.11}$$
In [MCC98] wird gezeigt, dass sich mit dieser Darstellung und mit Hilfe der klassischen Darstellungen für Lévy-Maße von Gamma-Prozessen die Lévy-Dichte des Varianz-Gamma-Prozesses schreiben lässt als
$$\nu_{VG} = \begin{cases} C\dfrac{e^{Gx}}{|x|}\,dx, & x<0, \\ C\dfrac{e^{-Mx}}{x}\,dx, & x>0, \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} C &= 1/\nu > 0, \\ G &= \frac{1}{\eta_n} > 0, \\ M &= \frac{1}{\eta_p} > 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die Division durch den Absolutwert der Sprunggröße in der Lévy-Dichte resultiert in einem Prozess unendlicher Aktivität, da die Integration des Maßes unendlich ergibt. Der Prozess ist von endlicher Variation, da

$$\int_{-1}^{+1} |x|\nu(dx) < \infty.$$

Ein VG-Prozess hat keine Komponente der Brownschen Bewegung und sein Lévy-Triplet ist gegeben durch $[\gamma, 0, \nu(dx)]$ mit

$$\gamma = \frac{-C(G(e^{-M}-1) - M(e^{-G}-1))}{MG}.$$

Mit Parametrisierung in den Termen $C, G$ und $M$ lässt sich die Charakteristische Funktion von $X_1$ schreiben als

$$\phi_{X_t}(u; C, G, M) = \left(\frac{GM}{GM + (M-G)iu + u^2}\right)^C.$$

In dieser Notation bezeichnen wir die Verteilung durch VG$(C, G, M)$.
Eine weitere Möglichkeit einen VG-Prozess zu definieren, ist es, ihn als zeitveränderte Brownsche Bewegung mit Drift zu sehen. Genauer: Sei $G = \{G_t, t \geq 0\}$ ein Gamma-Prozess mit Parametern $a = \frac{1}{\nu} > 0$ und $b = \frac{1}{\nu} > 0$ und sei $W = \{W_t, t \geq 0\}$ eine Standard Brownsche Bewegung, $\sigma > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$, dann kann der VG Prozess $X = \{X_t, t \geq 0\}$ mit den Parametern $\sigma > 0$, $\nu > 0$ und $\theta$ alternativ definiert werden als

$$X_t = \theta G_t + \sigma W_{G_t}.$$

**Bemerkung 3.2.2**
*Eine attraktive Eigenschaft des Varianz-Gamma-Prozesses ist die Möglichkeit, den Prozess als Differenz zweier unabhängiger Prozesse zu schreiben. Sie ermöglicht es, den Preis in die zwei Prozesse der Auf- und Abwärtsbewegungen aufzuteilen. Diese Eigenschaft geht mit der Eigenschaft der unendlichen Variation, also auch bei der Brownschen Bewegung, verloren.*

### 3.2.7 CGMY-Prozess

Der CGMY-Prozess, vorgestellt durch [CGMY02], verallgemeinert den VG-Prozess durch Hinzufügen eines neuen Parameters in der Lévy-Dichte. Dieser Parameter erlaubt, dass der resultierende Lévy-Prozess sowohl endliche oder unendliche Aktivität als auch endliche oder unendliche Variation besitzt.
Die *CGMY($C, G, M, Y$)-Verteilung* hat vier Parameter. Ihre Charakteristische Funktion sieht folgendermaßen aus

$$\phi_{CGMY}(u; C, G, M, Y) = \exp(C\Gamma(-Y)((M-iu)^Y - M^Y + (G+iu)^Y - G^Y)).$$

Ein *CGMY-Prozess* $X_t$ hat Zuwächse, die über ein Zeitintervall der Länge $s$ einer CGMY$(sC, G, M, Y)$-Verteilung folgen. Mit anderen Worten ist die Charakteristische Funktion von $X_t$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\exp(iuX_t)] &= \phi_{CGMY}(u; tC, G, M, Y)\\ &= (\phi_{CGMY}(u; tC, G, M, Y))^t\\ &= \exp(Ct\Gamma(-Y)((M-iu)^Y - M^Y + (G+iu)^Y - G^Y)).\end{aligned}$$

Das Lévy-Maß des CGMY-Prozesses ist

$$\nu_{CGMY}(dx) = \begin{cases} C\dfrac{e^{Gx}}{|x|^{1+Y}}\,dx, & x<0,\\ C\dfrac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}}\,dx, & x>0.\end{cases}$$

Diese Parameter ergeben sich analog zu denen des Varianz-Gamma-Prozesses aus (3.12). Der erste Parameter des Lévy-Triplets ist

$$\gamma = C\left(\int_0^1 \exp(-Mx)x^{-Y}\,dx - \int_{-1}^0 \exp(Gx)|x|^{-Y}\,dx\right).$$

Der Bereich der Parameter ist beschränkt auf $C>0$, $G\geq 0$, $M\geq 0$ und $Y<2$. Wählt man den Parameter $Y\geq 2$, so ergibt dies kein gültiges Lévy-Maß .

**Bemerkung 3.2.3**
*Der CGMY-Prozess ist ein reiner Sprungprozess, d.h. er beinhaltet keinen Brownschen Teil. Die Varianz-Gamma-Verteilung ist ein Spezialfall der CGMY-Verteilung. Falls* $Y=0$*, reduziert sich die CGMY-Verteilung zur VG-Verteilung. Es gilt dann* $CGMY(C,G,M,0) = VG(C,G,M)$.

### Bedeutung der Parameter $\mathbf{C}, \mathbf{G}, \mathbf{M}, \mathbf{Y}$ im CGMY- und im Varianz-Gamma-Prozess

Die Parameter $C, G, M$ und $Y$ spielen eine wichtige Rolle in der Untersuchung verschiedener Aspekte von stochastischen Prozessen. Über die Wahl der Parameter lassen sich die Eigenschaften des stochastischen Prozesses beeinflussen. Diese Eigenschaften sind vor allem die Kurtosis[1] und Schiefe[2] (Skewness) der Verteilungsfunktion.

#### Der Parameter C

Er kann angesehen werden als das Maß für die allgemeine Aktivität. Durch das Festhalten der übrigen Parameter und das Integrieren über alle Bewegungen, die ein bestimmtes kleines Level überschreiten, kann man erkennen, dass das gesamte Aktivitätslevel durch die Bewegungen in $C$ kontrolliert werden kann. So kann ein Modell, das mit einer stochastischen Aktivitätsrate konstruiert wird, $C$ als einen unabhängigen positiven Prozess modellieren.
Im Spezialfall $G=M$ gilt, dass das Lévy-Maß symmetrisch ist. Für diesen Fall zeigen Madan, Carr und Chang in [MCC98], dass der Parameter $C$ die Kontrolle über die Kurtosis der Verteilung von $X(t)$ bietet. Dieser Fall wurde ebenfalls in [Kop95] behandelt. Dort wird auch ein alternativer Ausdruck für die Charakteristische Funktion geliefert.

[1]Die Kurtosis ist ein Maß für das Gewicht der Verteilung in den Enden des Wertebereichs.
[2]Die Schiefe ist ein Maß dafür, wie asymmetrisch die Verteilung ist.

### Die Parameter G und M

Sie kontrollieren jeweils die Rate des linken und rechten exponentiellen Abfalls der Lévy-Dichte. Diese führen zu einer verzerrten (skewed) Verteilung, wenn $G \neq M$. Für den Fall $G < M$ ist der linke Teil der Verteilung breiter als der rechte. Das ist konsistent mit der risikoneutralen Verteilung, die typischerweise bei Optionspreisen impliziert wird. Wenn $G$ und $M$ von der risikoneutralen Verteilung impliziert werden, gibt ihre Differenz das Maß zwischen Fallen und Wachstum des Preises an. Die Summe hingegen mißt den Preis einer großen Bewegung relativ zu einer kleinen. Im Gegensatz dazu bestimmt die Differenz zwischen $G$ und $M$ in der statistischen Verteilung die relative Häufigkeit von Abfall zu Anstieg. Die Summe gibt die Häufigkeit von großen Bewegungen relativ zu kleinen an. Der exponentielle Faktor im Zähler der Lévy-Dichte führt zur Endlichkeit aller Momente für den Prozess $X(t)$.

### Der Parameter Y

Es gibt viele mögliche Lévy-Dichten, die zur Preisprozessmodellierung verwendet werden können. Es ist deshalb sinnvoll, einige Struktureigenschaften zu finden, die die Auswahl einer geeigneten Lévy-Dichte ermöglichen. Eine dieser Eigenschaften ist die vollständige Monotonie. Des Weiteren sind die endliche oder unendliche Aktivität und Variation eines Prozess von Bedeutung. Der Parameter $Y$ ist besonders nützlich, um diese feine Struktur des stochastischen Prozesses zu charakterisieren. Aus diesem Grund sollen diese Eigenschaften beschrieben werden.

- **Vollständige Monotonie (VM)**
  Die Grundidee der vollständigen Monotonie ist, dass große Sprünge seltener auftreten als kleine. Dies bedeutet, dass $\nu(x)$ mit $|x|$ fällt oder dass $\nu'(x) \leq 0$ für $x > 0$ und $\nu'(x) \geq 0$ für $x < 0$ ist. Die erste Ableitung hat somit wechselndes Vorzeichen an der Stelle 0. Die Eigenschaft der vollständigen Monotonie fordert, dass alle Ableitungen, nicht nur die erste, auf jeder Seite von 0 dasselbe Vorzeichen haben und von einer Seite zur anderen alternierend sind. Für eine ausführlichere Charakterisierung der vollständig monotonen Lévy-Dichten sei an dieser Stelle auf [CGMY02], [GMY99] und [Mad99] verwiesen.

- **Endliche Variation (EV)**
  Aus der Sicht der Optionspreistheorie sind Prozesse mit endlicher Variation (EV) oder endlicher Aktivität (EA) nützlich, um eine Maßveränderung vom statistischen zum risikoneutralen Prozess zu erklären, denn sie erlauben eine größere Flexibilität zwischen den lokalen Charakteristiken der Martingalkomponenten unter den zwei Maßen. Zum Beispiel ist für Prozesse mit unendlicher Variation (UV) wie der Brownschen Bewegung, die Volatilität und daher die lokale Martingalkomponente invariant unter Martingalmaßänderung. Für Sprungprozesse mit unendlicher Variation impliziert die Äquivalenz der Maßveränderung, dass die Differenz zwischen risikoneutralen und statistischen Lévy-Dichten von endlicher Variation ist. Dies erfordert die Einschränkung, dass die beiden Prozesse denselben Exponenten haben oder dass sie im selben Maß von unendlicher Variation sind. Für den Fall, dass die Prozesse selber von endlicher Variation sind, sind auch die Differenzen der Lévy-Dichten von endlicher Variation und daher ist keine parametrische Einschränkung nötig. Diese Beobachtungen sind wichtig im Hinblick auf Optionsdaten, die zeigen, dass risikoneutrale Volatilitäten im Wesentlichen höher als ihre statistischen Gegenstücke sind.

- **Endliche Aktivität (EA)**
  Prozesse von endlicher Aktivität sind von Interesse, da man Wertpapiere nach ihrem Aktivitätslevel gruppieren möchte. Danach wird der Gebrauch von Prozessen mit unendlicher Aktivität (UA) als eine erste Approximation angesehen, um Märkte mit hohem Aktivitätslevel zu untersuchen.
  Die oben beschriebenen Eigenschaften sind in Bezug auf die Bereiche von $Y$ in der folgenden Tabelle 3.1 festgehalten. Formal gezeigt werden diese Eigenschaften in Satz 3.2.4.

| Wertebereiche für $Y$ | Eigenschaften des Prozesses |
|---|---|
| $Y < -1$ | nicht VM, EA |
| $-1 < Y < 0$ | VM, EA |
| $0 < Y < 1$ | VM, UA, EV |
| $1 < Y < 2$ | VM, UA, UV |

Tabelle 3.1: Eigenschaften des Prozesses in Abhängigkeit vom Parameter $Y$, der das Verhalten der Lévy-Dichte um Null beschreibt.

**Satz 3.2.4**
*Der CGMY-Prozess*

1. *hat vollständig monotone Lévy-Dichte für $Y > -1$,*
2. *ist ein Prozess von unendlicher Aktivität für $Y > 0$ und*
3. *ist ein Prozess von unendlicher Variation für $Y > 1$.*

*Beweis: (vgl. [CGMY02]).* Für die erste Eigenschaft wird beobachtet, dass für $Y < -1$ der Wert von $1 + Y$ negativ ist und die Lévy-Dichte $x^{-(1+Y)} \exp(-\beta x)$ für $\beta = G, M$ in der Nähe von 0 ansteigt und dann für den Fall, dass $x$ gegen unendlich steigt, gegen 0 fällt. Daher ist die Dichte nicht vollständig monoton. Für den Fall $(1 + Y) > 0$ können wir schreiben

$$\frac{1}{x^{1+Y}} \exp(-\beta x) = \int_\beta^\infty \frac{(a-\beta)^Y}{\Gamma(1+Y)} e^{-ax}\, da, \tag{3.13}$$

wobei sich eine vollständige Monotonie mit einer Gewichtsfunktion $1_{a>\beta}(a-\beta)^Y/\Gamma(1+Y)$ ergibt.
Für Eigenschaft 2 wird beobachtet, dass für negative Werte von $Y$ das Integral der Lévy-Dichte in der Nähe von 0 endlich ist und daher ein Prozess mit endlicher Aktivität vorliegt. Wenn $Y$ den Wert 0 übersteigt, wird der Wert des Integrals unendlich und es ergibt sich ein Prozess mit unendlicher Aktivität.
Eigenschaft 3 ergibt sich aus dem Wert des Integrals über $|x|\nu_{CGMY}(x)$. Für $Y < 1$ ist der Wert des Integrals endlich und unendlich für $Y > 1$. □

## 3.3 Kursmodellierung mit Lévy-Prozessen

In Abschnitt 3.2 wurden verschiedene Beispiele von Lévy-Prozessen angegeben. Die Aufgabe, die sich nun stellt, ist es, Lévy-Prozesse auszuwählen, um eine geeignete Modellierung von Aktienkursen zu gewährleisten. Das bekannteste Modell ist das der Brownschen Bewegung und wurde schon in den 70er Jahren von Black, Scholes und Merton als Grundlage zur Kursmodellierung genutzt. Durch Beobachtungen am Aktienmarkt stellt sich heraus, dass die Brownsche Bewegung die Bewegungen der Aktienkurse nicht genügend gut widerspiegelt. Um die Modellierung zu verbessern, wird versucht, Sprung-Diffusions-Prozesse zu verwenden, die die Marktdaten besser approximieren. Um die beiden Modelle vergleichen zu können, werden sie in diesem Abschnitt vorgestellt. Dazu nehmen wir im Besonderen Bezug auf [KE99], [Con01], [Sch05] und [AP05].

### 3.3.1 Geometrische Brownsche Bewegung

**Definition 3.3.1** [Geometrische Brownsche Bewegung]
*Sei $X(t)$ die Brownsche Bewegung mit Driftparameter $\mu \geq 0$ und Varianzparameter $\sigma^2$. Der stochastische Prozess, der durch*

$$Y(t) = e^{X(t)},\ t \geq 0$$

*definiert ist, wird als* Geometrische Brownsche Bewegung *bezeichnet. Offensichtlich sind die Werte von $Y(t)$ nicht negativ. Der Erwartungswert und die Varianz von $Y(t)$ ergeben sich als*

$$\mathrm{E}(Y(t)|Y(0) = y_0) = y_0 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right) \tag{3.14}$$

$$\mathrm{var}(Y(t)|Y(0) = y_0) = y_0^2 \exp\left(2\mu t + \sigma^2 t\right) [\exp(\sigma^2 t) - 1]. \tag{3.15}$$

*Man sagt, dass $Y(t)$ lognormalverteilt ist mit Erwartungswert und Varianz gegeben durch (3.14) und (3.15). Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von $Y(t)$ ist gegeben durch*

$$g(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right),\ y > 0.$$

*Weiter gilt, dass für jedes $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ die aufeinanderfolgenden Raten $Y(t_2)/Y(t_1)$, $\ldots$, $Y(t_n)/Y(t_{n-1})$ unabhängige Zufallsvariablen sind, d.h. die prozentualen Veränderungen sich nicht überschneidender Intervalle sind unabhängig.*

Das Modell der Geometrischen Brownschen Bewegung und die Lognormalverteilung bilden die Basis für das Black-Scholes-Modell für Aktienpreisdynamik in stetiger Zeit. Die Änderung eines Aktienpreises $S = \{S_t, t \geq 0\}$ wird wie folgt modelliert. Es werden die Änderungen von $S$ in einem kleinen Zeitintervall von der heutigen Zeit $t$ bis zu einem Zeitpunkt $t + \Delta t$ in der Zukunft betrachtet. Bezeichnet $\Delta S = S_{t+\Delta t} - S_t$ die Änderung, so ist der Ertrag in diesem Intervall gegeben durch $\Delta S_t / S_t$. Es ist wirtschaftlich begründet, dass dieser Ertrag in zwei Komponenten aufgeteilt wird, den systematischen und den zufälligen Teil. Zuerst wird der systematische Teil betrachtet. Es wird angenommen, dass der erwartete Ertrag der Aktie über einen Zeitabschnitt proportional zur Länge des Zeitabschnitts ist. Dies bedeutet, dass in einem kurzen Intervall der Zeit $[S_t, S_{t+\Delta t}]$ der Länge $\Delta t$ der erwartete Anstieg der Aktie gegeben ist durch $\mu S_t \Delta t$, wobei $\mu$ der Parameter ist, der den erwarteten Ertrag der Aktie bezeichnet. Der deterministische Teil der Aktie ist demnach modelliert durch $\mu \Delta t$.
Ein Aktienpreis schwankt stochastisch und eine sinnvolle Annahme ist es, dass die Varianz des Ertrages in einem Intervall $[S_t, S_{t+\Delta t}]$ proportional zur Länge des Intervalls ist. Daher wird der zufällige Teil des Ertrages modelliert durch $\sigma \Delta W_t$, wobei $\Delta W_t$ eine Normalverteilung mit Varianz $\Delta t$ ist, die die Aktienpreisdynamik beschreibt. Der Parameter $\sigma > 0$ beschreibt die Größe der Schwankungen des Aktienpreises. Im Ganzen ist die Varianz des Ertrages gleich $\sigma^2 \Delta t$. Das $\sigma$ bestimmt also wie volatil ein Aktienpreis ist und wird auch als *Volatilität* bezeichnet. Zusammen ergeben diese beiden Eigenschaften

$$\Delta S_t = S_t(\mu \Delta t + \sigma \Delta W_t),\ S_0 > 0. \tag{3.16}$$

Für den Grenzwert im Fall $\Delta t \to 0$ folgt die stochastische Differentialgleichung

$$\frac{dS_t}{S_t} = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),\ S_0 > 0. \tag{3.17}$$

Die obige stochastische Differentialgleichung hat die eindeutige Lösung

$$S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t). \tag{3.18}$$

Es gilt, dass

$$\log S_t - \log S_0 = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t \tag{3.19}$$

eine $\mathrm{N}(t(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2), \sigma^2 t)$-Verteilung ist. Also ist $S_t$ selbst lognormalverteilt.
In Abbildung 3.2 sind drei Simulationen einer Geometrischen Brownschen Bewegung zu unterschiedlichen Erwartungswerten und Varianzen dargestellt.

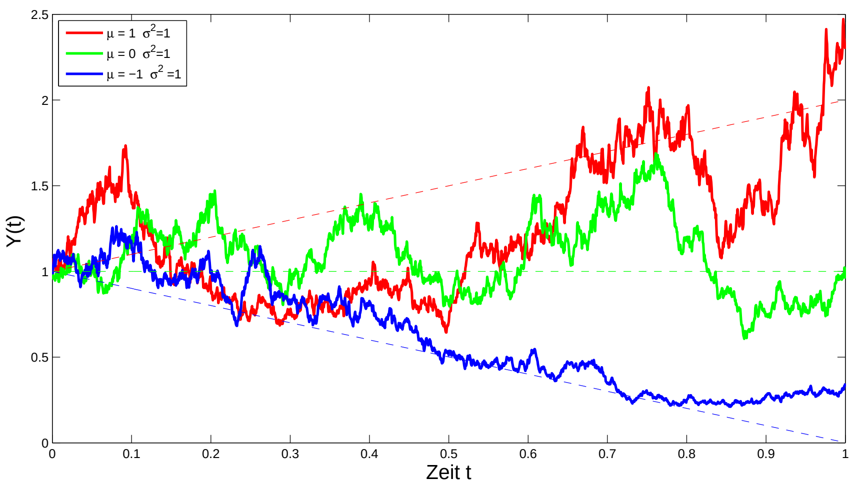


Abbildung 3.2: Realisierungen einer Geometrischen Brownschen Bewegung mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$.

### 3.3.2 Nachteile der Brownschen Bewegung

Bei der Betrachtung des Black-Scholes-Modells wird festgestellt, dass dieses Modell von einigen Annahmen abhängig ist, die in der Realität nicht wiederzufinden sind. Empirische Untersuchungen von Marktdaten ergaben, dass das klassische Black-Scholes-Modell die statistischen Eigenschaften finanzieller Zeitreihen nicht sehr gut beschreibt. In [Con01] ist eine Liste von Eigenschaften von Finanzdaten gegeben, die nicht durch das Black-Scholes-Modell und die diesem Modell zugrunde liegende Brownsche Bewegung wiedergegeben werden. Hier werden im Folgenden zwei Eigenschaften betrachtet:

- Der Logarithmus der Zuwächse entspricht nicht einer Normalverteilung. Das bedeutet, die Brownsche Bewegung ist keine gute Approximation der Kursbewegungen.

- Der zugrunde liegende Kursverlauf ist nicht stetig.

### Unterschied der Marktdaten zur Normalverteilung

Es werden in diesem Abschnitt die Eigenschaften beschrieben, für die die Verteilung der „Logreturns[3]" nicht mit denen der Normalverteilung übereinstimmen.

### Schiefe und Kurtosis

Für eine Zufallsvariable $X$ bezeichnen wir mit

$$\mu_X = \mu = \mathrm{E}[X]$$

den Erwartungswert und die Varianz mit

$$\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}[(X - \mu_X)^2] \geq 0.$$

Die Wurzel der Varianz $\sqrt{\mathrm{var}[X]}$ wird als *Standardabweichung* oder *Volatilität* bezeichnet. Dass die Standardabweichung einer Zufallsvariable der Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$ (kurz: $N(\mu, \sigma^2)$) folgt, bedeutet, dass $\sigma > 0$ ist.
In Tabelle 3.2, entnommen aus [Sch05], ist ein Überblick über den Erwartungswert, die Standardabweichung, die Schiefe und Kurtosis bedeutender Indizes gegeben. Der erste Datensatz beinhaltet alle täglichen Logreturns des S&P 500-Index über die Periode 1970 – 2001. Der zweite Datensatz enthält dieselben Daten, ausgenommen den ungewöhnlichen Logreturn vom Crash am 19. Oktober 1987.

| Index | Erwartungswert | Varianz | Schiefe | Kurtosis |
|---|---|---|---|---|
| S&P 500 (1970 – 2001) | 0.0003 | 0.0099 | −1.6663 | 43.36 |
| *S&P 500 (1970 – 2001) | 0.0003 | 0.0095 | −0.1099 | 7.17 |
| S&P 500 (1997 – 1999) | 0.0009 | 0.0119 | −0.4409 | 6.94 |
| Nasdaq- Composite (1997 – 1999) | 0.0015 | 0.0154 | −0.5439 | 5.78 |
| DAX (1997 – 1999) | 0.0012 | 0.0157 | −0.4314 | 4.65 |
| SMI (1997 – 1999) | 0.0009 | 0.0141 | −0.3584 | 5.35 |
| CAC-40 (1997 – 1999) | 0.0013 | 0.0143 | −0.2116 | 4.63 |

Tabelle 3.2: Überblick über Erwartungswert, Varianz, Schiefe und Kurtosis verschiedener Indizes.

### Schiefe

Die *Schiefe* misst den Grad der Asymmetrie einer Verteilung. Sie ist definiert als das dritte Moment über die Erwartung, dividiert durch die dritte Potenz der Standardabweichung

$$\frac{\mathrm{E}[(X - \mu_X)^3]}{\mathrm{var}[X]^{3/2}}.$$

Für eine symmetrische Verteilung (wie $N(\mu, \sigma)$) ist der Wert der Schiefe gleich 0. Falls eine Verteilung links einen längeren Ausläufer hat als rechts, hat sie eine negative Schiefe. Im entgegengesetzten Fall eine positive. Werden die täglichen Logreturns der verschiedenen Indizes beobachtet, ist typischerweise eine negative Schiefe zu erkennen.

[3] Seien $S_{t_1}, S_{t_2}, \ldots, S_{t_n}$ die Werte eines Kurses zu verschiedenen Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dann ist der *Logreturn* definiert durch $log(S_{t_n}) - log(S_{t_{n-1}}) = log(1 + Y_n)$.

### Kurtosis

Die Kurtosis ist ein Maß für das Gewicht der Verteilung an den Enden des Wertebereichs. Untersuchungen von Marktdaten ergeben, dass große Bewegungen in Aktienpreisen häufiger auftreten als in einem Modell mit Normalverteilung. Eine Möglichkeit das Verhalten der Verteilung an den Enden zu messen, ist es, die Kurtosis, die durch

$$\frac{\mathrm{E}[(X-\mu_X)^4]}{\mathrm{var}[X]^2}$$

definiert ist, zu betrachten. Für die Normalverteilung ist diese gleich 3. Wenn die Verteilung eine flache Spitze hat, ist sie kleiner als 3. Falls die Verteilung eine hohe Spitze hat, ist die Kurtosis größer als 3.
In der oben abgebildeten Tabelle ist die Kurtosis der täglichen Logreturns über denselben Zeitraum für den selben Satz von Indizes berechnet. Für diese Daten ist die Kurtosis immer größer als 3. Dies weist darauf hin, dass die Schenkel der Normalverteilung zu steil abfallen, im Gegensatz zu den empirisch herausgefundenen Daten. Außerdem hat die empirische Verteilung eine wesentlich höhere Spitze als die Normalverteilung. Die Tatsache, dass die Verteilung der Logreturns eine höhere Spitze hat als die Normalverteilung, wurde bereits 1965 von Fama bemerkt.

Es wird also festgestellt, dass die Normalverteilung nicht optimal die empirischen Daten widerspiegelt. Jedoch ist auch die Annahme des stetigen Kursverlaufs nicht konsistent mit den Beobachtungen der Märkte.

### Der Kursverlauf

Eine Annahme des Black-Scholes Modells ist der stetige Kursverlauf. Es ist jedoch allgemein bekannt, dass Marktbewegungen nicht stetig sind. Von Zeit zu Zeit treten Sprünge, in den meisten Fällen nach unten, auf. Diese plötzlichen und unerwarteten Bewegungen können nicht durch eine Normalverteilung dargestellt werden.

Da die Brownsche Bewegung die Marktbewegungen nicht gut genug widerspiegelt, wird nach neuen Modellen gesucht, die den Markt besser approximieren. Solche Modelle können entweder völlig neue Modelle sein oder solche, die auf dem Modell der Brownschen Bewegung aufbauen. Ein Beispiel für solche Modelle sind Sprung-Diffusions-Modelle, die im nächsten Abschnitt betrachtet werden.

## 3.3.3 Sprung-Diffusions-Modelle

In Abschnitt 3.3.2 wurde auf die Nachteile des Black-Scholes-Modells hingewiesen. Die Normalverteilung, die der Brownschen Bewegung zugrunde liegt, nähert die Marktbewegungen nicht ausreichend genau an. Außerdem ist der stetige Kursverlauf nicht konsistent mit der Realität.
Da die Marktdaten und -bewegungen plötzliche, unerwartete Sprünge aufweisen, wird versucht, diese Bewegungen mit in die Modelle einzubeziehen. Ein Modell, in dem diese Idee umgesetzt wird, ist das *Sprung-Diffusions-Modell*. Wie der Name bereits erkennen lässt, setzt sich ein Sprung-Diffusions-Modell zusammen aus einem Sprung- und einem Diffusionsteil

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) + (\eta - 1)q(t). \tag{3.20}$$

Hierbei bezeichnet $\mu$ den erwarteten Ertrag der Aktie, $\sigma$ die Volatilität, $(\eta - 1)$ eine Impulsfunktion, die einen Sprung von $S$ nach $S\eta$ bewirkt, $W(t)$ einen Wiener Prozess und $q(t)$ einen Zählprozess, in der Regel einen Poisson-Prozess. Die Sprünge bestehen also aus einer Häufigkeitsverteilung, die durch einen Zählprozess, und einer Intensitätsverteilung, die durch eine Verteilungsfunktion modelliert wird.
Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$S(t) = S(0)e^{(r+c-\frac{\sigma^2}{2})t+X(t)}, \tag{3.21}$$

wobei der Korrekturparameter $c$ so gewählt wird, dass der erwartete Ertrag der Aktie der risikoneutrale Zinssatz $r$ ist. Dies bedeutet, dass $e^{(c+\frac{\sigma^2}{2})t} = \mathrm{E}^*(e^{X(t)})$, wobei $E^*$ das äquivalente Martingalmaß bezeichnet. Die Tatsache, dass der diskontierte Preis ein Martingal ist, ist äquivalent mit

$$\int_{|y|>1} e^y \nu(dy) < \infty \tag{3.22}$$

und

$$c = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^y + y1_{|y|\leq 1})\nu(dy). \tag{3.23}$$

Im Gegensatz zur Brownschen Bewegung enthält ein Sprung-Diffusions-Prozess mehr als eine Unsicherheitsquelle. Dies bedeutet, dass aufgrund des nicht stetigen Prozesses der Markt nicht vollständig ist und sich somit kein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß bestimmen lässt.
Die Verbesserung der Modellierung die durch einen Sprung-Diffusions Prozess im Gegensatz zur Brownschen Bewegung erhalten wird, ist, dass dieses Modell die beobachteten Marktdaten besser widerspiegelt. Mit Hilfe von Sprung-Diffusions-Prozessen, denen die im Abschnitt 3.2 vorgestellten Lévy-Prozesse zugrunde liegen, sollen zum einen die Schiefe und Kurtosis der Marktbewegungen besser dargestellt werden. Zum anderen wird die Annahme des stetigen Prozesses, der in der Brownschen Bewegung verwirklicht wird, aufgehoben. Sprung-Diffusions-Modelle können alltäglich auftretende kleine Bewegungen widerspiegeln. Dies geschieht mit Hilfe der, auch in diesem Modell enthaltenen, Brownschen Bewegung. Zusätzlich ist es durch den hinzugefügten Sprungterm $(\eta - 1)q(t)$ auch möglich, unerwartete, grössere Sprünge zu modellieren.
In den Tabellen 3.3-3.6 sind vergleichend die Momente der verschiedenen vorgestellten Lévy-Prozesse dargestellt. Es ist zu erkennen, dass durch die Änderungen der Parameter in den Verteilungsfunktionen verschiedene Eigenschaften der Momente (z.B. große oder kleine Kurtosis) modelliert werden können. In Abbildung 3.3 sind zwei Beispiele eines Sprung-Diffusions-Prozesses dargestellt.

| Verteilungsfunktion | Erwartungswert |
|---|---:|
| $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ | $\mu$ |
| Poisson$(\lambda)$ | $\lambda$ |
| Gamma$(a, b)$ | $a/b$ |
| VG$(\sigma, \nu, \theta)$ | $\theta$ |
| VG$(C, G, M)$ | $C(G - M)/(MG)$ |
| CGMY$(C, G, M, Y)$ | $C(M^{Y-1} - G^{Y-1})\Gamma(1 - Y)$ |

Tabelle 3.3: Überblick über die Erwartungswerte der verschiedenen Verteilungsfunktionen.

| Verteilungsfunktion | Varianz |
|---|---|
| $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ | $\sigma^2$ |
| $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ | $\lambda$ |
| $\mathrm{Gamma}(a, b)$ | $a/b^2$ |
| $\mathrm{VG}(\sigma, \nu, \theta)$ | $\sigma^2 + \nu\theta^2$ |
| $\mathrm{VG}(C, G, M)$ | $C(G^2 + M^2)/(MG)^2$ |
| $\mathrm{CGMY}(C, G, M, Y)$ | $C(M^{Y-2} + G^{Y-2})\Gamma(2 - Y)$ |

Tabelle 3.4: Überblick über die Varianz der verschiedenen Verteilungsfunktionen.

| Verteilungsfunktion | Asymmetrie (Skewness) |
|---|---|
| $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ | $0$ |
| $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ | $1/\sqrt{\lambda}$ |
| $\mathrm{Gamma}(a, b)$ | $2a^{-1/2}$ |
| $\mathrm{VG}(\sigma, \nu, \theta)$ | $\theta\nu(3\sigma^2 + 2\nu\theta^2)/(\sigma^2 + \nu\theta^2)^{3/2}$ |
| $\mathrm{VG}(C, G, M)$ | $2C^{-1/2}(G^3 - M^3)/(G^2 + M^2)^{3/2}$ |
| $\mathrm{CGMY}(C, G, M, Y)$ | $\dfrac{C(M^{Y-3} - G^{Y-3})\Gamma(3 - Y)}{(C(M^{Y-2} + G^{Y-2})\Gamma(2 - Y))^{3/2}}$ |

Tabelle 3.5: Überblick über die Schiefe der verschiedenen Verteilungsfunktionen.

| Verteilungsfunktion | Kurtosis |
|---|---|
| $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ | $3$ |
| $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ | $3 + \lambda^{-1}$ |
| $\mathrm{Gamma}(a, b)$ | $3(1 + 2a^{-1})$ |
| $\mathrm{VG}(\sigma, \nu, \theta)$ | $3(1 + 2\nu - \nu\sigma^4(\sigma^2 + \nu\theta^2)^{-2})$ |
| $\mathrm{VG}(C, G, M)$ | $3(1 + 2C^{-1}(G^4 + M^4)/(M^2 + G^2)^2)$ |
| $\mathrm{CGMY}(C, G, M, Y)$ | $3 + \dfrac{C(M^{Y-4} + G^{Y-4})\Gamma(4 - Y)}{(C(M^{Y-2} + G^{Y-2})\Gamma(2 - Y))^2}$ |

Tabelle 3.6: Überblick über die Kurtosis der verschiedenen Verteilungsfunktionen.

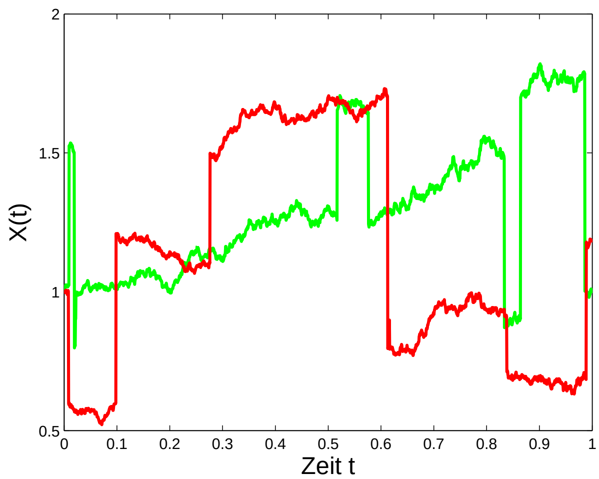


Abbildung 3.3: Realisierung zweier Sprung-Diffusion-Prozesse.

# Kapitel 4

# Bewertung Europäischer Optionen

Der faire Preis einer Option kann als abdiskontierter Erwartungswert der Auszahlungsfunktion angesehen werden. Um einen Erwartungswert berechnen zu können, muss der dem Basiswert zugrunde liegende stochastische Prozess betrachtet werden. Mit Kenntnis der Zinsrate kann der faire Preis einer Option berechnet werden. Das erste Modell zur Bewertung Europäischer Optionen stammt von Fischer Black und Myron Scholes [BS73] bzw. Robert Merton [Mer73]. Berühmt wurde dieses Modell vor allem, da es ermöglicht, den fairen Preis einer Option zu bestimmen und die Lösung des Modells eine geschlossene Form besitzt. Wie jedoch in Kapitel 3 beschrieben, hält dieses Modell den empirischen Überprüfungen nicht stand. Aus diesem Grund soll mittels Sprung-Diffusions-Prozessen, die die Marktdaten besser approximieren, der Preis einer Option bestimmt werden. Für diese Modelle existiert jedoch nur unter einschränkenden Annahmen eine geschlossene Lösung. Werden diese Annahmen nicht erfüllt müssen zur Berechnung des Optionspreises numerische Verfahren verwendet werden.
In diesem Kapitel wird zuerst das Black-Scholes-Modell mit den zugrunde liegenden Annahmen, die resultierende partielle Differentialgleichung und ihre Lösung vorgestellt. Vergleichend dazu wird das Merton-Modell als Beispiel eines Sprung-Diffusions-Prozesses betrachtet. Auch für dieses Modell werden die Annahmen und die entstehende Differentialgleichung, die in diesem Fall eine Integro-Differential-Gleichung sein wird, aufgeführt. Im Anschluss werden die geschlossenen Lösungen für zusätzliche Annahmen untersucht. Des Weiteren werden dann das Monte-Carlo-Verfahren und die Diskretisierung und Lösung der Integro-Differential-Gleichung beschrieben.

## 4.1 Das Black-Scholes Modell

In den frühen 70er Jahren machten Fischer Black und Myron Scholes [BS73] zeitgleich mit Robert Merton [Mer73] einen großen Durchbruch mit der Herleitung einer Differentialgleichung, die einen fairen Preis für jedes Derivat, dem eine nicht dividendenzahlenden Aktie zugrunde liegt, bestimmt. Sie benutzten diese Gleichung, um den Preis für Europäische Call- und Put-Optionen zu berechnen. Die Darstellung und Beschreibungen dieses Modells sind [Hul01], [KE99] und [Sey00] entnommen.

### 4.1.1 Die Annahmen

Die folgenden Annahmen liegen dem Black-Scholes-Modell zugrunde:

- Der Aktienkurs $S$ folgt einem stetigen stochastischen Prozess und wird beschrieben durch die stochastische Differentialgleichung

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu d(t) + \sigma dW(t). \tag{4.1}$$

  Hierbei bezeichnet $\mu$ die Driftrate, $\sigma$ die Volatilität und $W(t)$ einen Wiener Prozess.

- Der risikolose Zinssatz $r$ ist bekannt und konstant.
- Kontinuierliches Handeln ist möglich, d.h. zu jeder Zeit $t \in [0, T]$.
- Es gibt keine Transaktionskosten oder Steuern.
- Die Wertpapiere sind beliebig teilbar.
- Es gibt keine Arbitragemöglichkeiten.
- Es gibt keine Dividendenzahlungen.

### 4.1.2 Die Black-Scholes-Gleichung

Black und Scholes zeigen in ihrer Arbeit [BS73], dass unter der Annahme einer konstanten Zins- und Volatilitätsentwicklung die Option durch ein geeignetes Portfolio bestehend aus dem Basiswert $S$ und einer Anlage oder einem Kredit mit dem Zinssatz $r$ dynamisch dupliziert werden kann. Der faire Preis der Option bestimmt sich daher als diskontierter Erwartungswert der Auszahlungen zum Zeitpuntk $T$. Neben der Verwendung partieller Differentialgleichungen als hauptsächliches technisches Hilfsmittel ist die Konstruktion eines risikolosen Portfolios aus Bond, Aktie und Option die maßgebliche konzeptionelle Idee von Black und Scholes.
Ausgehend vom Modell der Brownschen Bewegung lässt sich, mit Hilfe des Itô-Lemmas

**Lemma 4.1.1**
*$x$ folge einem Itô-Prozess und $g(x,t)$ sei eine Funktion mit stetigen $\frac{dg}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$, $\frac{dg}{dt}$. Dann folgt auch $y = g(x,t)$ einem Itô-Prozess mit dem gleichen Wiener Prozess $W$:*

$$dy = \left(\frac{dg}{dx}a + \frac{dg}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2g}{dx^2}b^2\right)dt + \frac{dg}{dx}b\,dW$$

, zur Berechnung des Wertes einer Europäischen Option die Black-Scholes-Gleichung herleiten. In dieser ist das Risiko, das durch die Stochastik und die Drift $\mu$ im Basiswert $S$ steckt, eliminiert. Insofern ist der einzige Parameter, der die Stochastik reflektiert und von dem der Wert $V$ der Option abhängt, die Volatilität $\sigma$.
Auf diese Weise wird gezeigt, dass der Optionspreis für $S > 0$ und $0 \leq t \leq T$ die *Black-Scholes-Gleichung*

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0 \tag{4.2}$$

erfüllen muss. Einen ausführlichen Beweis zur Herleitung der Gleichung findet man z.B. in [Sey00, Anhang A3].

### 4.1.3 Die Black-Scholes-Formel

Die Black-Scholes-Gleichung (4.2) besitzt eine analytische Lösung. Der Wert einer Europäischen Call-Option $V_C(S(0), t)$ ergibt sich aus

$$V_C(S(0), t) = S(0)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2). \tag{4.3}$$

Hierbei sind $d_1$ und $d_2$ gegeben durch

$$d_1 = \frac{\ln(S(0)/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{4.4}$$

und

$$d_2 = \frac{\ln(S(0)/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{4.5}$$

Der Wert des heutigen Kurses wird durch $S(0)$ bezeichnet und $N(x)$ steht für die kumulative Normalverteilung mit dem Mittelwert 0 und der Varianz 1

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \tag{4.6}$$

Der Wert einer Europäischen Putoption ist

$$V_P(S(0), t) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S(0)N(-d1). \tag{4.7}$$

**Bemerkung 4.1.2**
*Da sich der Wert einer Europäischen Put-Option $V_P(S(0), t)$ mittels der Put-Call-Parität (2.2) berechnen lässt, wird im Folgenden nur die Bewertung Europäischer Call-Optionen betrachtet.*

## 4.2 Das Merton-Modell

Die Arbeit von Black und Scholes führte zu einem großen Durchbruch in der Optionspreistheorie. Für die Gültigkeit der Formel werden die in Abschnitt 4.1.1 benannten Annahmen für ideale Marktbedingungen vorausgesetzt. Eine kritische Annahme dieses Modells ist die Annahme des kontinuierlichen Handelns und die Annahme des kontinuierlichen stochastischen Prozesses. Merton hat in [Mer76] ein Modell entwickelt, in dem die Aktienkursdynamik durch einen Sprung-Diffusions-Prozess modelliert wird. Die Grundlagen des Modells und die Herleitung der partiellen Integro-Differential-Gleichung, die im Folgenden dargestellt werden, sind [Mer76] entnommen.

### 4.2.1 Die Annahmen

- Der Kurs $S$ folgt einem stochastischen Prozess, der durch

  $$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\alpha - \lambda\kappa)dt + \sigma dW(t) + dq(t) \tag{4.8}$$

  beschrieben wird. Hierbei ist $\alpha$ der erwartete Aktienertrag und $\sigma^2$ die Varianz. Der Standard Wiener Prozess $W(t)$ ist unabhängig vom Poisson-Prozess $q(t)$. Die Wahrscheinlichkeiten dieses Prozesses lassen sich beschreiben als

  $$\begin{aligned} &P(\text{Das Ereignis tritt nicht im Intervall } [t, t+h] \text{ auf}) = 1 - \lambda h \\ &P(\text{Das Ereignis tritt im Intervall } [t, t+h] \text{ auf}) = \lambda h. \end{aligned} \tag{4.9}$$

  Dabei ist $\lambda$ die durchschnittliche Anzahl der Ereignisse pro Zeiteinheit und $\kappa = \mathrm{E}[Y-1] = \mathrm{E}[Y] - 1$, wobei $(Y-1)$ die prozentuale Veränderung des Preises ist, falls das Poisson-Ereignis eintritt. Der Erwartungswertoperator über die Zufallsvariable $Y$ wird mit $\mathrm{E}[\cdot]$ bezeichnet.

- Der risikolose Zinssatz $r$ ist bekannt und konstant.
- Es gibt keine Transaktionskosten oder Steuern.
- Es gibt keine Arbitragemöglichkeiten.
- Es gibt keine Dividendenzahlungen.

### 4.2.2 Herleitung der partiellen Integro-Differential-Gleichung nach dem Merton-Modell

#### Der Aktienpreis und Optionspreisdynamik

Die totale Veränderung des Aktienpreises soll sich aus zwei Arten von Veränderungen zusammensetzen. Zum einen aus den normalen, erwarteten Änderungen und zum anderen aus den plötzlichen, unerwarteten Änderungen. Die normalen Preisschwingungen können beispielsweise ein zeitweiliges Ungleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage, Veränderungen in den Konjunkturaussichten oder andere neue Informationen sein, die geringe Veränderungen im Aktienwert verursachen. Diese Informationskomponente für den Aktienkurs wird modelliert durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit konstanter Varianz und hat einen kontinuierlichen Verlauf.
Die „unnormalen“, unerwarteten Schwingungen im Aktienpreis spiegeln wichtige neue Informationen über die Aktien wider. Diese Informationen haben mehr als eine geringe Auswirkung auf den Optionspreis. Normalerweise sind solche Informationen spezifisch für die Firma oder möglicherweise eine Industrie. Es ist sinnvoll anzunehmen, dass es „aktive“ Zeiten gibt, in denen solche Informationen auftreten und „ruhige“ Zeiten, in denen sie nicht auftreten. Obwohl diese Zeiten zufällig sind, treten naturgemäß wichtige, unerwartete Informationen nur an diskreten Zeitpunkten auf. Aus diesem Grund wird diese Komponente durch einen Sprung-Prozess, in der Regel durch einen Poisson-Prozess, modelliert. Für den Fall, dass ein Poisson-Ereignis eintritt, müssen die Auswirkungen des Ereignisses auf die Aktie bestimmt werden. Sei $S(t)$ der Aktienpreis zur Zeit $t$ und $Y$ die Zufallsvariablenbeschreibung für die Größe der Auswirkungen auf den Preis, dann ist der Aktienpreis $S(t+h)$, den kontinuierlichen Teil vernachlässigend, zur Zeit $t+h$ gegeben durch die Zufallsvariable $S(t+h)=S(t)Y$, vorausgesetzt, dass ein solches Ereignis zwischen $t$ und $t+h$ auftritt.
Es wird angenommen, dass $Y$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit kompakten Träger ist und $Y \geq 0$ gilt. Außerdem sind die Zufallsvariablen $\{Y\}$ unabhängig und identisch verteilt.
In (4.8) beschreibt $\sigma dW(t)$ den Teil der normalen Preisänderungen, während $dq(t)$ den Teil der unerwarteten Preisveränderungen widerspiegelt. Falls $\lambda = 0$ (und somit auch $dq = 0$), ist die Änderung des Aktienkurses identisch zu der im Modell von Black und Scholes. Die Gleichung (4.8) kann somit umgeschrieben werden in

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \begin{cases} (\alpha - \lambda\kappa)dt + \sigma dW(t), & \text{falls das Poisson-Ereignis nicht eintritt} \\ (\alpha - \lambda\kappa)dt + \sigma dW(t) + (Y-1), & \text{falls das Poisson-Ereignis eintritt,} \end{cases} \tag{4.10}$$

wobei, mit Wahrscheinlichkeit 1, nicht mehr als ein Poisson-Ereignis an einem Zeitpunkt auftritt. Falls ein Ereignis eintritt, dann ist $(Y-1)$ eine Impulsfunktion, die einen endlichen Sprung von $S$ nach $SY$ bewirkt. Der resultierende Pfad für den Kurs $S(t)$ ist überwiegend kontinuierlich mit endlich vielen Sprüngen verschiedener Vorzeichen und Amplituden an diskreten Zeitpunkten. Falls $\alpha, \lambda, \kappa$ und $\sigma$ konstant sind, dann kann das Verhältnis des Aktienpreises zur Zeit $t$ und zum Zeitpunkt 0 geschrieben werden als

$$\frac{S(t)}{S(0)} = \exp((\alpha - \sigma^2/2 - \lambda\kappa)t + \sigma W(t))Y_n,$$

wobei $W(t)$ eine Gaußsche Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz $t$ ist. Es gilt $Y_n = 1$ für $n = 0$ und ansonsten $Y_n = \prod_{j=0}^{n} Y_j$ für $n \geq 1$, mit unabhängigen und identisch verteilten $Y_j$. Die Anzahl $n$ der Sprünge ist poissonverteilt mit Parameter $\lambda t$. Analog zur Bewegung des Aktienkurses läßt sich auch die Optionspreisbewegung beschreiben. Es wird vorausgesetzt, dass der Optionspreis $V$ als eine zweifach differenzierbare Funktion des Aktienkurses und der Zeit geschrieben werden kann. Wenn der Aktienpreis einer Dynamik, beschrieben in (4.8), folgt, kann die Änderung der Option in einer ähnlichen Form geschrieben werden, nämlich als

$$\frac{dV(S,t)}{V(S,t)} = (\alpha_V - \lambda\kappa_V)dt + \sigma_V dW(t) + dq_V(t), \tag{4.11}$$

wobei $\alpha_V$ der erwartete Ertrag der Option und $\sigma_V^2$ die Varianz des Optionspreises ist. Der unabhängige Poisson-Prozess mit dem Parameter $\lambda$ wird mit $q_V(t)$ bezeichnet. Es ist $\kappa_V = \mathrm{E}[Y_V - 1]$ mit $(Y_V - 1)$ als prozentuale Änderung des Optionspreises für den Fall, dass das Poisson-Ereignis eintritt und $\mathrm{E}[\cdot]$ ist der Erwartungswertoperator über die Zufallsvariable $Y_V$.
Mit Hilfe des Itô-Lemmas für Sprung-Prozesse

$$\begin{aligned} dV = &\left(V_S(\alpha - \lambda\kappa)S + V_t + \frac{1}{2}V_{SS}\sigma^2 S^2\right) dt + V_S \sigma S dW \\ &+ (V(S + \Delta S, t) - V(S,t)) \end{aligned} \tag{4.12}$$

erhält man folgende wichtige Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha_V =& \Big(\frac{1}{2}\sigma^2 V_{SS}(S,t) + (\alpha - \lambda\kappa)SV_S(S,t) + V_t(S,t) \\ &+ \lambda \mathrm{E}\left[V(SY,t) - V(S,t)\right]\Big)/V(S,t), \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\sigma_V = V_S(S,t)\sigma S/V(S,t). \tag{4.14}$$

Hierbei wird genutzt, dass $V(S+\Delta S) = V(SY)$ gilt. Die Indizes an $V(S,t)$ bezeichnen die partiellen Ableitungen.
Der Poisson-Prozess des Optionspreises $q_V(t)$ ist abhängig vom Poisson-Prozess des Aktienpreises $q(t)$. Das Poisson-Ereignis für den Optionspreis tritt genau dann auf, wenn das Poisson-Ereignis für den Aktienkurs auftritt. Außerdem gilt, dass, falls das Poisson-Ereignis für die Aktie eintritt und die Zufallsvariable den Wert $Y = y$ hat, ebenfalls ein Poisson-Ereignis für die Option eintritt und die Zufallsvariable $Y_V$ den Wert $V(Sy,t)/V(S,t)$ hat, also $Y_V = V(SY,t)/V(S,t)$. Obwohl die beiden Prozesse abhängig sind, sind sie nicht linear abhängig, denn $V$ ist keine lineare Funktion in $S$. Wir betrachten eine Portfoliostrategie, welche die Aktie, die Option und die risikolose Anlage mit Zins $r$ in Anteilen $w_1, w_2$ und $w_3$ enthält. Es gilt $\sum_{j=1}^3 w_j = 1$. Wenn $P$ der Wert des Portfolios ist, läßt sich die Dynamik des Portfolios schreiben als

$$\frac{dP}{P} = (\alpha_P - \lambda\kappa_P)dt + \sigma_P dW + dq_P, \tag{4.15}$$

wobei $\alpha_P$ der momentane erwartete Ertrag des Portfolios und $\sigma_P^2$ die momentane Varianz ist. Der Poisson-Prozess $q_P(t)$ mit dem Parameter $\lambda$ ist unabhängig. Mit der prozentualen Änderung des Optionspreises $(Y_P - 1)$ ist für den Fall, dass das Poisson-Ereignis eintritt $\kappa_P = \mathrm{E}[Y_P - 1]$ und $\mathrm{E}[\cdot]$ ist der Erwartungswertoperator über die Zufallsvarible $Y_P$.
Durch (4.8) und (4.11) erhält man

$$\alpha_P = w_1(\alpha - r) + w_2(\alpha_V - r) + r, \tag{4.16}$$

$$\sigma_P = w_1\sigma + w_2\sigma_W, \tag{4.17}$$

$$Y_P - 1 = w_1(Y - 1) + w_2(V(SY,t) - V(S,t))/V(S,t), \tag{4.18}$$

wobei $w_3$ ersetzt wurde durch $w_3 = 1 - w_1 - w_2$. Im Black-Scholes Fall, in dem $\lambda = 0$ gilt (und deshalb $dq = dq_W = dq_P = 0$), kann der Portfolioertrag durch die Wahl $w_1 = w_1^*$ und $w_2 = w_2^*$ risikolos gemacht werden, damit $w_1^*\sigma + w_2^*\sigma_W = 0$. Um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen, muss der erwartete (und der realisierte) Ertrag des Portfolios mit den Gewichten $w_1^*$ und $w_2^*$ gleich dem risikolosen Zins $r$ sein. Mit (4.16) und (4.17) erhält man die Bedingung

$$(\alpha - r)/\sigma = (\alpha_W - r)/\sigma_W. \tag{4.19}$$

Mit $\lambda = 0$ ergibt sich aus (4.13), (4.14) und (4.19) für den Optionspreis die partielle Differentialgleichung von Black und Scholes

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV + V_t = 0 \tag{4.20}$$

Für den Fall eines Sprung-Prozesses $dq$ ist der Ertrag des Portfolios mit Gewichten $w_1^*$ und $w_2^*$ nicht risikolos. Außerdem zeigt die Betrachtung von (4.18), dass es keine Wahl von Gewichten $w_1$ und $w_2$ gibt, die das Sprungrisiko eliminieren (d.h. $Y_P = 1$). Der Grund dafür ist, dass das Zusammenstellen eines Portfolios eine lineare Operation ist, der Optionspreis aber keine lineare Funktion des Aktienpreises ist. Man kann jedoch die Ertragscharakteristiken des Portfolios ausarbeiten, aus denen dann der „Black-Scholes-Hedge"[1] folgt. Bezeichne $P^*$ den Wert dieses Portfolios, so ergibt sich aus Gleichung (4.15)

$$\frac{dP^*}{P^*} = (\alpha_P^* - \lambda\kappa_P^*)dt + dq_P^*. \tag{4.21}$$

Es sei bemerkt, dass der Ertrag des Portfolios nun ein purer Sprung-Prozess ist, da der kontinuierliche Teil der Aktien- und Optionspreisbewegungen durch das Hedging eliminiert wurde. So kann man (4.21) auch schreiben als

$$\frac{dP^*}{P^*} = \begin{cases} (\alpha_P^* - \lambda\kappa_p^*)dt, & \text{falls das Poisson-Ereignis nicht eintritt} \\ (\alpha_P^* - \lambda\kappa_P^*)dt + (Y_P^* - 1), & \text{falls das Poisson-Ereignis eintritt} \end{cases} \tag{4.22}$$

In (4.22) ist zu erkennen, dass der Ertrag des Portfolios überwiegend vorauszusagen ist und $(\alpha_P^* - \lambda k_P^*)$ einbringt. Durchschnittlich tritt alle $1/\lambda$ Zeiteinheiten ein unerwarteter Sprung des Portfoliowertes auf. Aus (4.18) und (4.14) kann man weitere qualitative Eigenschaften des Ertrags ableiten

$$Y_P^* - 1 = w_2^*[V(SY,t) - V(S,t) - V_S(S,t)(SY - S)]/V(S,t). \tag{4.23}$$

### Eine Optionspreisformel

Wie im vorangegangenen Teil gezeigt, gibt es keine Möglichkeit, ein risikoloses Portfolio von Aktien und Optionen zu konstruieren und deshalb kann diese Grundidee von Black und Scholes, die zur Herleitung der Black-Scholes-Gleichung verwendet wird, nicht angewandt werden. Nach [Sam65] kann für den Fall, dass der erforderliche erwartete Ertrag der Option als eine Funktion des Aktienkurses und des Ausübungszeitpunkt bekannt ist, eine Optionspreisformel hergeleitet werden. Sei $b(S,\tau)$ der Ausgleich, der den erwarteten Ertrag der Option widerspiegelt, wenn $S$ der aktuelle Aktienkurs und $\tau = T - t$ die verbleibende Zeit bis zum Ausübungszeitpunkt ist. Nach (4.13) muss dann $V$ (als Funktion abhängig von der Zeit bis zum Ausübungszeitpunkt) der Gleichung

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (\alpha - \lambda\kappa)SV_S - V_\tau - b(S,\tau)V + \lambda \mathrm{E}[V(SY,\tau) - V(S,\tau)] \tag{4.24}$$

[1] Der Black-Scholes-Hedge ist eine Strategie, ein Portfolio anzulegen um das Risiko zu eliminieren.

mit den folgenden Randbedingungen genügen. Für eine Call-Option gilt

$$\begin{aligned} &V(0,\tau) = 0, \\ &V(S,0) = (0, S-K)^+, \end{aligned} \tag{4.25}$$

wobei $K$ der Ausübungspreis ist.
Eine zweite Näherung an das Preisproblem folgt der originalen Herleitung von Black und Scholes und deren Annahme, dass das „Capital Asset Pricing Model"[2] eine gültige Beschreibung für Erträge von Ausgleichssicherheiten ist. Im vorigen Abschnitt wurde die Aktienpreisdynamik als ein Ergebnis von zwei Komponenten beschrieben: dem kontinuierlichen Teil und einer Sprungkomponente. Sind die Informationen des letzteren Teils nur firmenspezifisch, so haben sie wenig Einfluss auf andere Aktien, also den Markt im Allgemeinen. Sind solche Informationen Ursache für Sprünge, so repräsentiert der Ertrag des Aktienkurses ein „nichtsystematisches" Risiko, d.h. die Sprungkomponente ist nicht korreliert mit dem Markt.
Die Betrachtung der Ertragdynamik (4.21) zeigt, dass die einzige Quelle für Unsicherheiten in der Sprungkomponente der Aktie liegt. Wenn das „Capital Asset Pricing Model" gilt, dann muss der erwartete Ertrag gleich dem risikolosen Zinssatz sein, also $\alpha_P^* = r$. Aber nach Gleichung (4.16) impliziert diese Bedingung, dass $w_1^*(\alpha - r) + w_2^*(\alpha_w - r) = 0$ ist, oder man ersetzt $w_1^*$ und $w_2^*$ und erhält

$$(\alpha - r)/\sigma = (\alpha_W - r)/\sigma_W. \tag{4.26}$$

Gleichung (4.26) zusammen mit (4.13) und (4.14) ergibt, dass $V$ folgender Gleichung genügen muss

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - \lambda\kappa) S V_S - V_\tau - rV + \lambda \mathrm{E}[V(SY,\tau) - V(S,\tau)]. \tag{4.27}$$

Dabei gelten die Randbedingungen aus (4.25). Während (4.27) formal der selbe Gleichungstyp wie (4.24) ist, sei bemerkt, dass (4.27) weder von $\alpha$ noch von $b(S,\tau)$ abhängt. Stattdessen kommt nur der Zinssatz $r$ wie in der Standard Black-Scholes-Gleichung vor. Außerdem reduziert sich (4.27) für den Fall $\lambda = 0$ auf die Black-Scholes-Gleichung (4.20), d.h. es gibt keine Sprünge. Es ist wichtig zu bemerken, dass, obwohl die Sprünge ein pures nicht systematisches Risiko repräsentieren, die Sprungkomponente den Ausgleichs-Optionspreis beeinflußt, d.h. man kann ohne Berücksichtigung der Sprungkomponente nicht den fairen Preis berechnen. Mit der Definition des Erwartungswertoperators $\mathrm{E}[\cdot]$

$$\mathrm{E}[Y] = \int_0^\infty Y g(Y)\, dY$$

lässt sich (4.27) schreiben als

$$\begin{aligned} V_\tau &= \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - \lambda\kappa) S V_S - rV + \left(\lambda \int_0^\infty V(SY) g(Y)\, dY - \lambda V\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - \lambda\kappa) S V_S - (r+\lambda) V}_{\text{PDE-Teil}} + \underbrace{\lambda \int_0^\infty V(SY) g(Y)\, dY.}_{\text{Integral-Teil}} \end{aligned} \tag{4.28}$$

Hierbei bezeichnet $g(Y)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Sprünge. Sie besitzt die Eigenschaften, dass $\forall Y$, $g(Y) \geq 0$ und $\int_0^\infty g(Y)\, dY = 1$. Im weiteren Verlauf wird (4.28) als

[2] Eine genauere Beschreibung des „Capital Asset Pricing Model" findet sich in [BS73].

Darstellung der partiellen Integro-Differential-Gleichung (auch kurz als PIDE bezeichnet) verwendet. Ebenfalls wird auf die Aufteilung der PIDE in einen Differential- und eine Integral-Teil zurückgegriffen.
Des Weiteren wird im Folgenden die stochastische Differentialgleichung (4.8) ersetzt durch

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) + dq(t). \tag{4.29}$$

Dass diese SDE mit (4.8) übereinstimmt, soll nun gezeigt werden. Der Beweis wird analog zu [Gla04, S. 127] geführt.

*Beweis:*
Die Drift $\mu$ bezeichnet in Abwesenheit von Sprüngen den risikofreien Zins $r$, wenn keine Dividendenzahlungen existieren und das Modell die Dynamik unter einem risikoneutralem Maß repräsentiert. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass $r$ konstant sei. Dann ist der Driftterm bestimmt duch die Bedingung, dass $S(t)e^{-rt}$ ein Martingal ist. Merton erweitert dieses Prinzip auf sein Sprung-Diffusions-Modell unter der Annahme, dass Sprünge spezifisch für eine Aktie sind und diversifiziert werden können. Dies geschieht durch die Annahme, dass der Markt den Investor nicht für das Risiko der Sprünge entschädigt. Die Annahme bestimmt den Driftparameter folgendermaßen:
Eine Standardeigenschaft des Poisson-Prozesses $J(t)$ ist, dass $J(t) - \lambda t$ ein Martingal ist. Eine Verallgemeinerung dieser Eigenschaft ist, dass

$$\sum_{i=1}^{J(t)} h(Y_j) - \lambda \mathrm{E}[h(Y)]t \tag{4.30}$$

ein Martingal ist für unabhängige und identisch verteilte $Y, Y_1, Y_2$ und jede Funktion $h$ für die $\mathrm{E}[h(Y)]$ endlich ist. Dem entsprechend ist

$$q(t) - \lambda\kappa t \tag{4.31}$$

ein Martingal, falls $\kappa{=}\mathrm{E}[Y_j] - 1$. Die Wahl des Parameters $\mu$, der $S(t)e^{-rt}$ zu einem Martingal macht, muss folglich $\mu{=}r{-}\lambda\kappa$ sein und somit ist (4.29) eine alternative Beschreibung der Kursdynamik (4.8). □

## 4.3 Geschlossene Lösungen des Merton-Modells

Im Gegensatz zur Black-Scholes-Gleichung (4.2) ist es für die PIDE (4.28) nicht möglich, eine allgemeingültige analytische Lösungsformel analog zur Black-Scholes-Formel (4.3) herzuleiten. Die Sprünge repräsentieren ein nicht-systematisches Risiko und somit beeinflusst die Sprungkomponente den Optionspreis. Aus diesem Grund kann nicht ohne Berücksichtigung dieser Komponente der faire Optionspreis berechnet werden. Jedoch hat Merton [Mer76] unter Spezifizierung der Verteilungsfunktion für die Sprungkomponente eine analytische Formel zur Optionspreisbewertung entwickelt. Ein Spezialfall, für den die Herleitung einer analytischen Lösung möglich ist, ist das Vorliegen einer Lognormalverteilung der Sprünge. Eine andere Spezifizierung stellt die Annahme dar, dass im Falle eines Sprungs der Wert des Basiswertes auf 0 fällt. Dies wird als Möglichkeit des plötzlichen Ruins bezeichnet. Diese beiden Fälle der Verteilungsfunktionen werden in den nächsten Abschnitten beschrieben und die dazugehörigen Lösungsformeln angegeben.

### 4.3.1 Plötzlicher Ruin

Der erste Fall einer geschlossene Lösung liegt vor, wenn die Möglichkeit des plötzlichen Ruins besteht. D.h., falls ein Poisson-Ereignis eintritt, fällt der Aktienkurs auf den Wert 0. Dies bedeutet, dass $Y=0$ mit Wahrscheinlichkeit 1 auftritt. Die Änderung des Aktienkurses $(Y-1)=-1$ spiegelt dann den vollständigen Wertverlust der Aktie wider. Sei $X_n=\prod_{i=0}^{n} Y$ eine Zufallsvariable, die dieselbe Verteilung besitzt wie das Produkt von $n$ unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen, jede identisch verteilt zur Zufallsvariable $Y$, wobei gilt, dass $X_0 = 1$. So gilt für den Fall des plötzlichen Ruins, dass $X_n = 0$ für $n \neq 0$ und $\kappa=-1$. In diesem Fall ergibt sich der Preis einer Call-Option $V_C$ zum Zeitpunkt $t$ als

$$\begin{aligned} V_C(S,\tau) &= e^{-\lambda\tau} BS_C(Se^{\lambda\tau},\tau,K,\sigma^2,r) \\ &= e^{-\lambda\tau}\left(Se^{\lambda\tau}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)\right) \\ &= SN(d_1) - Ke^{-(r+\lambda)\tau}N(d_2) \end{aligned} \tag{4.32}$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(Se^{\lambda\tau}/K) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\ln(S/K) + (r+\lambda+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \end{aligned}$$

und

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

Somit wird (4.32) zu

$$V_C(S,\tau) = BS_C(S,\tau,K,\sigma^2,r+\lambda). \tag{4.33}$$

Hierbei bezeichnet $BS_C(S,\tau,K,\sigma^2,r+\lambda)$ die Black-Scholes-Formel für einen Call mit den angegebenen Parametern und $N(\cdot)$ die Normalverteilung.
Die Formel (4.33) ist identisch mit der Standard Black-Scholes-Lösung, allerdings mit größerer Zinsrate $r' = r + \lambda$. Wie in [Mer73] gezeigt, ist der Optionspreis eine wachsende Funktion der Zinsrate. Deshalb ist eine Option auf eine Aktie, die eine positive Wahrscheinlichkeit für einen vollständigen Ruin hat, wertvoller als eine Option auf eine Aktie, für die diese Möglichkeit nicht besteht. Für die Berechnung eines Optionspreises unter der Möglichkeit des plötzlichen Ruins wird somit die Black-Scholes-Formel mit veränderter Zinsrate verwendet.

### 4.3.2 Lognormalverteilung

Im zweiten Spezialfall wird vorausgesetzt, dass die Zufallsvariable $Y$ lognormalverteilt ist. Nach dem Martingalansatz (siehe 4.4) kann der Preis einer Call-Option unter der Bedingung $S = S_0$, folgendermaßen geschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
V_C(S,\tau) &= e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} P(n \text{ Sprünge}) \mathrm{E}_0[\max(0, S_T - K)|n \text{ Sprünge}] && (4.34)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}\right] \mathrm{E}_{0,X_n}\left[BS_C(SX_n e^{-\lambda\kappa\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)\right]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda'\tau}(\lambda'\tau)^n}{n!}\right] \left[SN(d_{1,n}) - e^{-r_n\tau} KN(d_{2,n})\right] && (4.35)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda'\tau}(\lambda'\tau)^n}{n!}\right] BS_C(S, \tau, K, v_n^2, r_n), && (4.36)
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_{0,X_n} &= \text{Erwartungswertoperator bezüglich der Verteilung der } X_n \text{ zum Zeitpunkt 0},\\
S_T &= S \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T)\\
&\quad \text{der risikoneutrale Aktienkurs zum Endzeitpunkt } T,\\
\lambda' &= \lambda(1+\kappa),\\
\kappa &= \mathrm{E}[Y-1] = e^{(\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2)} - 1,\\
d_{1,n} &= \frac{\ln(S/K) + (r_n + \frac{1}{2}v_n^2)\tau}{v_n\sqrt{\tau}},\\
d_{2,n} &= d_{1,n} - v_n\sqrt{\tau},\\
r_n &= r - \lambda\kappa + \frac{n(\log(1+\kappa))}{\tau},\\
v_n^2 &= \sigma^2 + \frac{n\sigma_J^2}{2},\\
\mu_J &= \text{Erwartungswert der Sprungverteilung und}\\
\sigma_J^2 &= \text{Varianz der Sprungverteilung.}
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich also auch für den Fall der lognormalverteilten Sprünge eine Anwendung der Black-Scholes-Formel mit veränderten Eingabeparametern. Zur Berechnung eines Optionswertes wird eine unendliche Reihe aus Optionspreisen der Black-Scholes-Formel, die mit einer Poisson-Verteilung gewichtet werden, bestimmt.

**Bemerkung 4.3.1**
*Es ist zu beobachten dass der Zins $r_n$ für steigende $n$ immer kleiner und auch negativ wird. Dies ergibt sich, da $\kappa$ als Erwartungswert der Sprungverteilungsfunktion in der Regel negativ sein sollte, um die Bewegungen der Aktien an den Märkten realistisch widerzuspiegeln. Da $\kappa$ negativ ist und in jedem Summanden mit $n$ multipliziert wird, wird die Zinsrate ständig kleiner und schließlich negativ.*
*Es folgt, dass die Summe mit den meisten nicht verschwindenden Summanden eine solche ist, die einen hohen Startkurs hat, denn dann ist der Aktienkurs, bei einem negativen Zins am längsten ungleich 0.*

### Konvergenz der unendlichen Reihe für die Lognormalverteilung

In Kapitel 6 werden verschiedene Bewertungsverfahren hinsichtlich ihrer Flexibilität gegenüber Eingabeparametern und Konvergenz untersucht. Dazu wird (4.36) häufig als Re-

ferenzlösung verwendet. Zum Beweis der Konvergenz der unendlichen Reihe wird (4.35) verwendet.
*Beweis:*
Zunächst soll gezeigt werden, dass

$$SN(d_{1,n}) - e^{-r_n\tau} KN(d_{2,n}) \tag{4.37}$$

beschränkt ist. Die Normalverteilung fällt, wie in Abschnitt 3.3.2 gezeigt wurde, nach beiden Seiten schnell ab. Somit folgt, dass die Werte der kumulativen Normalverteilung durch ein um den Nullpunkt symmetrisches Gebiet beschränkt sind. Sei dieses Gebiet mit $[r_{min}, r_{max}]$ bezeichnet. Somit ist auch (4.37) beschränkt, da alle anderen Parameter für die Berechnung konstant sind. Der Wertebereich von (4.37) sei $[C_{min}, C_{max}]$.
Als nächstes soll gezeigt werden, dass das notwendige Kriterium $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ erfüllt ist. Die Koeffizienten $a_n$ sind gegeben durch

$$a_n = \frac{e^{-\lambda'\tau}}{n!} \left[SN(d_{1,n}) - e^{-r_n\tau} KN(d_{2,n})\right].$$

Durch die Beschränkung von (4.37) ergibt sich

$$a_n \leq \frac{e^{-\lambda'\tau}}{n!} C_{max}$$

und somit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Als hinreichendes Konvergenzkriterium soll das Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

benutzt werden. Dies bedeutet

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{[SN(d_{1,n+1}) - e^{-r_{n+1}\tau} KN(d_{2,n+1})}{[SN(d_{1,n}) - e^{-r_n\tau} KN(d_{2,n})]} \frac{n!}{(n+1)!}\right| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{C_{max}}{C_{min}} \frac{1}{n+1} < 1.
\end{aligned}$$

□

## 4.4 Erwartungswertentwicklung für das Merton-Modell

Wie im vorangehenden Abschnitt 4.3 erwähnt, gibt es für die Gleichung (4.28) nur im Fall des plötzlichen Ruins und der Lognormalverteilung eine analytische Lösung. Eine alternative Möglichkeit, einen Optionspreis zu nähern, ist die Erwartungswertentwicklung, die auf dem Martingalansatz beruht. Der Martingalansatz ist eines der am häufigsten verwendeten Prinzipien zur Optionspreisbestimmung. Er sagt aus, dass der faire Preis der Option der diskontierte Erwartungswert der Auszahlungsfunktion unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugrunde liegenden ökonomischen Faktoren ist. Es gilt also

$$V(S,0) = e^{-rT} \mathrm{E}^*[V(S,T)],$$

wobei $\mathrm{E}^*$ der Erwartungswert unter dem äquivalenten Martingalmaß ist. Somit ergibt sich der Preis für einen Call als

$$\begin{aligned} V_C(S,\tau) &= e^{-r\tau}\sum_{n=0}^{\infty} P(n \text{ Sprünge})\mathrm{E}_0[\max(0,S_T-K)|n \text{ Sprünge}] \qquad (4.38)\\ &= e^{-r\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}\right]\mathrm{E}_0\left[\max(0,S_T X_n e^{-\lambda\kappa\tau}-K)\right]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}\right]\mathrm{E}_{0,X_n}\left[e^{-r\tau}\mathrm{E}_0(\max(0,S_T X_n e^{-\lambda\kappa\tau}-K))\right]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}\right]\mathrm{E}_{0,X_n}\left[BS_C(SX_n e^{-\lambda\kappa\tau},K,\tau,\sigma^2,r)\right]. \qquad (4.39) \end{aligned}$$

Es gilt $X_i = \prod_{j=1}^{i} Y_j$. Bei der hier vorgestellten Erwartungswertentwicklung ergibt sich wie in Abschnitt 4.3 eine Anwendung der Black-Scholes-Formel. Hier jedoch spiegelt sich der Erwartungswert für den Wert der Option bei der Fälligkeit nicht in Änderungen der Parameter $\sigma$ und $r$, sondern in der Änderung des Kurses wider. Der Erwartungswert über den Optionspreis der Black-Scholes-Formel wird als Black-Scholes-Preis für einen erwarteten Kurs zum Fälligkeitszeitpunkt $T$ interpretiert.
Es wird festgestellt, dass ohne weitere Spezifikation der Verteilungsfunktion der $Y_j$ auch für die Erwartungswertentwicklung keine Lösung anzugeben ist.
Um in Kapitel 6 verschiedene Verfahren zur Optionspreisbestimmung vergleichen zu können, sollen auch hier die Möglichkeiten der Lognormalverteilung und des plötzlichen Ruins dargestellt werden.
Zur Berechnung von (4.39) wird der Erwartungswert des Preises der Black-Scholes-Formel mit Hilfe des Monte-Carlo-Verfahrens approximiert, d.h. für ein hinreichend großes $M \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{E}_{0,X_n}\left[BS_C(SX_n e^{-\lambda\kappa\tau},K,\tau,\sigma^2,r)\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} BS_C(SX_i e^{-\lambda\kappa\tau},K,\tau,\sigma^2,r). \qquad (4.40)$$

### Plötzlicher Ruin

Für die Möglichkeit des plötzlichen Ruins vereinfacht sich die Berechnung von (4.39). Nach Abschnitt 4.3.1 gilt, dass $X_0 = 1$, $X_i = 0$ für $i = 1,\ldots,M$ und $\kappa = -1$. Somit reduziert sich (4.39) auf den ersten Summanden

$$e^{-\lambda\tau} BS_C(Se^{-\lambda\kappa\tau},K,\tau,\sigma^2,r). \qquad (4.41)$$

### Lognormalverteilung

Sind die Zufallszahlen $X_i$ lognormalverteilt, so werden folgende Eigenschaften genutzt:

1. $X_i = \prod_{j=1}^{i} \sim LN(an, b^2 n)$.
2. Wenn $Y_j \sim LN(a,b^2)$, ist $\log Y_j \sim N(a,b^2)$.

Somit beschränkt sich die Berechnung der lognormalverteilten Zufallszahlen auf die Bestimmung von normalverteilten Zufallszahlen. Diese werden mit Hilfe des Moro-Verfahrens bestimmt [Mor95].
Nach der Bestimmung des Erwartungswertes wird dieser mit dem zugehörigen Wert der Poisson-Verteilung gewichtet. Die Summe der gewichteten Black-Scholes-Preise ergibt den Optionswert für die vorausgesetzte Verteilungsfunktion der Sprünge.

### 4.4.1 Beweis der Übereinstimmung der analytischen Lösungen und der Erwartungswertentwicklung

Es soll gezeigt werden, dass sich aus dem allgemeineren Erwartungswertansatz für die Fälle des plötzlichen Ruins und der Lognormalverteilung die analytischen Lösungen ergeben.

#### Plötzlicher Ruin

Für diesen Fall gilt, dass $X_n = 0$ für $n \neq 0$. Somit bleibt nur der erste Summand der unendlichen Summe erhalten. Durch Einsetzen der Voraussetzung $k = -1$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} V_C(S,\tau) &= e^{-\lambda\tau} BS_C(Se^{\lambda\tau}, \tau, K, \sigma^2, r) \\ &= BS_C(S, \tau, K, \sigma^2, r + \lambda). \end{aligned} \tag{4.42}$$

#### Lognormalverteilung

Um zu zeigen, dass die Formel für die Lognormalverteilung und die Erwartungswertentwicklung für diesen Fall übereinstimmen, wird Bezug auf den Beweis in [TB95] genommen. Es soll gezeigt werden, dass

$$\begin{aligned} &[e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n/n!]\mathrm{E}_{0,X_n}[BS_C(SX_ne^{-\lambda\kappa\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)] \\ =&[e^{-\lambda'\tau}(\lambda'\tau)^n/n!][SN(d_{1,n}) - e^{-r_n\tau}KN(d_{2,n})] \end{aligned} \tag{4.43}$$

für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$. Um diese Gleichheit zeigen zu können, benötigen wir folgendes Lemma:

**Lemma 4.4.1**
*Falls eine Zufallsvariable $X$ normalverteilt ist mit den Parametern $\mu$ und $\sigma^2$ und $\alpha$ und $\beta > 0$ reelle Konstanten sind, dann gelten die folgenden Eigenschaften*

$$\mathrm{E}[N(X)] = N(\mu/\sqrt{1+\sigma^2}) \tag{4.44}$$

*und*

$$\mathrm{E}[e^X N((X-\alpha)/\beta)] = e^{\mu+\sigma^2/2} N((\sigma^2 + \mu - \alpha)/\sqrt{\sigma^2 + \beta^2}). \tag{4.45}$$

*Beweis von* (4.43)*:* Da die Zufallsvariable $X_n$ definiert ist als $X_n = e^Z$, wobei $Z$ normalverteilt ist, also $Z \sim N(n\mu_J, n\sigma_J^2)$, gilt

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_{0,X_n}[BS_C(Se^Ze^{-\lambda\kappa\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)] \\ =&\mathrm{E}_0\{[Se^Ze^{-\lambda\kappa\tau}N(\log(S/K) + Z - \lambda\kappa\tau + (r + \sigma^2/2)\tau)]/\sigma\sqrt{\tau}\} \\ &- \mathrm{E}_0\{[Ke^{-r\tau}N(\log(S/K) + Z - \lambda\kappa\tau + (r - \sigma^2/2)\tau)]/\sigma\sqrt{\tau}\}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Wir werden diese beiden Terme (künftig als $H_1$ und $H_2$ bezeichnet) nacheinander betrachten. Mit Hilfe von (4.44) kann der zweite Term geschrieben werden als

$$H_2 = Ke^{-r\tau}N\left(\frac{\overline{\mu}}{\sqrt{1+\overline{\sigma^2}}}\right) \tag{4.47}$$

mit

$$\overline{\mu} = [\log(S/K) + n\mu_J + (r - \lambda\kappa - \sigma^2/2)\tau]/\sigma\sqrt{\tau}$$

und

$$\overline{\sigma^2} = n\sigma_J^2/\sigma^2\tau.$$

Unter Berücksichtigung von (4.45) kann man den ersten Term schreiben als

$$H_1 = Se^{-\lambda\kappa\tau} e^{n\mu_J + n\sigma_J^2/2} N\left(\frac{n\sigma_J^2 + n\mu_J - \alpha}{\sqrt{n\sigma_J^2 + \beta}}\right) \tag{4.48}$$

mit

$$\alpha = \lambda\kappa\tau - \log(S/K) - (r + \sigma^2/2)\tau$$

und

$$\beta = \sigma\sqrt{\tau}.$$

Setzen wir schließlich die Ausdrücke (4.48) und (4.47) in (4.46) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_{0,X_n}[BS_C(Se^Z e^{-\lambda\kappa\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)] \\
&= H_1 - H_2 \\
&= Se^{-\lambda\kappa\tau} e^{n\mu_J + n\sigma_J^2/2} \\
&\quad \cdot N\left(\frac{\log(S/K) + (r - \lambda\kappa + n\mu_J/\tau + n\sigma_J^2/\tau + \sigma^2/2)\tau}{\sqrt{n\sigma_J^2 + \sigma^2\tau}}\right) \\
&\quad - Ke^{-r\tau} N\left(\frac{\log(S/K) + (r - \lambda\kappa + n\mu_J/\tau - \sigma^2/2)\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau + \sigma_J^2}}\right) \\
&= Se^{-\lambda\kappa\tau} e^{n\mu_J + n\sigma_J^2/2} \\
&\quad \cdot N\left(\frac{\log(S/K) + (r - \lambda\kappa + (n\mu_J + n\sigma_J^2/2)/\tau + (\sigma^2 + n\sigma_J^2/\tau)/2)\tau}{\sqrt{n\sigma_J^2 + \sigma^2\tau}}\right) \\
&\quad - Ke^{-r\tau} \\
&\quad \cdot N\left(\frac{\log(S/K) + (r - \lambda\kappa + (n\mu_J + n\sigma_J^2/2)/\tau - (\sigma^2 + n\sigma_J^2/\tau)/2)\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau + \sigma_J^2}}\right) \\
&= Se^{-\lambda\kappa\tau} e^{n\mu_J + n\sigma_J^2/2} N\left(\frac{\log(S/K) + (r_n + v_n^2/2)\tau}{v_n\sqrt{\tau}}\right) \\
&\quad - Ke^{-r\tau} N\left(\frac{\log(S/K) + (r_n - v_n^2/2)\tau}{v_n\sqrt{\tau}}\right) \\
&= e^{-\lambda\kappa\tau} e^{n\mu_J + n\sigma_J^2/2} \left[SN(d_{1,n}) - Ke^{-r_n\tau} N(d_{2,n})\right] \\
&= e^{-\lambda\kappa\tau} (1+\kappa)^n \left[SN(d_{1,n}) - Ke^{-r_n\tau} N(d_{2,n})\right].
\end{aligned}$$

Dies zeigt die gewünschte Beziehung (4.43). □

## 4.5 Monte-Carlo-Simulation für das Merton-Modell

Falls den Sprüngen keine der in Abschnitt 4.3 vorgestellten Verteilungsfunktionen zugrunde liegt, gibt es keine geschlossene Lösung. Da in der Erwartungswertentwicklung auch das Monte-Carlo-Verfahren zur Berechnung benutzt wird, soll in diesem Abschnitt die vollständige Simulation zur Optionspreisbestimmung mit Hilfe des Monte-Carlo-Verfahren betrachtet werden. Der folgende Abschnitt nimmt Bezug auf [Gla04]. Wie bereits im Abschnitt

4.2 über das Merton-Modell erwähnt wurde, kann Mertons Sprung-Diffusions-Modell durch folgende stochastische Differentialgleichung (4.29) spezifiziert werden:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) + dq(t).$$

Hierbei sind $\mu$ und $\sigma$ Konstanten, $W(t)$ ein eindimensionaler Standard Wiener Prozess und $q$ ein Prozess unabhängig von $W$ mit stückweise konstanten Pfaden. Im Besonderen ist $q$ gegeben durch

$$q(t) = \sum_{j=1}^{J(t)} (Y_j - 1) \tag{4.49}$$

mit Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ und einem Zählprozess $J(t)$. Dies bedeutet, dass es Zeitpunkte

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$$

gibt und einen Zählprozess

$$J(t) = sup\{n : \tau_n \leq t\},$$

der die Anzahl der Zeitpunkte im Intervall $[0, t]$ zählt.
Das Symbol $dq(t)$ in (4.29) bezeichnet den Sprung zur Zeit $t$. Die Größe des Sprunges ist gegeben durch

$$dq(t) = \begin{cases} q_j - 1 & \text{falls } t = \tau_j \\ 0 & \text{falls } t \neq \tau_j. \end{cases}$$

Mit der bestehenden Möglichkeit von Sprüngen ist die Bezeichnung $S(t)$ möglicherweise doppeldeutig. Für den Fall, dass $S$ zur Zeit $t$ springt, muss spezifiziert werden, ob $S(t)$ den Wert von $S$ vor oder nach dem Sprung bezeichnet. Es wird analog zur gewöhnlichen Konvention angenommen, dass der Prozess rechtsstetig ist, so dass

$$S(t) = \lim_{u \downarrow t} S(u)$$

die Auswirkung eines beliebigen Sprunges zur Zeit $t$ einschließt. Um den Wert kurz vor einem möglichen Sprung zu spezifizieren schreiben wir $S(t_-)$, welches den Grenzwert

$$S(t_-) = \lim_{u \uparrow t} S(u)$$

von links bezeichnet. Schreibt man (4.29) als

$$dS(t) = \mu S(t_-)dt + \sigma S(t_-)dW(t) + S(t_-)dq(t),$$

ist zu erkennen, dass die Inkremente $dS(t)$ in $S$ zur Zeit $t$ vom Wert von $S$ kurz vor einem möglichen Sprung abhängen und nicht vom Wert nach einem Sprung. Der Sprung in $S$ zur Zeit $t$ ist $S(t) - S(t_-)$. Dieser ist 0, es sei denn $q$ springt am Zeitpunkt $t$, was bedeutet, dass $t = \tau_j$ für ein $j$. Der Sprung in $S$ an $\tau_j$ ist gegeben durch

$$S(\tau_j) - S(\tau_{j-}) = S(\tau_{j-})[q(\tau_{j-}) - q(\tau_{j-})] = S(\tau_{j-})(Y_j - 1).$$

Daher gilt

$$S(\tau_j) = S(\tau_{j-})Y_j.$$

Dies sagt aus, dass die $Y_j$ die Raten des Kurspreises vor und nach dem Sprung sind. Die Sprünge sind multiplikativ. Das erklärt, warum in (4.49) $Y_j - 1$ und nicht $Y_j$ geschrieben wird. Durch die Beschränkung der $Y_j$ auf positive Zufallszahlen wird sichergestellt, dass $S(t)$ nicht negativ werden kann. In diesem Fall sehen wir, dass

$$\log S(\tau_j) = \log S(\tau_{j-}) + \log Y_j.$$

Die Lösung von (4.29) ist gegeben durch

$$S(t) = S(0)e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)} \prod_{j=1}^{J(t)} Y_j, \tag{4.50}$$

welche die entsprechende Lösung der Geometrischen Brownschen Bewegung verallgemeinert.
Bisher wurden keine Annahmen über die Verteilungen des Sprung-Prozesses gemacht. Nun soll das einfachste Modell, welches ausführlich von Merton behandelt wurde, betrachtet werden. Darin wird angenommen, dass $J(t)$ ein Poisson-Prozess mit Rate $\lambda$ ist und außerdem gilt, dass die $Y_j$ unabhängig und identisch verteilt und unabhängig von $J$ und $W$ sind.

### Simulation an festen Zeitpunkten $t_i$

Der Prozess wird an einer festen Menge von Daten, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, ohne die expliziten Auswirkungen des Sprung- und Diffusionsterms aufzuzeigen, simuliert. Dies ist nützlich, da nur der Endwert $S(T)$ von Bedeutung ist. Des Weiteren wird angenommen, dass $J$ ein Poisson-Prozess ist und $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen sind. Der Poisson-Prozess $J$, der Wiener Prozess $W$ und die Menge der $Y_j$ sind untereinander unabhängig.
Um $S(t)$ an den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$ zu simulieren, wird (4.50) verallgemeinert zu

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)e^{(\mu-\sigma^2/2)(t_{i+1}-t_i)+\sigma[W(t_{i+1})-W(t_i)]} \prod_{j=J(t_i)+1}^{J(t_{i+1})} Y_j. \tag{4.51}$$

Hierbei gilt, dass das Produkt über $j$ gleich 1 ist, falls $J(t_{i+1}) = J(t_i)$ ist. Es besteht die Möglichkeit (4.51) zu simulieren oder die durch die Transformation $X(t) = \log S(t)$ erhaltenen Darstellung

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + (\mu - \sigma^2/2)(t_{i+1} - t_i) + \sigma[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \sum_{j=J(t_i)+1}^{J(t_{i+1})} \log Y_j \tag{4.52}$$

zu berechnen. Die Darstellung (4.52) ersetzt das Produkt durch eine Summe und ist vorzuziehen, zumindest falls die Simulation von $\log Y_j$ nicht langsamer ist als die der $Y_j$. Durch Exponentieren der $X(t_i)$ ergeben sich dann die Werte $S(t_i)$.
Der Grundgedanke des Monte-Carlo-Verfahrens ist es, den Aktienpreisverlauf für $m$ Wiederholungen zu simulieren und den Wert der Option $V_i$ für $i=1, \ldots, m$ zu berechnen. Dann ist der erwartete Wert der Auszahlung gegeben durch

$$\hat{V} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} V_i.$$

Den finalen Optionspreis erhält man durch Diskontieren der erwarteten Auszahlung, d.h. $e^{-rT}\hat{V}$.

Generiere eine standard normalverteilte Zufallsvariable $Z_n \sim N(0,1)$.
Generiere eine poissonverteilte Zufallsvariable $Z_p \sim Poisson(\lambda(t_{i+1} - t_i))$.
**if** $Z_p \neq 0$ **then**
  Generiere $Z_p$ Zufallszahlen $Y_1, \ldots, Y_{Z_p}$ von ihrer allgemeinen Verteilung.
  Setze $M = \log Y_1 + ... + \log Y_{Z_p}$.
**end if**
Setze $X(t_{i+1}) = X(t_i) + (\mu - \sigma^2/2)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_n + M$.

**Algorithm 1:** Schritte zur Simulation eines Aktienkurses mit beliebiger Sprungverteilungsfunktion.

Allgemein kann die Monte-Carlo-Simulation für (4.52) im Algorithmus 1 zusammengefasst werden. Diese Methode beruht auf zwei Eigenschaften des Poisson-Prozesses. Der Zuwachs $J(t_{i+1}) - J(t_i)$ hat eine Poisson-Verteilung mit Mittelwert $\lambda(t_{i+1} - t_i)$ und er ist unabhängig von $J$ über $[0, t_i]$. Unter weiteren Annahmen an die Verteilung von $Y_j$ kann diese Methode vereinfacht werden. Wie bereits in Abschnitt 4.3 über die geschlossenen Lösungen beschrieben, wird das Modell besonders handlich, wenn die $Y_j$ lognormalverteilt sind, denn das Produkt lognormalverteilter Zufallsvariablen ist wiederum lognormalverteilt. D.h., wenn $Y_j \sim LN(a, b^2)$, dann gilt für festes $n$

$$\prod_{j=1}^{n} Y_j \sim LN(an, b^2 n).$$

Ist $J(t) = n$, so hat $S(t)$ die Verteilung

$$\begin{aligned} S(0)e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W(t)} \prod_{j=1}^{n} Y_j &\sim S(0) \cdot LN((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t) \cdot LN(an, b^2 n) \\ &= LN(\log S(0) + (\mu - \sigma^2/2)t + an, \sigma^2 t + b^2 t). \end{aligned}$$

Hierbei wird verwendet, dass die $Y_j$ und $W$ unabhängig sind. Falls die $Y_j$ lognormalverteilt sind, also $Y_j \sim LN(a, b^2)$, dann gilt $\log Y_j \sim N(a, b^2)$ und

$$\sum_{j=1}^{n} \log Y_j \sim N(an, b^2 n) = an + b\sqrt{n} N(0,1).$$

In diesem Fall kann in Algorithmus 1 die Generierung der Zufallszahlen nach ihrer allgemeinen Verteilung entfallen. Es ergibt sich ein vereinfachter Algorithmus 2.

Generiere eine standard normalverteilte Zufallsvariable $Z_n \sim N(0,1)$.
Generiere eine poissonverteilte Zufallsvariable $Z_p \sim Poisson(\lambda(t_{i+1} - t_i))$.
**if** $Z_p \neq 0$ **then**
  Generiere eine standard normalverteilte Zufallsvariable $Z_{n2} \sim N(0,1)$.
  Setze $M = aN + b\sqrt{N} Z_{n2}$.
**end if**
Setze $X(t_{i+1}) = X(t_i) + (\mu - \sigma^2/2)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_n + M$.

**Algorithm 2:** Simulation eines Aktienkurses mit lognormalverteilten Sprüngen.

### Simulation der Sprungzeiten

Die Simulationen, die auf (4.52) beruhen, produzieren Werte $S(t_i)=\exp(X_i)$ für $i=1,\dots,n$ mit der exakten Verteilung des Prozesses (4.29) an Zeitpunkten $t_1,\dots,t_n$. Es sei bemerkt, dass diese Näherung nicht die Sprungzeiten für $S(t)$ identifiziert. Es wird nur eine Gesamtanzahl der Sprünge in jedem Intervall $(t_i,t_{i+1}]$ generiert. Dazu wird die Eigenschaft benutzt, dass die Anzahl der Sprünge in einem Intervall poissonverteilt ist.
Eine alternative Näherung zur Simulation von (4.29) ist die explizite Simulation der Sprungzeitpunkte. Von einem Sprung zum nächsten entwickelt sich $S(t)$ nach einer einfachen Geometrischen Brownschen Bewegung. Dies ist der Fall, da angenommen wurde, dass $W$ und $q$ in (4.29) unabhängig voneinander sind. Wenn $\tau_1,\dots,\tau_n$ die Sprungzeiten darstellen, folgt

$$S(\tau_{j+1-}) = S(\tau_j)e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(\tau_{j+1}-\tau_j)+\sigma[W(\tau_{j+1})-W(\tau_j)]} \tag{4.53}$$

und

$$S(\tau_{j+1}) = S(\tau_{j+1-})Y_{j+1}. \tag{4.54}$$

Durch Logarithmieren und Kombination der beiden Schritte (4.53) und (4.54) ergibt sich

$$X(\tau_{j+1}) = X(\tau_j) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(\tau_{j+1} - \tau j) + \sigma[W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)] + \log Y_{j+1}. \tag{4.55}$$

Die Simulation von (4.55) ist in Algoritmus 3 dargestellt.

Generiere $R_{j+1}$ mit Hilfe der exponentiellen Verteilung mit Erwartungswert $1/\lambda$:
$R_{j+1} = -\log(U)/\lambda$ wobei $U$ gleichverteilt ist auf $[0,1]$.
Generiere eine standard normalverteilte Zufallsvariable $Z_{j+1} \sim N(0,1)$.
Generiere $\log Y_{j+1}$.
Setze $\tau_{j+1} = \tau_j + R_{j+1}$.
Setze $X(\tau_{j+1}) = X(\tau_j) + (\mu - \sigma^2/2)R_{j+1} + \sigma\sqrt{R_{j+1}}Z_{j+1} + \log Y_{j+1}$.

**Algorithm 3:** Simulation eines Aktienkurses mit expliziter Simulation der Sprungzeiten

Die beiden Simulationsmethoden können kombiniert werden, um $S(t)$ zu simulieren. Beispielsweise kann ein fester Zeitpunkt $t$ gewählt werden, an dem ebenfalls simuliert werden soll. Falls $\tau_j<t<\tau_{j+1}$, d.h. $J(t)=J(t-)=j$, dann gilt

$$S(t) = S(\tau_j)e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-\tau_j)+\sigma[W(t)-W(\tau_j)]}$$

und

$$S(\tau_{j+1} = S(t)e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(\tau_{j+1}-t)+\sigma[W(\tau_{j+1})-W(t)]}Y_{j+1}.$$

Beide Näherungen zur Simulation von (4.29) können nützlich sein, um zumindest als Approximation zur Simulation allgemeinerer Sprung-Diffusions Prozesse zu dienen. Die exakte Simulation wird schwieriger, wenn die Sprungzeiten und die Entwicklung des Prozesses zwischen den Sprüngen nicht länger unabhängig voneinander sind.
Wir werden uns in Kapitel 6 auf die Simulation zu festen Zeitpunkten beschränken, da wir nur am Endkurs $S(t)$ interessiert sind. Es ist nur von Bedeutung wie viele Sprünge auftreten, nicht jedoch zu welchen Zeitpunkten.

## 4.6 Diskretisierung der PIDE nach dem Merton-Modell

Die Monte-Carlo-Simulation ermöglicht die Berechnung eines Optionspreises durch Simulation der Aktienkursbewegung für verschiedene Verteilungsfunktionen der Sprünge. Das Problem dieser Methode ist es, die verschiedenen Zufallszahlen nach ihrer Verteilung zu simulieren, da dazu die inverse Verteilungsfunktion berechnet werden muss. Bekannt sind allerdings nur Berechnungen der inversen Normalverteilung. Die Berechnungen anderer inverser Verteilungsfunktionen erweisen sich als schwierig, sobald diese nicht wie die Lognormalverteilung aus der Normalverteilung berechnet werden können. Der Nachteil des Monte-Carlo-Verfahrens ist zusätzlich, dass es nur mit einer Konvergenzrate von $\frac{1}{2}$ konvergiert.
Es wird also nach einem Verfahren gesucht, dass es ermöglicht, den Optionspreis für verschiedene Sprungverteilungsfunktionen zu berechnen und eine bessere Konvergenzrate als $\frac{1}{2}$ zu erhalten. Dies geschieht durch die Diskretisierung der PIDE und das Lösen eines Gleichungssystems.
Bisherigen Arbeiten, die sich mit der Diskretisierung der PIDE und Lösung des entstehenden Gleichungssystems beschäftigen, sind [CV05], [MPS02], [MNS03], [dFL03], [dFV04], [AA00], [TB95] und [Duf]. In [MPS02] wird eine Wavelet-Galerkin Diskretisierung für den Integro-Differential-Teil und ein $\theta$-Zeitschrittverfahren dargestellt. Es werden dann Europäische Optionen mit verschiedenen zugrunde liegenden Lévy-Prozessen (Varianz-Gamma, CGMY) berechnet. In [MNS03] ist eine Erweiterung auf Amerikanische Optionen dargestellt. Die Näherung des Preises geschieht hier durch eine Finite Elemente Lösung, der eine Spline-Wavelet-Basis zugrunde liegt. Es wird eine Kompression der Matrix durchgeführt. Diese Kompression ermöglicht es, die Inverse der Matrix in fast linearer Komplexität zu lösen, ohne die Genauigkeit der Lösung zu beeinflussen.
Andersen und Andreasen beschreiben in [AA00] ein „volatility smile fitting“. Sie diskutieren das Problem, die Prozesse der Aktienkurse an am Markt beobachtete Optionspreise anzupassen. Es wird eine Finite Differenzen Methode für die allgemeine Optionspreisbewertung dargestellt. Der Algorithmus wird dann sowohl an Europäischen als auch an exotischen Optionen getestet.
Duffy stellt in [Duf] eine Form der PIDE vor, die zugänglich ist für Finite Differenzen Methoden. Verschiedene Schemata werden diskutiert und eine Verbesserung des Black-Scholes-Modells für Europäische Optionen vorgestellt. Es soll die Verbindung zwischen Sprungmodellen, partiellen Integro-Differentialgleichungen und numerischer Analysis dargestellt werden.
Cont und Voltchkova stellen in [CV05] ein Finite Differenzen Schema zur Lösung der PIDE dar. Die numerische Lösung beruht auf einem Operator-Splitting, das den lokalen und nicht-lokalen Teil voneinander trennt. Durch die Diskretisierung mittels eines impliziten Schemas für den lokalen Teil und einer expliziten Behandlung des nicht-lokalen Teils der PIDE ergibt sich eine effiziente numerische Implementierung. Diese Lösung wird für das Merton-Modell und das Varianz-Gamma-Modell durchgeführt.
Die Berechnung Amerikanischer Optionen mit Sprung-Diffusions Prozessen wird in [dFL03] behandelt. Dazu wird ein implizites Zeitschrittverfahren zweiter Ordnung dargestellt und die Penalty Methode für Amerikanische Optionen beschrieben. Ebenfalls aufgeführt ist die Diskretisierung für den Fall Europäischer Optionen.
In [dFV04] wird die Stabilität verschiedener Verfahren für eine explizite Diskretisierung des Integralteils untersucht. Es wird ein Fixpunkt-Iterationsschema vorgestellt, das verwendet werden kann, um diskretisierte Gleichungen zu lösen und global konvergent ist. Des Weiteren wird eine Berechnung des Integrals mittels FFT-Methoden dargestellt.

Wir werden überwiegend dem Ansatz von [CV05] folgen und eine Aufteilung des Problems vornehmen. Die Integro-Differentialgleichung wird aufgeteilt in den Differential- und den Integralteil. Es wird die Diskretisierung für beide Teile untersucht. Durch die implizite Behandlung des einen und die explizite Behandlung des anderen Teils entsteht ein Tridiagonalsystem, das leicht zu lösen ist.

Als erstes werden wir die in Abschnitt 4.2.2 hergeleitete PIDE

$$V_\tau = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r-\lambda\kappa)SV_S - (r+\lambda)V + \lambda\int_0^\infty V(SY)g(Y)\,dY$$

in einen logarithmischen Preis transformieren, d.h. $x = \log S$.

$$\begin{aligned}V_\tau &= \frac{1}{2}\sigma^2(V_{xx}-V_x) + (r-\lambda\kappa)V_x - (r+\lambda)V + \lambda\int_0^\infty V(e^xY)g(Y)\,dY\\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} + (r-\lambda\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2)V_x - (r+\lambda)V + \lambda\int_0^\infty V(e^xY)g(Y)\,dY.\end{aligned}$$

Außerdem wird die Variablenänderung $y = \log(Y)$, also $Y = e^y$ und $dY = e^y dy$ durchgeführt. Somit ergibt sich

$$V_\tau = \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} + (r-\lambda\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2)V_x - (r+\lambda)V + \lambda\int_{-\infty}^\infty V(x+y)f(y)\,dy, \tag{4.56}$$

wobei $f(y) = g(e^y)e^y$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Sprunges der Größe $y = \log(Y)$ wird mit $f(y)$ bezeichnet. Als ein spezielles Beispiel betrachten wir auch hier die Lognormalverteilung als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$g(Y) = \frac{e^{\left(-\frac{(\log(Y)-\mu_M)^2}{2\sigma_M^2}\right)}}{\sqrt{2\pi}\sigma_M Y}. \tag{4.57}$$

Hier bezeichnet $\mu_M$ den Erwartungswert und $\sigma_M$ die Varianz der Dichtefunktion. Somit ist $\kappa = \mathrm{E}[Y-1]$ gegeben durch $\kappa = \exp(\mu_M - \sigma_M^2/2) - 1$. Aus der gegebenen Dichtefunktion (4.57) ergibt sich in der transformierten Gleichung die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(y) = \frac{e^{\left(-\frac{(y-\mu_M)^2}{2\sigma_M^2}\right)}}{\sqrt{2\pi}\sigma_M}.$$

Somit ist das Problem

$$\begin{aligned}V_\tau =& \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} + (r-\lambda\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2)V_x - (r+\lambda)V\\ &+ \lambda\int_{-\infty}^\infty V(x+y)f(y)\,dy \quad \text{in} \quad \mathbb{R}\times(0,T]\end{aligned} \tag{4.58}$$

zu lösen. Durch die Variablentransformation $\tau = T-t$ entsteht eine PIDE (partielle Integro-Differential-Gleichung), die vorwärts für $S>0$ und $t\in(0,T)$ gelöst werden soll. Es gelten für eine Call-Option $V(x,\tau)$ die Anfangsbedingung

$$V(x,0) = (e^x - K)^+ \tag{4.59}$$

und die Randbedingungen

$$V(x,\tau) \sim 0 \qquad \text{für} \quad x\to-\infty, \tag{4.60}$$

$$V(x,\tau) = (e^x - Ke^{-r\tau})^+ \qquad \text{für} \quad x\to\infty. \tag{4.61}$$

### Lokalisierung

Um eine numerische Lösung des Problems (4.58) geben zu können, ist es nötig, das Gebiet $\Omega = \mathbb{R}$ auf ein Gebiet $\Omega_R = [x_{min}, x_{max}]$ zu beschränken. Das Zeitintervall $I_\tau = (0, T]$ bleibt erhalten. Somit wird das Problem (4.58) - (4.60) nicht auf $\Omega \times I_\tau$, sondern auf $\Omega_R \times I_\tau$ gelöst

$$\begin{aligned} V_\tau =& \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} + (r - \lambda\kappa - \frac{1}{2}\sigma^2)V_x - (r+\lambda)V \\ &+ \lambda \int_{-\infty}^{\infty} V(x+y)f(y)\,dy \quad \text{in} \quad \Omega_R \times I_\tau. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Die Anfangsbedingung (4.59) bleibt erhalten, die Randbedingungen sind gegeben durch

$$V(x,\tau) = 0 \qquad \text{für} \quad x = x_{min}, \tag{4.63}$$
$$V(x,\tau) = (e^{x_{max}} - Ke^{-r\tau})^+ \qquad \text{für} \quad x = x_{max}. \tag{4.64}$$

## 4.6.1 Zeitdiskretisierung

Eine semidiskrete Schreibweise des Problems (4.62)-(4.63) ist

$$V_\tau - \mathcal{L}(V) = 0 \tag{4.65}$$

mit

$$\mathcal{L}(V) = \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} + (r - \lambda\kappa - \frac{1}{2}\sigma^2)V_x - (r+\lambda)V + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} V(x+y)f(y)\,dy. \tag{4.66}$$

Zur weiteren Behandlung des Operators $\mathcal{L}(V)$ soll dieser in zwei Operatoren aufgeteilt werden. Dieses Aufteilen ist nach [Str68] möglich und wird auch als Operator-Splitting bezeichnet. Es werden im Folgenden die beiden Operatoren

$$\mathcal{L}_{\text{PDE}} = \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} + (r - \lambda\kappa - \frac{1}{2}\sigma^2)V_x - (r+\lambda)V$$

und

$$\mathcal{L}_{\text{Integral}} = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} V(x+y)f(y)\,dy$$

betrachtet. Dabei gilt $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{PDE}} + \mathcal{L}_{\text{Integral}}$.
Es sei $\Delta\tau_n := n\Delta\tau$ für $n = 0, \ldots, Mk$ mit $Mk \in \mathbb{N}$ eine äquidistante Diskretisierung des Zeitintervals $I_\tau$ mit der Schrittweite $\Delta\tau = T/Mk$. Sei $V^n$ die numerische Approximation von $V(x, n\Delta\tau)$. Die Diskretisierung mit Finiten Differenzen führt dann zu einem Einschritt-Schema der Form

$$\begin{aligned} \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta\tau} &- \theta\mathcal{L}_{\text{PDE}}(V^{n+1}) - (1-\theta)\mathcal{L}_{\text{PDE}}(V^n) \\ &- \theta_J\mathcal{L}_{\text{Integral}}(V^{n+1}) - (1-\theta_J)\mathcal{L}_{\text{Integral}}(V^n) = 0, \end{aligned}$$

dieses wird auch als *$\theta$-Schema* bezeichnet. Für $\theta = 0$ wird das Schema zum *expliziten Eulerverfahren*, für $\theta = 1$ zum *impliziten Eulerverfahren* und für $\theta = \frac{1}{2}$ führt es auf das *Crank-Nicolson-Verfahren*.
Es ist möglich ein voll implizites ($\theta = \theta_J = 1$) oder ein semi-implizites Verfahren ($\theta_J = 0$) zu verwenden. Eine voll implizites Schema würde eine Lösung des Problems

$$V_\tau - \mathcal{L}_{\text{PDE}}(V^{n+1}) - \mathcal{L}_{\text{Integral}}(V^{n+1}) = 0 \tag{4.67}$$

bedeuten. Ein semi-implizites Schema, d.h. eine explizite Behandlung des Integral-Teils und eine implizite des PDE-Teils führt auf

$$V_\tau - \mathcal{L}_{\text{PDE}}(V^{n+1}) = \mathcal{L}_{\text{Integral}}(V^n). \tag{4.68}$$

Das voll implizite Schema (4.67) würde die Lösung eines Gleichungssystem mit einer vollbesetzten Matrix zur Folge haben. Eine explizite Diskretisierung von $\mathcal{L}_{\text{Integral}}$ hingegen, wie in (4.68), führt zur einer Reduktion der PIDE auf eine PDE in jedem Zeitschritt. Somit ist die Matrix des zu lösenden Gleichungssystems dünn besetzt und ermöglicht die Anwendung eines direkten Lösers. Cont und Voltchkova beweisen in [CV05], dass die explizite Behandlung des Integral-Teils ausreichend ist, um Konvergenz zu erreichen. Aus diesem Grund wird im Folgenden eine explizite Diskretisierung des Integrals zugrunde gelegt.
Im nächsten Abschnitt wird die Beschreibung der Ortsdiskretisierung mittels Finiter Differenzen gegeben.

### 4.6.2 Ortsdiskretisierung

Es sei $x_i = x_{min} + i\Delta x$ für $i = 0, \dots, N$ mit $N \in \mathbb{N}$ eine äqudistante Diskretisierung des Intervalls $\Omega_R$. Die Schrittweite $\Delta x$ wird berechnet durch $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N$. Es bezeichne $V_i^n$ die numerische Approximation von $V(i\Delta x, n\Delta\tau)$. Approximationen der ersten Ableitungen sind dann

$$V_x(i\Delta x, n\Delta t) \approx \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{\Delta x} \quad \text{(Vorwärts-Differenz)} \tag{4.69}$$

$$V_x(i\Delta x, n\Delta t) \approx \frac{V_i^n - V_{i-1}^n}{\Delta x} \quad \text{(Rückwärts-Differenz)} \tag{4.70}$$

$$V_x(i\Delta x, n\Delta t) \approx \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{(zentrale Differenz).} \tag{4.71}$$

Die ersten beiden Näherungen (4.69) und (4.70) heißen einseitige Differenzenquotienten, die Näherung (4.71) ist ein zentraler Differenzenquotient. Die zweite Ableitung wird durch den zentralen Differenzenquotienten

$$V_{xx}(i\Delta x, n\Delta t) \approx \frac{V_{i+1}^n - 2V_i^n + V_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad \text{(zentrale Differenzen)} \tag{4.72}$$

approximiert.

#### Stabilitätsanalyse

Das Problem (4.56) enthält sowohl eine erste als auch eine zweite Ableitung und ist somit ein Konvektions-Diffusions-Problem. Konvektive Terme weisen Probleme bei der Diskretisierung auf, da die Differenzenquotienten entweder nicht uneingeschränkt stabil sind oder eine schlechtere Konsistenzordnung aufweisen als die übrigen Diskretisierungen.
Bei der Betrachtung der Black-Scholes-Gleichung (4.2) verschwindet dieses Problem, da es möglich ist, (4.2) auf die Wärmeleitungsgleichung

$$V_\tau - V_{xx} = 0$$

zu transformieren. Durch diese Transformation wird erreicht, dass das Problem keinen konvektiven Term mehr enthält, also ein reines Diffusionsproblem geworden ist. Dies ermöglicht eine uneingeschränkte Stabilität, welche ohne die Transformation für (4.2) nicht unbedingt gewährleistet.

Eine ähnliche Transformation für (4.56), die hier den konvektiven Term entfernen würde, ist leider nicht bekannt. Es lässt sich also nicht vermeiden, auch für die erste Ableitung eine geeignete Diskretisierung zu finden.
Es gilt für die Differenzenquotienten, dass die einseitigen Differenzenquotienten die Konsistenzordnung 1 besitzen und die zentralen Differenzenquotienten die Konsistenzordnung 2 [GR94]. Aus diesem Grund liegt es nahe, auch für die Diskretisierung der ersten Ableitung die zentrale Approximation zu verwenden. Dies ist jedoch nicht generell möglich, da die zentralen Differenzenquotienten nicht unbeschränkt stabil sind.

**Definition 4.6.1**
*Ein Differenzenverfahren heißt* stabil*, wenn positive Konstanten $C$ und $h_0^*$ existieren, so dass für alle $0<h<h_0^*$ die Matrix $L_h$ der Diskretisierung invertierbar ist mit $||L_h^{-1}||_\infty \leq C$.*

Der Nachweis der Stabilität ist verbunden mit der Monotonieeigenschaft der Matrix $L_h$.

**Definition 4.6.2**
*Ist $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}_{n\times n}$ invertierbar, $a_{ij}\leq 0$ für $i\neq j$und $A^{-1}$ komponentenweise nicht negativ, dann nennt man $A$ eine* M-Matrix.

Eine M-Matrix hat die *Monotonieeigenschaft*:
Sind $x,y\in\mathbb{R}^n$ und ist $A$ eine M-Matrix, dann gilt (komponentenweise):

$$x \leq y \quad \Longrightarrow \quad A^{-1}x \leq A^{-1}y.$$

Für die zentralen Differenzen der ersten Ableitung gilt jedoch nur unter einer Beschränkung die Eigenschaft der M-Matrix [HB02, S.637]. Ist das Problem nicht mehr diffusionsdominant, so kann keine Stabilität mehr gewährleistet werden. Es gilt also für die Benutzung der zentralen Differenzen der ersten Ableitung zu prüfen, ob für (4.56) die Bedingung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma^2 > r - \lambda\kappa - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \sigma^2 > r - \lambda\kappa \end{aligned}$$

erfüllt ist.
Die Beschränkung der Stabilität bezieht sich nur auf die Verwendung zentraler Differenzen zur Diskretisierung der ersten Ableitung. Bei einseitigen Differenzenquotienten ist die Situation anders. Hierbei besteht die Möglichkeit, in Abhängigkeit des Vorzeichens des Koeffizienten des Konvektionterms die Vorwärts- (4.69) oder Rückwärtsdifferenzen (4.70) zu verwenden und somit die Bedingung der M-Matrix zu erfüllen und folglich Stabilität zu gewährleisten.
Die erste Ableitung wird dann folgendermaßen approximiert

$$\begin{aligned} V_x(i\Delta x, n\Delta t) &\approx \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{\Delta x} \quad \text{im Fall} \quad r - \lambda\kappa - \frac{1}{2}\sigma^2 < 0 \\ V_x(i\Delta x, n\Delta t) &\approx \frac{V_i^n - V_{i-1}^n}{\Delta x} \quad \text{im Fall} \quad r - \lambda\kappa - \frac{1}{2}\sigma^2 > 0. \end{aligned}$$

Diese Diskretisierung wird als *Upwind-Schema* bezeichnet. Eine weitere Alternative ist das *Downwind-Schema*

$$\begin{aligned} V_x(i\Delta x, n\Delta t) &\approx \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{\Delta x} \quad \text{im Fall} \quad r - \lambda\kappa - \frac{1}{2}\sigma^2 > 0 \\ V_x(i\Delta x, n\Delta t) &\approx \frac{V_i^n - V_{i-1}^n}{\Delta x} \quad \text{im Fall} \quad r - \lambda\kappa - \frac{1}{2}\sigma^2 < 0. \end{aligned}$$

Da die zu behandelnde PIDE konstante Koeffizienten besitzt, ist es möglich für festgelegt Parameter zu bestimmen, welche der beiden Diskretisierungen verwendet werden sollte. Der Vorteil des Upwind- oder Downwind-Schemas ist die uneingeschränkte Stabilität. Der Nachteil dieses Verfahrens ist jedoch, dass die Konsistenzordnung der einseitigen Differenzenquotienten maximal 1 ist. In Kapitel 6 werden wir sehen, dass die zentralen Differenzen für das zugrunde liegende Problem und die in der Realität auftretenden Parameter stabil sind. So kann mehr als eine Konsistenzordnung von 1 erzielt werden. Aus diesem Grund werden im Weiteren die zentralen Differenzen für beide Ableitungen verwendet.

### 4.6.3 Diskretisierung des Integrals

Der Integraloperator $\mathcal{L}_{\text{Integral}}$ muss zur Lösung des Gleichungssystems ausgewertet werden. Problematisch ist jedoch, dass dieser für die zu untersuchenden Dichtefunktionen (Lognormalverteilung, Varianz-Gamma-Verteilung und CGMY-Verteilung) nicht explizit gegeben ist. Aus diesem Grund ist eine Diskretisierung des Integrals notwendig um eine Auswertung zu ermöglichen. Es gibt verschiedene Verfahren, die eine Diskretisierung des Integrals ermöglichen. Diese sind das Galerkin-Verfahren, das Nyström-Verfahren und diverse Kollokationsverfahren. Die Verfahren beruhen auf unterschiedlichen Grundideen, die hier kurz vorgestellt werden sollen.

#### Das Galerkin-Verfahren

Dieses Verfahren beruht auf Basis- und Testfunktionen. Ziel ist es, das Problem

$$Au = f$$

zu lösen. Es existieren Basisfunktionen $\varphi_i$, so dass

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i.$$

Zusätzlich gibt es Testfunktionen $\psi_j$, so dass

$$(Au, \psi_j) = (f, \psi_j).$$

Man unterscheidet verschiedene Galerkin-Verfahren nach Wahl der Basis- und Testfunktionen. Für $\varphi_i = \psi_j$ wird das Verfahren als *Ritz-Galerkin Verfahren* bezeichnet. Wenn $\varphi_i \neq \psi_j$ gilt, so wird es *Petrov-Galerkin Verfahren* genannt. Aus der Wahl $\psi_j = \delta_{ij}$ ergibt sich ein Kollokationsverfahren mit der Basis $\varphi_j$.

#### Das Nyström-Verfahren

Bei der Nyström-Methode ergibt sich die Diskretisierung direkt durch die Anwendung einer Quadraturformel. Ausgehend von $n$ Stützstellen

$$\Xi_n := \{\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \dots, \xi_{n,n}\} \subset D$$

und zugehörigen Gewichten

$$\omega_{1,n}, \omega_{2,n}, \dots, \omega_{n,n}$$

wird ein *Quadraturverfahren* $Q_n$ $(n \in \mathbb{N})$ definiert mit

$$Q_n := \sum_{k=1}^{n} \omega_{k,n} \varphi(\xi_{k,n})$$

für Integrale $\int_D \varphi(y)\, dy$ über $D$.

### Kollokationsverfahren

Die Grundidee des Kollokationsverfahren zur Approximation der Lösung einer Operatorgleichung

$$A\varphi = f \tag{4.73}$$

ist die Bestimmung einer Näherungslösung in einem endlich dimensionalen Unterraum so, dass (4.73) an endlich vielen Punkten, den *Kollokationspunkten*, erfüllt ist.

**Definition 4.6.3** [Kollokationsverfahren]
*Es seien $X$ und $Y$ Banachräume mit $Y \subseteq C[a,b]$ und $A : X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator. Für $n \in \mathbb{N}$ seien weiter Unterräume $X_n \subseteq X$ und $Y_n \subseteq Y$ mit $dim X_n = dim Y_n = n$ sowie so genannte Kollokationspunkte $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ gegeben, so dass $Y_n$ bezüglich dieser Punkte unisolvent ist, d.h. die Interpolationsaufgabe mit dem Unterraum $Y_n$ und den Kollokationspunkten ist eindeutig lösbar. Dann approximiert das Kollokationsverfahren die Lösung von* (4.73) *durch ein Element $u_n \in X_n$ mit*

$$(Au_n)(x_j) = f(x_j) \quad \textit{für} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.74}$$

*Sei $X_n = span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Dann lassen sich die $u_n$ als Linearkombination darstellen*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \varphi_k.$$

*Somit ist* (4.74) *äquivalent zum linearen Gleichungssystem*

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k (A\varphi_k)(x_j) = f(x_j) \quad \textit{für} \quad j = 1, \ldots, n$$

*mit den Koeffizienten $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.*

Die Diskretisierung mittels Galerkin-Verfahren, das auf Ansatz- und Testfunktionen basiert, bietet sich an, wenn die PIDE voll implizit gelöst wird. Da bereits für die Auswertung des Integrals mittel Galerkin-Verfahrens eine zuvorige Lösung desselben notwendig ist, ist dieses Verfahren für eine semi-implizite Diskretisierung nicht effizient. Kollokationsverfahren hingegen ermöglichen eine direkte Auswertung des Integrals ohne vorhergehende Lösung. Aus diesem Grund werden im Folgenden verschiedene Kollokationsverfahren, die im nächsten Abschnitt beschrieben sind, verwendet.

Zur Diskretisierung der PIDE gibt es bei der Wahl der Maschenweiten zwei Möglichkeiten. Zum einen können die Maschenweite für den PDE- und den Integral-Teil identisch, zum anderen auch verschieden gewählt werden. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Wahl unterschiedlicher Maschenweiten einer gesonderten Betrachtung bedarf, da in diesem Fall eine Interpolation der Optionspreise erforderlich ist.

### Identische Maschenweite für den PDE- und den Integral-Teil

Betrachtet wird das Integral aus (4.58)

$$\mathcal{I}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x+y) f(y)\, dy. \tag{4.75}$$

Sei $\mathcal{I}_i = \mathcal{I}(x_i)$ das Integral für den Gitterpunkt $x_i$ und $V_{i+j} = V(x_{i+j}) = V(x_{min} + (i+j)\Delta x)$ der Optionspreis an der Stelle $x_{i+j}$. Dann ist die diskrete Form des Integrals gegeben durch

$$\mathcal{I}_i = \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} V_{i+j} f_j + O(\Delta y^2) \tag{4.76}$$

mit

$$f_j = \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} f(y)\, dy. \tag{4.77}$$

Es gilt, dass

$$f_j \geq 0 \quad \forall j \quad \text{ und } \quad \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_j \leq 1, \tag{4.78}$$

denn $f(y)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte und $f_j$ ist definiert durch (4.77). Die Ungleichung in (4.78) ergibt sich durch das Abschneiden des unendlichen Integrals (4.75).
Um die Berechnung von (4.76) zu erleichtern, werden die Terme $V_{i+j}$ und $f_j$ getrennt betrachtet.

### Berechnung der $\mathbf{V_{i+j}}$

Es gibt zwei Fälle, die bei der Berechnung der $V_{i+j}$ unterschieden werden müssen.

1. Falls $i + j = l$ für ein $l \in \{0, ..., N\}$, und somit $x_{i+j} \in \Omega_R$,
   dann gilt
   $$V_{i+j} = V_l.$$
2. Im Fall $i + j < 0$ oder $i + j > N$, und somit $x_{i+j} \notin \Omega_R$, gilt die Approximation
   $$\begin{aligned} V_{i+j} &= 0 && \text{für} \quad i + j < 0 \\ V_{i+j} &= (e^{x_{i+j}} - Ke^{-r\tau})^+ && \text{für} \quad i + j > N. \end{aligned}$$

Die Fortsetzung des Optionswertes mittels der Randbedingungen wird bereits in [dFL03] angewandt, sie ist möglich da die $f_j$ für $|j| > 0$ schnell abfallen.
Die Berechnung der $f_j$ muss nach der zugrunde liegenden Verteilungsfunktion unterschieden werden. Spiegelt eine Verteilungsfunktion unendliche Variation wider, so äußert sich diese Eigenschaft in einer Singularität der Verteilungsfunktion. Die Singularität bedarf bei der numerischen Integration einer besonderen Behandlung und wird aus diesem Grund getrennt betrachtet.

### Berechnung der $\mathbf{f_j}$ für Verteilungsfunktionen mit endlicher Variation

Da für die zu integrierenden Dichtefunktionen keine geschlossenen Lösungsformeln existieren, müssen numerische Integrationsverfahren verwendet werden. Wie bereits einleitend erwähnt, werden zur Berechnung des Integrals verschiedene Quadraturformeln verwendet. Diese Methoden approximieren das Integral mittels einer Partitionierung des Integrationsintervalls $[a, b]$ durch eine endliche Summe. Eine allgemeine Form der Integration mit äquidistanten Stützstellen ist

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{N} w(x_i) f(x_i) \tag{4.79}$$

mit den Gewichten $w_i$. Für die Gewichte gilt $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$. Die Funktionswerte $f(x_i)$ sind gegeben durch $f(x_i) = f(a + i\Delta x)$, wobei $\Delta x = \frac{b-a}{N}$. Die verwendeten Integrationsformeln sind die *Trapezregel* und die *Simpsonregel*.

#### Trapezregel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b)) \tag{4.80}$$

#### Simpsonregel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + f(\frac{b-a}{2}) + f(b)\right) \tag{4.81}$$

Der Fehler der Trapezregel ist

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b)) = (\Delta x)^3 \frac{1}{12} f^{(2)}(\xi).$$

Der Fehler der Simpsonregel ist bestimmt durch

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + f(\frac{b-a}{2}) + f(b)\right) = (\Delta x)^5 \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi).$$

In den beiden oben beschriebenen Formeln (4.80) und (4.81) wird das Integral durch eine Summe von Funktionswerten auf einem gegebenen Gebiet von äqudistanten Punkten, multipliziert mit bestimmten Gewichtskoeffizienten, approximiert. Durch größere Freiheit in der Wahl der Koeffizienten lassen sich Integrationsformeln mit einer höheren Ordnung erhalten [Sto99]. Ein Beispiel dafür ist die *Gauß-Quadratur*. Diese bietet nicht nur mehr Freiheit in der Bestimmung der Koeffizienten, sondern auch in der Lage der Gebietspunkte, an denen die Funktion ausgewertet wird. Diese sind nicht äquidistant. Die allgemeine Form der Gauß-Quadratur ist

$$\int_a^b W(x) f(x) \approx \sum_{i=1}^{N} w(x_i) f(x_i) + R_N(x). \tag{4.82}$$

Dabei ist $W(x)$ eine Gewichtsfunktion und $x_i$ sind die Nullstellen der orthogonalen Polynome, sie sind die Integrationspunkte. Für die Berechnungen des Integrals mittels Gauß-Quadratur wird hier die *Gauß-Legendre-Integration* verwendet. Sie basiert auf den Legendre-Polynomen:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) &= \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) d\xi \\
&= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} g(\xi)\,d\xi \\
&= \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{N} w(\xi_i) g(\xi_i) + R_N(\xi) \\
&= \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{N} w(\xi_i) f\left(\frac{b-a}{2}\xi_i + \frac{b+a}{2}\right) + R_N(\xi) \qquad (4.83)
\end{aligned}$$

mit

$$\xi = \frac{2x-b-a}{b-a} \quad \text{d.h.} \quad x = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2} \quad \text{für } -1 < \xi < 1,$$

wobei $\xi_i$ die $i$-te Nullstelle von $P_N(x)$ ist. Es gilt weiter

$$\begin{aligned} w(\xi_i) &= \frac{2}{(1-\xi_i^2)(P_N'(\xi_i))^2} \\ g(\xi) &= f\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right) \\ R_N(\xi) &= \frac{2^{2N+1}(N!)^4}{(2N+1)((2N)!)^3} g^{2N}(\xi). \end{aligned}$$

Für die Näherung des Integrals wird eine 10 Punkte Gauß-Legendre Integration verwendet. Da die Stützstellen und Gewichte in diesem Fall symmetrisch zum Mittelpunkt des Integrationsgebietes liegen, ergeben sich folgende fünf Stützstellen und Gewichte

$$\begin{aligned} x &= \{0.1488743389, 0.4333953941, 0.6794095682, 0.8650633666, 0.9739065285\}, \\ w &= \{0.2955242247, 0.2692667193, 0.2190863625, 0.1494513491, 0.0666713443\}. \end{aligned}$$

Eine Voraussetzung, um eine geeignete Annäherung an den Wert des Integrals mittels der diskreten Berechnung zu gewährleisten, ist es, die Anzahl $N$ der Summanden genügend groß zu wählen. Ist dies der Fall, so ist die Lösung in Gebieten von Interesse nicht von den Randbedingungen beeinflusst.

### Berechnung der $f_j$ für Verteilungsfunktionen mit unendlicher Variation

Liegt dem Modell eine Verteilungsfunktion zu Grunde für die $\nu(x) = \infty$ ist, so können die Kollokationsverfahren nicht direkt angewendet werden. Die Idee zur Berechnung einer Verteilungsfunktion mit unendlicher Variation ist es, den Fall durch die Berechnung einer Verteilungsfunktion mit endlicher Variation zu approximieren. Als Ausgleich wird der Diffusionskoeffizient erhöht.
Die unendliche Anzahl kleiner Bewegungen die die Singularität darstellen lassen sich ebenfalls durch eine Brownsche Bewegung modellieren. Aus diesem Grund wird zur Berechnung singulärer Verteilungsfunktion die Funktion abgeschnitten. Für das Integral gilt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{\mathbb{R}} V(x+y) f(y)\, dy \\ &\approx \int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]} V(x+y) f(y)\, dy \end{aligned}$$

Die Sprünge der Größe $<\epsilon$ werden dann durch eine zusätzliche Brownsche Bewegung $\sigma(\epsilon)W$ ersetzt. Eine ausführliche Beschreibung dieser Methode ist in [CV05] zu finden.
Wir werden uns bei den Berechnungen singulärer Verteilungsfunktionen auf diese Methode stützen. Die Änderung des Koeffizienten der Brownschen Bewegung durch das Abschneiden des Integrals wird nicht untersucht. Diese Untersuchungen gehören zum Bereich der Parameterschätzung und werden hier nicht weiter betrachtet.

### Unterschiedliche Maschenweite für den PDE- und den Integral-Teil

Für die diskrete Darstellung des Integrals in (4.76) und (4.77) wird vorausgesetzt, dass die Maschenweiten des PDE- und des Integral-Teils identisch sind. Wird diese Voraussetzung

aufgehoben und verschiedenen Maschenweiten für die Diskretisierung des Ortes und des Integrals angenommen, ist die Berechnung des Integrals aufwändiger.
Sei $y_j = y_{min} + j\Delta y$ für $j = 0, \ldots, M$ eine äquidistante Unterteilung des Integralbereichs $\Omega_I = [y_{min}, y_{max}]$ mit $\Delta y = (y_{max} - y_{min})/M$. In diesem Fall ändert sich die diskrete Form des Integrals zu

$$\mathcal{I}_i = \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} V(x_i + y_j) f_j + O(\Delta y^2). \tag{4.84}$$

Auch hier werden die Berechnungen von $V(x_i + y_j)$ und $f_j$ getrennt betrachtet.

### Berechnung der $\mathbf{V(x_i + y_j)}$

Bei der Berechnung der $V(x_i + y_j)$ müssen im Gegensatz zur Berechnung im Fall der identischen Maschenweiten ($\Delta x = \Delta y$) drei Fälle unterschieden werden:

1. $x_i + y_j = x_{min} + l\Delta x = x_l$ für ein $0 \leq l \leq N$, d.h. $x_i + y_j \in \Omega_R$.
   In diesem Fall gilt
   $$V(x_i + y_j) = V(x_l). \tag{4.85}$$

2. $x_i + y_j < x_{min}$ oder $x_i + y_j > x_{max}$, also $x_i + y_j \notin \Omega_R$. Hier wird der Wert $V(x_i + y_j)$ approximiert durch die Randbedingungen, d.h.
   $$\begin{aligned} V(x_i + y_j) &= 0 && \text{für} \quad x_i + y_j < x_{min} \\ V(x_i + y_j) &= (e^{(x_i + y_j)} - Ke^{-r(T-t)})^+ && \text{für} \quad x_i + y_j > x_{max}. \end{aligned}$$

3. Falls der Punkt $x_i + y_j$ zwar im Gebiet $\Omega_R$ liegt, aber kein Diskretisierungspunkt ist, muss der Optionswert an dieser Stelle mittels Interpolation bestimmt werden. Es gilt also, $x_i + y_j \geq x_{min}$ und $x_i + y_j \leq x_{max}$, aber $\nexists\, l \in \{0, \ldots N\} : \exists\, i, j \in \{0, \ldots N\} : x_i + y_j = x_l$. Für diesen Fall wird das $l$ mit $x_l < x_i + y_j < x_{l+1}$ ermittelt. Dann wird $V(x_i + y_j)$ durch lineare Interpolation aus den Werten $V(x_l)$ und $V(x_{l+1})$ approximiert, d.h.
   $$V(x_i + y_j) = V(x_l) + \frac{V(x_{l+1}) - V(x_l)}{x_{l+1} - x_l}(x_i + y_j - x_l). \tag{4.86}$$

### Berechnung der $\mathbf{f_j}$

An der Berechnung der $f_j$ ändert sich nichts für den Fall der verschiedenen Maschenweiten. Auch hier werden die oben vorgestellten Diskretisierungsmethoden (Trapezregel (4.80), Simpsonregel (4.81) und Gauß-Quadratur (4.83)) verwendet. Für singuläre Verteilungsfunktionen muss wiederum das Abschneiden des Integrals beachtet werden.

Die Wahl unabhängiger Maschenweiten bietet die Möglichkeit, die Gebietsgrößen von $\Omega_I$ und $\Omega_R$ und ihre Lage frei zu wählen. Somit besteht die Möglichkeit, den Einfluss dieser Wahl auf die Parameter genauer zu untersuchen. Dies wird in Abschnitt 6.5.1 geschehen.

### 4.6.4 Lösung

Mit den vorgestellten Diskretisierungsmethoden ergibt sich nun die vollständige Diskretisierung von (4.58).

$$\begin{aligned} &[1+\theta(\alpha+\beta+r+\lambda)\Delta\tau]\,V_i^{n+1} - \theta\Delta\tau\beta V_{i+1}^{n+1} - \theta\Delta\tau\alpha V_{i-1}^{n+1} \\ =&[1-(1-\theta)(\alpha+\beta+r+\lambda)\Delta\tau]\,V_i^{n} + (1-\theta)\Delta\tau\beta V_{i+1}^{n} + (1-\theta)\Delta\tau\alpha V_{i-1}^{n} \\ &+\lambda\Delta\tau \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} V^n(x_i+y_j)f_j \end{aligned} \tag{4.87}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sigma^2}{2\Delta x^2} - \frac{r-\lambda\kappa-\frac{\sigma^2}{2}}{2\Delta x^2} \\ \beta &= \frac{\sigma^2}{2\Delta x^2} + \frac{r-\lambda\kappa-\frac{\sigma^2}{2}}{2\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Die Wahl des Parameters $\theta$ ermöglicht nun die Wahl des Schemas ($\theta=0$ explizit, $\theta=1$ implizite, $\theta=\frac{1}{2}$ Crank-Nicolson).

#### Matrixformulierung

Es ist sinnvoll, eine etwas kompaktere Darstellung zu nutzen. Gleichung (4.87) kann folgenderweise in Matrixform geschrieben werden. Definiere die Matrizen **A** und **B** so, dass

$$[\mathbf{A}\cdot V^n]_i = \Delta\tau\alpha V_{i-1}^n - (\alpha+\beta+r+\lambda)\Delta\tau V_i^n + \Delta\tau\beta V_{i+1}^n, \tag{4.88}$$

$$[\mathbf{B}\cdot V^n]_i = \sum_j b_{ij}V_j^n = \sum_{j=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} V^n(x_i+y_j)f_j. \tag{4.89}$$

Somit ergibt sich die Matrixformulierung

$$[I-\theta\mathbf{A}]V^{n+1} = [I+(1-\theta)\mathbf{A}]V^n + \lambda\Delta\tau\mathbf{B}V^n. \tag{4.90}$$

Der PDE-Teil des Problems wird mit der Crank-Nicolson-Diskretisierung diskretisiert ($\theta=1/2$). Zwar gilt nur für das implizite Verfahren, dass es in Kombination mit einer expliziten Behandlung des Integrals unbedingt stabil ist, aber für dieses erhalten wir maximal eine Konvergenzordnung von 1 in der Zeit. Für das Crank-Nicolson-Verfahren hingegen gilt

**Satz 4.6.4**
*Das Crank-Nicolson-Verfahren ist unter der Beschränkung, dass $\lambda\Delta\tau$ hinreichend klein ist, stabil.*

*Beweis:* siehe [dFV04].

So gilt zwar eine Beschränkung für $\Delta\tau$, allerdings ist es möglich, eine höhere Konvergenzordnung zu erzielen. Somit beachten wir die Forderung an die Zeitschrittweite, um eine höhere Konvergenzordnung zu erhalten.
Somit ergibt sich in Matrixschreibweise

$$[I-\frac{1}{2}\mathbf{A}]V^{n+1} = [I+\frac{1}{2}\mathbf{A}]V^n + \lambda\Delta\tau\mathbf{B}V^n.$$

Durch die explizite Diskretisierung des Integrals spiegelt sich die Integralberechnung nur in einer Änderung der rechten Seite wider. Da die Matrix $A$ dünn besetzt ist, d.h. nur Einträge auf der Diagonalen und den Nebendiagonalen besitzt, erhalten wir ein Tridiagonalsystem. Mit Hilfe einer direkten Zerlegung (LR-Zerlegung für ein Tridiagonalsystem, auch „Thomas-Algorithmus" genannt) ist dieses Problem mit einem Aufwand von $O(N)$ zu lösen. Der Algorithmus für die direkte Zerlegung ist dargestellt in Algorithmus 4. Dazu wird davon ausgegangen, dass es eine Tridiagonalmatrix $A$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & & & \\ u_2 & v_2 & w_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & v_{n-1} & w_{n-1} \\ & & & u_n & v_n \end{pmatrix} \tag{4.91}$$

und eine rechte Seite $b = (b1, \ldots, b_n)^t$ gibt. Der Algorithmus 4 liefert dann die Lösung $x$ des Problems $Ax = b$, wobei die Lösung im alten Vektor der rechten Seite gespeichert wird [Wer92].

**for** $i = 2, \ldots, N$ **do**
  **if** $v_{i-1} \neq 0$ **then**
    Berechne $u_i = u_i / v_{i-1}$.
    Berechne $v_i = v_i - u_i w_{i-1}$.
    Berechne $b_i = b_i - u_i b_{i-1}$.
  **else**
    Verfahren nicht durchführbar. STOP.
  **end if**
**end for**
**if** $v_N = 0$ **then**
  Verfahren nicht durchführbar. STOP.
**end if**
Setze $b_n = b_n / v_n$.
**for** $i = N, \ldots, 1$ **do**
  Berechne $b_i = (b_i - w_i b_{i+1}) / v_i$.
**end for**

**Algorithm 4:** LR-Zerlegung für ein Tridiagonalsystem.

# Kapitel 5

# Bewertung von Basket-Optionen

Im letzten Kapitel wurden verschiedene Verfahren zur Bewertung Europäischer Optionen vorgestellt. Von großer Bedeutung sind jedoch auch Basket-Optionen, da Aktienkurse im Allgemeinen nicht unabhängig voneinander. Häufig stehen sie in einer gewissen Verbindung zueinander. So kann es sein, dass das Ansteigen eines Aktienkurses auch die Wertsteigerung weiterer Aktien nach sich zieht. Es ist auch möglich, dass die positive Wertänderung eines Kurses die negative Änderung anderer Kurse bedeutet. Dies wird als *Korrelation* der Aktien bezeichnet. Die Berücksichtigung mehrerer (korrelierter) Aktien zur Optionspreisbewertung erschwert jedoch die Berechnung, da sich die Anzahl der Aktien in der Dimensionsgröße des Problems widerspiegelt.
In diesem Kapitel soll nun eine neue Bewertungsformel hergeleitet werden, die es ermöglicht, den Preis eines Baskets zu bestimmen. Die Neuerung besteht darin, dass die Aktienkurse jeweils einem Sprung-Diffusions-Prozess zugrunde liegen. Dabei wird angenommen, dass der Sprungprozess unabhängig von den Wiener Prozessen ist. Die grundsätzliche Annahme diesese Modells ist also, dass nur ein Sprungprozess für alle Aktienkurse existiert. Die Aktien sind somit für den Sprungprozess *identisch korreliert*. Die Vereinfachung, die aus dieser Modellannahme folgt, ist, dass das zu berechnende Integral wieder auf ein eindimensionales Integral reduziert wird.
Nach der Herleitung der mehrdimensionalen PIDE wird die Diskretisierung und Lösung des Problems beschrieben. Der letzte Abschnitt behandelt die Parallelisierung des Problems.

## 5.1 Herleitung der mehrdimensionalen PIDE

Wie im eindimensionalen Fall setzt sich die Kursbewegung auch hier zusammen aus einer Diffusions- und einer Sprungkomponente. Der Sprungprozess ist nach einer der Modellannahmen unabhängig von den Wiener Prozessen und für alle Aktienkurse $S_i$ identisch. Die Änderungen der Kurse können somit dargestellt werden als

$$dS_i = \mu dt + \sum_{j=1}^{d} \Sigma S_i dW_j + dq \qquad i, j = 1, \ldots, d, \tag{5.1}$$

wobei $\mu$ der erwartete Ertrag des $i$-ten Aktienkurses $S_i$, $W_j$ für $j = 1, \ldots, d$ ein Wiener Prozess und $q$ ein Poisson-Prozess ist. Die Korrelationsmatrix $\Sigma$ ist definiert als

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho\sigma_1\sigma_d \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho\sigma_2\sigma_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho\sigma_d\sigma_1 & \rho\sigma_d\sigma_2 & \cdots & \sigma_d^2 \end{pmatrix},$$

wobei $-1 \leq \rho \leq 1$ den Korrelationsfaktor zwischen zwei Aktienkursen bezeichnet. Die Änderung des Optionspreises $V$, der nun von $d$ Aktienkursen abhängt, ist

$$\frac{dV(S_1, \ldots, S_d, t)}{V} = \mu dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_j dW_j + dq \tag{5.2}$$

mit $\mathbf{S} = (S_1, \ldots, S_d)^T$. Nun wird das Itô-Lemma für mehrere Dimensionen verwendet

$$\begin{aligned} dV(\mathbf{S}, t) = &\sum_{i=1}^{d} V_{S_i} \langle \sigma_i, dW_i \rangle + (V_t + \sum_{i=1}^{d} \mu V_{S_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \Sigma V_{S_i S_j}) dt \\ &+ (V(\mathbf{S} + \Delta \mathbf{S}, t) - V(\mathbf{S}, t)) \end{aligned} \tag{5.3}$$

wobei

$$\langle \sigma_i, dW_i \rangle = \sigma_i \tag{5.4}$$

und $\Delta\mathbf{S} = (\Delta S_1, \ldots, \Delta S_d)^T$ die tatsächliche Änderung der Kurse ist. Hierei geht die Modellanahme, dass die prozentuale Änderung für alle Kurse gleich ist, ein. Mit der zusätzlichen Voraussetzung der Arbitragefreiheit und der daraus resultierenden Gültigkeit von $\mu = r$ ergibt sich

$$V_t = \sum_{i=1}^{d} \mu S_i V_{S_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \Sigma S_i S_j V_{S_i S_j} - rV + \lambda \mathrm{E}[V(\mathbf{S} + \Delta \mathbf{S}, t) - V(\mathbf{S}, t)]. \tag{5.5}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{S} + \Delta \mathbf{S} &= \mathbf{S} Y \\ &= (S_1 Y, \ldots, S_d Y), \end{aligned} \tag{5.6}$$

wobei $Y$ eine Verteilungsfunktion für die auftretenden Sprünge ist. Somit ist es möglich, den nicht kontinuierlichen Teil der PIDE umzuschreiben.

$$\begin{aligned} \lambda \mathrm{E}[V(\mathbf{S} + \Delta \mathbf{S}, t) - V(\mathbf{S}, t)] &= -\lambda V(\mathbf{S}, t) + \lambda \mathrm{E}[V(\mathbf{S} + \Delta \mathbf{S}, t)] \\ &\overset{(5.6)}{=} -\lambda V(\mathbf{S}, t) + \lambda \mathrm{E}[V(\mathbf{S} Y, t)] \\ &= -\lambda V(\mathbf{S}, t) + \lambda \int_0^{\infty} V(\mathbf{S} Y) g(Y) \, dY. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die partielle Integro-Differential-Gleichung für den d-dimensionalen Fall, bei dem das Integral jedoch weiterhin eindimensional ist

$$\begin{aligned} V_t &= \sum_{i=1}^{d} \mu S_i V_{S_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \Sigma S_i S_j V_{S_i S_j} - rV - \lambda V(\mathbf{S}, t) + \lambda \int_0^{\infty} V(\mathbf{S} Y) g(Y) \, dY \\ &= \sum_{i=1}^{d} \mu S_i V_{S_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \Sigma S_i S_j V_{S_i S_j} - (r + \lambda) V(\mathbf{S}, t) + \lambda \int_0^{\infty} V(\mathbf{S} Y) g(Y) \, dY. \end{aligned} \tag{5.7}$$

## 5.2 Diskretisierung der mehrdimensionalen PIDE

Zur Berechnung des Optionspreises mittels der mehrdimensionalen PIDE wird die Gleichung vor der Diskretisierung in logarithmische Koordinaten transformiert. Analog zur eindimensionalen Transformation gilt hier $\mathbf{S}=e^{\mathbf{x}}$ mit $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d)^T$ und $Y=e^y$, $dY=e^y dy$ und somit $f(y)=g(e^y)dy$. Nach Anwendung der Transformation ergibt sich

$$\begin{aligned} V_t =& \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \Sigma V_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d}(r-\lambda\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2)V_{x_i} - (r+\lambda)V \\ &+ \lambda\int_{-\infty}^{\infty} V(x_1+y,\ldots,x_d+y)f(y)\,dy. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Für eine Call-Option gilt die Anfangsbedingung

$$V(\mathbf{x},0) = \left(\sum_{i=1}^{d} e^{x_i} - K\right)^+ \tag{5.9}$$

### Lokalisierung

Um eine numerische Lösung für (5.8) angeben zu können, muss eine Einschränkung des unendlichen Gebietes $\Omega_d=\mathbb{R}^d$ auf ein endliches Gebiet vorgenommen werden. Dazu wählen wir das Gebiet $\Omega_{R_d} = [x_{min}, x_{max}]^d$. Der Rand des Gebietes wird mit *Gamma* bezeichnet. Das Zeitintervall $I_\tau=(0,T]$ bleibt unverändert erhalten. Somit ist das Problem (5.8) beschränkt auf das Gebiet $\Omega_{R_d}\times I_\tau$. Die Anfangsbedingung (5.9) bleibt unverändert, die Randbedingung ist gegben durch

$$V(\mathbf{x},\tau) = \left(\sum_{i=1}^{d} e^{x_i} - Ke^{-r\tau}\right)^+ \qquad \text{für} \quad \mathbf{x}\in\Gamma. \tag{5.10}$$

### 5.2.1 Zeitdiskretisierung

Es sei $\Delta\tau_n := n\Delta\tau$ für $n=0,\ldots,Mk$ mit $Mk\in\mathbb{N}$ eine äquidistante Diskretisierung des Zeitintervals $I_\tau$ mit der Schrittweite $\Delta\tau=T/Mk$. Sei $V^n$ die numerische Approximation von $V(\mathbf{S},n\Delta\tau)$. Analog zur Zeitdiskretisierung des eindimensionalen Problems (4.6.1) wird ein Operator-Splitting und ein Einschritt-Schema verwendet. Angewandt auf die semi-diskrete Schreibweise des Problems

$$V_\tau - \mathcal{L}(V) = 0$$

ist die Darstellung des Einschritt-Schemas gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{V^{n+1}-V^n}{\Delta\tau} &- \theta\mathcal{L}_{\text{PDE}}(V^{n+1}) - (1-\theta)\mathcal{L}_{\text{PDE}}(V^n) \\ &- \theta_J\mathcal{L}_{\text{Integral}}(V^{n+1}) - (1-\theta_J)\mathcal{L}_{\text{Integral}}(V^n) = 0, \end{aligned}$$

dabei ist

$$\mathcal{L}_{\text{PDE}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \Sigma V_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d}(r-\lambda\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2)V_{x_i} - (r+\lambda)V$$

und

$$\mathcal{L}_{\text{Integral}} = \lambda\int_{-\infty}^{\infty} V(x_1+y,\ldots,x_d+y)f(y)\,dy.$$

Dabei gilt $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\text{PDE}}+\mathcal{L}_{\text{Integral}}$.
Auch hier behandeln wir den Integral-Teil, analog zum eindimensionalen Fall, explizit. Die Diskretisierung des Orts geschieht mittels Finiter Differenzen und zur Auswertung des Integrals werden Kollokationsmethoden verwendet.

### 5.2.2 Ortsdiskretisierung

Sei $x_{\mathbf{i}} = x_0 + \sum_{j=1}^{d} i_j \Delta x e_j$ mit $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d)^T$ und $i_j \in \{1, \ldots, N\}$ für $j = 1, \ldots, d$ eine äquidistande Unterteilung des Gebiets $\Omega_{R_d}$. Dabei ist $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N$, $x_0 = (x_{min}, \ldots, x_{min})$ und $e_j$ der j-te Einheitsvektor. Es werden die in Abschnitt (4.6.2) vorgestellten Differenzenquotienten verwendet. Dabei wird die zweite Ableitung mittels zentraler Differenzen, die erste mit einer Downwind-Diskretisierung approximiert. Zusätzlich werden jedoch noch die gemischten zweiten Ableitungen benötigt:

$$\begin{aligned} V_{x_{i_j} x_{i_k}}(x_{\mathbf{i}}, n\Delta\tau) &= \left[V_{x_{i_j}}\right]_{x_{i_k}} (x_{\mathbf{i}}, n\Delta\tau) \\ &= \left[\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta x_l}\right]_{x_{i_k}} \\ &= \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i-1,j+1} - V_{i+1,j-1} + V_{i-1,j-1}}{4(\Delta x)(\Delta x)}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Wie auch die in 4.6.2 dargestellten Finiten Differenzen zur Näherung der zweiten Ableitung ist auch diese von der Ordnung 2 [GR94].

#### Stabilitätsanalyse

Für die Annahme, dass die Kurse einer Geometrisch Brownschen Bewegung folgen, lässt sich ähnlich zum eindimensionalen Fall eine Black-Scholes Formel herleiten. Es ist möglich, diese mehrdimensionale partielle Differentialgleichung auf die mehrdimensionale Wärmeleitungsgleichung zu transformieren. Dies ermöglicht eine Vereinfachung der Optionspreisberechnung, da keine konvektiven und reaktiven Terme mehr existieren.
Ist der zugrunde liegende Prozess der Aktienkurse jedoch ein Sprung-Diffusions-Prozess, wie er hier vorausgesetzt wird, also mit einem identischen Sprungprozess für alle Aktienkurse, so lässt sich keine geschlossene Lösung zur Bestimmung eines Optionspreises angeben. Außerdem ist es nicht möglich, die resultierende partielle Integro-Differentialgleichung so zu transformieren, dass die Konvektions- und Reaktionsterme verschwinden. Es ist also notwendig, diese Terme bei der numerischen Berechnung zu berücksichtigen. Es muss versucht werden, auch die erste Ableitung stabil zu approximieren. Somit kann analog zur Diskretisierung in einer Dimension hier die Diskussion über die Stabilität der Finiten Differenzen geführt werden. Da diese jedoch schon für den eindimensionalen Fall geführt wurde, wird hier auf die erneute Analyse verzichtet und auf 4.6.2 verwiesen.

### 5.2.3 Integraldiskretisierung

Betrachtet wird nun das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(x_1 + y, \ldots, x_d + y) f(y)\, dy. \tag{5.12}$$

Sei $\Omega_I = [y_{min}, y_{max}]$ eine Beschränkung des unendlichen Integralgebietes $\mathbb{R}$. Sei $y_k = y_{min} + k\Delta y$ mit $k = 1, \ldots, M$ mit $M \in \mathbb{N}$ eine äquidistante Unterteilung von $\Omega_I$ mit

$\Delta y = (y_{max} - y_{min})/M$. Für die Diskretisierung des Integrals wird vorausgesetzt, dass die Maschenweite des Integrals und des PDE-Teils identisch sind. Es gilt also, $\Delta x = \Delta y$ und $[x_{min}, x_{max}] = [y_{min}, y_{max}]$. Zur Berechnung des Integrals wird dieses durch eine endliche Summe approximiert. Bezeichne $I_{\mathbf{i}}$ das Integral am Punkt $x_{\mathbf{i}}$ des Gebietes, dann ist die Näherung des Integrals gegeben durch

$$I_{\mathbf{i}} = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} V(x_{i_1} + y_k, \ldots, x_{i_d} + y_k) f_k \tag{5.13}$$

mit

$$f_k = \int_{x_k - \frac{\Delta x}{2}}^{x_k + \frac{\Delta x}{2}} f(y)\, dy. \tag{5.14}$$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(y)$ gelten wieder die Eigenschaften (4.78). Zur Berechnung von (5.13) werden die Faktoren $V(x_{i_1} + y_k, \ldots, x_{i_d} + y_k)$ und $f_k$ getrennt betrachtet.

#### Berechnung der $\mathbf{V}(\mathbf{x}_{\mathbf{i_1}} + \mathbf{y}_{\mathbf{k}}, \ldots, \mathbf{x}_{\mathbf{i_d}} + \mathbf{y}_{\mathbf{k}})$

Für die Bestimmung der Optionspreise $V(x_{i_1} + y_k, \ldots, x_{i_d} + y_k)$ werden wie in Abschnitt 4.6.3 für den Fall, dass die Maschenweiten des PDE-Gebietes und des Integralgebietes übereinstimmen, zwei Berechnungen unterschieden.

1. Für den Fall $(x_{i_1} + y_k, \ldots, x_{i_d} + y_k)^T \in \Omega_{R_d}$:
   Bestimme $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_d)^T$ mit $l_j \in 0, \ldots, N$ für $j = 1, \ldots, d$ so, dass

   $$x_{i_1} + y_k = x_{l_1}, \ldots, x_{i_d} + y_k = x_{l_d}, \tag{5.15}$$

   dann gilt

   $$V(x_{i_1} + y_k, \ldots, x_{i_d} + y_k) = V(x_{\mathbf{l}}). \tag{5.16}$$

2. Wenn $(x_{i_1} + y_k, \ldots, x_{i_d} + y_k)^T \in \Gamma$, gilt:
   Bestimme $\mathbf{l}$ wie in (5.15), dann ist

   $$V(x_{i_1} + y_k, \ldots, x_{i_d} + y_k) = \left( \sum_{j=1}^{d} e^{x_{l_j}} - Ke^{-r\tau} \right)^+. \tag{5.17}$$

#### Berechnung der $\mathbf{f_k}$

Analog zum eindimensionalen Fall der PIDE können die Integrationsmethoden aus Abschnitt 4.6.3 verwendet werden.

### 5.2.4 Lösung

Mit Hilfe der beschriebenen Diskretisierungen des PDE-Gebietes und des Integrals lässt sich nun die Matrixformulierung des d-dimensionalen Problems (5.8) darstellen als

$$[I - \theta \mathbf{A}]V^{n+1} = [I + (1 - \theta)\mathbf{A}]V^n + \lambda \Delta\tau \mathbf{B} V^n. \tag{5.18}$$

Im zweidimensionalen Fall, den wir in Kapitel 6 beispielhaft berechnen, setzt sich die Matrix **A** zusammen aus dem Neunpunkte-Stern

$$\begin{bmatrix} -\gamma\Delta\tau & \beta_2\Delta\tau & \gamma\Delta\tau \\ \alpha_1\Delta\tau & -(\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2+r+\lambda)\Delta\tau & \beta_1\Delta\tau \\ \gamma\Delta\tau & \alpha_2\Delta\tau & -\gamma\Delta\tau \end{bmatrix}, \tag{5.19}$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\sigma_i^2}{2\Delta x^2} - \frac{r-\lambda\kappa-\frac{1}{2}\sigma_i^2}{2\Delta x} \text{ für } i=1,2 \\ \beta_i &= \frac{\sigma_i^2}{2\Delta x^2} + \frac{r-\lambda\kappa-\frac{1}{2}\sigma_i^2}{2\Delta x} \text{ für } i=1,2 \end{aligned} \tag{5.20}$$

und

$$\gamma = \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{2\Delta x^2}. \tag{5.21}$$

Ein Eintrag der Matrix $[\mathbf{B}V^n]$ ist in zwei Dimensionen gegeben durch

$$[\mathbf{B}V^n]_{ij} = \sum_{k-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} V^n(x_i+y_k, x_j+y_k) f_k. \tag{5.22}$$

Die Wahl von $\theta$ ermöglicht die implizite, explizite oder Crank-Nicolson-Diskretisierung des Problems.
Die Matrix **A** ist im d-dimensionalen Fall auch für eine explizite Behandlung des Integrals keine Tridiagonalmatrix mehr. Somit ist die Lösung des Gleichungssystems durch den Thomas-Algorithmus nicht mehr möglich und es müssen iterative Lösungsverfahren wie ein CG- oder ein GMRES-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems eingesetzt werden. Um die Stabilität des Verfahrens zu gewährleisten, wird im Folgenden ein implizites Eulerverfahren, $\theta = 0$, verwendet. So entsteht das zu lösende Gleichungssystem

$$[I - \mathbf{A}]V^{n+1} = \lambda\Delta\tau\mathbf{B}V^n. \tag{5.23}$$

## 5.3 Parallelisierung

Mit Hilfe der Parallelisierung ist es möglich, die Gesamtrechenzeit für ein Problem zu kürzen. Dies geschieht durch die Aufteilung des Rechengebietes auf verschiedene Prozessoren. So ist es auch möglich, Probleme einer Größe zu berechnen, die den Arbeitsspeicher eines einzelnen Rechners überschreiten würde. Mittels der Verwendung von Petsc [BBG+01] [BBE+04] [BGMS97] ist es möglich, eine Parallelisierung zu nutzen ohne die hintergründige Programmierung der Details zu kennen.
Die Berechnung des Integrals aus der PIDE ist bereits im eindimensionalen extrem rechenaufwändig. Es muss für jeden Diskretisierungspunkt ein Integral bestehend aus $N$ Punkten berechnet werden. Somit ergibt sich im eindimensionalen ein Aufwand von $O(N^2)$, im zweidimensionalen ein Aufwand von $O(N^3)$ für die Berechnung des Integrals. Zusätzlich ist der Speicherverbrauch sehr hoch, da für die Berechnung des Integrals auf die Lösung des letzten Zeitschritts zurückgegriffen werden muss. Um eine geringere Rechenzeit für die Berechnung zu erhalten und Speicherplatz zu garantieren, soll die Berechnung der zweidimensionalen PIDE parallelisiert werden.

Die Grundidee der Parallelisierung ist es, das Rechengebiet $\Omega$, bzw. sein diskretisiertes Gegenstück $\Omega_R$, in Teilgebiete $\Omega_R^1, \ldots, \Omega_R^P$ aufzuteilen. Dabei bezeichnet $P$ die Anzahl der

Teilgebiete.
Die Aufteilung des PDE-Teils der PIDE birgt keine Schwierigkeiten, da hier jeder der $P$ Prozessoren nur die Daten benötigt, die auch auf seinem zugehörigen Teilgebiet vorhanden sind. Schwieriger ist jedoch die Berechnung des Integrals. Hierbei muss ein Datenaustausch der verschiedenen Prozessoren stattfinden, um Teilergebnisse der einzelnen Prozessoren auszutauschen.
Im Abschnitt über die Integraldiskretisierung 5.2.3 wurde gezeigt, dass für die Berechnung der $V(x_i+y_k, x_j+y_k)$ unterschieden werden muss, ob der Punkt im Diskretisierungsgebiet liegt oder nicht.
Falls $V(x_i + y_k, x_j + y_k) \in \Omega_R$, muss dieser Punkt dem Prozessor zugeordnet werden, für den der Punkt im zugehörigen Teilgebiet liegt. Gilt $V(x_i + y_k, x_j + y_k) \notin \Omega_R$, so wird die Funktion mit Hilfe der Auszahlungsfunktion fortgesetzt. Doch auch in diesem Fall muss bestimmt werden, welcher Prozessor diese Fortsetzung übernimmt. Dazu wird das zugrunde liegende Diskretisierungsgebiet in Rechtecke unterteilt. Eine Dimension wird aufgeteilt auf die Anzahl der Prozessoren, die andere bleibt einfach erhalten. So berechnet nur einer der Prozessoren die Fortsetzung der Funktion.
Auf diese Weise wird die Summe zur Integralberechnung (5.13) in Teilsummen unterteilt. Am Ende der Berechnung des Integrals für einen Diskretisierungspunkt müssen die Prozessoren jedoch miteinander kommunizieren, um die Gesamtsumme zur Näherung des Integrals zu erhalten.

# Kapitel 6

# Numerische Ergebnisse

Dieses Kapitel stellt die Ergebnisse der in Kapitel 4 und 5 vorgestellten Verfahren zur Bewertung Europäischer und Basket-Optionen dar. Im ersten Teil dieses Kapitels werden die Bewertungsverfahren Europäischer Optionen für das Merton-Modell analysiert.
Zuerst werden die geschlossen Lösungen für die beiden bereits in Kapitel 4 spezifizierten Verteilungsfunktionen betrachtet. Die geschlossene Lösung, die im Fall der lognormalverteilten Sprünge berechnet werden kann, wird für die anschließend verwendeten Verfahren als Referenzlösung genutzt. Somit werden dann die Erwartungswertentwicklung und das Monte-Carlo-Verfahren hinsichtlich ihrer Konvergenz gegen die geschlossene Lösung untersucht.
Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit der Diskretisierung und Lösung der PIDE. Es wird eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt, in der überprüft wird, inwiefern sich eine Änderung eines einzelnen Parameters auf die Konvergenz auswirkt. Für die Parameter, die eine Verschlechterung der Konvergenz verursachen, werden Methoden zur Verbesserung vorgestellt, so dass wir schliesslich ein robustes Verfahren erhalten.
Die exemplarisch für die lognormalverteilten Sprünge erhaltenen Ergebnisse werden dann auf andere Verteilungsfunktionen, die Varianz-Gamma- und eine CGMY-Verteilung mit endlicher und unendlicher Variation, übertragen. Für diese Verteilungsfunktionen wird dann das jeweils beste Kollokationsverfahren zur Berechnung des Integrals ermittelt.
Im Anschluss werden die Ergebnisse zur Bewertung von Basket-Optionen diskutiert. Es werden Optionspreise für unkorrelierte und korrelierte Aktienkurse sowie für verschiedene zugrunde liegende Verteilungsfunktionen betrachtet.

## 6.1 Optionspreise mit und ohne Sprünge

In diesem Abschnitt sollen zunächst die Optionspreise, die mit Hilfe der Black-Scholes-Formel berechnet wurden, mit solchen eines Sprung-Diffusions-Prozesses verglichen werden.
In Abbildung 6.1 sind links der Preis $V(S,t)$ einer Europäischen Kauf-Option nach dem Black-Scholes Modell ($\lambda = 0$) im Vergleich zu einer Europäischen Kauf-Option nach dem Merton Modell ($\lambda = 0.8$) dargestellt. Zusätzlich ist die Payoff-Funktion abgebildet. Rechts sind Optionspreise nach dem Merton Modell mit verschiedenen Sprungintensitäten zu sehen. Die Parameter für die Berechnungen der in Abbildung 6.1 dargestellten Optionswerte sind mit Ausnahme der Sprungintensität der Tabelle 6.1 entnommen. Auch in den folgenden Ausführungen werden, wenn nicht anders angegeben, die Parameter dieser Tabelle verwendet.
Abbildung 6.1 zeigt die Auswirkung der verstärkten Sprungauftrittsrate. Für steigende Sprungintensität $\lambda$ ist ein Wachsen des Optionspreises festzustellen. Diese Feststellung beruht auf der Eigenschaft der Sprung-Diffusions-Prozesse. Diese Prozesse besitzen im Vergleich zur Brownschen Bewegung eine zusätzliche Komponente, die mögliche unerwartete

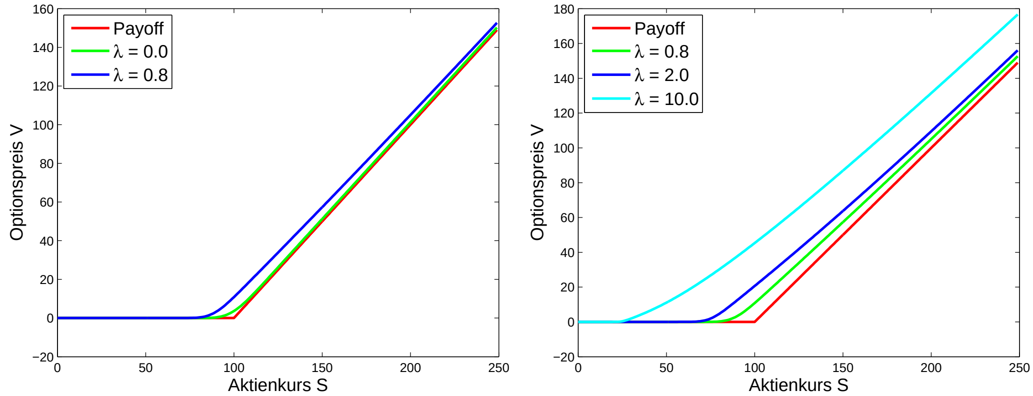


Abbildung 6.1: Optionspreise für eine Call-Option mit unterschiedlichen Sprungintensitäten, links der Optionspreis des Merton-Modells ($\lambda = 0.8$) und des Black-Scholes-Modells ($\lambda = 0.0$), rechts der Optionspreis des Merton-Modells mit verschiedenen Sprungintensitäten.

Sprünge der Aktie widerspiegelt. Eine Option, die auf einem Sprung-Diffusions-Modell beruht, „sichert" somit auch solche Sprünge ab und ist folglich teurer als eine Option, die keine unerwarteten Sprünge berücksichtigt. Eine Verstärkung der Sprungintensität wirkt sich in einem weiteren Anstieg des Optionspreises aus.

| Parameter | Bedeutung | Wert |
|---|---|---|
| $K$ | Ausübungspreis | 100.00 |
| $T$ | Laufzeit in Jahren | 0.25 |
| $r$ | Zins | 0.05 |
| $\sigma$ | Volatilität | 0.15 |
| $\lambda$ | Sprungrate | 0.10 |
| $\mu_J$ | Erwartungswert der Sprungverteilung | $-0.90$ |
| $\sigma_J$ | Varianz der Sprungverteilung | 0.45 |
| $C$ | Aktivität der Verteilungsfunktion | 1.00 |
| $G$ | Abfall der linken Seite der Verteilungsfunktion | 1.40 |
| $M$ | Abfall der rechten Seite der Verteilungsfunktion | 2.50 |
| $Y$ | Spezifizierung des stochastischen Prozesses: | |
| | Varianz-Gamma | 0.00 |
| | CGMY mit endlicher Variation | 0.50 |
| | CGMY mit unendlicher Variation | 1.50 |

Tabelle 6.1: Die verwendeten Standardparameter der betrachteten Modelle.

## 6.2 Geschlossene Lösungen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der geschlossenen Lösungen, die für den Fall des Plötzlichen Ruins und einer dem Sprung-Prozess zugrunde liegenden Lognormalverteilung ermittelt werden können, diskutiert.

### 6.2.1 Plötzlicher Ruin

Im Fall des Plötzlichen Ruins kann eine geschlossene Lösung zur Berechnung des Optionspreises angegeben werden.

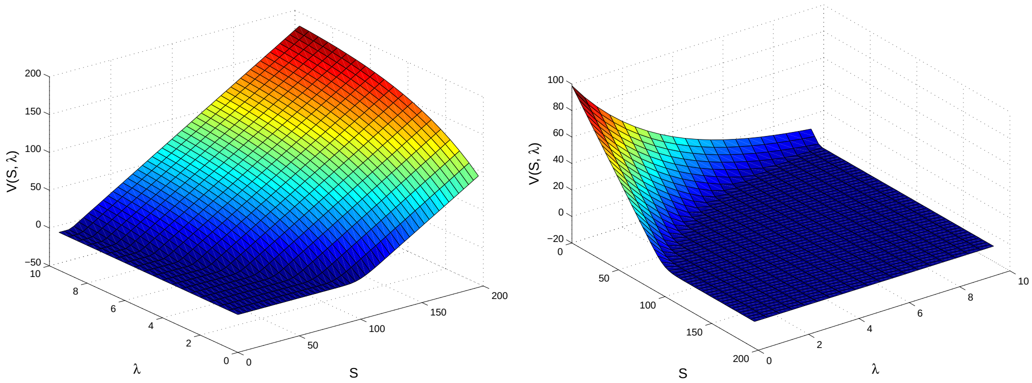


Abbildung 6.2: Optionspreise für eine Call-Option (links) und eine Put-Option (rechts) für den Fall des Plötzlichen Ruins in Abhängigkeit vom Kurs $S$ und verschiedenen Sprungintensitäten $\lambda$.

In Abbildung 6.2 sind die Optionspreise für einen Call und einen Put in Abhängigkeit der Sprungintensität dargestellt.
Es ist zu beobachten, dass der Wert einer Call-Option mit wachsendem Kurs und wachsender Sprungintensität steigt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kurs mit großer Sprungaktivität zum Ende der Laufzeit der Option noch nicht „gesprungen" ist und weiterhin ungleich 0 ist, ist sehr gering. Diese kleine Wahrscheinlichkeit, die einen relativ großen Gewinn garantieren würde, muss relativ teuer bezahlt werden.
Im Fall einer Put-Option steigt der Optionspreis mit kleiner werdendem Sprungparameter und kleinerem Kurs. Mit Hilfe der Put-Option kann ein Gewinn erzielt werden, wenn $K-S$ groß, also wenn $S$ klein wird. Falls der Kurs eine geringe Sprungaktivität besitzt, richten sich die Änderungen des Kurses hauptsächlich nach der Brownschen Bewegung und somit wird sich der Wert des Kurses nur in kleinem Maße ändern. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für einen kleinen Kurswert am Ende der Optionslaufzeit gering, wenn der Kurs zu Beginn der Laufzeit der Option relativ groß ist.
Für das Modell des Plötzlichen Ruins ist es sinnvoller, eine Put-Option zu kaufen, da man erwartet, dass der Kurs fällt und durch das Fallen des Kurses ein Gewinn erzielt werden kann.

### 6.2.2 Lognormalverteilung

Die in Abschnitt 4.3.2 vorgestellte geschlossene Lösung zur Berechnung eines Optionspreises mit lognormalverteilten Sprüngen wird im Folgenden für alle weiteren verwendeten Verfahren als Referenzlösung genutzt. Dies bedeutet, dass der mittels anderer Verfahren bestimmte Optionspreis mit dem der geschlossenen Lösung verglichen wird.
Da die geschlossene Lösung aus einer unendlichen Summe besteht, muss diese unendliche Summe zur Berechnung des Optionspreises durch eine endliche Summe approximiert werden. Es wird gezeigt, dass der Fehler, der durch das Abschneiden der unendlichen Summe

entsteht zu vernachlässigen ist, da zum einen die Werte der Poisson-Verteilung sehr schnell abfallen und zum anderen der mit Hilfe der Black-Scholes-Formel berechnete Optionspreis irgendwann exakt 0 wird und somit eine endliche Summe entsteht.
In Abschnitt 4.3.2 über die Berechnung des Optionspreises mit zugrunde liegender Lognormalverteilung für die Sprungverteilung wurde bereits gezeigt, dass die unendliche Summe zur Optionspreisbestimmung konvergiert. Nun soll untersucht werden an welchem Summanden die Summe abgeschnitten werden kann. In Abschnitt 4.3.2 wurde bemerkt, dass die meisten Summanden für einen großen Startkurs ungleich 0 sind. Aus diesem Grund betrachten wir zur Bestimmung des Abschneideterms als Startkurs denjenigen Kurs, der der größte in allen weiteren Berechnungen mit den Standardparametern sein wird.

| $n$ | Poisson-Gewicht | Black-Scholes-Wert | Summand | Gesamtsumme |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $9.88816e{-}01$ | $2.88355e{+}03$ | $2.85130e{+}03$ | $2.85130000e{+}03$ |
| 1 | $1.11214e{-}02$ | $2.76444e{+}03$ | $3.07446e{+}01$ | $2.88204341e{+}03$ |
| 2 | $6.25431e{-}05$ | $2.50017e{+}03$ | $1.56368e{-}01$ | $2.88219978e{+}03$ |
| 3 | $2.34480e{-}07$ | $1.97047e{+}03$ | $4.62037e{-}04$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 4 | $6.59315e{-}10$ | $1.26215e{+}03$ | $8.32157e{-}07$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 5 | $1.48310e{-}12$ | $6.65873e{+}02$ | $9.87556e{-}10$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 6 | $2.78013e{-}15$ | $3.03696e{+}02$ | $8.44318e{-}13$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 7 | $4.46699e{-}18$ | $1.24978e{+}02$ | $5.58280e{-}16$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 8 | $6.28019e{-}21$ | $4.78342e{+}01$ | $3.00408e{-}19$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 9 | $7.84834e{-}24$ | $1.73792e{+}01$ | $1.36398e{-}22$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 10 | $8.82724e{-}27$ | $6.07827e{+}00$ | $5.36544e{-}26$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 11 | $9.02567e{-}30$ | $2.06505e{+}00$ | $1.86385e{-}29$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 12 | $8.45952e{-}33$ | $6.83506e{-}01$ | $5.78213e{-}33$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 13 | $7.31896e{-}36$ | $2.18201e{-}01$ | $1.59700e{-}36$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 14 | $5.87988e{-}39$ | $6.40717e{-}02$ | $3.76734e{-}40$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 15 | $4.40884e{-}42$ | $1.35766e{-}02$ | $5.98572e{-}44$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 16 | $3.09922e{-}45$ | $2.61426e{-}02$ | $8.10218e{-}47$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 17 | $2.05045e{-}48$ | $8.32084e{-}03$ | $1.70615e{-}50$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 18 | $1.28122e{-}51$ | $2.63214e{-}03$ | $3.37237e{-}54$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 19 | $7.58436e{-}55$ | $8.30011e{-}04$ | $6.29510e{-}58$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 20 | $4.26517e{-}58$ | $2.62048e{-}04$ | $1.11768e{-}61$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 21 | $2.28436e{-}61$ | $8.34207e{-}05$ | $1.90562e{-}65$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 22 | $1.16785e{-}64$ | $2.71119e{-}05$ | $3.16628e{-}69$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 23 | $5.71095e{-}68$ | $9.21091e{-}06$ | $5.26031e{-}73$ | $2.88220025e{+}03$ |
| 24 | $2.67636e{-}71$ | 0 | 0 | $2.88220025e{+}03$ |

Tabelle 6.2: Konvergenz der unendlichen Summe für die geschlossene Lösung im Fall der lognormalverteilten Sprünge.

In Tabelle 6.2 sind die Summanden mit zugehörigem Poisson-Gewicht und den Black-Scholes-Preisen für die Berechnung einer Call-Option mittels der geschlossenen Lösung aufgeführt. Als Startwert wurde $S=e^8=2980.95798$ verwendet, da dieser in den weiteren Berechnungen der größte auftretende Startkurs ist. Die weiteren Parameter sind Tabelle 6.1 entnommen.
In Tabelle 6.2 ist zu sehen, dass die unendliche Summe bereits nach wenigen (24) Summanden abbricht, da dann der Black-Scholes-Preis der neu berechneten Parameter exakt 0

ergibt[1]. Zu beachten ist auch, dass das Poisson-Gewicht der Summanden so schnell abfällt, dass bereits nach ca. 10 Summanden der Wert der Summanden im Bereich der Maschinengenauigkeit (bei Berechnung mit double precision) liegt und somit der numerische Fehler bei einem Abschneiden nach 10 Summanden bereits sehr klein ist.
Da in Abschnitt 6.5 verschiedene Parametersätze untersucht werden, die von dem in Tabelle 6.1 angegebenen abweichen, wurde auch auch für diese Fälle die Konvergenz der Summe untersucht. Es sind jedoch in keinem Fall mehr Summanden ungleich 0 zu berechnen als im dargestellten.
Abbildung 6.3 zeigt die Optionswerte einer Call- und einer Put-Option in Abhängigkeit vom Aktienkurs und der Sprungintensität.

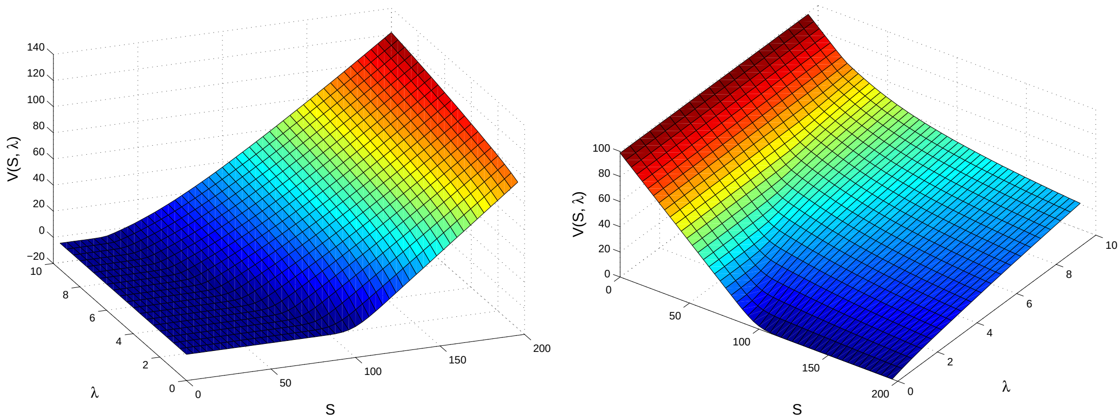


Abbildung 6.3: Optionspreise für einen Call (links) und einen Put (rechts) für den Fall der lognormalverteilten Sprünge in Abhängigkeit vom Kurs $S$ und verschiedenen Sprungintensitäten $\lambda$.

Die Abbildung verdeutlicht die bereits in Abbildung 6.1 gemachten Beobachtungen. Für eine Call-Option steigt der Preis sowohl mit wachsendem Kurs als auch mit zunehmender Sprungrate. Wird eine Put-Option betrachtet, so steigt der Optionspreis mit wachsender Sprungintensität und sinkt mit ansteigendem Kurs. Diese Eigenschaften sind im Wesentlichen auf die Struktur der zugehörigen Auszahlungsfunktionen zurückzuführen (vgl. Abschnitt 2.4.1).
Zusammenfassend gilt für die in Abschnitt 6.2.1 und 6.2.2 dargestellten geschlossenen Lösungen, dass sie leicht zu berechnen sind, da sie lediglich auf der Black-Scholes-Formel mit mit variierenden Parametern beruhen.

## 6.3 Erwartungswertentwicklung

Dieser Abschnitt umfasst die Untersuchung der Konvergenz der Erwartungswertentwicklung aus Abschnitt 4.4. Diese wird für den Plötzlichen Ruin und eine lognormalverteilte Sprungverteilung diskutiert.
Für den Fall des Plötzlichen Ruins muss keine Konvergenz untersucht werden. Die Zufallszahlen sind aus dem Problem als $X_0 = 1$ und $X_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ vorgegeben. Somit

[1] Man betrachte hierzu die Auszahlungsfunktion eines Calls $\max(0, S-K)$. Wie in Abschnitt 4.3.2 bemerkt wir der Zins für jede neue Berechnung kleiner und schliesslich auch negativ. Dies führt dazu, dass der Kurs $S$ zum Endzeitpunkt der Option auch unter den Ausübungpreis fällt und somit der Preis der Option exakt 0 ist.

ergeben sich eindeutige Parameter für Formel (4.39) der Erwartungswertentwicklung. Außerdem wurde in Abschnitt 4.4.1 untersucht, dass die Erwartungswertentwicklung und die geschlossene Lösung übereinstimmen, da in der Erwartungswertentwicklung nur ein Summand nicht verschwindet.
Für eine zugrunde liegende Lognormalverteilung soll nun die Konvergenz gegen die geschlossene Lösung untersucht werden. Wie in Abschnitt 4.4 beschrieben, verwenden wir für jeden Summanden ein Monte-Carlo-Verfahren, um den erwarteten Black-Scholes-Preis zu berechnen. Die Summe der mit einer Poisson-Verteilung gewichteten Einzelsummanden ergibt dann den Gesamtpreis $V_E$. Dieser Preis soll mit dem der geschlossenen Lösung, der Referenzlösung $V_R$, verglichen werden. Zur Untersuchung der Konvergenz wird der relative Fehler

$$e_{rel} = \frac{|V_E - V_R|}{|V_R|}$$

betrachtet.

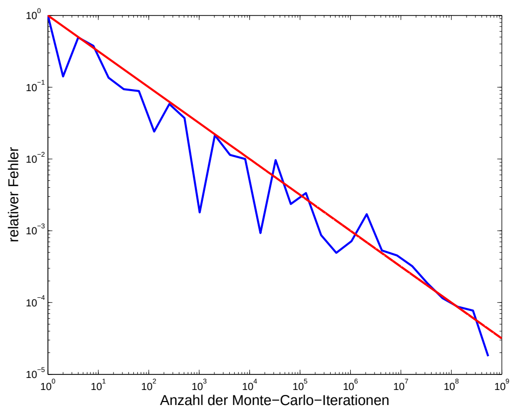


Abbildung 6.4: Konvergenz der Erwartungswertentwicklung für lognormalverteilte Sprünge.

In Abbildung 6.4 ist der relative Fehler bezüglich der Anzahl der Monte-Carlo-Iterationen für jeden Summanden dargestellt. Es ist zu beobachten, dass die Konvergenz nicht monoton verläuft, sondern Sprünge nach oben und unten existieren. Diese Auf- und Abbewegungen sind eine Eigenschaft des Monte-Carlo-Verfahrens. Da dieses auf der Ziehung von Zufallszahlen beruht, kann es passieren, dass wenige Zufallszahlen eine Kurssimulation produzieren, für die der Endkurs besser mit der Referenzlösung übereinstimmt als für mehr Iterationen. Somit ist durch die Verwendung von Zufallszahlen keine gleichmäßige Konvergenz möglich. Es kann dennoch beobachtet werden, dass der relative Fehler im Mittel mit einer Konvergenzrate von $\frac{1}{2}$ kleiner wird. Dies wird durch die zusätzlich abgebildete Gerade mit Steigung $\frac{1}{2}$ verdeutlicht.

In Tabelle 6.3 sind die Anzahl der Monte-Carlo-Iterationen, der relative Fehler $e_{rel}$ und die Konvergenzrate $\rho$ dargestellt. Die Konvergenzrate $\rho^i$ der i-ten Zeile wird dabei durch

$$\rho^i = \frac{\left(\log(e_{rel}^{i-1}) - \log(e_{rel}^{i})\right)}{log(2)} \tag{6.1}$$

ermittelt. Dabei bezeichnet $e_{rel}^i$ den relativen Fehler der $i$-ten Zeile der Konvergenztabelle.

| $N$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
|---|---|---|
| $2^0$ | $1.00000e{+}00$ | - |
| $2^1$ | $1.41413e{-}01$ | $2.82e{+}00$ |
| $2^2$ | $4.93258e{-}01$ | $-1.80e{+}00$ |
| $2^3$ | $3.77056e{-}01$ | $3.87e{-}01$ |
| $2^4$ | $1.35627e{-}01$ | $1.47e{+}00$ |
| $2^5$ | $9.37271e{-}02$ | $5.33e{-}01$ |
| $2^6$ | $8.83052e{-}02$ | $8.59e{-}02$ |
| $2^7$ | $2.41318e{-}02$ | $1.87e{+}00$ |
| $2^8$ | $5.83060e{-}02$ | $-1.27e{+}00$ |
| $2^9$ | $3.71640e{-}02$ | $6.49e{-}01$ |
| $2^{10}$ | $1.80342e{-}03$ | $4.36e{+}00$ |
| $2^{11}$ | $2.14542e{-}02$ | $-3.57e{+}00$ |
| $2^{12}$ | $1.13795e{-}02$ | $9.14e{-}01$ |
| $2^{13}$ | $1.00016e{-}02$ | $1.86e{-}01$ |
| $2^{14}$ | $9.30185e{-}04$ | $3.42e{+}00$ |
| $2^{15}$ | $9.66061e{-}03$ | $-3.37e{+}00$ |
| $2^{16}$ | $2.36244e{-}03$ | $2.03e{+}00$ |
| $2^{17}$ | $3.35351e{-}03$ | $-5.05e{-}01$ |
| $2^{18}$ | $8.68425e{-}04$ | $1.94e{+}00$ |
| $2^{19}$ | $4.92885e{-}04$ | $8.17e{-}01$ |
| $2^{20}$ | $7.14649e{-}04$ | $-5.35e{-}01$ |
| $2^{21}$ | $1.70078e{-}03$ | $-1.25e{+}00$ |
| $2^{22}$ | $5.31568e{-}04$ | $1.67e{+}00$ |
| $2^{23}$ | $4.52184e{-}04$ | $2.33e{-}01$ |
| $2^{24}$ | $3.21337e{-}04$ | $4.92e{-}01$ |
| $2^{25}$ | $1.85499e{-}04$ | $7.92e{-}01$ |
| $2^{26}$ | $1.14970e{-}04$ | $6.90e{-}01$ |
| $2^{27}$ | $8.72676e{-}05$ | $3.97e{-}01$ |
| $2^{28}$ | $7.73053e{-}05$ | $1.74e{-}01$ |
| $2^{29}$ | $1.78680e{-}05$ | $2.11e{+}00$ |

Tabelle 6.3: Konvergenz der Erwartungswertentwicklung für lognormalverteilte Sprünge mit durch das Monte-Carlo-Verfahren berechneten Kursen.

Wie auch in Abbildung 6.4 ist zu beobachten, dass das Verfahren nicht monoton konvergiert. Durch die zwischenzeitlichen Sprünge nach oben ergeben sich auch negative Konvergenzraten. Im Mittel liegt die Rate jedoch bei $\frac{1}{2}$.

## 6.4 Monte-Carlo-Verfahren

In Abschnitt 4.5 wurde das Monte-Carlo-Verfahren vorgestellt. Wir beschränken uns hier, wie bereits in Abschnitt 4.5 genauer erläutert, auf die Simulation an festen Zeitpunkten, da wir nur am Kurs zum Endzeitpunkt $T$ interessiert sind und nicht an seiner Entwicklung über die Laufzeit.
Es werden die bereits bekannten Fälle des Plötzlichen Ruins und der lognormalverteilten Sprünge untersucht. Dazu wird das Monte-Carlo-Verfahren auf beide Fälle angewendet und für steigende Anzahl der Monte-Carlo-Iterationen die Konvergenz gegen den Referenz-

preis $V_R$, der mittels der geschlossenen Lösungen ermittelt wurde, betrachtet. Den mittels des Monte-Carlo-Verfahrens berechneten Optionspreis bezeichnen wir mit $V_{MC}$. Um die Konvergenz gegen die exakte Lösung betrachten zu können, wird der relative Fehler

$$e_{rel} = \frac{|V_{MC} - V_R|}{|V_R|}$$

berechnet.

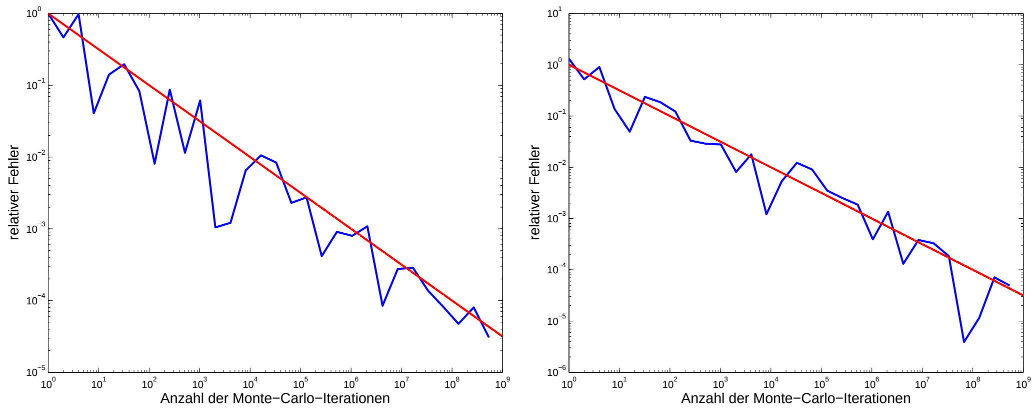


Abbildung 6.5: Konvergenz des Monte-Carlo Verfahrens für den Fall des Plötzlichen Ruins (links) und für lognormalverteilte Sprünge (rechts).

In Abbildung 6.5 ist der relative Fehler abhängig von der Anzahl der Monte-Carlo-Iterationen dargestellt. Zusätzlich wurde eine Gerade mit der Steigung $\frac{1}{2}$ abgebildet, um die durchschnittliche Konvergenz des Verfahrens zu verdeutlichen. Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erläutert wurde, zeigt sich auch hier, dass die Konvergenz des Monte-Carlo-Verfahrens nicht monoton ist. Es existieren Sprünge nach oben und unten, die eine Eigenschaft des Monte-Carlo-Verfahrens sind. Es kann auch in diesem Fall beobachtet werden, dass der relative Fehler im Mittel mit einer Konvergenzrate von $\frac{1}{2}$ kleiner wird.
In Tabelle 6.4 sind für den Plötzlichen Ruin und für lognormalverteilte Sprünge die Anzahl der Monte-Carlo-Iterationen, der relative Fehler und die Konvergenzrate $\rho$ aufgelistet. Die Konvergenzrate wurde dabei mit Hilfe von (6.1) berechnet. Auch in Tabelle 6.4 sind die Auf- und Abbewegungen des relativen Fehlers an der schwankenden Konvergenzrate zu erkennen.

Das Monte-Carlo-Verfahren zeigt, wie auch die Erwartungswertentwicklung, eine Konvergenzrate von $\frac{1}{2}$. Es ist aber zu beachten, dass der Aufwand zur Berechnung des Optionspreises durch die Erwartungswertentwicklung wesentlich höher ist als der Aufwand des Monte-Carlo-Verfahrens zur Simulation der Kursbewegungen. Da bei der Berechnung des Preises mittels der Erwartungswertentwicklung in jedem Summanden ein Monte-Carlo-Verfahren zur Bestimmung des zukünftigen Black-Scholes-Preises benötigt wird, ist der Aufwand mindestens um die Anzahl der Summanden größer.
Hinsichtlich ihrer Flexibilität zur Berechnung verschiedener Sprung-Verteilungsfunktionen unterscheiden sich die beiden Verfahren nicht. In beiden Fällen ist es nötig, die Inverse der Sprung-Verteilungsfunktionen zu bestimmen. Diese sind jedoch bei den hier betrachteten Verteilungsfunktionen nur für die Normal- und die Lognormalverteilung bekannt.

| | Lognormalverteilung | | Plötzlicher Ruin | |
|---|---|---|---|---|
| $N$ | $e_{rel}$ | $\rho$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
| $2^0$ | $1.30594e{+}00$ | - | $1.00000e{+}00$ | - |
| $2^1$ | $5.18758e{-}01$ | $1.33e{+}00$ | $4.64629e{-}01$ | $1.10e{+}00$ |
| $2^2$ | $9.02659e{-}01$ | $-7.99e{-}01$ | $9.78387e{-}01$ | $-1.07e{+}00$ |
| $2^3$ | $1.37406e{-}01$ | $2.71e{+}00$ | $4.06368e{-}02$ | $4.58e{+}00$ |
| $2^4$ | $4.95967e{-}02$ | $1.47e{+}00$ | $1.40561e{-}01$ | $-1.79e{+}00$ |
| $2^5$ | $2.35584e{-}01$ | $-2.24e{+}00$ | $1.96273e{-}01$ | $-4.81e{-}01$ |
| $2^6$ | $1.86871e{-}01$ | $3.34e{-}01$ | $8.26470e{-}02$ | $1.24e{+}00$ |
| $2^7$ | $1.22234e{-}01$ | $6.12e{-}01$ | $8.08399e{-}03$ | $3.35e{+}00$ |
| $2^8$ | $3.31033e{-}02$ | $1.88e{+}00$ | $8.66457e{-}02$ | $-3.42e{+}00$ |
| $2^9$ | $2.88526e{-}02$ | $1.98e{-}01$ | $1.14513e{-}02$ | $2.91e{+}00$ |
| $2^{10}$ | $2.78877e{-}02$ | $4.90e{-}02$ | $6.13456e{-}02$ | $-2.42e{+}00$ |
| $2^{11}$ | $8.10265e{-}03$ | $1.78e{+}00$ | $1.04424e{-}03$ | $5.87e{+}00$ |
| $2^{12}$ | $1.78820e{-}02$ | $-1.14e{+}00$ | $1.21517e{-}03$ | $-2.18e{-}01$ |
| $2^{13}$ | $1.21312e{-}03$ | $3.88e{+}00$ | $6.50715e{-}03$ | $-2.42e{+}00$ |
| $2^{14}$ | $5.32750e{-}03$ | $-2.13e{+}00$ | $1.05698e{-}02$ | $-6.99e{-}01$ |
| $2^{15}$ | $1.22024e{-}02$ | $-1.19e{+}00$ | $8.38082e{-}03$ | $3.34e{-}01$ |
| $2^{16}$ | $9.03258e{-}03$ | $4.33e{-}01$ | $2.29498e{-}03$ | $1.86e{+}00$ |
| $2^{17}$ | $3.50137e{-}03$ | $1.36e{+}00$ | $2.74351e{-}03$ | $-2.57e{-}01$ |
| $2^{18}$ | $2.51365e{-}03$ | $4.78e{-}01$ | $4.15807e{-}04$ | $2.72e{+}00$ |
| $2^{19}$ | $1.87029e{-}03$ | $4.26e{-}01$ | $9.05853e{-}04$ | $-1.12e{+}00$ |
| $2^{20}$ | $3.92168e{-}04$ | $2.25e{+}00$ | $7.97853e{-}04$ | $1.83e{-}01$ |
| $2^{21}$ | $1.35355e{-}03$ | $-1.78e{+}00$ | $1.08161e{-}03$ | $-4.38e{-}01$ |
| $2^{22}$ | $1.31361e{-}04$ | $3.36e{+}00$ | $8.47073e{-}05$ | $3.67e{+}00$ |
| $2^{23}$ | $3.81725e{-}04$ | $-1.53e{+}00$ | $2.74956e{-}04$ | $-1.69e{+}00$ |
| $2^{24}$ | $3.28631e{-}04$ | $2.16e{-}01$ | $2.87215e{-}04$ | $-6.29e{-}02$ |
| $2^{25}$ | $1.84572e{-}04$ | $8.32e{-}01$ | $1.37284e{-}04$ | $1.06e{+}00$ |
| $2^{26}$ | $3.91696e{-}06$ | $5.55e{+}00$ | $8.18326e{-}05$ | $7.46e{-}01$ |
| $2^{27}$ | $1.15515e{-}05$ | $-1.56e{+}00$ | $4.74562e{-}05$ | $7.86e{-}01$ |
| $2^{28}$ | $7.13073e{-}05$ | $-2.62e{+}00$ | $8.03293e{-}05$ | $-7.59e{-}01$ |
| $2^{29}$ | $4.92162e{-}05$ | $5.34e{-}01$ | $3.06225e{-}05$ | $1.39e{+}00$ |

Tabelle 6.4: Konvergenz des Monte-Carlo-Verfahrens bei Simulation des Kursverlaufs.

## 6.5 Numerische Lösung der PIDE

Nachdem wir in den vorangegangenen Abschnitten die Konvergenz der Erwartungswertentwicklung und des Monte-Carlo-Verfahrens betrachtet haben, wenden wir uns in diesem Abschnitt der numerischen Lösung der PIDE zu.
Mit Hilfe einer Sensitivitätsanalyse wird die Robustheit des in Abschnitt 4.6 vorgestellten Verfahrens überprüft. Wir untersuchen, inwiefern sich eine Änderung der Parameter auf die Konvergenz des Verfahrens auswirkt. Für die Fälle, in denen tatsächlich eine Verschlechterung der Konvergenzrate eintritt, werden wir Modifikationen angeben, die die Robustheit des Verfahrens sichern.
Im weiteren Verlauf werden die verschiedenen Kollokationsverfahren hinsichtlich ihrer Eignung zur Berechnung der unterschiedlichen Verteilungsfunktionen untersucht.

### 6.5.1 Sensitivitätsanalyse

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, inwiefern sich die Änderungen der verschiedenen Parameter auf die Konvergenz des Verfahrens auswirken. Dazu wird die Sensitivitätsanalyse exemplarisch für eine Lognormalverteilung der Sprünge durchgeführt und schliesslich auf andere Sprungverteilungsfunktionen (Varianz-Gamma- und CGMY-Verteilung) übertragen.
Es werden für die Parameter $K, T, r$ und $\sigma$ Werte überprüft, die in der Realität tatsächlich auftreten. Der größte und der kleinste Wert der jeweiligen Parameter stellen dabei obere und untere Grenzfälle dar, die nur sehr selten an Marktdaten beobachtet werden.
Die Parameter, für die die Sensitivitätsanalyse durchgeführt wird, sind in Tabelle 6.5 angegeben.

| $K$ | $T$ | $r$ | $\sigma$ |
|---|---|---|---|
| 5 | 0.10 | 0.015 | 0.01 |
| 100 | 0.25 | 0.030 | 0.15 |
| 500 | 1.00 | 0.050 | 0.25 |
| 1000 | 1.25 | 0.065 | 0.40 |

Tabelle 6.5: Parameterwerte der Sensitivitätsanalyse.

Die Wahl der Ausübungspreise ist begründet durch die beobachteten Werten verschiedener Aktien. Es sind nur selten Optionen erhältlich deren Ausübungspreis weniger als 5 oder mehr als 1000 € beträgt. Die Laufzeit von Optionen ist in der Regel kurz, selten länger als ein Jahr. Laufzeiten, die kürzer sind als ein Monat, treten gewöhnlich nicht auf. Zinsen liegen in der Regel nicht unter 1.5% oder über 6.5%. Eine Aktie mit nur 1% Volatilität ist ebenso ungewöhnlich wie 40% Volatilität. Eine durchschnittliche beobachtete Volatilität liegt zwischen 15% und 25%.
Um festzustellen inwiefern die Änderungen der Parameter die Konvergenz beeinflussen und um diesen Einfluß vergleichen zu können, muss festgelegt werden, wie der Fehler bzw. die Konvergenz gemessen wird. Um die Auswirkung der Änderung eines einzelnen Parameters zu betrachten, werden jeweils alle Parameter bis auf einen auf die Standard Parameterwerte aus Tabelle 6.1 gesetzt. Der verbleibende Parameter wird jeweils variiert. Für jeden auf diese Weise entstehenden Parametersatz wird dann die Konvergenz zur Referenzlösung betrachtet. Die Referenzlösung ist auch hier der Optionspreis $V_R$, der mittels der geschlossenen Formel für lognormalverteilte Sprünge berechnet wird. Sei $N_{max}$ die maximale Anzahl der Ortsdiskretisierungspunkte, für die die Konvergenz betrachtet wird. Dann wird die geschlossene Lösung für alle $S_i = e^{x_i}$ für $i = 0, \ldots, N_{max}$ mit den jeweiligen Parametern berechnet. Der Optionspreis $V_{PIDE}$ wird durch die Lösung der PIDE mit einer unterschiedlichen Anzahl von Ortsdiskretisierungspunkten bestimmt. Um dann den Fehler zwischen $V_{PIDE}$ und $V_R$ ermitteln zu können, werden die Lösungen der PIDE mit weniger als $N_{max}$ Ortsdiskretisierungspunkten auf das Gitter der Referenzlösung linear interpoliert. Der Fehler zum Optionspreis der Referenzlösung wird dann folgendermaßen berechnet

$$||V_{PIDE} - V_R||_{L_2} \approx \frac{1}{\sqrt{N_{max}}} ||V_{PIDE} - V_R||_{l_2} = \frac{1}{\sqrt{N_{max}}} \left( \sum_{i=1}^{N_{max}} \left( V_{PIDE}^i - V_R^i \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dabei ist $V_{PIDE}^i = V_{PIDE}(e^{x_i}, 0)$ und $V_R^i$ der berechnete Wert der geschlossenen Lösungsformel mit Startkurs $e^{x_i} = S_i$.

Der relative Fehler $e_{rel}$ ergibt sich durch

$$e_{rel} = \frac{||V_{PIDE} - V_R||_{L_2}}{||V_R||_{L_2}} \approx \frac{\frac{1}{\sqrt{N_{max}}}||V_{PIDE} - V_R||_{l_2}}{\frac{1}{\sqrt{N_{max}}}||V_R||_{l_2}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_{max}} \left(V_{PIDE}^i - V_R^i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{i=1}^{M_{max}} (V_R^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.2)$$

Wie in Abschnitt 4.6 der Diskretisierung beschrieben ist es möglich, die Maschenweiten und die Diskretisierungsgebiete der Orts- und der Integraldiskretisierung unabhängig voneinander zu wählen. Die zu integrierende Funktion ist ein Produkt einer Dichtefunktion mit der Auszahlungsfunktion einer Option. Da die Dichtefunktionen nur einen geringen Grad der Asymmetrie aufweisen, ist es vorzuziehen, dass Diskretisierungsgebiet des Integrals symmetrisch um 0 zu wählen. Für die vorliegenden Verteilungsfunktionen (Lognormalverteilung, Varianz-Gamma, CGMY) ist ein schneller Abfall der Dichtefunktionen zu beiden Seiten gegeben [MPS02]. Numerische Experimente ergaben, dass die numerischen Fehler bei einer Einschränkung des Gebiets auf das Intervall $[-8, 8]$ zu vernachlässigen sind und das Gebiet aus diesem Grund wie angegeben gewählt werden kann. Die Anzahl der Integraldiskretisierungspunkte wird für die Konvergenzanalyse konstant auf 1024 gesetzt. Als Kollokationsmethode wird die Simpsonregel verwendet. Zur Begründung der Anzahl der Diskretisierungspunkte und der Wahl des Integrationsverfahrens sei auf Abschnitt 6.5.4 verwiesen.
Für das Diskretisierungsgebiet des PDE-Teils ist keine Symmetrie erforderlich. Auf Grund der Transformation in logarithmischen Preis ist das dem PDE-Teil zugrunde liegende Gitter nicht äquidistant, sondern logarithmisch. Ebenfalls wegen der Transformation resultieren negative $x$-Werte in sehr kleinen Aktienkursen, die in der Realität nicht auftreten und daher für die Optionspreisberechnung keine Rolle spielen. Aus diesem Grund wird das Diskretisierungsgebiet auf ein positives Gebiet eingeschränkt und als Intervall $[0, 8]$ gewählt. Somit werden Optionspreise für Aktienkurse aus dem Intervall $[e^0 = 1, e^8 = 2980.95798]$ berechnet.
Um den Ortsdiskretisierungsfehler zu isolieren, wird die Zeitschrittweite konstant auf $\Delta\tau = 0.001$ gesetzt. Dadurch wird verhindert, dass der betrachtete Ortsdiskretisierungsfehler vom Fehler der Zeitschrittweite beeinflusst wird.

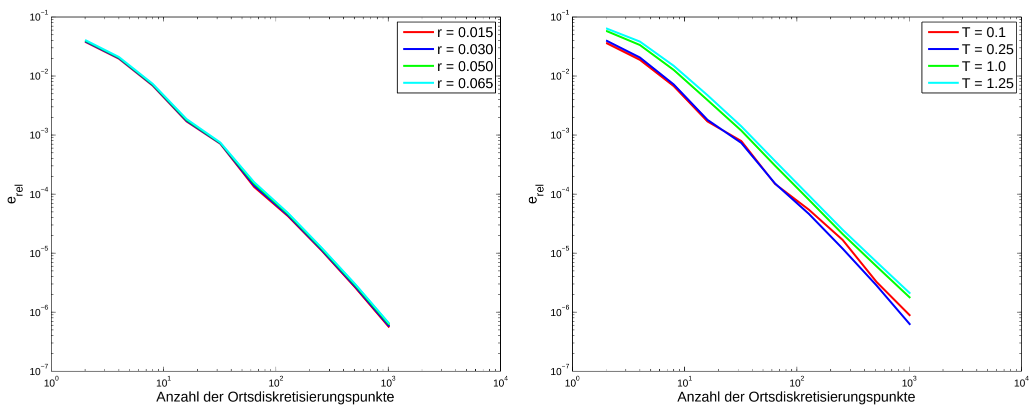


Abbildung 6.6: Konvergenz für verschiedene Zinssätze $r$ (links) und verschiedene Laufzeiten $T$ (rechts).

Sowohl Abbildung 6.6 als auch Tabelle 6.6 zeigen die Robustheit des Verfahrens gegenüber dem Zinssatz $r$. Bei festem Level der Ortsdiskretisierung unterscheiden sich die gemessenen

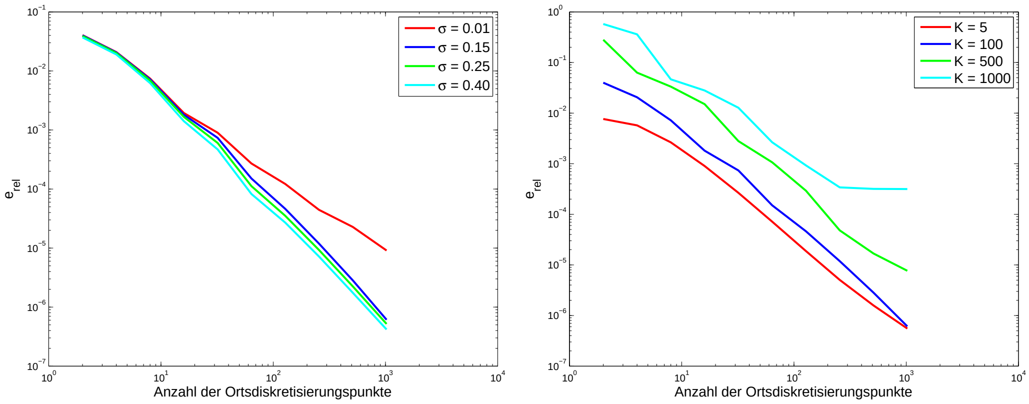


Abbildung 6.7: Konvergenz für variierende Volatilitäten $\sigma$ (links) und verschiedene Ausübungspreise $K$ (rechts).

| $N$ | $r = 0.015$ $e_{rel}$ | $\rho$ | $r = 0.03$ $e_{rel}$ | $\rho$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $3.80074e-02$ | - | $3.88229e-02$ | - |
| 4 | $1.96716e-02$ | $9.50e-01$ | $2.00431e-02$ | $9.53e-01$ |
| 8 | $6.89502e-03$ | $1.51e+00$ | $7.02376e-03$ | $1.51e+00$ |
| 16 | $1.70315e-03$ | $2.01e+00$ | $1.74429e-03$ | $2.00e+00$ |
| 32 | $7.11550e-04$ | $1.25e+00$ | $7.20757e-04$ | $1.27e+00$ |
| 64 | $1.32424e-04$ | $2.42e+00$ | $1.40020e-04$ | $2.36e+00$ |
| 128 | $4.24128e-05$ | $1.64e+00$ | $4.39259e-05$ | $1.67e+00$ |
| 256 | $1.10282e-05$ | $1.94e+00$ | $1.13688e-05$ | $1.94e+00$ |
| 512 | $2.57870e-06$ | $2.09e+00$ | $2.68342e-06$ | $2.08e+00$ |
| 1024 | $5.49529e-07$ | $2.23e+00$ | $5.74802e-07$ | $2.22e+00$ |
| $N$ | $r = 0.05$ $e_{rel}$ | $\rho$ | $r = 0.065$ $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 2 | $3.99154e-02$ | - | $4.07379e-02$ | - |
| 4 | $2.05630e-02$ | $9.56e-01$ | $2.09697e-02$ | $9.58e-01$ |
| 8 | $7.21498e-03$ | $1.51e+00$ | $7.37188e-03$ | $1.50e+00$ |
| 16 | $1.80987e-03$ | $1.99e+00$ | $1.86628e-03$ | $1.98e+00$ |
| 32 | $7.35419e-04$ | $1.29e+00$ | $7.48104e-04$ | $1.31e+00$ |
| 64 | $1.50820e-04$ | $2.28e+00$ | $1.59310e-04$ | $2.23e+00$ |
| 128 | $4.61685e-05$ | $1.70e+00$ | $4.79953e-05$ | $1.73e+00$ |
| 256 | $1.18840e-05$ | $1.95e+00$ | $1.23104e-05$ | $1.96e+00$ |
| 512 | $2.83488e-06$ | $2.06e+00$ | $2.95598e-06$ | $2.05e+00$ |
| 1024 | $6.10420e-07$ | $2.21e+00$ | $6.38321e-07$ | $2.21e+00$ |

Tabelle 6.6: Konvergenz bei Variation der Zinssätze $r$.

Fehler bezüglich verschiedener Zinssätze kaum voneinander. Somit erhält man für alle getesteten Zinsparameter die gleiche Konvergenzrate[2]. Diese liegt auf Grund der verwendeten Diskretisierung mit zentralen Differenzen bei 2.
An Abbildung 6.6 sehen wir, dass das Verfahren nahezu robust gegenüber Variation der

[2]Diese wurde mit Hilfe von (6.1) berechnet.

| | $T = 0.1$ | | $T = 0.25$ | |
|---|---|---|---|---|
| $N$ | $e_{rel}$ | $\rho$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 2 | $3.63631e{-}02$ | - | $3.99154e{-}02$ | - |
| 4 | $1.88064e{-}02$ | $9.51e{-}01$ | $2.05630e{-}02$ | $9.56e{-}01$ |
| 8 | $6.75189e{-}03$ | $1.47e{+}00$ | $7.21498e{-}03$ | $1.51e{+}00$ |
| 16 | $1.70052e{-}03$ | $1.98e{+}00$ | $1.80987e{-}03$ | $1.99e{+}00$ |
| 32 | $7.90267e{-}04$ | $1.10e{+}00$ | $7.35419e{-}04$ | $1.29e{+}00$ |
| 64 | $1.48126e{-}04$ | $2.41e{+}00$ | $1.50820e{-}04$ | $2.28e{+}00$ |
| 128 | $5.44144e{-}05$ | $1.44e{+}00$ | $4.61685e{-}05$ | $1.70e{+}00$ |
| 256 | $1.66818e{-}05$ | $1.70e{+}00$ | $1.18840e{-}05$ | $1.95e{+}00$ |
| 512 | $3.26030e{-}06$ | $2.35e{+}00$ | $2.83488e{-}06$ | $2.06e{+}00$ |
| 1024 | $8.65107e{-}07$ | $1.91e{+}00$ | $6.10420e{-}07$ | $2.21e{+}00$ |
| | $T = 1.0$ | | $T = 1.25$ | |
| $N$ | $e_{rel}$ | $\rho$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 2 | $5.82346e{-}02$ | - | $6.43000e{-}02$ | - |
| 4 | $3.35134e{-}02$ | $7.97e{-}01$ | $3.83684e{-}02$ | $7.44e{-}01$ |
| 8 | $1.26843e{-}02$ | $1.40e{+}00$ | $1.48903e{-}02$ | $1.36e{+}00$ |
| 16 | $3.91469e{-}03$ | $1.69e{+}00$ | $4.72040e{-}03$ | $1.65e{+}00$ |
| 32 | $1.18890e{-}03$ | $1.71e{+}00$ | $1.40445e{-}03$ | $1.74e{+}00$ |
| 64 | $3.02819e{-}04$ | $1.97e{+}00$ | $3.61632e{-}04$ | $1.95e{+}00$ |
| 128 | $8.02207e{-}05$ | $1.91e{+}00$ | $9.47446e{-}05$ | $1.93e{+}00$ |
| 256 | $2.10081e{-}05$ | $1.93e{+}00$ | $2.47758e{-}05$ | $1.93e{+}00$ |
| 512 | $5.98705e{-}06$ | $1.81e{+}00$ | $7.09168e{-}06$ | $1.80e{+}00$ |
| 1024 | $1.74062e{-}06$ | $1.78e{+}00$ | $2.06066e{-}06$ | $1.78e{+}00$ |

Tabelle 6.7: Konvergenzverhalten für verschiedene Laufzeiten $T$.

Laufzeit ist. Unterschiede zeigen sich im variierenden Anfangsfehler, der für längere Laufzeiten größer ist als für kürzere. Die Konvergenzgraphen selbst verlaufen aber fast parallel zueinander. Beobachten lässt sich jedoch, dass die Konvergenz für $T = 0.25$ geringfügig besser ist als die für $T = 0.1$. Diese Beobachtung lässt sich mit der nicht genügend glatten Anfangsbedingung erklären. Bereits in [CV05] und [MPS02] wurde gezeigt, dass die Ursache hierfür nicht an der Wahl des Modells liegt, sondern an der nicht glatten Anfangsbedingung einer Call- oder Put-Option. Für andere Optionstypen, wie z.B. einen Forward-Kontrakt, tritt eine schlechtere Konvergenz für kurze Laufzeiten nicht auf, da diese eine glatte Anfangsbedingung besitzen.
Um die Konvergenz auch für sehr kurze Laufzeiten zu gewährleisten, wurde in [MPS02] ein nicht äquidistantes (logarithmisches) Gitter für die Zeitschritte vorgeschlagen. Die Verfeinerung des Gitters in der Nähe des Ausübungszeitpunktes soll die Konvergenz verbessern. In Tabelle 6.7 sind für die Laufzeiten $T = 0.1$ und $T = 0.25$ die Anzahl der Ortsdiskretisierungspunkte, der relative Fehler und die Konvergenzrate dargestellt. Zwar ist der relative Fehler für $T = 0.1$ ab einer Anzahl von 128 Diskretisierungspunkten geringfügig größer als der für $T = 0.25$, jedoch wird für beide Parameter eine Konvergenzrate von etwa 2 erzielt. Aus diesem Grund wird die in [MPS02] vorgeschlagene Methode zur Verbesserung der Konvergenz für kurze Laufzeiten nicht weiter untersucht.
Wird in Abbildung 6.7 die Konvergenz für variierende Volatilitäten betrachtet, so zeigen die gemessenen Fehler eine Verschlechterung der Konvergenz für abnehmende Volatilität. Die Fehler für $\sigma = 0.15$, $\sigma = 0.25$ und $\sigma = 0.4$ sind von derselben Größenordnung und die

| $N$ | $\sigma = 0.01$ $e_{rel}$ | $\rho$ | $\sigma = 0.15$ $e_{rel}$ | $\rho$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $4.04114e-02$ | - | $3.99154e-02$ | - |
| 4 | $2.08337e-02$ | $9.55e-01$ | $2.05630e-02$ | $9.56e-01$ |
| 8 | $7.41766e-03$ | $1.48e+00$ | $7.21498e-03$ | $1.51e+00$ |
| 16 | $1.93391e-03$ | $1.93e+00$ | $1.80987e-03$ | $1.99e+00$ |
| 32 | $8.99635e-04$ | $1.10e+00$ | $7.35419e-04$ | $1.29e+00$ |
| 64 | $2.70772e-04$ | $1.73e+00$ | $1.50820e-04$ | $2.28e+00$ |
| 128 | $1.21750e-04$ | $1.15e+00$ | $4.61685e-05$ | $1.70e+00$ |
| 256 | $4.44411e-05$ | $1.45e+00$ | $1.18840e-05$ | $1.95e+00$ |
| 512 | $2.27455e-05$ | $9.66e-01$ | $2.83488e-06$ | $2.06e+00$ |
| 1024 | $9.09943e-06$ | $1.32e+00$ | $6.10420e-07$ | $2.21e+00$ |
| $N$ | $\sigma = 0.25$ $e_{rel}$ | $\rho$ | $\sigma = 0.40$ $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 2 | $3.90392e-02$ | - | $3.69374e-02$ | - |
| 4 | $2.00956e-02$ | $9.58e-01$ | $1.90082e-02$ | $9.58e-01$ |
| 8 | $6.89122e-03$ | $1.54e+00$ | $6.21380e-03$ | $1.61e+00$ |
| 16 | $1.66370e-03$ | $2.05e+00$ | $1.40898e-03$ | $2.14e+00$ |
| 32 | $6.03126e-04$ | $1.46e+00$ | $4.68381e-04$ | $1.58e+00$ |
| 64 | $1.12111e-04$ | $2.42e+00$ | $8.23580e-05$ | $2.50e+00$ |
| 128 | $3.52221e-05$ | $1.67e+00$ | $2.69836e-05$ | $1.60e+00$ |
| 256 | $9.27148e-06$ | $1.92e+00$ | $7.18043e-06$ | $1.90e+00$ |
| 512 | $2.24117e-06$ | $2.04e+00$ | $1.74848e-06$ | $2.03e+00$ |
| 1024 | $5.18015e-07$ | $2.11e+00$ | $4.17490e-07$ | $2.06e+00$ |

Tabelle 6.8: Konvergenz bei unterschiedlichen Volatilitäten $\sigma$.

Konvergenzrate beträgt für diese drei Parameterwerte 2. An Tabelle 6.8 lässt sich ablesen, dass sich die Konvergenzrate für den kleinsten getesteten Wert $\sigma = 0.01$ auf Werte zwischen 1 und 1.5 reduziert.

Der Grund für die Abnahme der Konvergenzrate liegt daran, dass die Diskretisierung mit zentralen Differenzen für kleine Volatilitäten instabil wird. Bei genauerer Betrachtung der Koeffizienten in Gleichung (4.56) fällt auf, dass ein Abnehmen der Volatilität zu einem konvektionsdominanten Problem führt, wohingegen größere Werte der Volatilität in einem diffusionsdominanten Problem resultieren. Wie in Abschnitt 4.6.2 diskutiert, ist die Stabilität der zentralen Differenzen der ersten Ableitung nur für ein diffusionsdominantes Problem gewährleistet. Um auch für kleine Volatiliäten die Stabilität zu sichern, wird in Abschnitt 6.5.2 die Konvergenz für eine zugrunde liegende Downwind-Diskretisierung untersucht.

Abbildung 6.7 und Tabelle 6.9 zeigen die Konvergenz für variierende Ausübungspreise $K$. Es ist ersichtlich, dass sich die Konvergenz bei wachsendem Ausübungspreis $K$ verschlechtert bis schließlich kaum noch eine Reduktion des Fehlers erreicht wird. Für die Parameter $K = 5$ und $K = 100$ wird eine Konvergenzrate von ungefähr 2 erzielt. Es ist zu erkennen, dass der Anfangsfehler für $K = 5$ unter dem für $K = 100$ liegt. Für die Ausübungspreise $K = 500$ und $K = 1000$ ist der Anfangsfehler jeweils noch größer. Die Konvergenzrate schwankt für $K = 500$ um einen durchschnittliche Rate von 1.6. Für $K = 1000$ verschlechtert sie sich weiter auf 1.3. Ab einer Anzahl von 256 Ortsdiskretisierungsschritten verkleinert sich der Fehler nur noch geringfügig.

Es wird angenommen, dass die schlechter werdende Konvergenz für große Ausübungsprei-

| | $K=5$ | | $K=100$ | |
|---|---|---|---|---|
| $N$ | $e_{rel}$ | $\rho$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 2 | 7.66571$e-$03 | - | 3.99154$e-$02 | - |
| 4 | 5.72346$e-$03 | 4.21$e-$01 | 2.05630$e-$02 | 9.56$e-$01 |
| 8 | 2.64035$e-$03 | 1.11$e+$00 | 7.21498$e-$03 | 1.51$e+$00 |
| 16 | 9.02447$e-$04 | 1.54$e+$00 | 1.80987$e-$03 | 1.99$e+$00 |
| 32 | 2.65636$e-$04 | 1.76$e+$00 | 7.35419$e-$04 | 1.29$e+$00 |
| 64 | 7.15025$e-$05 | 1.89$e+$00 | 1.50820$e-$04 | 2.28$e+$00 |
| 128 | 1.87537$e-$05 | 1.93$e+$00 | 4.61685$e-$05 | 1.70$e+$00 |
| 256 | 5.05610$e-$06 | 1.89$e+$00 | 1.18840$e-$05 | 1.95$e+$00 |
| 512 | 1.57967$e-$06 | 1.67$e+$00 | 2.83488$e-$06 | 2.06$e+$00 |
| 1024 | 5.54125$e-$07 | 1.51$e+$00 | 6.10420$e-$07 | 2.21$e+$00 |
| | $K=500$ | | $K=1000$ | |
| $N$ | $e_{rel}$ | $\rho$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 2 | 2.81596$e-$01 | - | 5.75000$e-$01 | - |
| 4 | 6.31181$e-$02 | 2.15$e+$00 | 3.60856$e-$01 | 6.74$e-$01 |
| 8 | 3.33998$e-$02 | 9.18$e-$01 | 4.64358$e-$02 | 2.95$e+$00 |
| 16 | 1.50566$e-$02 | 1.14$e+$00 | 2.79720$e-$02 | 7.31$e-$01 |
| 32 | 2.79437$e-$03 | 2.42$e+$00 | 1.27677$e-$02 | 1.13$e+$00 |
| 64 | 1.06393$e-$03 | 1.39$e+$00 | 2.65378$e-$03 | 2.26$e+$00 |
| 128 | 2.92807$e-$04 | 1.86$e+$00 | 9.24923$e-$04 | 1.52$e+$00 |
| 256 | 4.82196$e-$05 | 2.60$e+$00 | 3.41158$e-$04 | 1.43$e+$00 |
| 512 | 1.67990$e-$05 | 1.52$e+$00 | 3.17956$e-$04 | 1.01$e-$01 |
| 1024 | 7.66969$e-$06 | 1.13$e+$00 | 3.15080$e-$04 | 1.31$e-$02 |

Tabelle 6.9: Konvergenz bei variierenden Ausübungspreisen $K$.

se aus der Diskretisierung entsteht. Das Diskretisierungsgitter ist, wie in Abschnitt 4.6.2 beschrieben, logarithmisch für den Aktienkurs $S$. Dies bedeutet, dass das Gitter für kleine Werte von $S$ und somit auch $K$ besonders fein und für größere Werte hingegen nur grob ist. Somit sind kleine Ausübungspreise wesentlich schlechter diskretisiert als große. Weitere Details sowie mögliche Verbesserungen zu diesem Problem werden in Abschnitt 6.5.3 erläutert.

### 6.5.2 Downwind-Diskretisierung

Es wurde in Abschnitt 6.5.1 beobachtet, dass sich die Konvergenz des Verfahrens verschlechtert, falls die Volatilität kleiner wird. Der Grund für die Abnahme der Konvergenzrate für kleine $\sigma$ liegt in der Verschiebung von einem diffusionsdominanten zu einem konvektionsdominanten Problem und somit ist die Diskretisierung der ersten Ableitung mit zentralen Differenzen instabil. Aus diesem Grund soll nun zum Vergleich das Konvergenzverhalten beobachtet werden, wenn der ersten Ableitung eine stabile Downwind-Diskretisierung zugrunde gelegt wird.
In Abbildung 6.8 ist der relative Fehler zur Referenzlösung $V_R$ in Abhängigkeit der Anzahl der Ortsdiskretisierungspunkte dargestellt. Analog zur Sensitivitätsanalyse ist die Anzahl der Diskretisierungspunkte für das Integral auf 1024 und die Zeitschrittweite auf $\Delta\tau = 0.001$ festgesetzt.
In Abbildung 6.8 und in der zugehörigen Tabelle 6.10 ist zu sehen, dass sich der Fehler

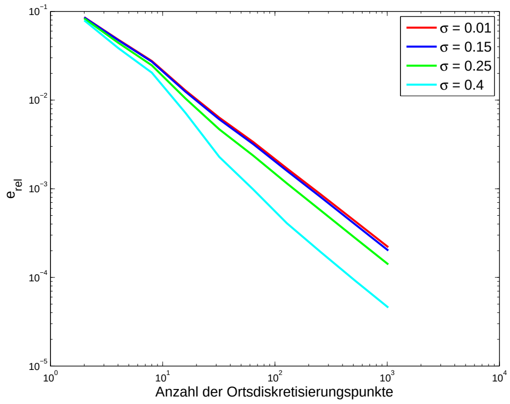


Abbildung 6.8: Konvergenz für verschiedene Volatilitäten mit der Downwind-Diskretisierung der ersten Ableitung.

| | $\sigma = 0.01$ | | $\sigma = 0.15$ | |
|---|---|---|---|---|
| $N$ | $e_{rel}$ | $\rho$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 2 | $8.60114176e-02$ | - | $8.55787004e-02$ | - |
| 4 | $4.82564669e-02$ | $8.33805891e-01$ | $4.76627379e-02$ | $8.44389943e-01$ |
| 8 | $2.76075935e-02$ | $8.05657156e-01$ | $2.71261807e-02$ | $8.13175893e-01$ |
| 16 | $1.27980763e-02$ | $1.10913816e+00$ | $1.24067478e-02$ | $1.12856094e+00$ |
| 32 | $6.32388858e-03$ | $1.01704312e+00$ | $6.05317870e-03$ | $1.03536014e+00$ |
| 64 | $3.36763639e-03$ | $9.09075573e-01$ | $3.19489415e-03$ | $9.21924808e-01$ |
| 128 | $1.69192511e-03$ | $9.93070665e-01$ | $1.59243731e-03$ | $1.00453156e+00$ |
| 256 | $8.62491480e-04$ | $9.72083601e-01$ | $8.04170208e-04$ | $9.85663784e-01$ |
| 512 | $4.34982407e-04$ | $9.87553154e-01$ | $4.01987498e-04$ | $1.00035026e+00$ |
| 1024 | $2.19163455e-04$ | $9.88949800e-01$ | $2.00686198e-04$ | $1.00220923e+00$ |
| | $\sigma = 0.25$ | | $\sigma = 0.40$ | |
| $N$ | $e_{rel}$ | $\rho$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 2 | $8.33093111e-02$ | - | $7.92040194e-02$ | - |
| 4 | $4.45359759e-02$ | $9.03506540e-01$ | $3.88227698e-02$ | $1.02867059e+00$ |
| 8 | $2.46443836e-02$ | $8.53712311e-01$ | $2.04129870e-02$ | $9.27415745e-01$ |
| 16 | $1.04090756e-02$ | $1.24341694e+00$ | $7.15303828e-03$ | $1.51285924e+00$ |
| 32 | $4.67320068e-03$ | $1.15535906e+00$ | $2.28181796e-03$ | $1.64837246e+00$ |
| 64 | $2.36814146e-03$ | $9.80655729e-01$ | $9.84646981e-04$ | $1.21250522e+00$ |
| 128 | $1.14803498e-03$ | $1.04458866e+00$ | $4.08234670e-04$ | $1.27020787e+00$ |
| 256 | $5.69269337e-04$ | $1.01198330e+00$ | $1.93152224e-04$ | $1.07966042e+00$ |
| 512 | $2.81718816e-04$ | $1.01485547e+00$ | $9.29941533e-05$ | $1.05452637e+00$ |
| 1024 | $1.40048024e-04$ | $1.00833430e+00$ | $4.56897647e-05$ | $1.02526900e+00$ |

Tabelle 6.10: Konvergenz bei Verwendung der Downwind-Diskretisierung.

für die Downwind-Diskretisierung für alle Parameter gleichmäßig mit einer Rate von 1 reduziert.

Im Gegensatz zur Diskretisierung der ersten Ableitung mit zentralen Differenzen wird hier eine stabile Diskretisierung und eine gleichmäßige Konvergenz für alle $\sigma$ erzielt. Der Nachteil der Downwind-Diskretisierung ist jedoch die geringere Konvergenzrate von 1.

Aus diesem Grund ist es wünschenswert, wenn möglich, die Diskretisierung mit zentralen

Differenzen zu verwenden. Wie in Abschnitt 6.5.1 zu sehen war, hat sich die Diskretisierung 2-ter Ordnung für $\sigma \geq 0.15$ als stabil erwiesen und wird deshalb im Folgenden weiter verwendet. Nur für kleinere Werte von $\sigma$ wird die Downwind-Diskretisierung eingesetzt.

### 6.5.3 Verbesserung der Konvergenz für große Ausübungspreise

In Abschnitt 6.5.1 der Sensitivitätsanalyse wurde festgestellt, dass sich die Konvergenz für steigende Ausübungspreise stark verschlechtert und sich der Fehler für feinere werdende Gitter schließlich kaum noch reduziert. Wir haben vermutet, dass die Abnahme der Konvergenzrate aus dem der Diskretisierung zugrunde liegenden logarithmischen Gitter resultiert. Aus diesem Grund wird nun das Konvergenzverhalten bei einer Verschiebung des Diskretisierungsgebietes für große Ausübungspreise untersucht. In Abbildung 6.9 ist links für $K = 500$ und rechts für $K = 1000$ der relative Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl der zugrunde liegenden Ortsdiskretisierungspunkte dargestellt. Dabei werden verschiedene Diskretisierungsgebiete betrachtet. Für die Größe der Gebiete gilt in allen Fällen $x_{max} - x_{min} = 8$. Das Gebiet selbst wird jedoch verschoben.

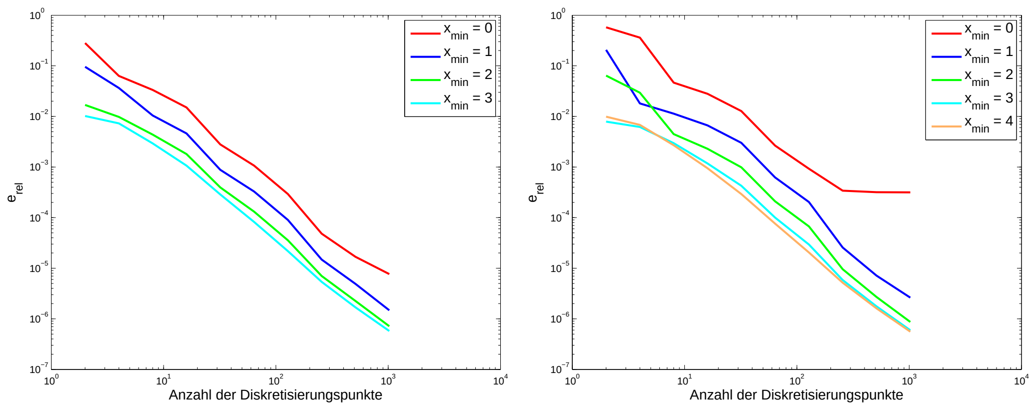


Abbildung 6.9: Konvergenz für die Ausübungspreise $K = 500$ (links) und $K = 1000$ (rechts) mit unterschiedlichen zugrunde liegenden Diskretisierungsgebieten.

Bei Betrachtung der Abbildung 6.9 stellen wir fest, dass sich die Konvergenz verbessert, je weiter das Gebiet in Richtung des Ausübungspreises verschoben wird. Für $K = 500$ verbessert sich die Konvergenz bereits deutlich, wenn die linke Gebietsgrenze von ursprünglich $x_{min} = 0$ auf $x_{min} = 2$ gesetzt wird. Für eine weitere Verschiebung auf $x_{min} = 3$ tritt nochmals eine kleine Verbesserung auf. Die Steigungen für $x_{min} = 2$ und $x_{min} = 3$ stimmen überein, jedoch ist der Fehler für $x_{min} = 3$ noch etwas geringer.
Im Fall $K = 1000$ tritt eine deutliche Verbesserung der Konvergenz für einen linken Gebietsrand von $x_{min} = 3$ ein. Eine weitere Verschiebung auf $x_{min} = 4$ bewirkt kaum noch eine weitere Verbesserung.
Für den Ausübungspreis $K = 500$ wurde eine „gute“ Konvergenz, d.h. eine Rate von etwa 2, für das Gebiet $[x_{min} = 2, x_{max} = 10]$ und für $K = 1000$ für ein Gebiet $[x_{min} = 3, x_{max} = 11]$ erzielt. Wir vermuten, dass sich die Konvergenz verbessern lässt, wenn der Ausübungspreis in der Mitte des Diskretisierungsgebiets liegt, denn es ist $\log K = 6.21460$ für $K = 500$ und $\log K = 6.90775$ für $K = 1000$. Dazu betrachten wir den relativen Fehler bezüglich des linken Gebietsrandes, siehe Abbildung 6.10. Die Anzahl der Orts- und Integraldiskretisierungspunkte ist konstant und beträgt jeweils 1024. Die Zeitschrittweite ist beschränkt auf $\Delta\tau = 0.001$.

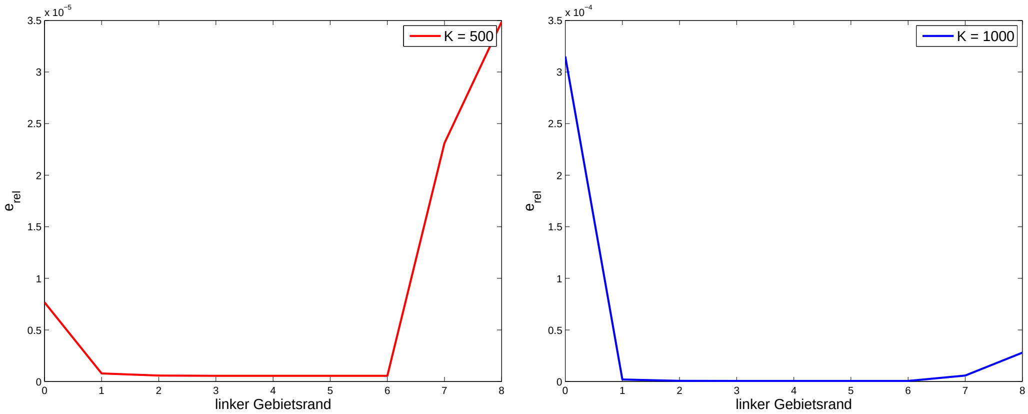


Abbildung 6.10: Relativer Fehler in Abhängigkeit des linken Gebietsrandes für $K = 500$ (links) und $K = 1000$ (rechts).

Abbildung 6.10 zeigt, dass sowohl für $K = 500$ als auch für $K = 1000$ ein deutlich geringerer Fehler entsteht, wenn der Gebietsmittelpunkt in Richtung des Ausübungspreises verschoben wird. Der Fehler ist minimal, wenn der Gebietsmittelpunkt ungefähr mit dem Ausübungspreis übereinstimmt. Wird der Gebietsmittelpunkt über den Ausübungspreis hinaus verschoben, so wächst der Fehler wieder an.

Die Verschiebung des Diskretisierungsgebietes ermöglicht es also, auch für große Ausübungspreise, für die in Abschnitt 6.5.1 zunächst eine Reduktion der Konvergenzrate beobachtet wurde, eine Konvergenzrate von ungefähr 2 zu erzielen.

### 6.5.4 Konvergenz des Integrals

Bislang wurde die Anzahl der Diskretisierungspunkte des Integrals nicht variiert sondern konstant auf 1024 gesetzt. Nun wird untersucht, welches der in Abschnitt 4.6.3 vorgestellten Kollokationsverfahren sich zur Berechnung der verwendeten Dichtefunktionen am besten eignet. Dazu werden nacheinander die Lognormalverteilung, eine Varianz-Gamma-Verteilung und zwei CGMY-Verteilungen, eine mit endlicher und eine mit unendlicher Variation, als Sprung-Verteilungsfunktionen betrachtet. Dazu analysieren wir die relativen Fehler sowohl abhängig von der Anzahl der Integraldiskretisierungspunkte als auch abhängig von der Laufzeit, die zur Berechnung des Integrals notwendig ist. Die Anzahl der Ortsdiskretisierungspunkte für den PDE-Teil wird auf $N = 1024$ und die Zeitschrittweite auf $\Delta\tau = 0.001$ gesetzt, um den Integraldiskretisierungsfehler isoliert betrachten zu können. Bei Verwendung der Varianz-Gamma- und der CGMY-Verteilung muss beachtet werden, dass für diese Verteilungsfunktionen keine geschlossenen Lösungen erhalten werden können. Aus diesem Grund benutzen wir als Referenzlösung die Lösung der PIDE, bei der der Berechnung des Integrals 2048 Diskretisierungspunkte zugrunde liegen. Für jede der Verteilungsfunktionen wird dazu die Gauß-Quadratur eingesetzt.

In Abbildung 6.11 ist links die Konvergenz des Integrals mit Lognormalverteilung für die verschiedenen Kollokationsverfahren dargestellt. Abbildung 6.11 zeigt, dass die Größe des Fehlers ab einer Anzahl von 16 Diskretisierungpunkten für die Simpsonregel und die Gauß-Quadratur nahezu identisch ist, woraus sich offensichtlich die gleiche Konvergenzrate ergibt. Die Fehlerreduktion für die Trapezregel ist ebenfalls von derselben Ordnung, jedoch ist der Fehler selbst für jede Anzahl der Diskretisierungspunkte höher, d.h. es sind mehr

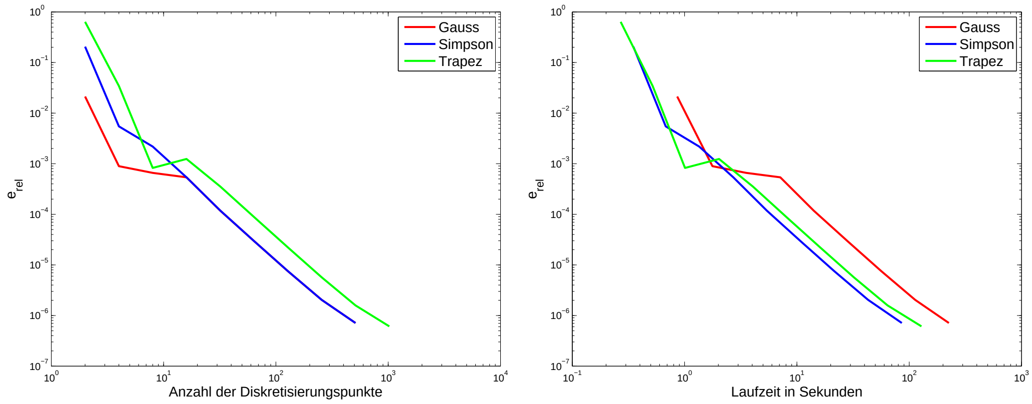


Abbildung 6.11: Konvergenz der verschiedenen Kollokationsverfahren in Abhängkeit der Anzahl der Diskretisierungspunkte (links) und der Laufzeit (rechts) für lognormalverteilte Sprünge.

Diskretisierungspunkte nötig um den Fehler auf die gleiche Größe zu reduzieren. So werden beispielsweise für die Simpsonregel und die Gauß-Quadratur ca. 512 Punkte benötigt um die Fehlergröße von $10^{-6}$ zu unterschreiten. Um diesen Fehler mit der Trapezregel zu unterschreiten, sind hingegen bereits 1024 Punkte notwendig.
Wird der Fehler in Abhängigkeit von der Laufzeit zur Berechnung des Integrals betrachtet, ändert sich das Verhältnis der Verfahren untereinander. Hier ist die Simpsonregel das Kollokationsverfahren, dass in Bezug auf die Laufzeit die beste Fehlerverkleinerung liefert. Wie in Abschnitt 4.6.3 beschrieben, wird für die Berechnung mittels Gauß-Quadratur ein 10-Punkte-Gauß-Verfahren verwendet. Somit ist die Anzahl der Funktionsauswertungen und damit auch die Laufzeit wesentlich höher als für eine Simpson- oder Trapezregel.
Abbildung 6.12 zeigt den Integralfehler für die Varianz-Gamma-Verteilung mit den Pa-

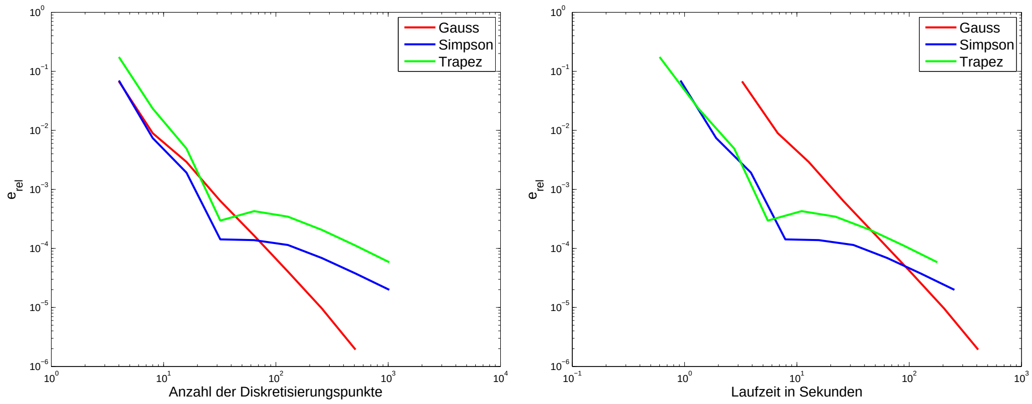


Abbildung 6.12: Konvergenz der verschiedenen Kollokationsverfahren in Abhängkeit der Anzahl der Diskretisierungspunkte (links) und der Laufzeit (rechts) für eine Varianz-Gamma-Verteilung.

rametern aus Tabelle 6.1. Links ist der Fehler in Abhängigkeit der Anzahl der Integral-Diskretisierungpunkte, rechts in Bezug auf die Laufzeit der verschiedenen Kollokationsverfahren zu sehen. Für die Gauß-Quadratur ist eine gleichmäßige Konvergenz zu beobachten. Für die Trapez- und die Simpsonregel reduziert sich der Fehler für wenige Diskretisie-

rungspunkte noch gut. Ab einer Anzahl von 32 Diskretisierungspunkten verlangsamt sich die Fehlerreduktion jedoch drastisch. Auch durch den Laufzeit-Vorteil wird die langsamere Konvergenz von Trapez- und Simpsonregel nicht ausgeglichen. Nur durch Verwendung der Gauß-Quadratur lässt sich eine gleichmäßige Konvergenz erzielen.
Ursache der langsamen Konvergenz von Simpson- und Trapezregel ist die schwache Singularität der Varianz-Gamma-Verteilung, die durch diese beiden Integrationsverfahren nur schlecht approximiert werden kann.

Abbildung 6.13 stellt die Konvergenz der verschiedenen Integrationsmethoden für eine

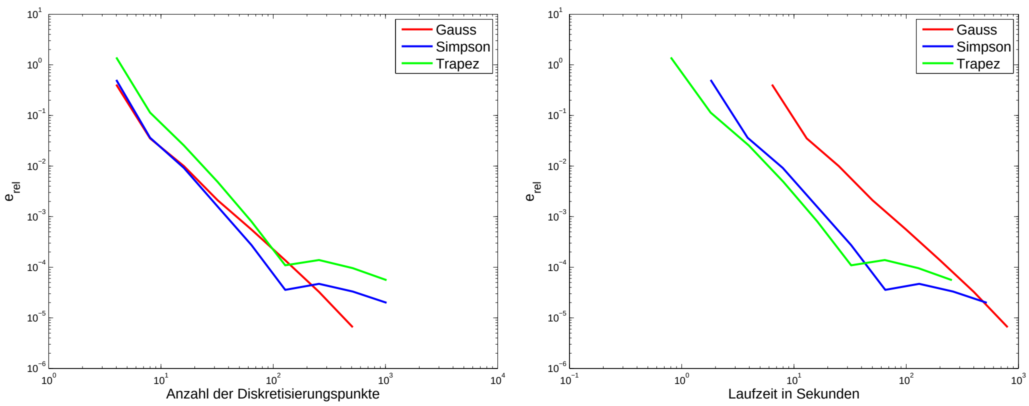


Abbildung 6.13: Konvergenz der verschiedenen Kollokationsverfahren in Abhängkeit der Anzahl der Diskretisierungspunkte (links) und der Laufzeit (rechts) für eine CGMY-Verteilung mit endlicher Variation.

CGMY-Verteilungsfunktion mit endlicher Variation dar. Für die Verteilung wurden die Parameter in Anlehnung an [MPS02] gewählt und auf $C = 1.0$, $G = 1.4$, $M = 2.5$ und $Y = 0.5$ gesetzt. Es stellt sich heraus, dass, ähnlich zur zuvor betrachteten Varianz-Gamma-Verteilung, die Konvergenz der Trapez- und Simpsonregel ab einer Anzahl von 128 Diskretisierungspunkten deutlich schlechter wird. Zur Berechnung einer CGMY-Verteilung mit endlicher Variation ist jedoch wiederum die Gauß-Quadratur gut geeignet, da mit dieser eine gleichmäßige Konvergenz erzielt werden kann.
Zuletzt untersuchen wir noch eine CGMY-Verteilung mit unendlicher Variation. Da diese Verteilung eine Singularität an der Stelle 0 besitzt, wird zur Berechnung des Integrals, wie in Abschnitt 4.6.3 beschrieben, die Verteilungsfunktion abgeschnitten. Der dadurch eingebüßte Anteil der Variation wird durch eine Verstärkung des Anteils der Brownschen Bewegung ausgeglichen. Für die durchgeführten numerischen Experimente wird der Abschneideparameter für die kleinen Sprünge auf $\epsilon = 0.001$ festgelegt. Da die Größe der Brownschen Bewegung für die Konvergenzuntersuchung bezüglich des Integrals keine Rolle spielen, wird auf eine Verstärkung dieses Anteils verzichtet.

Abbildung 6.14 zeigt das Konvergenzverhalten der unterschiedlichen Kollokationsverfahren für eine CGMY-Verteilung mit unendlicher Variation. Es ist zu sehen, dass sowohl die Simpson- als auch die Trapezregel gut zur Berechnung des Integrals geeignet sind. Die Konvergenz in Bezug auf die Anzahl der Diskretisierungspunkte verläuft für die Simpsonregel und die Gauß-Quadratur fast identisch. Der Fehler der Trapezregel verringert sich mit der gleichen Rate, ist aber zahlenmäßig immer größer als der der beiden anderen Verfahren. Gemessen in Abhängigkeit zur Laufzeit sind die Fehler von Trapez- und Simpsonregel nahezu identisch. Für die Gauß-Quadratur ist wiederum eine wesentlich höhere Laufzeit nötig. Somit ergibt sich eine Situation, analog zur Lognormalverteilung.

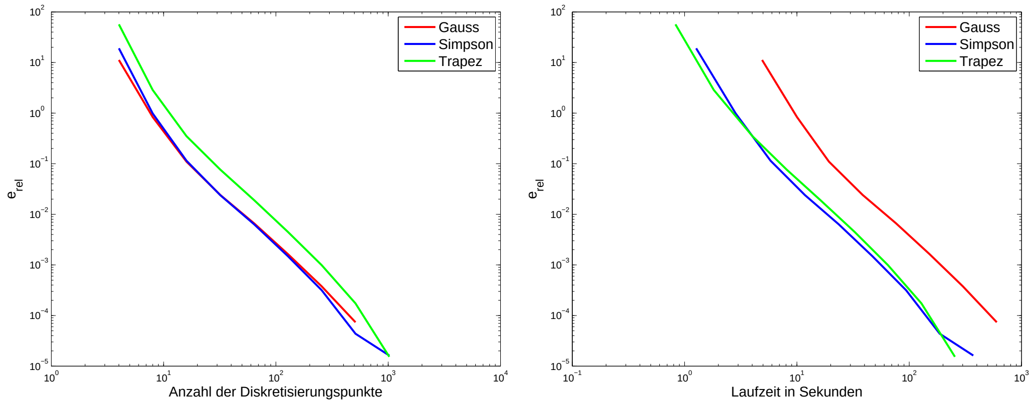


Abbildung 6.14: Konvergenz der verschiedenen Kollokationsverfahren in Abhängkeit der Anzahl der Diskretisierungspunkte (links) und der Laufzeit (rechts) für eine CGMY-Verteilung mit unendlicher Variation.

Die Verbesserung der Trapez- und der Simpsonregel für den CGMY-Verteilung mit unendlicher Variation lässt sich mit dem Abschneiden der Verteilungsfunktion erklären. Durch den fehlenden Abschnitt der Singularität ist es möglich diese Verteilungsfunktion mit Hilfe der verhältnismäßig einfachen Integrationsmethoden zu berechnen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Simpson- und die Trapezregel sich als geeignete Kollokationsverfahren herausstellen, wenn die Sprungverteilungsfunktion eine Lognormalverteilung oder eine CGMY-Verteilung mit unendlicher Variation ist. In Fällen, in denen eine Varianz-Gamma-Verteilung oder eine CGMY-Verteilung mit endlicher Variation zugrunde liegen, ist es notwendig, zur genauen Berechnung des Integrals eine Gauß-Quadratur anzuwenden.

### 6.5.5 Diskretisierungs- und Integrationsfehler

In diesem Abschnitt untersuchen wir den isolierten Fehler der Orts- und der Integraldiskretisierung untersucht. Dazu sei $N$ die Anzahl der Ortsdiskretisierungspunkte und $M$ die Anzahl der Integraldiskretisierungspunkte. Wir nehmen an, dass sich der Fehler der gesamten Diskretisierung zusammensetzt aus dem Diskretisierungsfehler des PDE- und des Integral-Teils, also $e_{\text{Disk}} = e_{\text{PDE}} + e_{\text{Integral}}$. Ziel ist es $N$ und $M$ so zu wählen, dass beide Fehleranteile die gleiche Größenordnung besitzen. Dazu betrachten wir die isolierten Fehler exemplarisch für die Lognormalverteilung und setzen alle Parameter konstant auf die Werte aus Tabelle 6.1. Zusätzlich wird die Zeitschrittweite auf $\Delta\tau = 0.001$ fixiert.
Zunächst sind in Abbildung 6.15 links der Fehler für verschiedene konstante Anzahlen von Integraldiskretisierungspunkten $M$ bezüglich der Anzahl der Ortsdiskretisierungspunkte $N$ dargestellt. Rechts ist der relative Fehler für konstante $N$ bezüglich variierendem $M$ zu sehen. Abbildung 6.15 links zeigt, dass sich der Fehler zunächst bei Erhöhung von $N$ reduziert, dann jedoch ab einem gewissen, von $M$ abhängigen $N$ konstant bleibt. Dies bedeutet, dass eine Hinzunahme von Ortsdiskretisierungspunkten den Gesamtfehler nicht weiter reduziert. In diesem Fall dominiert der Integral-Fehler den Gesamtfehler, der Fehler der Ortsdiskretisierung ist im Verhältnis zum Integral-Fehler bereits so gering, dass er sich nicht weiter niederschlägt. Ein analoges Verhalten ergibt sich für den umgekehrten Fall (vgl. Abbildung 6.15 rechts).

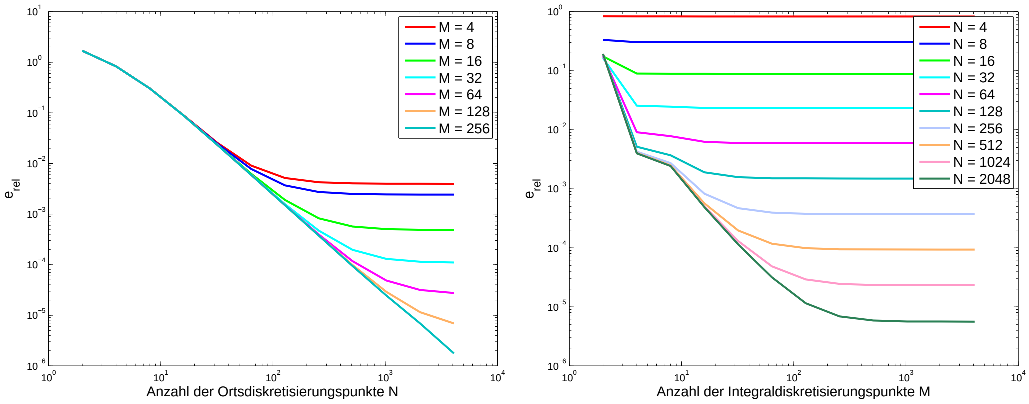


Abbildung 6.15: Darstellung des relativen Fehlers für konstante Anzahl der Integraldiskretisierungspunkte in Abhängigkeit der Ortsdiskretisierungspunkte (links) und für konstante Anzahl der Ortsdiskretisierungspunkte in Abhängigkeit der Integraldiskretisierungspunkte (rechts).

Um nun die Konvergenz der „bereinigten" Fehler der Diskretisierung zu betrachten, sind aus den Daten, die Abbildung 6.15 zugrunde liegen, für jedes betrachtete $N$ bzw. $M$ die dominanten Fehleranteile in Abbildung 6.16 zusammengefasst. Diese zeigt zum einen den Fehler des Integrals isoliert vom Orts-Fehler des PDE-Teils sowie den Ortsdiskretisierungsfehler bereinigt um den Fehler der Integraldiskretisierung.

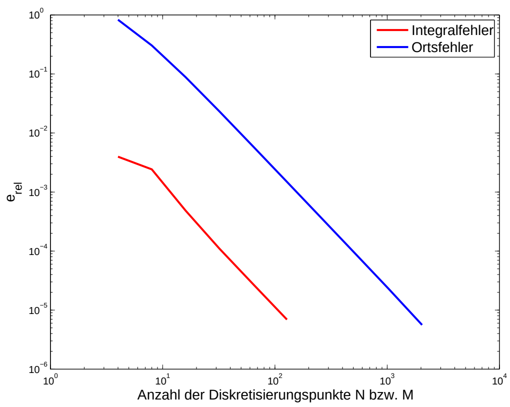


Abbildung 6.16: Der Integralfehler bereinigt um den Einfluss des Ortsfehlers sowie der Ortsfehler bereinigt um den Einfluss des Integralfehlers.

Die Tabellen 6.11 und 6.12 zeigen, dass sich beide Diskretisierungsfehler mit einer Konvergenzrate von 2 verkleinern. Der Integral-Fehler ist jedoch für eine geringere Anzahl von Diskretisierungspunkten bereits wesentlich kleiner. Das heißt, um beispielsweise einen Gesamtfehler der Diskretisierung der Größenordnung $10^{-5}$ zu erhalten, werden 2048 Orts- aber nur 128 Integraldiskretisierungspunkte benötigt.

### 6.5.6 Konvergenz des Gesamtverfahrens

Bisher wurde die Konvergenz der Orts- oder Integraldiskretisierung lediglich getrennt voneinander betrachtet. Abschließend soll nun die Konvergenz des Gesamtverfahrens unter-

| $N$ | Ortsfehler $e_{rel}$ | $\rho$ |
|---|---|---|
| 4 | $8.29779e{-}01$ | - |
| 8 | $3.03829e{-}01$ | $1.44e{+}00$ |
| 16 | $8.83428e{-}02$ | $1.78e{+}00$ |
| 32 | $2.32403e{-}02$ | $1.92e{+}00$ |
| 64 | $5.91593e{-}03$ | $1.97e{+}00$ |
| 128 | $1.48921e{-}03$ | $1.99e{+}00$ |
| 256 | $3.73217e{-}04$ | $1.99e{+}00$ |
| 512 | $9.33289e{-}05$ | $1.99e{+}00$ |
| 1024 | $2.32584e{-}05$ | $2.00e{+}00$ |
| 2048 | $5.61386e{-}06$ | $2.05e{+}00$ |

Tabelle 6.11: Konvergenz des isolierten Ortsdiskretisierungsfehlers.

| $M$ | Integralfehler $e_{rel}$ | $\rho$ |
|---|---|---|
| 4 | $3.97319e{-}03$ | - |
| 8 | $2.42271e{-}03$ | $7.13e{-}01$ |
| 16 | $4.85181e{-}04$ | $2.32e{+}00$ |
| 32 | $1.10291e{-}04$ | $2.13e{+}00$ |
| 64 | $2.75085e{-}05$ | $2.00e{+}00$ |
| 128 | $6.91368e{-}06$ | $1.99e{+}00$ |

Tabelle 6.12: Konvergenz des isolierten Integraldiskretisierungsfehlers.

sucht werden. Für die folgenden numerischen Experimente verwenden wir die Parameter aus Tabelle 6.1. Den Ergebnissen aus Abschnitt 6.5.4 folgend wird die Berechnung des Integrals im Fall der Lognormal- und der CGMY-Verteilung mit unendlicher Variation mit der Simpsonregel, für die Varianz-Gamma-Verteilung und die CGMY-Verteilung mit endlicher Variation mit einer 10-Punkte-Gauß-Quadratur durchgeführt.
Zur Bestimmung der Konvergenz des Verfahrens wird bei zugrunde liegender Lognormalverteilung die geschlossene Lösung als Referenzlösung verwendet. Für die Varianz-Gamma- und die CGMY-Verteilung wird die Lösung mit der feinsten Diskretisierung (2048 Orts- und Integraldiskretisierungspunkte, 256 Zeitschritte) berechnet und dann die Konvergenz gegen diese Lösung ermittelt.
Abbildung 6.17 zeigt die Konvergenz des Verfahrens für die verschiedenen Verteilungsfunktionen. Es ist der relative Fehler der Lösung der PIDE bezüglich des Produktes von Orts- ($N$) und Zeitdiskretisierungspunkten ($Mk$) dargestellt.
In Abbildung 6.17 und Tabelle 6.13 ist zu sehen, dass das Verfahren für alle getesteten Sprungverteilungsfunktionen mit einer Konvergenzrate von 1 konvergiert. Eine bessere Rate ist durch die explizite Behandlung des Integral-Teils auch nicht zu erwarten. Die anfänglich höhere Konvergenzrate entsteht durch die verzögerte Verfeinerung der Zeitschrittweite. Bis zu einer Anzahl von 16 Ortsdiskretisierungspunkten ist die Zeitschrittweite im Verhältnis zur Ortsmaschenweite noch so klein, dass keine Verfeinerung notwendig ist. Aus diesem Grund ist zu Beginn die in Tabelle 6.13 aufgeführte Konvergenzrate des Verfahrens größer als 1.
Zu beachten ist, dass nicht nur die Konvergenzrate des Verfahrens für alle eingesetzten

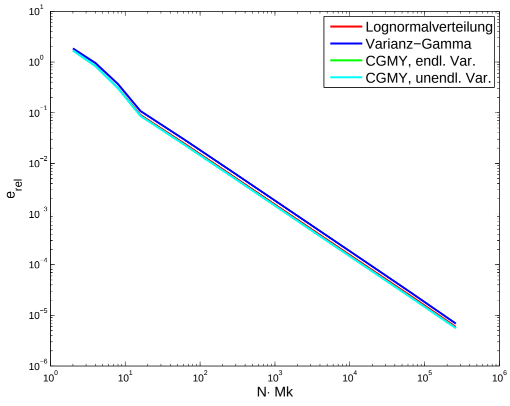


Abbildung 6.17: Vergleich der Konvergenz des Gesamtverfahrens für verschiedene Sprung-Verteilungsfunktionen.

| | | | Lognormalverteilung | | Varianz-Gamma | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N \cdot Mk$ | $N$ | $Mk$ | $e_{rel}$ | $\rho$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 2 | 2 | 1 | $1.69200e{+}00$ | - | $1.85888e{+}00$ | - |
| 4 | 4 | 1 | $8.32935e{-}01$ | $1.02e{+}00$ | $9.55025e{-}01$ | $9.60e{-}01$ |
| 8 | 8 | 1 | $3.07072e{-}01$ | $1.43e{+}00$ | $3.66742e{-}01$ | $1.38e{+}00$ |
| 16 | 16 | 1 | $9.01606e{-}02$ | $1.76e{+}00$ | $1.07748e{-}01$ | $1.76e{+}00$ |
| 64 | 32 | 2 | $2.36038e{-}02$ | $9.66e{-}01$ | $2.83458e{-}02$ | $9.63e{-}01$ |
| 256 | 64 | 4 | $5.97899e{-}03$ | $9.90e{-}01$ | $7.18309e{-}03$ | $9.90e{-}01$ |
| 1024 | 128 | 8 | $1.50140e{-}03$ | $9.96e{-}01$ | $1.80237e{-}03$ | $9.97e{-}01$ |
| 4096 | 256 | 16 | $3.76695e{-}04$ | $9.97e{-}01$ | $4.51221e{-}04$ | $9.98e{-}01$ |
| 16384 | 512 | 32 | $9.48151e{-}05$ | $9.95e{-}01$ | $1.12941e{-}04$ | $9.99e{-}01$ |
| 65536 | 1024 | 64 | $2.40319e{-}05$ | $9.90e{-}01$ | $2.82474e{-}05$ | $9.99e{-}01$ |
| 262144 | 2048 | 128 | $5.91383e{-}06$ | $1.01e{+}00$ | $6.87817e{-}06$ | $1.01e{+}00$ |
| | | | CGMY, endl. Var. | | CGMY, unendl. Var. | |
| $N \cdot Mk$ | $N$ | $Mk$ | $e_{rel}$ | $\rho$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 2 | 2 | 1 | $1.69206e{+}00$ | - | $1.69206e{+}00$ | - |
| 4 | 4 | 1 | $8.32186e{-}01$ | $1.02e{+}00$ | $8.32186e{-}01$ | $1.02e{+}00$ |
| 8 | 8 | 1 | $3.03075e{-}01$ | $1.45e{+}00$ | $3.03067e{-}01$ | $1.45e{+}00$ |
| 16 | 16 | 1 | $8.65336e{-}02$ | $1.80e{+}00$ | $8.65336e{-}02$ | $1.80e{+}00$ |
| 64 | 32 | 2 | $2.25387e{-}02$ | $9.70e{-}01$ | $2.25387e{-}02$ | $9.70e{-}01$ |
| 256 | 64 | 4 | $5.69735e{-}03$ | $9.92e{-}01$ | $5.69735e{-}03$ | $9.92e{-}01$ |
| 1024 | 128 | 8 | $1.42935e{-}03$ | $9.97e{-}01$ | $1.42935e{-}03$ | $9.97e{-}01$ |
| 4096 | 256 | 16 | $3.58204e{-}04$ | $9.98e{-}01$ | $3.58204e{-}04$ | $9.98e{-}01$ |
| 16384 | 512 | 32 | $8.98914e{-}05$ | $9.97e{-}01$ | $8.98914e{-}05$ | $9.97e{-}01$ |
| 65536 | 1024 | 64 | $2.26239e{-}05$ | $9.95e{-}01$ | $2.26239e{-}05$ | $9.95e{-}01$ |
| 262144 | 2048 | 128 | $5.59593e{-}06$ | $1.00e{+}00$ | $5.59593e{-}06$ | $1.00e{+}00$ |

Tabelle 6.13: Konvergenz des Gesamtverfahrens für die verschiedenen Sprung-Verteilungsfunktionen.

Verteilungsfunktionen die gleiche ist, sondern dass auch die Größenordnung der Fehler bei festem Diskretisierungslevel für die unterschiedlichen Verteilungsfunktionen dieselbe ist. Wichtig zu beachten ist jedoch, dass der Aufwand zur Berechnung der verschiedenen

Verteilungsfunktionen unterschiedlich ist. So wird das Integral der Varianz-Gamma- und der CGMY-Verteilung mit endlicher Variation mit Hilfe der Gauß-Quadratur berechnet, während das Integral für die Lognormalverteilung und die CGMY-Verteilung mit der Simpsonregel ausgewertet werden kann, deren Laufzeit wesentlich kleiner ist.

Im Abschnitt 6.5.1 wurde die Robustheit des Verfahrens gegenüber Änderungen der Modellparameter zur Lösung der PIDE untersucht. Es stellte sich bereits zu Beginn als robust gegenüber einer Änderung des Zinssatzes und einer Variation der Laufzeit heraus. Durch eine stabile Downwind-Diskretisierung konnte die Konvergenz auch für kleine Volatilitäten gesichert werden. Die Verschiebung des Diskretisierungsgebiets ermöglicht die Berechnung von Optionspreisen auch für große Ausübungspreise.
Zusätzlich zur Robustheit zeichnet sich das vorgestellte Verfahren im Gegensatz zur Erwartungswertentwicklung und zum Monte-Carlo-Verfahren durch die Flexibilität hinsichtlich der verwendbaren Verteilungsfunktionen aus. Das Verfahren konvergiert für alle vorgestellten Verteilungsfunktionen mit einer Rate von 1 und ist somit auch bei der Bestimmung des Optionspreises der Erwartungswertentwicklung und dem Monte-Carlo-Verfahren, die beide mit einer Rate von $\frac{1}{2}$ konvergieren, vorzuziehen.

## 6.6 Berechnung eines Baskets für zwei Dimensionen

In Kapitel 5 wurde ein Modell sowie ein numerisches Verfahren zur Bewertung von Basket-Optionen auf Grundlage eines Sprung-Diffusions-Modells beschrieben. In diesem Abschnitt stellen wir numerische Ergebnisse vor, die für einen Basket, bestehend aus zwei Kursen, mit diesem Verfahren erzielt wurden. Für die folgenden numerischen Ergebnisse wurden die Parameter aus Tabelle 6.14 verwendet. Außerdem wurde ein Diskretisierungsgitter mit $64 \times 64$ Orts- und 64 Integraldiskretisierungspunkten zugrunde gelegt. Insgesamt werden vier Fälle von Korrelation und Gewichtung betrachtet. Zunächst wurde das Verfahren für unkorrelierte und negativ korrelierte Aktien getestet. Für jeden dieser Fälle wurde sowohl eine Gleichgewichtung als auch eine asymmetrische Gewichtung der Kurse verwendet.

| Parameter | Bedeutung | Wert |
|---|---|---|
| $K$ | Ausübungspreis | 1000 |
| $T$ | Laufzeit | 0.25 |
| $r$ | Zins | 0.05 |
| $\sigma_1$ | Volatilität des ersten Kurses | 0.20 |
| $\sigma_2$ | Volatilität des zweiten Kurses | 0.15 |
| $\lambda$ | Sprungintensität | 0.10 |
| $\rho$ | Korrelationskoeffizient: | |
| | unkorreliert | 0.00 |
| | negativ korreliert | $-1.00$ |

Tabelle 6.14: Parameter der Berechnungen eines zweidimensionalen Baskets.

In Abbildung 6.18 sind die berechneten Optionspreise für den Fall unkorrelierter Aktienkurse (Korrelationskoeffizient $\rho = 0.0$) dargestellt, links für gleichgewichtete Kurse, rechts für Kurse $S_1, S_2$ gewichtet mit $w_1 = 0.3$ und $w_2 = 0.7$. Abbildung 6.19 zeigt die Optionspreise für den Fall negativ korrelierter Aktienkurse ($\rho = -1.0$). Dieser bedeutet, dass sich die Bewegung des einen Aktienkurses negativ auf den Wert des anderen auswirkt.

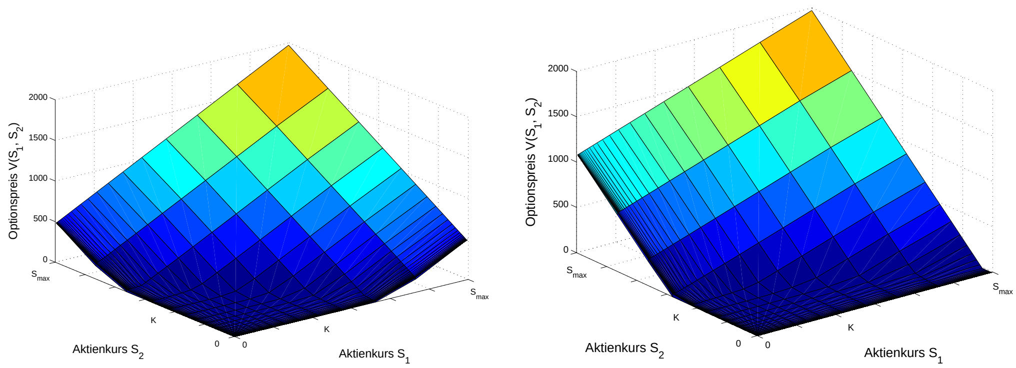


Abbildung 6.18: Optionspreis für zwei unkorrelierte Aktienkurse mit verschiedenen Gewichtungen der Kurse: Gleichgewicht der Kurse (links), Ungleichgewicht der Kurse (rechts).

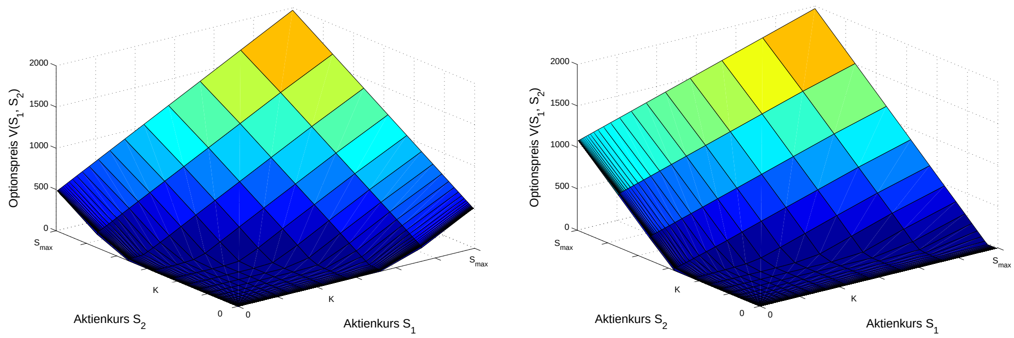


Abbildung 6.19: Optionspreis für zwei korrelierte Aktienkurse mit verschiedenen Gewichtungen der Kurse: Gleichgewicht der Kurse (links), Ungleichgewicht der Kurse (rechts).

Den Abbildungen 6.18 und 6.19 entnehmen wir einen Anstieg des Optionspreises für wachsende Kurse $S_1$ und $S_2$. Hierbei resultiert eine Gleichgewichtung der Kurse in einem Optionspreis, der symmetrisch bezüglich $S_1$ und $S_2$ ist, vgl. Abbildung 6.18 und 6.19 links. Im Gegensatz dazu verdeutlichen Abbildung 6.18 und 6.19 rechts die unterschiedliche Gewichtung der Kurse. Wie an den Abbildungen zu sehen ist, hat der geringer gewichtete Kurs auch einen entsprechend geringeren Einfluss auf den Optionspreis des Baskets. Der „Knick“, den die Auszahlungsstruktur in der Lösung induziert, wird entlang des geringer gewichteten Kurses verzogen.

Um den Unterschied der Optionspreise bei unkorrelierten und korrelierten Aktienkursen stärker hervorzuheben, sind in Abbildung 6.20 die Differenzen der entsprechenden Lösungen sowohl für die gleichgewichtete als auch für die asymmetrische Auszahlungsfunktion dargestellt. Im Folgenden bezeichnet

$$V_{\text{Differenz}} = V_{\text{unkorreliert}} - V_{\text{korreliert}}$$

die Differenz der korrelierten und unkorrelierten Optionspreise. Zusätzlich sind auf der rechten Seite jeweils die zugehörigen Konturlinien abgebildet.

Abbildung 6.20 zeigt, dass sich die beiden Optionspreise hauptsächlich in einem Gebiet um

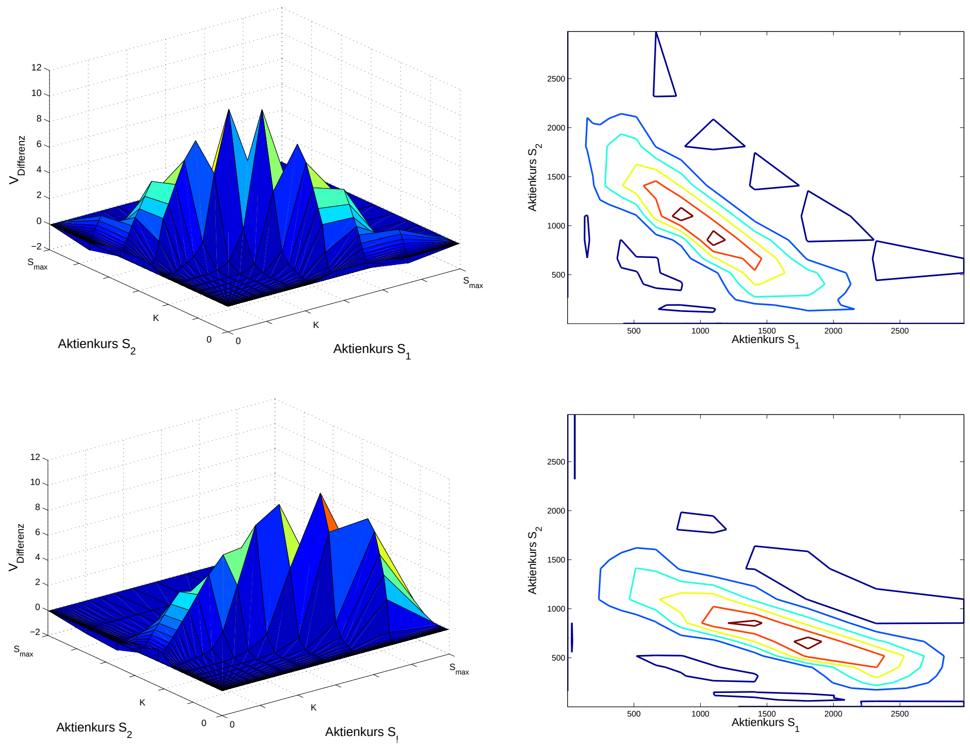


Abbildung 6.20: Differenz der Optionspreise für unkorrelierte und korrelierte Aktienkurse bei einer gleichgewichteten und einer ungleichgewichteten Auszahlungsfunktion.

den Ausübungspreis unterscheiden. Der Optionspreis des Baskets ist im Fall korrelierter Aktienkurse kleiner als im Fall unkorrelierter Aktienkurse. Dies ist auch zu erwarten, da der Bereich um den Ausübungspreis $K$ generell von großer Bedeutung für den Preis der Option ist. In einem Gebiet um $K$ entscheidet sich nämlich, ob die Option überhaupt einen Wert hat, oder ob sie verfällt.
Die positive Differenz, d.h. der größere Preis der Option im Fall unkorrelierter Aktienkurse, entsteht aus dem erwarteten, höheren Gesamtkurs des Baskets. Zur Begründung des erwarteten, höheren Gesamtkurses betrachten wir den Einfluss der Korrelation $\rho$ auf die Entwicklung der einzelnen Kurse. Anhand von Gleichung (5.1) stellen wir fest, dass unterschiedliche Korrelationen zu einer Veränderung der Volatilität eines einzelnen Kurses führen. Im Einzelnen ergeben sich folgende Änderungen:
Eine negative Korrelation bewirkt eine Verringerung der Volatilität und führt somit im Vergleich zu unkorrelierten Aktienkursen zu einem geringeren, erwarteten Kurswert. Der hier nicht betrachtete Fall der positiven Korrelation resultiert in einer Verstärkung der Volatilität und einem somit größeren, erwarteten Aktienkurswert.

Abschließend betrachten wir nun noch die Konvergenz des Gesamtverfahrens in zwei Dimensionen analog zu den Untersuchungen des eindimensionalen Problems (vgl. Abschnitt 6.5.6). Dabei untersuchen wir die Fälle korrelierter und unkorrelierter Kurse mit zugrunde liegender Lognormalverteilung sowie zusätzlich den Fall korrelierter Aktienkurse bei verwendeter CGMY-Verteilung mit unendlicher Variation. Den Ergebnissen aus Abschnitt 6.5.4 folgend wird zur Integration der Verteilungsfunktion in beiden Fällen die Simpson-

regel benutzt. Da in zwei Dimensionen keine geschlossene Lösung zur Berechnung des Basket-Optionspreises bekannt ist, verwenden wir für die Konvergenzuntersuchung analog zu Abschnitt 6.5.6 eine numerische Lösung als Referenzlösung. Bedingt durch den höheren numerischen Aufwand des Verfahrens im Vergleich zu einer Dimension (vgl. Abschnitt 5.3) haben wir die Lösung mit $2^{10} \times 2^{10}$ Orts- und $2^{10}$ Integraldiskretisierungspunkten als Referenzlösung gewählt.
Numerische Experimente haben ergeben, dass die Sensitivität des Verfahrens bezüglich des Ausübungspreises $K$ noch wesentlich größer ist als bereits in einer Dimension festgestellt wurde (siehe Abschnitt 6.5.1). Es müsste also analog zu Abschnitt 6.5.3 überprüft werden, ob sich die dort vorgestellten Verbesserungen der Robustheit auch auf den zweidimensionalen Fall übertragen lassen oder ob beispielsweise eine bezüglich $K$ adaptierte Diskretisierung notwendig ist. Aus diesen Gründen beschränken wir uns auf den Fall $K=1$.

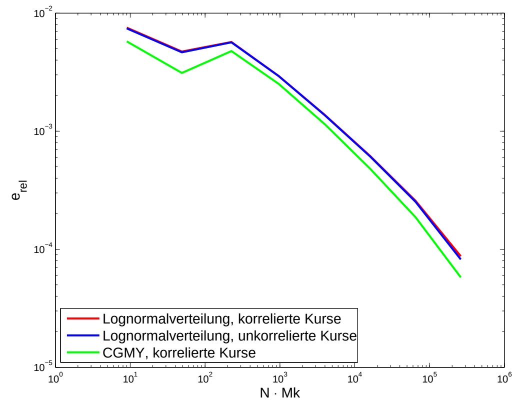


Abbildung 6.21: Konvergenz der Berechnung des Basket-Optionspreises.

Abbildung 6.21 und Tabelle 6.15 zeigen die gemessenen Fehler und die zugehörigen Konvergenzraten für die drei angegebenen Fälle. Die betrachteten Fehler und Raten verhalten sich für alle Fälle analog. Es ergibt sich zunächst eine Rate von etwa $\frac{1}{2}$, die jedoch mit zunehmender Verfeinerung der Diskretisierung auf etwa 0.8 ansteigt.
Durch die verwendeten Grundbausteine des Verfahrens (zentrale Differenzen für die Ortsdiskretisierung, explizite Behandlung des Integrals, implizite Zeitdiskretisierung) erwarten wir analog zum eindimensionalen Fall eine Rate von 1, da von keinem dieser Einzelverfahren eine Verschlechterung der Konvergenz in zwei Dimensionen zu erwarten ist. Auf Grund des hohen numerischen Aufwandes konnten jedoch nicht die nötigen Verfeinerungen des Gitters erreicht werden, um die asymptotische Konvergenzrate experimentell zu ermitteln. Die mit feiner werdender Diskretisierung ansteigende Konvergenzrate deutet allerdings darauf hin, dass die erwartete Rate von 1 erreicht werden kann.

| | | | Lognormalverteilung, unkorrelierte Kurse | |
|---|---|---|---|---|
| $N \cdot Mk$ | $N$ | $Mk$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 4 | 4 | 1 | $7.41941e{-}03$ | - |
| 8 | 8 | 1 | $4.65505e{-}03$ | $6.72e{-}01$ |
| 16 | 16 | 1 | $5.65780e{-}03$ | $-2.81e{-}01$ |
| 64 | 32 | 2 | $2.93057e{-}03$ | $4.74e{-}01$ |
| 256 | 64 | 4 | $1.36583e{-}03$ | $5.50e{-}01$ |
| 1024 | 128 | 8 | $6.09260e{-}04$ | $5.82e{-}01$ |
| 4096 | 256 | 16 | $2.52110e{-}04$ | $6.36e{-}01$ |
| 16384 | 512 | 32 | $8.20612e{-}05$ | $8.09e{-}01$ |
| | | | Lognormalverteilung, korrelierte Kurse | |
| $N \cdot Mk$ | $N$ | $Mk$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 4 | 4 | 1 | $7.53219e{-}03$ | - |
| 8 | 8 | 1 | $4.72973e{-}03$ | $6.71e{-}01$ |
| 16 | 16 | 1 | $5.69676e{-}03$ | $-2.68e{-}01$ |
| 64 | 32 | 2 | $2.93711e{-}03$ | $4.77e{-}01$ |
| 256 | 64 | 4 | $1.37542e{-}03$ | $5.47e{-}01$ |
| 1024 | 128 | 8 | $6.15771e{-}04$ | $5.79e{-}01$ |
| 4096 | 256 | 16 | $2.57352e{-}04$ | $6.29e{-}01$ |
| 16384 | 512 | 32 | $8.72810e{-}05$ | $7.80e{-}01$ |
| | | | CGMY-Verteilung, korrelierte Kurse | |
| $N \cdot Mk$ | $N$ | $Mk$ | $e_{rel}$ | $\rho$ |
| 4 | 4 | 1 | $5.76454e{-}03$ | - |
| 8 | 8 | 1 | $3.11757e{-}03$ | $8.86e{-}01$ |
| 16 | 16 | 1 | $4.77317e{-}03$ | $-6.14e{-}01$ |
| 64 | 32 | 2 | $2.51964e{-}03$ | $4.60e{-}01$ |
| 256 | 64 | 4 | $1.14783e{-}03$ | $5.67e{-}01$ |
| 1024 | 128 | 8 | $4.80230e{-}04$ | $6.28e{-}01$ |
| 4096 | 256 | 16 | $1.86581e{-}04$ | $6.81e{-}01$ |
| 16384 | 512 | 32 | $5.78183e{-}05$ | $8.45e{-}01$ |

Tabelle 6.15: Konvergenz des Gesamtverfahrens für einen zweidimensionalen Basket.

# Kapitel 7

# Schlussbemerkungen und Ausblick

In dieser Arbeit wurden verschiedene numerische Verfahren zur Bewertung Europäischer Optionen vorgestellt und diskutiert. So stellen die geschlossenen Lösungen als Anwendung der Black-Scholes-Formel eine einfache Möglichkeit zur Berechnung eines Optionspreises dar. Die Verwendung einer analytischen Lösung ist allerdings nur eingeschränkt, d.h. für zwei spezielle Sprungverteilungsfunktionen („Plötzlicher Ruin“ und die Lognormalverteilung) möglich.
Eine flexiblere Lösungsmöglichkeit zur Bestimmung eines Optionspreises ist die Erwartungswertentwicklung. Diese beinhaltet eine Anwendung und Summation der Black-Scholes-Formel, hat jedoch den Nachteil, dass für jeden Summanden ein zukünftiger Kurswert berechnet werden muss. Es wurde gezeigt, dass das Monte-Carlo-Verfahren, das die Bestimmung des erwarteten Kurswertes ermöglicht, mit einer Konvergenzrate von $\frac{1}{2}$ konvergiert. Allerdings muss diese Bestimmung für jeden Summanden erfolgen und somit erhöht sich der Aufwand zur Optionspreisberechnung um einen konstanten Faktor.
Besser eignet sich hingegen die Verwendung des Monte-Carlo-Verfahrens für die vollständige Simulation der Kursbewegung mit zugrunde liegendem Sprung-Diffusions-Modell. In diesem Fall ist das Monte-Carlo-Verfahren zur Ermittlung des Optionspreises nur einmal anzuwenden. Auch dieses Verfahren konvergiert mit einer Konvergenzrate von $\frac{1}{2}$. Der Aufwand ist im Vergleich zur Erwartungswertentwicklung aber geringer, da das Verfahren nur einmal durchgeführt werden muss.
Bei der Untersuchung der Lösung der PIDE wurde besonders der Einfluss verschiedener Parameter (Zins, Volatilität, Laufzeit und Ausübungspreis) betrachtet. Es stellte sich heraus, dass das Verfahren völlig robust gegenüber Änderungen des Zinssatzes ist. Für jede Wahl des Parameters wird eine Konvergenzrate von 2 erhalten und selbst die Fehler sind für jede Parameterwahl fast identisch. Eine Verlängerung der Laufzeit wirkte sich ebenfalls nicht in einer Verschlechterung der Konvergenzrate aus, diese blieb weiterhin 2. Die Wahl einer kleinen Volatilität verschlechterte die Konvergenz erheblich. Diese Verschlechterung konnte auf die Diskretisierung der ersten Ableitung mit zentralen Differenzen zurückgeführt werden. Die Verkleinerung der Volatilität bewirkt eine Verminderung des Diffusions- und eine Verstärkung des Konvektionsterms und führt somit zu einer Instabilität der zentralen Differenzen der ersten Ableitung. Das Problem der Instabilität konnte durch eine Downwind-Diskretisierung der ersten Ableitung für kleine Volatilitäten behoben werden. Durch diese Anwendung ist nur eine Konvergenzrate von 1 zu beobachten, aber somit ist die Stabilität der Diskretisierung gewährleistet. Der Parameter $K$, der Ausübungspreis, ließ für eine Vergrößerung des Parameters eine deutliche Verschlechterung der Konvergenz erkennen. Die Verschlechterung der Konvergenz für große Ausübungspreise konnten jedoch auf das Diskretisierungsgebiet zurückgeführt werden. Durch die Verwendung eines logarithmischen Diskretisierungsgitters sind im Bereich großer Kurswerte nur wenige Diskretisierungspunkte gegeben. Durch die Möglichkeit, die Diskretisierungsgebiete des PDE-Teils und des Integrals unterschiedlich zu wählen, konnte durch eine Verschiebung des PDE-Diskretisierungsgebietes der Erhalt der Konvergenzrate 2 jedoch gewährleistet werden. Es

zeigt sich, dass für eine gute Konvergenz der Ausübungspreis in der Mitte der Diskretisierungspunkte liegen sollte.
Somit konnte ein robustes Verfahren zur Lösung der PIDE entwickelt werden, das sich auch hinsichtlich seiner Flexibilität zur Verwendung verschiedener Verteilungsfunktionen auszeichnet. Es können Verteilungsfunktionen mit endlicher und unendlicher Variation und Aktivität eingesetzt werden, deren Berechnung mit einfachen Kollokationsverfahren möglich ist. Die Konvergenzrate des Verfahrens beträgt für alle Sprungverteilungsfunktionen 1. Die Anwendung des Verfahrens auf Basket-Optionen ermöglicht auch die mehrdimensionale Berechnung von Optionspreisen mit zugrunde liegendem Sprung-Diffusions-Modell. Auch im mehrdimensionalen Fall ist der Einsatz verschiedenster Sprungverteilungsfunktionen möglich und es wird für das Gesamtverfahren eine Konvergenzrate von etwa 1 erzielt.

Zwar ermöglicht die explizite Behandlung des Integrals in einer Dimension das direkte Lösen des Gleichungssystems mit Aufwand $O(N)$, jedoch ist auch die Auswertung des Integrals relativ aufwändig, so dass eine implizite Behandlung des Integrals mit anschließender Matrixkompression vergleichend betrachtet werden sollte. Zusätzlich könnten dann die Kollokationsverfahren zur Auswertung des Integrals durch ein Galerkin-Verfahren ersetzt werden. Weiterhin sollte das Verfahren zur Berechnung der Basket-Optionen genauer hinsichtlich der Konvergenz und Robustheit untersucht werden. So sollten nach Möglichkeit die Verbesserungen des eindimensionalen Verfahrens übertragen oder der Einsatz anderer Methoden wir Adaptivität überprüft werden.

# Literaturverzeichnis


[AA00] Andersen, L. und J. Andreasen: *Jump-Diffusion Processes: Volatility Smile Fitting and Numerical Methods for Option Pricing.* Review of Derivatives Research, 4:231–262, 2000.

[AP05] Achdou, Y. und O. Pironneau: *Computational Methods for Option Pricing.* SIAM, 2005.

[AS02] Albeverio, S. und V. Steblovskaya: *A model of financial market with several interacting assets. Complete market case.* Finance and Stochastics, 6(383-396), 2002.

[Bau99] Bauer, H.: *Maß und Integrationstheorie.* de Gruyter, 1. Auflage, 1999.

[Bau02] Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* de Gruyter, 5. Auflage, 2002.

[BBE+04] Balay, S., K. Buschelman, V. Eijkhout, W.D. Gropp, D. Kaushik, M.G. Knepley, L.C. McInnes, B.F. Smith und H. Zhang: *PETSc Users Manual.* Technischer Bericht ANL-95/11 - Revision 2.1.5, Argonne National Laboratory, 2004.

[BBG+01] Balay, S., K. Buschelman, W.D. Gropp, D. Kaushik, M.G. Knepley, L.C. McInnes, B.F. Smith und H. Zhang: *PETSc Web page*, 2001. http://www.mcs.anl.gov/petsc.

[Ber03] Bernoth, K.: *Eine Erweiterung des Mehrdimensionalen Black-Scholes Modells mit Lévy Rauschen.* Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2003.

[BGMS97] Balay, S., W.D. Gropp, L.C. McInnes und B.F. Smith: *Efficient Management of Parallelism in Object Oriented Numerical Software Libraries.* In: Arge, E., A. M. Bruaset und H. P. Langtangen (Herausgeber): *Modern Software Tools in Scientific Computing*, Seiten 163–202. Birkhäuser Press, 1997.

[BNMR01] Barndorff-Nielsen, O.E., T.E. Mikosch und S. I. Resnick: *Lévy Processes.* Birkhäuser, 2001.

[Bru04] Brumen, G.: *Deterministic Solution of American Style Optimal Stopping Problems With Lévy Driven Underlyings by the Penalty Method.* Diplomarbeit, ETH Uni Zürich, 1 2004.

[BS73] Black, F. und M. Scholes: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Journal of Political Economy, 81:637–659, 1973.

[CGMY02] Carr, P., H. Geman, D. B. Madan und M. Yor: *The Fine Structure of Asset Returns: an Empirical Investigation.* Journal of Business, 75(2), 2002.

[Cha99] Chan, T.: *Pricing Contingent Claims On Stocks Driven By Lévy Processes.* The Annals of Applied Probability, 9(2):504–528, 1999.

[CJ03] Chesney, M. und M. Jeanblanc: *Pricing American options in a jump diffusion model.* 7 2003.

[Con01] Cont, R.: *Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues.* Quantitative Finance, 1:223 – 236, 2001.

[CR76] Cox, J.C. und S.A. Ross: *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes.* Journal of Financial Economics, 3:145–166, 1976.

[CV05] Cont, R. und E. Voltchkova: *A finite Difference Scheme for Option Pricing in Jump Diffusion and Exponential Lévy Models.* SIAM J. Numer. Anal., 43(4):1596 – 1626, 2005.

[dFL03] dHalluin, Y., P.A. Forsyth und G. Labahn: *A Penalty Method for American Options with Jump Diffusion Processes.* 3 2003.

[dFV04] dHalluin, Y., P.A. Forsyth und K.R. Vetzal: *Robust Numerical Methods for Contingent Claims under Jump Diffusion Processes.* 1 2004.

[Duf] Duffy, D.J.: *Numerical Analysis of Jump Diffusion Models: A Partial Differential Equation Approach.* Datasim.

[Ede05] Eder, I.: *Lévy-Prozesse in der Risikotheorie.* Diplomarbeit, Technische Universität München, Zentrum Mathematik, 2005.

[Gla04] Glasserman, P.: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer-Verlag, 2004.

[GMY99] Geman, H., D.B. Madan und M. Yor: *Time Changes Lévy Processes.* 1999.

[GR94] Grossmann, C. und H.-G. Roos: *Numerik Partieller Differentialgleichungen.* B.G. Teubner Stuttgart, 1994.

[Hac97] Hackbusch, W.: *Integralgleichungen Theorie und Numerik.* Teubner Studienbücher Mathematik, 1997.

[HB02] Hanke-Bourgeois, M.: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens.* Teubner, 2002.

[Hul01] Hull, J. C.: *Optionen, Futures und Andere Derivate.* R. Oldenbourg Verlag München Wien, 4. Auflage, 2001.

[HW03] Hanson, Floyd B. und John J. Westman: *Jump-Diffusion Stock-Return Model with Weighted Fitting of Time-Dependent Parameters.* 1 2003.

[JLL80] Jaillet, P., D. Lamberton und B. Lapeyre: *Variational Inequalities and the Pricing of American Options.* CERMA-ENPC La Courtine 93167 NOISY LE GRAND –FRANCE, 1980.

[KE99] Korn, R. und E.: *Optionsbewertung und Portfoliooptimierung.* Vieweg, 1. Auflage, 1999.

[Kop95] KOPONEN, I.: *Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Lévy Flights Towards the Gaussian Stochastic Process.* Physical Review, (52):1197–1199, 1995.

[Kou02] KOU, S.G.: *A Jump-diffusion Model for Option Pricing.* Management Science, 48(8):1086–1101, 8 2002.

[KW04] KOU, S.G. und H. WANG: *Option Pricing Under a double Exponential Jump Diffusion Model.* Management Science, 50(9):1178–1192, 2004.

[LTW98] LARSSON, S., V. THOMÉE und L. WAHLBIN: *Numerical Solution of Parabolic Integro-Differential Equations by The Discontinous Galerkin Method.* Mathematics of Computation, 67(221):45–71, 1 1998.

[MA02] METWALLY, S.A.K. und A.F. ATIYA: *Using Brownian Bridge for Fast Simulation of Jump-Diffusion Processes and Barrier Options.* The Journal of Derivatives, 2002.

[Mad99] MADAN, DILIP B.: *Purely Discontinuous Asset Price Processes.* University of Maryland, 4 1999.

[Mak04] MAKROGLOU, A.: *Numerical Solution of Second Order Integro-Differential Equations Arising in Ruin Theory.* Dept. of Mathematics, Univ. of Portsmouth, 12 2004.

[MCC98] MADAN, D.B., P.P. CARR und E.C. CHANG: *The Variance Gamma Process and Option Pricing.* European Finance Review, 2:79–105, 1998.

[Mer73] MERTON, R.C.: *Theory of Rational Option Pricing.* Bell Journal of Economics and Management Science, (4):141–183, 1973.

[Mer76] MERTON, R.C: *Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinouss.* Journal of Financial Economics, 3:125–144, 1976.

[MNS03] MATACHE, A.-M., P.-A. NITSCHE und C. SCHWAB: *Wavelet Galerkin Pricing of American Options on Lévy Driven Assets.* Research Report, 06, 7 2003.

[Mor95] MORO, B.: *The Full Monte.* Risk, 8(2), 1995.

[MPS02] MATACHE, A.-M., T. VON PETERSDORFF und C. SCHWAB: *Fast Derterministic Pricing of Options on Lévy Driven Assets.* Research Report, 11, 7 2002.

[MS74] MERTON, R.C. und P.A. SAMUELSON: *Fallacy of the Log-Normal Approximation to Optimal Portfolio Decision-Making Over Many Periods.* Journal of Financial Economics, 1:67–94, 1974.

[MSW04] MATACHE, A.-M., C. SCHWAB und T. WIHLER: *Fast Numerical Solution of Parabolic Integro-Differential-Equations With Applications in Finance.* IMA Preprint Series 1954, 1 2004.

[PS01] PETERSDORFF, T. VON und C. SCHWAB: *Wavelet-Discretizations of Parabolic Integro-Differential Equations.* Research Report, (2001-07), 8 2001.

[Rai00] RAIBLE, S.: *Lévy Processes in Finance, Theory, Numerics and Empirical Facts.* Doktorarbeit, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br., 1 2000.

[Sam65] SAMUELSON, P.A.: *Rational Theory of Warrant Pricing.* Industrial Management Review, (6):13–31, 1965.

[Sam73] SAMUELSON, P.A.: *Mathematics Of Speculative Price.* SIAM Review, 15(1), 1973.

[Sat99] SATO, K.: *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions.* Cambridge University Press, 1999.

[Sch05] SCHOUTENS, W.: *Lévy Processes in Finance Pricing Financial Derivatives.* Wiley Series in probability and statistics, 2005.

[Sey00] SEYDEL, R.: *Einführung in die Numerische Berechnung von Finanz-Derivaten.* Springer, 2000.

[Sto99] STOER, J.: *Numerische Mathematik 1.* Springer, 1999.

[Str68] STRANG, G.: *On the Construction and Comparison of Difference Schemes.* J. Numer. Anal., 5(3):506–517, 1968.

[TB95] TRAUTMANN, S. und M. BEINERT: *Stock Price Jumps and Their Impact on Option Valuation.* Department of Law and Economics, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 1995.

[Wer92] WERNER, J.: *Numerische Mathematik 1.* Vieweg, 1992.