

DIPLOMARBEIT

NUMERISCHE VERFAHREN ZUR  
BEWERTUNG BERMUDSCHER  
OPTIONEN

ANGEFERTIGT AM  
INSTITUT FÜR NUMERISCHE SIMULATION

VORGELEGT DER  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT DER  
RHEINISCHEN FRIEDRICH-WILHELMS UNIVERSITÄT BONN

APRIL 2006  
VON  
CLAUDIA WARAWKO  
AUS  
TROISDORF-SIEGLAR

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Bezeichnungen</b>	<b>v</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Optionen</b>	<b>7</b>
2.1 Grundlagen der Optionsbewertung . . . . .	7
2.1.1 Definitionen und Grundbegriffe . . . . .	7
2.1.2 Typen von Optionen . . . . .	8
2.1.3 Motive für den Handel mit Optionen . . . . .	11
2.1.4 Optionsparameter . . . . .	13
2.1.5 Bewertung von Optionen . . . . .	13
<b>3 Modelle</b>	<b>21</b>
3.1 Das Black-Scholes Modell . . . . .	21
3.1.1 Annahmen . . . . .	21
3.1.2 Die Black-Scholes Gleichung für Europäische Optionen . . . . .	26
3.1.3 Die Black-Scholes Ungleichung für Amerikanische Optionen . . . . .	28
3.1.4 Die Risikokennziffern . . . . .	29
3.2 Das Black-Modell . . . . .	33
3.2.1 Das Black-Modell für Future-Optionen . . . . .	34
3.2.2 Bewertung von Zinsswaps . . . . .	35
3.2.3 Das Black-Modell für Swaptions . . . . .	37
3.2.4 Die Risikokennziffern einer Swaption . . . . .	39
<b>4 Bewertungsverfahren für Bermudsche Optionen</b>	<b>41</b>
4.1 Das Binomialmodell nach Cox, Ross und Rubinstein . . . . .	42
4.1.1 Zeitdiskretisierung . . . . .	43
4.1.2 Herleitung der Faktoren $u$ , $d$ und $p$ . . . . .	44
4.1.3 Die Binomialmethode . . . . .	48
4.1.4 Die Risikokennziffern . . . . .	50
4.1.5 Approximation des Black-Scholes Modells durch das Binomialmodell . . . . .	52
4.1.6 Die Methode von Leisen und Reimer . . . . .	59
4.1.7 Das Binomialverfahren für Bermudsche Optionen . . . . .	62
4.2 Das Rendleman-Bartter Modell . . . . .	65
4.2.1 Herleitung . . . . .	65
4.2.2 Anwendung auf Bermudsche Swaptions . . . . .	66

4.3	Erwartungswertdarstellung nach Geske-Johnson . . . . .	68
4.3.1	Herleitung . . . . .	68
4.3.2	Berechnung eindimensionaler Normalverteilungen . . . . .	75
4.3.3	Berechnung mehrdimensionaler Normalverteilungen . . . . .	78
4.3.4	Newton-Verfahren zur Ermittlung der kritischen Aktienkurse	84
<b>5</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>89</b>
5.1	Europäische und Amerikanische Optionswerte im Binomialmodell . .	89
5.2	Bermudsche Optionswerte im Binomialmodell . . . . .	95
5.3	Bermudsche Optionswerte mit der Erwartungswertdarstellung nach Geske und Johnson . . . . .	103
5.4	Vergleich des Binomialverfahrens und der Erwartungswertdarstellung nach Geske und Johnson in Anwendung auf Bermudsche Optionen . .	106
5.5	Swaptionwerte im Rendleman-Bartter Modell . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>111</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>113</b>

# Bezeichnungen

## Finanzmathematische Symbole:

$t$	laufende Zeit, $0 \leq t \leq T$
$T$	Verfallsdatum, Fälligkeitszeitpunkt, Laufzeit
$S, S(t)$	Kurs des Basiswertes, aktueller Kurs des Basiswertes zum Zeitpunkt $t$
$K$	Basispreis, Ausübungspreis
$V(S, t)$	Wert einer Option zum Zeitpunkt $t$ mit Aktienkurs $S$
$V(F, t)$	Wert einer Option zum Zeitpunkt $t$ mit Futurepreis $F$
$V_C$	Wert einer Call-Option
$V_P$	Wert einer Put-Option
$V^{eur}$	Wert einer Europäischen Option
$V^{am}$	Wert einer Amerikanischen Option
$V^{ber}$	Wert einer Bermudschen Option
$V_{PS}$	Wert einer Payer-Swaption
$V_{RS}$	Wert einer Receiver-Swaption
$C$	Binomialformel für den Wert einer Europäischen Call-Option
$\sigma$	Volatilität, Schwankungsbreite des Kurses
$r > 0$	risikoloser Zinssatz
$\mu$	Driftrate bzw. erwartete Rendite
$q$	Dividende
$d_1, d_2$	Parameter der Black-Scholes Formel ohne Dividendenzahlungen
$\hat{d}_1, \hat{d}_2$	Parameter der Black-Scholes Formel mit Dividendenzahlungen
$u$	Faktor für eine Kurssteigerung im Binomialmodell
$d$	Faktor für einen Kursabfall im Binomialmodell
$p$	Wahrscheinlichkeit für eine Kurssteigerung im Binomialmodell
$(1 - p)$	Wahrscheinlichkeit für einen Kursabfall im Binomialmodell
$\Delta$	Options-Delta
$\Gamma$	Options-Gamma
$\rho$	Options-Rho
$\Theta$	Options-Theta
$\Lambda$	Options-Vega
$B_{fix}$	Bond mit fixen Zinszahlungen
$B_{fl}$	Bond mit variablen Zinszahlungen
$L$	Kapitalvolumen
$k$	fixe Auszahlung eines Bonds zum Zeitpunkt $t_i$
$k^*$	variable Auszahlung eines Bonds zum Zeitpunkt $t_1$
$m$	Anzahl an Zahlungen pro Jahr
$R, R_X$	Festzinssatz
$F$	Forward-Swapsatz

$D$	Diskontierungsfaktor $e^{-r\Delta t}$
$\tilde{r}$	variabler Zinssatz
$\Delta t$	kleine Schrittweite in $t$
$t_i$	$i$ -ter diskreter Zeitpunkt
$\Delta a$	Ausübungszeitschrittweite
$a_j$	Ausübungszeitpunkte einer Bermudischen Option
$S_t^*$	kritischer Aktienkurs zum Zeitpunkt $t$

**Allgemeine mathematische Symbole:**

$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen größer Null
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$E[ \ ]$	Erwartungswert
$E^*[ \ ]$	äquivalentes Martingalmaß
$\text{Var}[ \ ]$	Varianz
$W_t$	Wiener Prozess
$X(t)$	Zufallsvariable
$F(x)$	Verteilungsfunktion
$f(x)$	Dichtefunktion
$N(\mu, \sigma)$	kumulative Normalverteilung mit Mittelwert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$
$N(x)$	kumulative Standard-Normalverteilung
$\rho$	Korrelationskoeffizient
$\Sigma$	Korrelationsmatrix
$N_n(x_1, \dots, x_n; \Sigma)$	$n$ -dimensionale kumulative Standard-Normalverteilung
$B(n, p)$	Binomialverteilung mit den Parametern $n$ und $p$

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Bewertung derivativer Finanzinstrumente kann näherungsweise mit Hilfe mathematischer Modellen (z.B. Differentialgleichungen) durchgeführt werden. Mittels numerischer Verfahren lassen sich zukünftige Entwicklungen simulieren und Lösungen dieser Modelle berechnen. Wir werden uns in dieser Arbeit mit der Bewertung spezieller derivativer Finanzinstrumente, sogenannter Bermudischer Optionen befassen.

Die klassische Finanzmathematik beschäftigt sich mit grundlegenden Finanzinstrumenten oder Anlageformen wie Aktien, Devisen, festverzinslichen Anleihen, Rentenwerten und Rohstoffen. In der modernen Finanzmathematik werden insbesondere Finanzderivate, die von einfachen Finanzinstrumenten abhängen, untersucht. Zu den Derivaten zählen handelbare Finanzprodukte wie z.B. Optionen und Futures. Einfache Derivate werden an sogenannten Terminbörsen gehandelt. Die nichtstandardisierten Produkte wie z.B. Swaps werden außerbörslich gehandelt, d.h. over-the-counter (OTC). Derivate stellen das am schnellsten wachsende und sich verändernde Segment des modernen Finanzwesens dar.

Bei derivativen Finanzinstrumenten liegen der Vertragsabschluss und die Erfüllung des Vertrages zeitlich auseinander. Im Gegensatz zum Kassageschäft werden die Leistung und die Gegenleistung nicht unmittelbar ausgetauscht, sondern für einen zukünftigen Zeitpunkt vereinbart. Ein Anleger erwirbt Derivate aufgrund ihrer spekulativen Hebelwirkung oder zur Absicherung bereits bestehender Positionen gegenüber zukünftigen Entwicklungen. Für die zugesicherte Leistung in der Zukunft muss ein Preis bezahlt werden. Dieser Preis des Finanzderivats hängt dabei vom zugrunde liegenden Finanzinstrument ab.

Bereits Anfang des letzten Jahrhunderts wurden einfache Finanzderivate gehandelt. Jedoch verloren sie ihre Bedeutung zwischen den Weltkriegen. Zu Beginn der siebziger Jahren erlebten sie zuerst in den USA einen neuen Aufschwung. Gleichzeitig erschienen die bedeutenden Arbeiten von Black, Scholes [BS73] und Merton, die die Berechnung des fairen Preises einer Option ermöglichten. Dieser faire Preis muss nicht unbedingt dem tatsächlichen Börsenpreis entsprechen, da dieser aus Angebot und Nachfrage entsteht, aber er ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Orientierung für alle Marktteilnehmer.

Der Käufer einer Option erwirbt durch den Kauf der Option das Recht den zugrunde liegenden Gegenstand oder Basiswert, z. B. eine Aktie, zu einem im voraus festgelegten Preis  $K$ , dem Ausübungspreis, während oder erst am Ende der Laufzeit der Option zu kaufen (Call-Option) bzw. zu verkaufen (Put-Option). Am Markt werden verschiedene Typen von Optionen gehandelt. Europäische Optionen dürfen

nur am Ende der Laufzeit ausgeübt werden. Unter den Black-Scholes Annahmen ist der faire Preis einer Europäischen Option durch die Black-Scholes Formel bestimmt. Die Black-Scholes Formel ist die analytische Lösung des Randwertproblems der Black-Scholes Gleichung, das der faire Preis einer Europäischen Option erfüllt. Amerikanische Optionen hingegen dürfen zu jedem Zeitpunkt während der Laufzeit der Option ausgeübt werden. Der Wert einer Amerikanischen Option lässt sich nicht analytisch bestimmen, da bis zum heutigen Tage, trotz der großen Bedeutung für die Praxis, keine analytische Lösungsformel gefunden wurde. Aufgrund des vorzeitigen Ausübungsrechtes wird aus dem Randwertproblem bei Europäischen Optionen ein freies Randwertproblem, d.h. die Black-Scholes Gleichung wird für Amerikanische Optionen zu einer Ungleichung. Der freie Rand legt den optimalen Ausübungszeitpunkt einer Amerikanischen Option fest. Amerikanische Optionen stellen den größten Anteil an Optionen am internationalen Finanzmarkt dar. Der faire Preis einer Amerikanischen Option kann jedoch nur mit Hilfe numerischer Verfahren berechnet werden.

Während der Laufzeit der Option erfordert die jederzeit mögliche vorzeitige Ausübung einer Amerikanischen Option theoretisch den kontinuierlichen Handel der Option am Finanzmarkt. Ein kontinuierlicher Handel ist aber in der Praxis nicht möglich. Gerade die Anbieterseite müsste dann für ein kontinuierliches Update des Optionspreises sorgen. An den weltweiten Börsen erfolgt das Fixing des Optionspreises in der Regel jedoch nur einmal am Tag. Aufgrund dessen ist ein weiterer Optionstyp, die Bermudsche Option, von großer Bedeutung. Die Bermudsche Option darf nur zu vorher festgelegten Zeitpunkten während der Laufzeit der Option vorzeitig ausgeübt werden. Aufgrund dieser diskreten Anzahl der Ausübungszeitpunkte werden Amerikanische Optionen bei der Bewertung oft mit Hilfe von Bermudschen Optionen approximiert. Jedoch existiert auch für eine Bermudsche Option, analog zur Amerikanischen Option, keine Lösung im Sinne einer analytischen Lösungsformel. Deshalb werden für die Bewertung von Bermudschen Optionen unterschiedlichste Arten von Approximationen verwendet. In dieser Arbeit wird die effiziente Bewertung von Bermudschen Optionen mittels zweier Verfahren, der Binomialmethode und eines Verfahrens nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson diskutiert.

Cox, Ross und Rubinstein [CRR79] entwickelten die Binomialmethode zur Bewertung von Europäischen und Amerikanischen Optionen auf Grundlage eines Binomialbaumes. Zur Simulation der zukünftigen Entwicklung des zugrunde liegenden Basiswertes verwenden sie keine Zufallszahlen, sondern bestimmen die Parameter einer Aufwärts- bzw. Abwärtsbewegung des Kurses und die dazugehörige Wahrscheinlichkeit anhand von angenommenen Marktfaktoren. Mit Hilfe dieser Parameter und einer Diskretisierung der Optionslaufzeit wird die zukünftige Entwicklung des Kurses in einer Vorwärtsphase berechnet. In einer Rückwärtsphase wird dann der Optionspreis bestimmt. Durch die Verfeinerung der Zeitdiskretisierung konvergiert der berechnete Optionswert gegen den exakten Optionswert des Black-Scholes Modells. Das Binomialverfahren besitzt für Europäische und Amerikanische Optionen eine Konvergenzrate von  $\frac{1}{2}$ . Bei der Anwendung des Binomialverfahrens auf Bermudsche Optionen kann es aufgrund der diskreten Anzahl der vorzeitigen

---

Ausübungszeitpunkten zu Problemen kommen, da die Ausübungszeitpunkte nicht mit Sicherheit mit den Diskretisierungszeitpunkten übereinstimmen. In dieser Arbeit werden dazu verschiedene neue Lösungsansätze entwickelt. Die Wahl der Anzahl der Diskretisierungszeitpunkte in Abhängigkeit der Anzahl der Ausübungszeitpunkte stellt dabei den intuitiven Ansatz dar. Wir werden sehen, dass dieser intuitive Ansatz eine effiziente Berechnung des Optionspreises einer Bermudschen Option ermöglicht, ohne zusätzlichen Aufwand zu produzieren. Die aus diesem Ansatz resultierende Einschränkung für die Anzahl der Diskretisierungszeitschritte kann mit Hilfe von Interpolations- und Extrapolationsmethoden aufgehoben werden. Falls die Ausübungszeitpunkte nicht mit den Diskretisierungszeitpunkten übereinstimmen, dienen diese Interpolations- und Extrapolationsmethoden dazu, die fehlenden Kurse des Basiswertes an den Ausübungszeitpunkten zu bestimmen. Die verschiedenen Interpolations- und Extrapolationsmethoden werden hinsichtlich ihrer Effizienz untersucht. Dabei wird sich heraus stellen, dass die Interpolation mit dem Kurs zum späteren Zeitpunkt die beste Approximation für den fehlenden Kurs liefert. Zusätzlich können nun Bermudsche Optionen mit weniger Diskretisierungszeitpunkten als Ausübungszeitpunkten mit Hilfe dieser Interpolationsmethode sinnvoll berechnet werden. In numerischen Experimenten wird sich zeigen, dass das Binomialverfahren auch in Anwendung auf Bermudsche Optionen mit Konvergenzrate  $\frac{1}{2}$  konvergiert. Zur Verbesserung der Konvergenzrate des Binomialverfahrens entwickelten Leisen und Reimer [LM96] auf Grundlage von Inversionsformeln, zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung, ein verbessertes Binomialverfahren. Die Methode von Leisen und Reimer liefert ein verbessertes Binomialverfahren mit Konvergenzrate 1. Jedoch gilt diese bessere Konvergenzrate nur für Europäische Optionen. Wir werden später zeigen, dass die verbesserte Konvergenzeigenschaft des Verfahrens mit einer steigenden Anzahl der Ausübungszeitschritte verloren geht. Der von uns entwickelte Lösungsansatz der Anpassung, für die Bewertung von Bermudschen Optionen im Binomialmodell wenden wir auf die Bewertung von Bermudschen Swaptions an, da wir später sehen werden, dass mit diesem Ansatz Optionen mit einer diskreten Anzahl an Ausübungszeitpunkten einfach und effizient berechenbar sind. Eine Swaption ist eine Option auf einen Zinsswap. Ein Zinsswap ermöglicht den Austausch von unterschiedlichen Zinsverpflichtungen in einer einheitlichen Währung für eine bestimmte Laufzeit. Swaptions sind Finanzinstrumente zur Absicherung des Zinsänderungsrisikos bei Geschäftsabschlüssen, z.B. kündbaren Firmen- bzw. Regierungsanleihen. Ein kontinuierlicher Austausch von Zinsverpflichtungen ist nicht möglich. Deshalb findet der Austausch an diskreten Zeitpunkten (monatlich, jährlich) statt. Die Bermudsche Swaption ist das am häufigsten gehandelte zahlungsfähige festverzinsliche Finanzinstrument mit vorzeitiger Ausübungsmöglichkeit. Der Halter einer Bermudschen Swaption kann zu festgelegten Ausübungszeitpunkten in einen Zinsswap eintreten. Somit kann er auf Zinsschwankungen am Markt zu verschiedenen Zeitpunkten reagieren und besitzt gleichzeitig nicht die Verpflichtung zum Eintritt in den Swap wie es bei Standard-Swapgeschäft der Fall ist.

Wir bewerten die Bermudsche Swaption auf Grundlage des Rendleman und Bartter Modells [RB79]. Analog zum Binomialmodell ergibt sich für das Rendleman und Bartter Modell ein Baumverfahren, das zur Bewertung von Swaptions verwendet

werden kann. Im Gegensatz zum Binomialmodell nach Cox, Ross und Rubinstein ist im Rendleman und Bartter Modell der zugrundeliegende Basiswert ein Zinssatz oder ein Finanzinstrument, wie z.B. ein Swap. Aus den Marktfaktoren werden Baumparаметer bestimmt, die die zukünftige Entwicklung des Zinssatzes berechnen. Hieraus wird dann der Wert der Swaption bestimmt. Wir werden in späteren numerischen Experimenten sehen, dass das Baumverfahren nach Rendleman und Bartter in Anwendung auf Bermudsche Swaptions mit einer Rate von  $\frac{1}{2}$  konvergiert.

Des Weiteren gibt es neben der Binomialmethode auch analytische Approximationen für den Wert einer Bermudschen Option. Der Optionswert wird hier durch den bedingten Erwartungswert der Auszahlungsfunktion der Option, gemäß dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmass, ausgedrückt. Erstmals vorgeschlagen wurde dieser Ansatz von Cox und Ross [CR76]. Die Formalisierung dieses Ansatzes wurde von Harrison und Kreps [HK79] durchgeführt. Ein späterer Ansatz von Geske und Johnson [GJ84] zur Bewertung Amerikanischer Optionen, verwendet Bermudsche Optionen zur Approximation des Amerikanischen Optionswertes. Die numerische Auswertung dieses analytischen Ansatzes zur Berechnung des Preises einer Bermudschen Option wird in dieser Arbeit ebenfalls diskutiert. Der Wert einer Bermudschen Option kann als Summe von Erwartungswerten dargestellt werden. Um diese Erwartungswerte bestimmen zu können, müssen kritische Kurse, d.h. die Kurse an den Ausübungszeitpunkten, für die die vorzeitige Ausübung noch gerade vorteilhaft ist, bestimmt werden. Dies geschieht mit Hilfe von Fixpunktgleichungen. Zusätzlich dazu sind mehrdimensionale Normalverteilungen aufgrund der vorzeitigen Ausübungsmöglichkeiten zu berechnen. Diese Normalverteilungen stehen für die Wahrscheinlichkeiten, dass bis zu einem Ausübungszeitpunkt noch keine vorzeitige Ausübung stattgefunden hat.

Diese Erwartungswertdarstellung stellt eine analytische Approximation des Wertes einer Bermudschen Option dar. Jedoch kann der Wert der Option nur mit Hilfe numerischer Verfahren bestimmt werden. Die Fixpunktgleichungen werden mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst. Für die Berechnung der mehrdimensionalen Normalverteilungen verwenden wir das Moro-Verfahren [Mor95] und die Methode von Drezner [Dre78]. Zusätzlich verwenden wir die Transformation von Genz [Gen92].

Wir werden später in numerischen Experimenten sehen, dass das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson mit einer Rate von ungefähr 1 konvergiert. Jedoch besitzt das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung eine höhere Konstante als das Binomialverfahren. Nur für sehr hohe Genauigkeiten liefert dieses Verfahren ein Ergebnis in kürzerer Rechenlaufzeit als das Binomialverfahren. Aufgrund der schlechten Konstante bei der Konvergenzrate und der schlechten Übertragbarkeit des Verfahrens auf Swaptions werden wir im Weiteren keine Bewertung von Bermudschen Swaptions mit dem Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson durchführen.

Insgesamt sind die Beiträge dieser Arbeit im Bereich der Bewertung Bermudscher Optionen die folgenden:

- Erweiterung der Binomialmethode von Cox, Ross und Rubinstein auf Bermudsche Optionen insbesondere für eine geringe Anzahl an Auswertungspunkten.

- 
- Untersuchung der verschiedenen Interpolations- und Extrapolationsmethoden.
  - Anwendung der Methode von Leisen und Reimer auf Bermudsche Optionen und Analyse der Konvergenz.
  - Anwendung auf Bermudsche Swaptions.
  - Numerische Umsetzung der Erwartungswertdarstellung nach Geske und Johnson mit dem Newton-Verfahren, dem Moro-Verfahrens, der Methode von Drezner und der Transformation von Genz.
  - Performance-Vergleiche der beiden Verfahren anhand von Beispielen.

Es folgt eine kurze Übersicht zu den einzelnen Kapiteln dieser Arbeit.

Das *zweite Kapitel* dient der Erläuterung der grundlegenden Definitionen und Begriffe der Optionspreistheorie. Es werden die verschiedenen Optionstypen, insbesondere Bermudsche Optionen, und ihre jeweiligen spezifischen Merkmale vorgestellt. Außerdem werden die Motive für den Handel mit Optionen erläutert. Anschließend wird das grundlegende Prinzip des arbitragefreien Marktes eingeführt, auf dessen Grundlage dann erste Aussagen über den Wert einer Option gemacht werden. Im *dritten Kapitel* wird das Black-Scholes Modell eingeführt. Unter den Modellannahmen wird dann der Aktienkursprozess der Brownschen Bewegung erläutert. Es folgt die Herleitung der Black-Scholes Gleichung für Europäische Optionen und ihre Lösung, die Black-Scholes Formel, wird angegeben. Anschließend wird die Problematik des freien Randes bei Amerikanischen Optionen erläutert. Die in der Praxis überaus wichtigen Risikokennziffern werden angegeben und ihre Funktion wird erklärt. Ergänzend zum Black-Scholes Modell für Optionen auf Aktien wird das Black Modell, als Modell für Zinsderivate eingeführt. Die Bewertung von Swaptions im Black Modell wird vorgestellt. Hierzu wird zunächst die Bewertung eines Zinsswaps erläutert. Abschließend werden die Risikokennziffern für Swaptions aufgeführt. Die Bewertungsverfahren für Bermudsche Optionen werden im *vierten Kapitel* behandelt. Zuerst wird das grundlegende Binomialverfahren nach Cox, Ross und Rubinstein eingeführt. Nachdem die Konvergenz des Binomialmodells gegen das Black-Scholes Modell gezeigt wurden ist, werden die Risikokennziffern im Binomialmodell aufgeführt. Im Anschluss wird die Methode von Leisen und Reimer zur Konvergenzverbesserung des Binomialverfahrens vorgestellt. Es folgen die Lösungsansätze für die Bewertung Bermudscher Optionen im Binomialmodell. Die Anwendung auf Bermudscher Swaptions wird kurz erläutert. Für die Bewertung Bermudscher Swaptions wird das Rendleman und Barter Modell eingeführt. Anschließend wird die Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson hergeleitet. Danach werden die zur Lösung verwendeten numerischen Verfahren vorgestellt.

Die numerischen Ergebnisse sind im *fünften Kapitel* zusammengestellt. Die vorgestellten Verfahren werden hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften untersucht und verglichen. Zunächst wird das Binomialverfahren von Cox, Ross und Rubinstein und die Methode von Leisen und Reimer auf Europäische und Amerikanische Optionen

angewendet. Die Bewertung von Bermudschen Optionen mittels des Binomialverfahrens in Kombination mit den neuen Lösungsansätzen wird anschließend diskutiert. Es folgt die Anwendung der Methode von Leisen und Reimer auf Bermudsche Optionen. Die Ergebnisse aus der Anwendung des Verfahrens nach der Erwartungswertdarstellung auf Bermudsche Optionen werden anschließend dargestellt. Das Binomialverfahren und das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung werden abschließend verglichen. Es folgt eine kurze Anwendung auf Bermudsche Swaptions. Schließlich geben wir im *sechsten Kapitel* eine Zusammenfassung und einen Ausblick.

**Danksagung:**

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. Michael Griebel für die Überlassung des Themas und die gute Betreuung bedanken. Mein Dank gilt weiter Dr. Thomas Gerstner für die Betreuung und Unterstützung dieser Arbeit. Bei Prof. Dr. Rolf Krause möchte ich mich für die Übernahme des Koreferates bedanken. Ebenfalls möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Ganz besonders bei Melanie Reiferscheid und Vera Gerig für die schöne und lustige Zeit in unserem Büro. Weiterhin möchte ich mich bei Janna Dieper, Jessica von Wülfing und Oliver Müllenbach für das tapfere Korrekturlesen bedanken. Außerdem gilt mein besonderer Dank meinem Freund Daniel Braun, der mich immer wieder bei Rückschlägen aufgebaut und sich bei Erfolgen mit mir gefreut hat.

# Kapitel 2

## Optionen

### 2.1 Grundlagen der Optionsbewertung

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Optionspreistheorie erläutert, wozu zunächst die grundlegenden Begriffe definiert werden. Die verschiedenen Optionstypen und ihre spezifischen Merkmale werden dabei vorgestellt. Außerdem sollen die verschiedenen Motive für den Handel mit Optionen erläutert werden. Anschließend wird das grundlegende Prinzip des arbitragefreien Marktes eingeführt, auf dessen Grundlage dann erste Aussagen über den Wert einer Option gemacht werden. Das in diesem Kapitel vermittelte Basiswissen wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigt und gegebenenfalls durch weitere Erläuterungen ergänzt.

#### 2.1.1 Definitionen und Grundbegriffe

**Definition 2.1.1** [OPTION]

*Der Käufer einer Option erwirbt durch den Kauf der Option das Recht, den zugrunde liegenden Gegenstand oder Basiswert, z. B. eine Aktie, zu einem im voraus festgelegten Preis  $K$ , dem Ausübungspreis, während oder erst am Ende der Laufzeit der Option zu kaufen bzw. zu verkaufen.*

Bei Vertragsabschluss werden der zugrunde liegende Basiswert, der Ausübungspreis  $K$  und die Laufzeit  $T$  der Option festgelegt. Hierbei bezeichnet  $t$  die laufende Zeit,  $0 \leq t \leq T$ . Das Verfallsdatum bzw. der Fälligkeitszeitpunkt wird durch  $T$  gekennzeichnet. Der Wert  $V$  einer Option zum Zeitpunkt  $t$  hängt von dem Kurs des Basiswertes zum Zeitpunkt  $t$  ab. Dieser Kurs verändert sich während der Laufzeit  $T$  der Option und ist demnach ein Prozess in der Zeit.  $S = S(t)$  bezeichnet den Kurs des Basiswertes zum Zeitpunkt  $t$ . Der Ausübungspreis  $K$  und die Laufzeit  $T$  sind konstant. Häufig wird die kurze Bezeichnung  $V = V(S, t)$  für den Wert der Option zum Zeitpunkt  $t$  anstelle der exakten Bezeichnung  $V = V(K, S(t), t, T)$  verwendet.

**Definition 2.1.2** [KAUF-/VERKAUFSoPTION]

*Erwirbt der Besitzer das Recht, den Basiswert zum Ausübungspreis  $K$  zu verkaufen, so heißt die Option Verkaufsoption oder auch Put-Option. Beinhaltet die Option das Recht zum Kauf, so handelt es sich um eine Kaufoption bzw. eine Call-Option.*

Der Kauf einer Option wird auch als Termingeschäft bezeichnet, da es sich um einen Vertrag über den Kauf bzw. den Verkauf eines Basiswertes zu einem zukünftigen Zeitpunkt handelt. Dieser Terminhandel findet neben dem Kassahandel, der unmittelbaren Eigentumübertragung nach Einigung über den Preis, auf den Waren-

und Finanzmärkten der Welt statt. Zuerst wurden Termingeschäfte auf Rohstoffe wie Metalle, Erdöl, Getreide oder Fleisch (commodities) abgeschlossen. In späteren Jahren kam der Handel mit Aktien und Währungen hinzu. Heutzutage sind sogar Optionen auf das Wetter und bestimmte Schneehöhen möglich.

Der Wert einer Option hängt insbesondere vom zugrunde liegenden Basiswert ab, deshalb werden Optionen neben anderen Finanzverträgen wie z.B. Futures auch als Derivate bezeichnet.

Mit Gründung der Chicago Mercantile Exchange und der Chicago Board of Options Exchange im Jahre 1973 erlangt der Handel mit Derivaten eine neue Bedeutung. Im Jahr 1990 nimmt die Deutsche Terminbörse ihre Arbeit auf. Der Handel mit Derivaten ist in heutigen Zeiten nicht mehr wegzudenken und die Vielfalt der Derivate wächst stetig.

## 2.1.2 Typen von Optionen

Optionen sind wichtige Finanzinstrumente, die eine Art Versicherung gegen Risiken darstellen. Mit ihrer Hilfe kann sich der Optionshalter z.B. gegen Kursschwankungen am Markt absichern bzw. die Risiken am Markt deutlich begrenzen. Um diese Risiken optimal einzugrenzen, gibt es Optionen mit sehr unterschiedlichen Eigenschaften.

Der Wert einer Option hängt, wie schon gesehen, von dem zugrunde liegenden Basiswert ab. Eine weitere wichtige Rolle für den Optionswert spielt das Ausübungswahlrecht. Grundsätzlich lassen sich Optionen aufgrund ihrer Ausübungsmöglichkeiten unabhängig vom zugrunde liegenden Basiswert, in verschiedene Optionstypen unterteilen.

### **Definition 2.1.3** [EUROPÄISCHE OPTION]

*Europäische Optionen können nur am Ende der Laufzeit, d.h. zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  ausgeübt werden.*

### **Definition 2.1.4** [AMERIKANISCHE OPTION]

*Amerikanische Optionen dürfen zu jedem Zeitpunkt  $t$  während der Laufzeit  $T$  ausgeübt werden.*

### **Definition 2.1.5** [BERMUDSCHE OPTION]

*Bermudsche Optionen dürfen nur zu vorher festgelegten Zeitpunkten (täglich, wöchentlich, monatlich) vor Fälligkeit der Option ausgeübt werden.*

Die Etiketten „Europäisch“, „Amerikanisch“ und „Bermudsch“ haben keine geographische Bedeutung für den Finanzmarkt, an dem die Option gehandelt wird. Alle Typen von Optionen werden überall auf der Welt gehandelt.

Für den Basiswert von Optionen kommen vor allem Aktien, Anleihen, Währungen und Rohstoffe in Frage. Zwei wichtige Gruppen von Optionen stellen die Aktienoptionen und die Zinsoptionen dar.

### **Definition 2.1.6** [AKTIENOPTION]

*Bei einer Aktienoption erwirbt der Käufer der Option das Recht, eine bestimmte Anzahl von Aktien zu einem festvereinbarten Preis  $K$  während oder am Ende der*

*Laufzeit  $T$  zu kaufen bzw. zu verkaufen.*

**Definition 2.1.7** [ZINSOPTION]

*Bei einer Zinsoption stellt ein Zinssatz oder ein Finanzinstrument den Basiswert dar (z.B. 3-Monats-Libor, Swap oder Zins-Future).*

Beide Arten von Optionen gibt es als Kauf- bzw. Verkaufsoption und mit verschiedenen Ausübungsmöglichkeiten.

Im weiteren Verlauf soll eine ganz spezielle Zinsoption, die Swaption, betrachtet werden. Swaptions stellen eine Absicherung gegenüber den Zinsänderungsrisiken dar. Aufgrund dieser Absicherungsfunktion wird der Kauf bzw. Verkauf von Swaptions immer beliebter.

**Definition 2.1.8** [SWAPTION]

*Eine Swaption ist eine Option auf einen Zinsswap. Der Käufer einer Swaption hat das Recht, zu einem bestimmten Zeitpunkt in einen Zinsswap einzutreten. Für dieses Recht zahlt der Käufer der Swaption dem Verkäufer eine einmalige Optionsprämie bei Geschäftsabschluß.*

**Definition 2.1.9** [ZINSSWAP]

*Beim reinen Zinsswap handelt es sich um den Austausch unterschiedlicher Zinszahlungsverpflichtungen in einer einheitlichen Währung für eine bestimmte Laufzeit.*

**Bemerkung 2.1.10**

*Wesentlich ist, dass den auf den gleichen Ausgangsbetrag zu leistenden Zinsen unterschiedliche Zinsberechnungen zugrunde liegen und durch den Swap keine gegenseitigen Kapitalforderungen entstehen. Sinn eines solchen Tausches ist es, den relativen Vorteil, den jeweils eine Partei gegenüber der anderen, aufgrund ihrer Stellung an einem bestimmten Finanzmarkt hat, mit der anderen Partei zu tauschen. Mit einem Forward-Swap zum Beispiel kann bereits heute ein Festzins für einen in der Zukunft liegenden Zeitraum abgeschlossen werden.*

**Beispiel 2.1.11**

*Eine Bank hat von ihren Kunden vorwiegend kurzfristige Termineinlagen entgegengenommen. Gleichzeitig hat sie aber vorwiegend Kredite mit langfristigen Festzinsvereinbarungen vergeben. Ein Problem taucht auf, sobald die kurzfristigen Zinsen steigen und somit der Aufwand der Bank steigt. Um dieses Risiko zu umgehen, könnte die Bank mit einem Zinsswap ihre Zinszahlungsverpflichtungen in langfristige Festzinsverpflichtungen umwandeln, d.h. die Bank zahlt an den Vertragspartner den langfristig festgelegten Zins und erhält dafür den kurzfristigen variablen Zins.*

Ein Zinsswap, d.h. ein Zinsderivat, stellt den Basiswert einer Swaption dar. Der Ausübungspreis  $K$ , die Optionslaufzeit  $T$  und die Swapparameter, wie z.B. die Swaplaufzeit, werden bei Vertragsabschluss fest vereinbart. Der Wert  $V$  der Swaption zum Zeitpunkt  $t$  während der Optionslaufzeit  $T$  variiert je nach dem aktuellen Wert des Swaps.

Entsprechend der Put- und Call-Option bei Aktienoptionen sind Swaptions in Payer- und Receiver-Swaption zu unterscheiden.

**Definition 2.1.12** [PAYER-SWAPTION]

Eine Payer-Swaption ist eine Option, mit der der Käufer gegen Zahlung einer Prämie das Recht erwirbt, am Optionsfälligkeitstag in einen Payer-Swap einzutreten, d.h. einen Festzins an den Verkäufer zu zahlen. Am Fälligkeitszeitpunkt entscheidet der Käufer je nach Höhe des zu diesem Termin am Markt gültigen Festzinssatzes, ob er die Option ausüben möchte. Liegt der Festzinssatz am Markt unter dem vereinbarten Satz, ist es günstiger, die Zinsen zu den aktuellen Marktkonditionen festzuschreiben. Der Käufer übt sein Recht nicht aus. Ist der Festzinssatz am Markt jedoch höher als der in der Swaption vereinbarte Zinssatz, so übt der Käufer die Option aus. Er hat dann die Möglichkeit, in einen Swap nach den vereinbarten Parametern einzutreten (swap settlement) oder sich die abdiskontierte Differenz auszahlen zu lassen (cash settlement).

**Definition 2.1.13** [RECEIVER-SWAPTION]

Eine Receiver-Swaption ist eine Option, mit der der Käufer gegen Zahlung einer Prämie das Recht erwirbt, am Fälligkeitszeitpunkt in einen Receiver Swap einzutreten, d.h. einen Festzins vom Verkäufer zu erhalten. Am Optionsfälligkeitstag entscheidet der Käufer je nach Höhe des zu diesem Termin am Markt gültigen Festzinssatzes, ob er die Option ausüben möchte. Liegt der Festzinssatz am Markt über dem vereinbarten Satz, ist es günstiger, die Zinsen zu den aktuellen Marktkonditionen festzuschreiben. Der Käufer übt die Option nicht aus. Ist der Festzinssatz am Markt jedoch niedriger als der in der Swaption vereinbarte Zinssatz, so übt der Käufer die Option aus. Er hat dann die Möglichkeit, in einen Swap nach den vereinbarten Parametern einzutreten (swap settlement) oder sich die abdiskontierte Differenz auszahlen zu lassen (cash settlement).

Bei der Ausübung einer Swaption entsteht ein Swap-Geschäft, bei dem ein Festzinssatz gegen einen variablen Zinssatz (z.B. 3- oder 6-Monats-Euribor<sup>1</sup>) getauscht wird. Swaptions werden wie auch Optionen nach ihrer Ausübungsfrequenz unterschieden.

**Definition 2.1.14** [EUROPÄISCHE SWAPTION]

Europäische Swaptions können nur einmalig am Fälligkeitszeitpunkt  $T$  ausgeübt werden.

**Definition 2.1.15** [AMERIKANISCHE SWAPTION]

Amerikanische Swaptions können zu jedem Zeitpunkt  $t$  während der Laufzeit  $T$  ausgeübt werden.

**Definition 2.1.16** [BERMUDSCHE SWAPTION]

Der Optionskäufer einer Bermudischen Swaption hat die Möglichkeit, sein Optionsrecht an im voraus festgelegten Zeitpunkten während der Laufzeit auszuüben.

**Bemerkung 2.1.17**

Die meisten Swaptions am Finanzmarkt sind europäisch ausgestattet. Amerikanische Swaptions werden aufgrund ihres schwierigen Hedgens relativ selten gehandelt.

Am folgenden Beispiel soll die Verwendung von Europäischen Swaptions in der Pra-

<sup>1</sup>European Interbank Offered Rate: Der Europäische Referenzzinssatz, den Europäische Banken beim Handel von Einlagen mit festgelegter Laufzeit voneinander verlangen. Es gibt dreizehn Zinsbindungsfristen im Euribor, d.h. 14 Tage und 1, 2, 3, ..., 12 Monate.

xis verdeutlicht werden.

### Beispiel 2.1.18

*Ein Unternehmen geht in sechs Monaten einen Fünfjahresvertrag über einen zinsvariablen Kredit ein und möchte die zinsvariablen Zahlungen gegen festverzinsten Zahlungen tauschen (swaps), um aus dem variablen Kredit einen festverzinslichen Kredit zu machen. Das Unternehmen kann eine Swaption kaufen und damit das Recht erwerben, über eine in sechs Monaten beginnende fünfjährige Periode einen sechsmonatigen Libor<sup>2</sup> zu erhalten und einen bestimmten Festzins zu zahlen (z.B. 5% per annum). Sollte der Festzins für einen regulären Swap in sechs Monaten unter 5% per annum liegen, so übt das Unternehmen die Swaption nicht aus und vereinbart auf übliche Weise einen Swap. Liegt der Festzins in sechs Monaten über 5%, dann übt das Unternehmen die Swaption aus und erhält dadurch einen Swap mit vorteilhafteren Konditionen als die der am Markt erhältlichen Swaps.*

Dieses Beispiel demonstriert die Funktion von Swaptions. Swaptions bieten eine Garantie für Unternehmen, dass der Festzins, den sie für einen Kredit zahlen, ein bestimmtes Niveau nicht überschreitet. Die Unternehmen profitieren von eventuellen Zinsentwicklungen und schützen sich gleichzeitig vor potentiellen nachteiligen Zinsentwicklungen.

Im weiteren Verlauf wird der Begriff „Option“ für eine Option mit Basiswert Aktie, für die keine Dividendenzahlungen anfallen, verwendet. Alle Ergebnisse lassen sich aber auch auf andere Basiswerte übertragen, bzw. für Dividendenzahlungen verallgemeinern.

### 2.1.3 Motive für den Handel mit Optionen

Optionen besitzen einen Versicherungscharakter. Der Hauptgrund für den Handel mit Optionen besteht in der Absicherung gegenüber negativen Kursentwicklungen des zugrunde liegenden Basiswertes. Bestehende Wertpapierpositionen können dadurch abgesichert werden.

Ein Anleger kann sein Portfolio flexibel mit Put-Optionen gegen fallende Kurse versichern und sich so gegen Rückschläge am Markt schützen. Die Möglichkeit, von steigenden Kursen zu profitieren bleibt gleichzeitig erhalten. Call-Optionen sichern das Risiko steigender Kurse ab, bewahren jedoch die Chance, durch fallende Kurse Gewinn zu erwirtschaften. Da Optionen gegenläufig zur allgemeinen Marktentwicklung reagieren, lassen sich so Verluste eingrenzen.

#### Definition 2.1.19 [HEDGING]

*Als Hedgegeschäft (von engl.: "to hedge", sich mit einer Hecke abgrenzen; absichern gegen Risiken) bezeichnet man in der Praxis allgemein eine Vorsorgemaßnahme in Gestalt eines Gegengeschäftes zur Ausschaltung oder zur aktiv gesteuerten Verminderung eines Preisrisikos (z.B. Wechselkursrisiko) bei einem bereits bestehenden offenen bzw. zukünftig noch zu öffnenden Posten.*

<sup>2</sup>London Interbank Offered Rate: Der Zinssatz, zu dem am Londoner Bankenplatz ansässige Banken bereit sind, am Geldmarkt untereinander Geld zu entleihen oder zu verleihen.

Es gibt verschiedene Typen von Optionen, so dass sich der Käufer einer Option durch den Erwerb eines bestimmten Typs gegen verschiedene Arten von Preisschwankungen absichern kann.

Optionen auf Aktien stellen eine Versicherung gegen Schwankungen des Aktienkurses dar. Somit ist der Inhaber einer Put-Option gegen fallende Aktienkurse versichert und der Besitzer einer Call-Option gegen steigende Aktienkurse. Beide erzielen bei gegenteiliger Entwicklung der Aktienkurse Gewinne.

Zinsoptionen sind Instrumente zur Absicherung des Zinsänderungsrisikos. Das Zinsänderungsrisiko besteht bei Geschäftsabschlüssen, die in der Vergangenheit abgeschlossen wurden und/oder heute abgeschlossen werden und/oder in der Zukunft getätigt werden. Dieses Risiko lässt sich unter anderem durch Zinsoptionen reduzieren bzw. eliminieren. Der Vorteil bei der Absicherung mittels Optionen besteht darin, dass keine Liquidität direkt betroffen ist. Deshalb hat die Risikosteuerung keinen Einfluss auf die Bilanz. Außerdem bleibt trotz Absicherung der Risikoseite ein Gewinnpotential bestehen. Eine Swaption ermöglicht den Eintritt in einen Zinsswap zu einem späteren Zeitpunkt. Beim Zinsswap vereinbaren die zwei Partner den Austausch von unterschiedlich gestalteten Zinszahlungen über einen bestimmten Zeitraum. Der Tausch beschränkt sich auf die Zinsverpflichtungen. Es findet kein Tausch des Kapitalbetrags statt. Im Gegensatz zum Zinsswap als Absicherung gegen Zinsänderungsrisiken beinhaltet eine Swaption das Ausübungswahlrecht. Kommt das Grundgeschäft nicht zustande, so verfällt die Option.

Auch wenn Optionen häufig zur Absicherung von Waren, Aktien, Edelmetallen, Devisen etc. eingesetzt werden, bleibt der Optionshandel immer ein spekulatives Geschäft.

**Definition 2.1.20** [SPEKULATION]

*Spekulation ist die gewinnorientierte Ausnutzung erwarteter Preisänderungen. Im Gegensatz zum Hedger erhöht der Spekulant bewusst sein eigenes Risiko.*

Spekulanten hoffen auf eine überproportionale Wertsteigerung der Option mit relativ kleinem Einsatz, da der Optionspreis nur einen Bruchteil des tatsächlichen Marktpreises des zugrunde liegenden Basiswertes beträgt. Mit Call-Optionen spekuliert ein Anleger mit geringem Kapitaleinsatz auf steigende Kurse.

**Definition 2.1.21** [LEVERAGE EFFEKT/HEBELWIRKUNG]

*Der Leverage Effekt beschreibt die Hebelwirkung, die sich beim Kauf einer Option ergibt. Sie gibt die tatsächliche prozentuale Veränderung des Preises einer Option an, wenn sich der Kurs des Basiswertes um ein Prozent bewegt. Dies bedeutet jedoch auch, dass die prozentuale Veränderung der Gewinne und Verluste auf Optionen größer ist als die entsprechende Veränderung des Basiswertes.*

Mit geringem Einsatz erfolgt der Handel mit dem gesamten Kontrakt und damit die Teilnahme an einer überproportionalen Preisveränderung. Daraus können hohe Renditen entstehen, aber auch kräftige Verluste.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Optionshandel im Gegensatz zum direkten Kauf des Basiswertes sehr hohe Gewinnchancen bietet, aber als Instrument der Vermögensanlage sehr riskant ist. Hinzu kommt, dass ein Anleger nicht selbständig

an der Terminbörse agieren kann. Er benötigt zur Durchführung wie im Aktiengeschäft eine Bank und einen entsprechenden Makler.

### 2.1.4 Optionsparameter

Es gibt verschiedene Faktoren, die den Wert einer Option direkt beeinflussen.

$S(t) \in \mathbb{R}^+$	Kurs des Basiswertes zum Zeitpunkt $t$
$K \in \mathbb{R}^+$	Ausübungspreis
$T \in \mathbb{R}^+$	Optionslaufzeit
$\sigma \in \mathbb{R}^+$	Volatilität
$r \in \mathbb{R}^+$	riskofreier Zinssatz

Tabelle 2.1: Bezeichnung der Optionsparameter

Der Kurs des Basiswertes  $S(t)$  beeinflusst den Wert einer Option aufgrund seiner ständigen Veränderung während der Optionslaufzeit. Das Verhältnis von aktuellem Kurs und Ausübungspreis spiegelt sich im inneren Wert  $K - S(t)$  bzw.  $S(t) - K$  der Option wieder. Der Ausübungspreis bleibt während der Laufzeit konstant, hat aber auch einen Einfluss auf den Optionswert.

Optionen werden um so wertvoller, je länger die Laufzeit  $T$  ist. Mit längerer Laufzeit steigt die Wahrscheinlichkeit, dass der innere Wert noch größer wird.

Die Volatilität bestimmt die Schwankungsbreite des Kurses des Basiswertes. Bei höherer Volatilität steigt die Wahrscheinlichkeit, dass die Option bei Fälligkeit einen Wert besitzt.

Der letzte Faktor ist der risikofreie Zinssatz. Sinkt der Zinssatz, so erhöht sich der Wert einer Put-Option. Bei steigendem Zinssatz, erhöht sich der Wert einer Call-Option.

Dividendenzahlungen wirken nur indirekt auf den Wert der Option ein.

In Tabelle 2.1 werden die verschiedenen Optionsparameter bezeichnet. Diese Bezeichnungen werden im weiteren Verlauf verwendet.

### 2.1.5 Bewertung von Optionen

In der Finanzmathematik stellt die Arbitragefreiheit oder das No-Arbitrage-Prinzip eine wesentliche Annahme für die Bewertung von Finanzverträgen dar.

**Definition 2.1.22** [ARBITRAGE]

*Arbitrage beschreibt das risikolose Ausnutzen von Preisdifferenzen für ein und dasselbe Gut auf unterschiedlichen Finanzmärkten.*

**Definition 2.1.23** [ARBITRAGEFREIER MARKT]

*Ein arbitragefreier Markt bezeichnet einen Finanzmarkt, in dem keine Arbitragemöglichkeiten bestehen.*

**Beispiel 2.1.24**

*Wir betrachten eine Aktie, die sowohl an der New Yorker Börse als auch an der Londoner Börse gehandelt wird. Angenommen der Aktienpreis beträgt 150 \$ in New*

York und 120 £ in London. Zur gleichen Zeit beträgt der Wechselkurs 1.75 \$ pro Pfund. Beim gleichzeitigen Kauf von 100 Aktien in New York und Verkauf in London ergibt sich ein risikofreier Gewinn in Höhe von

$$100 * (1.75 * 120 - 150) = 6000\$,$$

unter der Bedingung, dass keine Transaktionskosten anfallen.

Ein Arbitrageur hat mehr Informationen als andere Marktteilnehmer, da sich sonst alle des Preisvorteils bedienen würden und sich so die Preise sehr schnell angleichen würden. Durch den internationalen, elektronischen Handel an den Finanzmärkten und die schnelle, weltweite Verbreitung von neuen Informationen passen die Marktteilnehmer die Preise ihrer Produkte so schnell an, dass Arbitragemöglichkeiten in der Regel nur für sehr kurze Zeiträume bestehen. Meist sind dann jedoch die Transaktionskosten höher als die durch Arbitrage erzielbaren Gewinne.

**Definition 2.1.25** [GESETZ DES EINHEITLICHEN PREISES]

Für jeden arbitragefreien Kapitalmarkt gilt: Für jeden gehandelten Finanzierungstitel  $f$  gibt es nur einen Preis  $V(f)$ .

Unter der Voraussetzung, dass es keine Arbitragemöglichkeiten auf dem Finanzmarkt gibt, ist es möglich, einen fairen Wert für Optionen anzugeben. Dieser faire Wert wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit als Optionswert oder Optionspreis bezeichnet.

Europäische Optionen lassen sich im Allgemeinen leichter bewerten als andere Optionstypen, da sie nur zum Fälligkeitzeitpunkt  $T$  ausgeübt werden können. Der Wert einer Europäischen Option zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  lässt sich sofort angeben.

Der Inhaber einer Europäischen Put-Option übt seine Option zum Fälligkeitsdatum  $T$  nur dann aus, wenn er einen Gewinn erzielen kann, d.h. wenn  $K > S = S(T) = S_T$  gilt. Er erzielt dann den Gewinn  $K - S$  und die Option hat den inneren Wert  $V = K - S$ . Folglich wird im Fall  $K > S$  die Option ausgeübt, weil dann der zugrunde liegende Basiswert, die Aktie, zum Marktpreis  $S$  verkauft werden kann. Gilt  $K \leq S$  so wird die Option nicht ausgeübt und die Option ist wertlos, es gilt also  $V = 0$ .

Der Wert  $V(S, T)$  einer Put-Option zum Fälligkeitsdatum  $T$  ist gegeben durch

$$V_P(S, T) := \begin{cases} 0 & \text{falls } S_T \geq K & \text{(Option verfällt.)} \\ K - S_T & \text{falls } S_T < K & \text{(Option wird ausgeübt.)} \end{cases}$$

bzw.

$$V_P(S, T) = \max\{K - S, 0\} = (K - S)^+.$$

Wie bereits oben angeführt ist die Call-Option das Gegenstück zur Put-Option. Die Ausübung einer Call-Option ist nur dann sinnvoll, wenn  $S = S_T > K$  gilt.

Der Wert  $V(S, T)$  einer Call-Option ist gegeben durch

$$V_C(S, T) := \begin{cases} S_T - K & \text{falls } S_T > K & \text{(Option wird ausgeübt.)} \\ 0 & \text{falls } S_T \leq K & \text{(Option verfällt.)} \end{cases}$$

bzw.

$$V_C(S, T) = \max\{S - K, 0\} = (S - K)^+.$$

Für alle möglichen Kurse  $S > 0$  ist  $V(S, T)$  eine Funktion von  $S$ , die sogenannte Auszahlungsfunktion. Die Auszahlungsfunktion stellt den Wert der Option zum Zeitpunkt  $T$  dar. In den Abbildungen 2.1 und 2.2 sind die Auszahlungsfunktionen einer Put- und einer Call-Option graphisch dargestellt.

Im Folgenden werden die Optionswerte einer Put- und einer Call-Option durch untere Indizes  $P$  und  $C$  unterschieden, falls eine Unterscheidung aus dem Kontext nicht möglich ist.

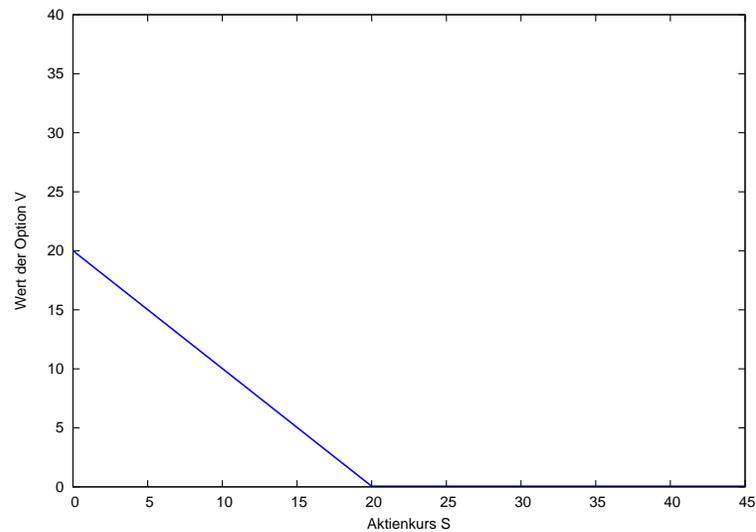


Abbildung 2.1: Wert eines Puts mit Ausübungspreis  $K = 20$  zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$

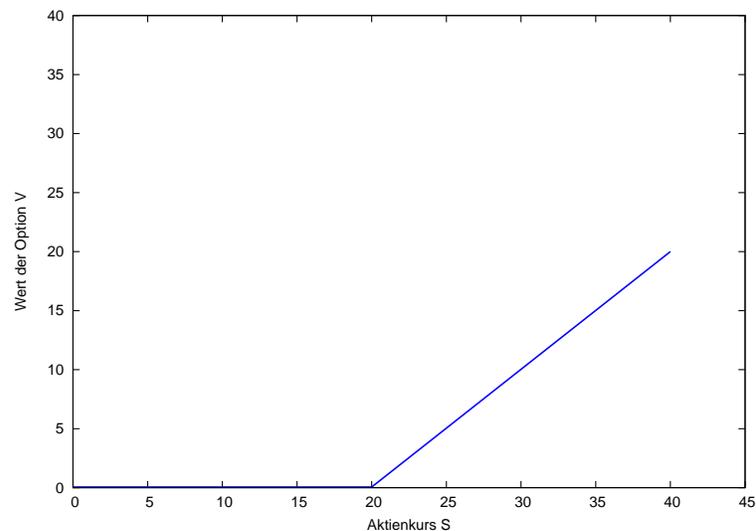


Abbildung 2.2: Wert eines Calls mit Ausübungspreis  $K = 20$  zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$

**Definition 2.1.26** [IN-THE-MONEY/OUT-OF-THE-MONEY/AT-THE-MONEY]

Als *in-the-money* Optionen bezeichnet man Optionen, deren innerer Wert größer als Null ist. *Out-of-the-money* Optionen haben einen inneren Wert von Null. Eine Option, deren Aktienkurs  $S$  mit dem Ausübungspreis  $K$  übereinstimmt, wird *at-the-money* Option genannt.

Die Werte einer Europäischen Put- und Call-Option mit gleichem Fälligkeitszeitpunkt  $T$  und gleichem Ausübungspreis  $K$  sind miteinander durch die Put-Call-Parität verbunden. Um den Begriff der Put-Call-Parität erläutern zu können, sollen zunächst einige Begriffe definiert werden, die im Handel auf Finanzmärkten häufig verwendet werden.

**Definition 2.1.27** [KURZE POSITION/SHORT POSITION]

Die *short position* bezeichnet eine Anlagesituation, in der ein Investor einen Basiswert verkauft, den er noch nicht besitzt, mit der Absicht, diesen zum Lieferzeitpunkt günstig einzukaufen. Auf Finanzmärkten ist ein solcher Leerverkauf unter bestimmten Rahmenbedingungen erlaubt. Bei Optionen befindet sich der Optionsverkäufer, auch Stillhalter genannt, in der *short position*.

**Definition 2.1.28** [LANGE POSITION/LONG POSITION]

Die *long position* bezeichnet eine Anlagesituation, in der ein Investor einen Basiswert tatsächlich kauft und mit steigenden Kursen rechnet. Bei Optionen bezeichnet die *long position* die sogenannte *Inhaberposition*.

**Definition 2.1.29** [PORTFOLIO]

*Portfolio* bezeichnet den Gesamtbestand an Wertpapieren (Aktien, Anleihen und Optionen), den ein Unternehmen oder ein Privatanleger besitzt.

**Satz 2.1.30** [PUT-CALL-PARITÄT]

Für die Preise einer Europäischen Call- und Put-Option auf eine Aktie mit gleicher Laufzeit  $T$  und gleichem Ausübungspreis  $K$  gilt zum Zeitpunkt  $t$

$$Ke^{-r(T-t)} + V_C(S, t) = S(t) + V_P(S, t), \quad (2.1)$$

falls das zugehörige Wertpapier während der Laufzeit keine Dividenden zahlt. Hierbei bezeichnet  $r \in \mathbb{R}^+$  den konstanten Jahreszinssatz für eine sichere Anlage.

*Beweis:* Wir betrachten zwei Portfolios A und B:

Portfolio A :Kauf einer Europäischen Call-Option und  $Ke^{-r(T-t)}$  Geldeinheiten im Bond, d.h. in festverzinsliche Wertpapiere, anlegen (jeweils long position)

Portfolio B :Kauf einer Europäischen Put-Option und des zugrunde liegenden Basiswertes (jeweils short position)

Beide Portfolios haben zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  denselben Wert

$$\max(S(T), K). \quad (2.2)$$

Da es sich um Europäische Optionen handelt, können diese nicht vor Fälligkeit der Option  $T$  ausgeübt werden. Deshalb müssen beide Portfoliopreise nach dem Gesetz

des einheitlichen Preises auch zum Zeitpunkt  $t$  übereinstimmen. Hieraus ergibt sich die Put-Call-Parität. Dieser Beweis befindet sich in [Hul97] auf Seite 167.  $\square$

Die meisten Optionen auf Aktien, die am Markt gehandelt werden, sind keine Europäischen Optionen sondern Amerikanische Optionen. Eine Unterscheidung zwischen Europäischen und Amerikanischen Optionen findet im Folgenden durch die oberen Indizes eur und am statt. Die Bewertung von Amerikanischen Optionen ist schwierig, da sie das vorzeitige Ausübungsrecht beinhalten. Dennoch kann der Wert einer Amerikanischen Option eingegrenzt werden. Für ihn gilt

$$V^{am}(S(t), t) \geq V^{eur}(S(t), t) \quad (2.3)$$

für alle  $S(t) \geq 0$  und  $0 \leq t < T$  aufgrund der vorzeitigen Ausübungsmöglichkeit. Demnach ist eine Amerikanische Option immer mindestens soviel wert wie die entsprechende Europäische Option. Würde diese Aussage keine Gültigkeit besitzen, so wäre ein risikofreier Gewinn durch den Kauf der Option und eine sofortige Ausübung möglich. Dies würde der Annahme vom arbitragefreien Markt widersprechen.

Unter der Annahme des arbitragefreien Marktes, lassen sich zusätzlich obere und untere Wertgrenzen für Europäische und Amerikanische Optionen ohne Dividendenzahlungen finden. Im Folgenden bezeichnet  $r \in \mathbb{R}^+$  den risikolosen Zinssatz.

#### Obere Grenzen:

- Die Europäische und die Amerikanische Call-Option geben dem Halter der Option das Recht, eine Aktie zu einem bestimmten Preis zu kaufen, somit kann der Wert der Option niemals höher sein als der Wert der Aktie:

$$V_C^{am} \leq S \quad (2.4)$$

$$V_C^{eur} \leq S \quad (2.5)$$

- Die Europäische und die Amerikanische Put-Option geben dem Halter der Option das Recht, eine Aktie zu einem bestimmten Preis zu verkaufen, somit kann der Wert der Option niemals höher sein als der Ausübungspreis  $K$ . Zusätzlich gilt für Europäische Put-Optionen, dass der Wert nicht höher sein kann, als der Barwert des Ausübungspreises  $K$ :

$$V_P^{am} \leq K \quad (2.6)$$

$$V_P^{eur} \leq Ke^{-r(T-t)} \leq K \quad (2.7)$$

#### Untere Grenzen:

- Der Wert einer Europäischen Call- und Put-Option ist immer positiv, da im schlimmsten Fall Wertlosigkeit vorliegen kann. Deshalb bildet sich die untere Grenze aus der Maximumfunktion über der Auszahlungsfunktion mit diskontiertem Ausübungspreis  $Ke^{-r(T-t)}$  und 0:

$$V_C^{eur} \geq \max(S - Ke^{-r(T-t)}, 0) \quad (2.8)$$

$$V_P^{eur} \geq \max(Ke^{-r(T-t)} - S, 0) \quad (2.9)$$

- Der Wert einer Amerikanischen Call- und Put-Option ist immer positiv und die untere Grenze bildet sich aus der Maximumsfunktion über der Auszahlungsfunktion mit Ausübungspreis  $K$  und 0. Der Ausübungspreis wird aufgrund des vorzeitigen Ausübungsrechtes nicht diskontiert:

$$V_C^{am} \geq \max(S - K, 0) \quad (2.10)$$

$$V_P^{am} \geq \max(K - S, 0) \quad (2.11)$$

Der Wert einer Amerikanischen Put- oder Call-Option zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  ist immer identisch mit dem Wert der entsprechenden Europäischen Option

$$\begin{aligned} V_C^{eur}(S_T, T) &= V_C^{am}(S_T, T) \\ V_P^{eur}(S_T, T) &= V_P^{am}(S_T, T). \end{aligned}$$

Während der Laufzeit  $T$  ist der Wert einer Amerikanischen Call-Option ohne Dividendenzahlungen immer identisch zum Wert der entsprechenden Europäischen Call-Option. Daher ist es niemals vorteilhaft eine Amerikanische Call-Option vorzeitig auszuüben.

**Satz 2.1.31** [MERTON]

*Unter der Voraussetzung, dass während der Optionslaufzeit  $T$  die Aktie keine Dividenden zahlt, ist es nie optimal, eine Amerikanische Call-Option vorzeitig auszuüben. Insbesondere gilt also*

$$V_C^{am}(S(t), t) = V_C^{eur}(S(t), t) \text{ für alle } t \in [0, T]. \quad (2.12)$$

*Beweis:* Wegen (2.3), (2.5) und (2.8) gilt:

$$V_C^{am}(S(t), t) \geq V_C^{eur}(S(t), t) \geq \max(S - Ke^{-r(T-t)}, 0). \quad (2.13)$$

Es ist nur dann vorteilhaft eine Amerikanische Call-Option auszuüben, wenn  $S(t) > K$  gilt. In diesem Fall erhält man aber wegen  $r > 0$  und (2.13)

$$V_C^{am}(S(t), t) \geq \max(S - Ke^{-r(T-t)}, 0) > \max(S - K, 0) = S(t) - K. \quad (2.14)$$

Der Wert einer Amerikanischen Call-Option vor Fälligkeit ist damit immer strikt größer als ihr innerer Wert  $S(t) - K$ , also der Ertrag, den man bei sofortiger Ausübung der Call-Option erhält. Deshalb kann die Ausübung einer Amerikanischen Call-Option nur zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  vorteilhaft sein. Aus diesem Grund sind die Zahlungen, die sich aus dem Besitz einer Amerikanischen und einer Europäischen Call-Option ergeben, gleich. Hieraus folgt (2.12) unter der Voraussetzung, dass es keine Arbitragemöglichkeiten gibt.

Dieser Beweis ist in [KK99] auf Seite 145 nachzulesen.  $\square$

Im weiteren Verlauf werden aufgrund dieser Aussage nur Put-Optionen Beachtung finden, da es für diesen Typ von Option immer optimal ist, das vorzeitige Ausübungsrecht in Anspruch zu nehmen.

**Satz 2.1.32**

Für eine Amerikanische Put-Option gibt es immer einen Aktienkurs  $S(t) > 0$ , so dass ein vorzeitiges Ausüben der Option zum Zeitpunkt  $t < T$  optimal ist.

*Beweis:* Wir betrachten die beiden Portfolios:

Portfolio A : Eine Amerikanische Put-Option und eine Aktie

Portfolio B :  $Ke^{-r(T-t)}$  Geldeinheiten

Wird die Put-Option zu einem Zeitpunkt  $\tau < T$  vorzeitig ausgeübt, so beträgt der Wert von Portfolio A  $K$  und von Portfolio B  $Ke^{-r(T-\tau)}$ . Folglich ist das Portfolio A mehr wert als das Portfolio B. Wird die Option erst zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  ausgeübt, ist das Portfolio A

$$\max(K, S_T)$$

wert und das Portfolio B  $K$ . Deshalb ist das Portfolio A mindestens soviel wert wie das Portfolio B. Eine vorzeitige Ausübung ist erwünscht, da Portfolio A attraktiver ist als Portfolio B.

Dies ist der Beweis aus [Hul97] auf Seite 165.  $\square$

Neben der Put-Call-Parität für Europäische Optionen gibt es eine analoge Put-Call-Beziehung für Amerikanische Optionen.

**Satz 2.1.33**

Unter der Voraussetzung von Satz 2.1.31 gilt:

$$S(t) - K \leq V_C^{am}(S(t), t) - V_P^{am}(S(t), t) \leq S(t) - Ke^{-r(T-t)}. \quad (2.15)$$

*Beweis:* Der Beweis ist in [KK99] nachzulesen.  $\square$

Die Bermudsche Option stellt einen Sondertyp von Option dar. Sie ist eine Mischung aus Europäischer und Amerikanischer Option. Verantwortlich für die Namensgebung ist die Lage des Bermuda Dreiecks zwischen Amerika und Europa.

Der Wert einer Bermudschen Option zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  ist identisch mit dem Wert einer Europäischen oder Amerikanischen Option zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$

$$V_P^{ber}(S, T) = \max(K - S_T, 0)$$

für die Put-Option und

$$V_C^{ber}(S, T) = \max(S_T - K, 0)$$

für die Call-Option. Aufgrund des vorzeitigen Ausübungsrechtes zu im voraus festgelegten Zeitpunkten vor Fälligkeit der Option liegt der Wert einer Bermudschen Option zwischem dem Wert einer Europäischen und dem einer Amerikanischen Option. Es gilt also

$$V^{eur}(S(t), t) \leq V^{ber}(S(t), t) \leq V^{am}(S(t), t). \quad (2.16)$$

Mit zunehmender Ausübungsfrequenz der Bermudschen Option, z. B. nicht mehr monatliche, sondern wöchentliche Ausübung, steigt der Wert der Option. Je häufiger die vorzeitige Ausübung erlaubt ist, desto größer ist die Annäherung an den Wert einer Amerikanischen Option.

**Bemerkung 2.1.34**

*Bermudsche Optionen haben im Gegensatz zur kontinuierlichen Ausübungsfrequenz Amerikanischer Optionen diskrete Ausübungsfrequenzen. Tatsächlich können alle Arten von Exotischen Optionen<sup>3</sup> so abgeändert werden, dass sie die Eigenschaft der diskreten Beobachtungsfrequenz von Bermudschen Optionen übernehmen, z. B. gibt es Bermudsche Barrier Optionen, oder Bermudsche Lookback Optionen .[Zh]*

---

<sup>3</sup>Diese Optionen besitzen im Allgemeinen kompliziertere Auszahlungsstrukturen als vergleichbare Standard-Optionen.

# Kapitel 3

## Modelle

### 3.1 Das Black-Scholes Modell

Das Black-Scholes Modell ist ein finanzmathematisches Modell zur Bewertung von Optionen. Fischer Black und Myron Scholes veröffentlichten ihre Ergebnisse 1973 [BS73]. Ihnen gelang es erstmals, den fairen Preis einer Option auf Aktien ohne Dividendenzahlungen zu bestimmen. Ihr Modell bildet das theoretische Fundament der Optionspreistheorie. Obwohl die Annahmen im Black-Scholes Modell sehr einschränkend sind, hat die Einfachheit des Modells für eine weite Verbreitung gesorgt. Es wird heutzutage oft als Referenz-Modell verwendet, obgleich die Annahmen nicht der Realität entsprechen.

Zunächst werden die Modellannahmen eingeführt. Unter ihnen wird dann der Aktienkursprozess der Brownschen Bewegung erläutert. Es folgt die Herleitung der Black-Scholes Gleichung für Europäische Optionen und ihre Lösung, die Black-Scholes Formel, wird angegeben. Des Weiteren wird die Problematik bei der Bewertung von Amerikanischen Optionen erklärt. Danach sollen die Risikokennziffern einer Option und ihre Funktionen vorgestellt werden.

#### 3.1.1 Annahmen

Das Black-Scholes Modell beruht auf folgenden Annahmen:

- Es gibt keine Arbitrage-Möglichkeiten, d.h. es gibt keinen risikofreien Gewinn.
- Die Variablen sind stetig.
- Der Zinssatz  $r$  und die Volatilität  $\sigma$  sind konstant und für beide Parteien gleich.
- Es fallen keine Gebühren, Steuern oder Dividenden an.
- Wertpapiere und Kredite sind zu jeder Zeit in beliebiger Menge verfügbar. Leerverkäufe sind erlaubt.
- Jede Partei hat Zugang zu allen Informationen.

Mit Hilfe dieser Annahmen wird eine modellhafte ideale Welt geschaffen, in der der faire Preis für eine Option existiert.

Die Ideen des Random Walks können auf die Aktienkursentwicklung angewendet werden. Bei einem Random Walk lassen sich zukünftige Schritte oder Richtungen nicht aus der Vergangenheit vorhersehen. Bei der Übertragung auf den Aktienmarkt bedeutet dies, dass kurzfristige Änderungen des Aktienkurses nicht vorhersagbar sind. Der jeweils letzte Kurs repräsentiert die bestmögliche Schätzung aller zukünftigen Kurse.

Folglich kann der Aktienkurs mittels eines stochastischen Prozesses modelliert werden.

**Definition 3.1.1** [STETIGER STOCHASTISCHER PROZESS]

Ein stetiger stochastischer Prozess ist eine Familie von Zufallsvariablen  $X(t)$ , die für die stetige Zeit  $t$  definiert sind. Das heißt,  $t \in \mathbb{R}$  variiert kontinuierlich in einem Zeitintervall  $I$ , das zum Beispiel für  $0 \leq t \leq T$  steht. Der zu einem Zeitpunkt  $t$  beobachtete Wert  $X_t$  ist dann eine Realisation des stochastischen Prozesses.

**Definition 3.1.2** [MARKOV-PROZESS]

Ein Markov-Prozess ist ein Prozess, bei dem der Zustand zum Zeitpunkt  $t + 1$  nur vom Zustand zum Zeitpunkt  $t$  abhängt und nicht von früheren Zuständen. Diese Gedächtnislosigkeit wird auch als Markov-Eigenschaft bezeichnet.

Der stochastische Prozess zur Aktienkursmodellierung besitzt diese Markov-Eigenschaft.

**Bemerkung 3.1.3** [HYPOTHESE DES EFFIZIENTEN MARKTES]

Die Annahme einer augenblicklichen Reaktion des Marktes auf ankommende Informationen in Verbindung mit der Markov-Eigenschaft heißt „Hypothese des effizienten Marktes“.

Der am häufigsten verwendete stochastische Prozess zur Aktienkursmodellierung ist der Wiener-Prozess. Ein Wiener-Prozess besitzt die Markov-Eigenschaft, er ist somit ein Spezialfall eines Markov-Prozesses.

**Definition 3.1.4** [WIENER-PROZESS]

Ein Wiener-Prozess  $\{W_t; t \geq 0\}$ , auch Brownsche Bewegung mit Drift genannt, ist ein stetiger stochastischer Prozess mit folgenden Eigenschaften

- $W_0 = 0$
- $W_t$  ist für alle  $t \geq 0$  normalverteilt mit Erwartungswert  $E[W_t] = \mu t$  und Varianz  $\text{Var}[W_t] = E[W_t^2] = \sigma^2 t$ , kurz  $W_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ .
- Alle Zuwächse  $\Delta W$  sind unabhängig voneinander, d.h.  $W_t - W_s$  und  $W_v - W_u$  sind unabhängig für  $0 \leq s < t < u < v$ .

Für den Fall  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = 1$  handelt es sich um einen Standard Wiener-Prozess bzw. eine Standard Brownsche Bewegung, kurz  $W_t \sim N(0, t)$ .

Das Verhalten einer Variablen  $z$ , die einem Wiener-Prozess folgt, ist bestimmt durch die Veränderung ihres Wertes  $\Delta z$  in einem beliebig kleinen Zeitintervall  $\Delta t$ . Zwei Eigenschaften müssen erfüllt sein, damit  $z$  einem Wiener-Prozess folgt.

- Es gilt:  $\Delta z = dz = \epsilon \sqrt{\Delta t}$ , wobei  $\epsilon$  eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

- Die Werte  $\Delta z$  für zwei verschiedenen kurze Zeitperioden sind unabhängig (Markov-Eigenschaft).

**Definition 3.1.5** [GEOMETRISCHE BROWNSCHE BEWEGUNG]

Sei  $W_t$  eine Brownsche Bewegung mit der Drift  $\mu \geq 0$  und der Varianz  $\sigma^2$ . So wird der stochastische Prozess

$$Y_t = e^{W_t}, \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

als Geometrische Brownsche Bewegung bezeichnet.

**Definition 3.1.6** [VERALLGEMEINERTER WIENER-PROZESS]

Ein verallgemeinerter Wiener-Prozess (Brownsche Bewegung mit Drift) für eine beliebige Variable  $x$  kann als stochastische Differentialgleichung

$$dx = a dt + b dW \quad (3.2)$$

geschrieben werden, wobei  $a$  und  $b$  Konstanten sind. Der verallgemeinerte Wiener-Prozess hat eine erwartete Driftrate von  $a$  und eine erwartete Varianzrate von  $b^2$ .

**Definition 3.1.7** [ITÔ-PROZESS]

Ein Itô-Prozess ist ein verallgemeinerter Wiener-Prozess. Die Parameter  $a$  und  $b$  sind Funktionen der zugrunde liegenden Variablen  $x$  und der Zeit  $t$ . Der Itô-Prozess hat die Form

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW_t, \quad (3.3)$$

wobei  $W_t$  ein Standard-Wiener-Prozess ist. Die Varianz und die Driftrate können sich im Zeitverlauf ändern.

**Definition 3.1.8** [ITÔ STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG]

Die Itô Stochastische Differentialgleichung ist

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW_t; \quad (3.4)$$

sie ist die symbolische Schreibweise für die Integralgleichung

$$x(t) = x(0) + \int_{t_0}^t a(x, s) ds + \int_{t_0}^t b(x, s) dW_s. \quad (3.5)$$

Das zweite Integral ist ein Itô-Integral über einem Wiener-Prozess  $W_t$ .

Die einzelnen Terme haben folgende Namen:

$$\begin{aligned} a(x, t) dt &: \text{Drift-Term} \\ b(x, t) dW_t &: \text{Diffusions-Term} \\ \text{Lösung } x &: \text{Itô-Prozess} \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.1.9**

Ein Wiener Prozess ist ein spezieller Itô-Prozess, mit  $a=0$  und  $b=1$  in (3.3).

Das Black-Scholes Modell verwendet die Geometrische Brownsche Bewegung zur zeitlichen Darstellung der relativen Aktienkursänderungen. Der Aktienkurs  $S$  folgt damit einem Itô-Prozess.

In diesem Standard-Modell setzt sich die relative Änderung  $dS/S$  einer Aktie im Zeitintervall  $dt$  zusammen aus dem deterministischen Driftanteil  $\mu dt$  und den stochastischen Schwankungen  $\sigma dW$ :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (3.6)$$

oder

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \quad (3.7)$$

Diese Stochastische Differentialgleichung (SDE) ist linear in  $x = S$ , mit  $a(S, t) = \mu S$  erwartete Driftrate und  $b(S, t) = \sigma S$ ,  $\sigma$  Volatilität. Dabei sind  $\mu$  und  $\sigma$  konstant. Es handelt sich um eine Itô Stochastische Differentialgleichung.

Als Integralgleichung geschrieben lautet sie

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \mu S(u) du + \int_0^t \sigma S(u) dW(u).$$

Der Optionswert ist eine Funktion des zugrunde liegenden Aktienkurses und der Zeit. Es handelt sich hierbei um eine Funktion mit stochastischen Variablen. Das Itô-Lemma, welches von dem Mathematiker Itô Kiyoshi im Jahr 1951 entwickelt wurde, liefert das totale Differential der Optionswertfunktion  $V(S, t)$ .

**Lemma 3.1.10** [ITÔ-LEMMA]

$x$  folgt einem Itô-Prozess (3.3) und  $f(x, t)$  sei eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  und  $\frac{\partial f}{\partial t}$ . Dann folgt auch  $y = f(x, t)$  einem Itô-Prozess mit dem gleichen Wiener-Prozess  $W$ :

$$dy = \left( \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} b dW \quad (3.8)$$

Mit Hilfe des Itô Lemmas und  $x = S$ ,  $a = \mu S$ ,  $b = \sigma S$  ergibt sich für  $y = V(S, t)$

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dW. \quad (3.9)$$

**Bemerkung 3.1.11**

Der Wiener Prozess  $W$  in (3.6) und (3.9) ist nach dem Itô Lemma der gleiche Wiener Prozess.

**Bemerkung 3.1.12** [LOGNORMALVERTEILUNG DER AKTIENKURSE]

Im Black-Scholes Modell sind die Aktienkurse lognormalverteilt.

Durch eine weitere Anwendung des Itô Lemmas mit  $y = \ln S$ , also  $f(x, t) = \ln x$  folgt die stochastische Differentialgleichung

$$d \ln S = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW.$$

Da  $\mu$  und  $\sigma$  konstant sind, folgt  $y = \ln S$  einem verallgemeinerten Wiener-Prozess. Die stochastische Differentialgleichung besitzt die Drift  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$  und die konstante Varianzrate  $\sigma^2$ . Die Änderung in  $y = \ln S$  in einem beliebigen Zeitintervall  $T - t$  ist normalverteilt mit Mittelwert  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)$  und Varianz  $\sigma^2(T - t)$ . Der Wert von  $y$  zum Zeitpunkt  $t$  ist  $\ln S_t$  und zum Zeitpunkt  $T$   $\ln S_T$ .  $S_T$  bezeichnet den Aktienkurs zum Zeitpunkt  $T$ . Im beliebigen Zeitintervall  $T - t$  beträgt die Änderung in  $y$

$$\ln S_T - \ln S_t.$$

Daraus folgt, dass  $\ln S_T - \ln S_t$  normalverteilt ist mit dem Mittelwert  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)$  und der Standardabweichung  $\sigma\sqrt{T - t}$ . Es gilt

$$\ln S_T - \ln S_t \sim \Phi\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t), \sigma\sqrt{T - t}\right].$$

Hinsichtlich der Eigenschaften der Normalverteilung folgt

$$\ln S_T \sim \Phi\left[\ln S_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t), \sigma\sqrt{T - t}\right].$$

Demnach ist  $\ln S_T$  normalverteilt und infolgedessen besitzt  $S_T$  eine Lognormalverteilung.

### Bemerkung 3.1.13

Mit Hilfe des Itô Lemmas lässt sich eine theoretische Lösung für die stochastische Differentialgleichung (3.6), die die Aktienkursänderung darstellt, finden.

$$S(t) := S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad (3.10)$$

löst die stochastische Differentialgleichung (3.6).

Aufgrund der Eigenschaften der Lognormalverteilung gilt für den Erwartungswert des Kurses  $S_T$  zum Zeitpunkt  $T$

$$E[S_T] = S_t e^{\mu(T-t)} \quad (3.11)$$

und für die Varianz

$$\text{Var}[S_T] = S_t^2 e^{2\mu(T-t)} [e^{\sigma^2(T-t)} - 1]. \quad (3.12)$$

Unter der Annahme einer risikoneutralen Welt wird die erwartete Wachstumsrate  $\mu$  dem risikolosen Zinssatz  $r$  gleichgesetzt. Es gilt  $\mu = r$ . Für den Erwartungswert und die Varianz des Kurses  $S_T$  zum Zeitpunkt  $T$  ergibt sich damit

$$E[S_T] = S_t e^{r(T-t)} \quad (3.13)$$

und für die Varianz

$$\text{Var}[S_T] = S_t^2 e^{2r(T-t)} [e^{\sigma^2(T-t)} - 1]. \quad (3.14)$$

### 3.1.2 Die Black-Scholes Gleichung für Europäische Optionen

Black und Scholes zeigen, dass unter der Annahme einer konstanten Zins- und Volatilitätsentwicklung die Option durch ein geeignetes Portfolio dynamisch dupliziert werden kann. Das Portfolio besteht dabei aus dem zugrunde liegenden Basiswert und einer Anlage oder einem Kredit mit dem risikolosen Zinssatz  $r$ .

Der faire Preis der Option bestimmt sich als diskontierter Erwartungswert der Auszahlungen in  $T$ , wobei der Erwartungswert bezüglich der Lognormalverteilung zu bilden ist (Konzept der risikoneutralen Bewertung).

Die Grundidee von Black und Scholes besteht darin, das derivative Finanzinstrument, in unserem Fall eine Option auf eine Aktie, und die Aktie in einem Portfolio so miteinander zu mischen, dass der Wiener-Prozess, also das Risiko, eliminiert wird. Da die zwei stochastischen Prozesse des Aktienkurses  $S$  und des Optionswertes  $V$  durch den gleichen Wiener-Prozess bestimmt sind, lässt sich der stochastische Term in Gleichung (3.9) durch eine Linearkombination von  $dS$  und  $dV$  eliminieren.

Zunächst wird das Portfolio

$$\Pi := -V + \Delta S \quad (3.15)$$

gebildet. Mit  $\Delta$  wird die Menge des Basiswertes mit Kurs  $S$  bezeichnet und  $V$  steht für eine emittierte Option mit Wert  $V$  zum Basiswert  $S$ . Die Änderung  $d\Pi$  des Portfoliowertes im Zeitraum  $dt$  ist gegeben durch

$$d\Pi = -dV + \Delta dS.$$

Durch Einsetzen von (3.6) und (3.9) folgt

$$\begin{aligned} d\Pi &= -dV + \Delta dS \\ &= -\left(\mu S \left(\Delta - \frac{\partial V}{\partial S}\right) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) dt + \left(-\frac{\partial V}{\partial S} + \Delta\right) \sigma S dW. \end{aligned}$$

Für  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  beträgt die Wertänderung des Portfolios  $\Pi$  im Zeitraum  $dt$

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) dt. \quad (3.16)$$

Diese Änderung ist rein deterministisch, d.h. sowohl das Risiko als auch die Driftrate  $\mu$  gehen verloren.

#### Bemerkung 3.1.14

*Im risikolosen Portfolio muss  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  gelten. Der Wert  $V(S, t)$  und damit auch  $\frac{\partial V}{\partial S}$  ändern sich mit der Zeit  $t$ . Deshalb muss der Anteil  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  im risikofreien Portfolio ständig angepasst werden (Dynamisches Hedgen).*

Im Folgenden soll die Entwicklung des gleichen Betrags  $\Pi$  bei festverzinslichen Anleihen betrachtet werden. Unter den Black-Scholes Annahmen gilt für die Wertentwicklung von  $\Pi$  die risikofreie Verzinsung

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Mit (3.15) erhalten wir

$$d\Pi = \left( -rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt. \quad (3.17)$$

Unter der Annahme, dass es sich bei der Option um eine europäische Option handelt, sind die Versionen (3.16) und (3.17) von  $d\Pi$  aus Arbitragegründen gleich und es ergibt sich die **Black-Scholes Gleichung**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (3.18)$$

Die Black-Scholes Gleichung ist eine rückwärts parabolische, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Konvektions-, Diffusions- und Reaktionstermen. Sie ist unabhängig von der Drift  $\mu$ . Damit entfallen die individuellen Kurserwartungen der Marktteilnehmer. Die Modellierung des Optionspreises  $V$  ist somit risikoneutral.

Die Black-Scholes Gleichung besitzt für eine Europäische Put-Option folgende Rand- und Endbedingungen:

$$\begin{aligned} V(S, t) &= K e^{-r(T-t)} \text{ für } S = 0, 0 \leq t \leq T \\ V(S, t) &= 0 \text{ für } S \rightarrow \infty, 0 \leq t \leq T \\ V(S, T) &= \max(S - K, 0) \end{aligned}$$

Dieses Randwertproblem kann analytisch gelöst werden. Für die Herleitung der analytischen Lösungsformel gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die Transformation der Black-Scholes Gleichung auf die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ist eine mögliche Herleitung. Die Wärmeleitungsgleichung besitzt für die Anfangsbedingung  $y_0(x)$  die Lösung

$$y(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} y_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} d\xi. \quad (3.19)$$

Die Rücktransformation liefert dann die **Black-Scholes Formel** für eine Europäische Call-Option.

**Satz 3.1.15** [BLACK-SCHOLES FORMEL FÜR EUROPÄISCHE CALL-OPTIONEN]

*Der Wert  $V(S, t)$  einer Europäischen Call-Option ist gegeben durch*

$$V(S, t) = SN(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (3.20)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3.21)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (3.22)$$

wobei  $N(x)$  die kumulative Standard-Normalverteilung mit Mittelwert  $\mu = 0$  und Varianz  $\sigma^2 = 1$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

darstellt.

Analog zu Europäischen Call-Optionen gibt es auch die Black-Scholes Formel für Europäische Put-Optionen. Diese lässt sich direkt über die Put-Call-Parität für Europäische Optionen herleiten.

**Satz 3.1.16** [BLACK-SCHOLES FORMEL FÜR EUROPÄISCHE PUT-OPTIONEN]

Der Wert  $V(S, t)$  einer Europäischen Put-Option ist gegeben durch

$$V(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (3.23)$$

mit  $d_1$ ,  $d_2$  und  $N(x)$  wie in (3.1.15).

Die Black-Scholes Formel ist bekannt für ihre einfache Darstellung und für ihre Anwendung in der Praxis. Nimmt man jedoch zusätzlich zu den bisherigen Annahmen z.B. Transaktionskosten an, so ist die Black-Scholes Gleichung numerisch zu lösen.

### 3.1.3 Die Black-Scholes Ungleichung für Amerikanische Optionen

Amerikanische Optionen sind aufgrund ihres vorzeitigen Ausübungsrechtes teurer als die identischen Europäischen Optionen. Daher kann für ihre Bewertung nicht die Black-Scholes Gleichung verwendet werden.

Eine Europäische Option kann einen Wert haben, der geringer ist als ihr innerer Wert. Der Wert einer Amerikanischen Put-Option muss jedoch mindestens so groß sein wie der innere Wert der Option, da andernfalls durch sofortige Ausübung ein risikoloser Profit möglich wäre. Das Arbitrage-Argument wäre verletzt. Demnach gilt für eine Amerikanische Option

$$\begin{aligned} V_P^{am}(S, t) &\geq \max(K - S, 0) \\ V_C^{am}(S, t) &\geq \max(S - K, 0). \end{aligned}$$

Außerdem gelten für Amerikanische Put- und Call-Optionen folgende triviale Randbedingungen:

$$\begin{aligned} V_P^{am}(S, t) &= 0 \text{ für } S \rightarrow \infty \\ V_C^{am}(S, t) &= 0 \text{ für } S \approx 0. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen am jeweils anderen Ende von  $S$  sehen anders aus als die Randbedingungen für Europäische Optionen.

Ist der Aktienkurs  $S$  fast Null, so gilt für die Amerikanische Put-Option

$$V_P^{am}(S, t) = K - S \approx K \text{ für } S \approx 0.$$

Für die Amerikanische Call-Option gilt am anderen Ende von  $S$

$$V_C^{am}(S, t) = \infty \text{ für } S \rightarrow \infty.$$

Im folgenden betrachten wir eine Amerikanische Put-Option. Es wird behauptet, dass es einen kritischen Aktienkurs  $S_f$  gibt, so dass sich die vorzeitige Ausübung der

Option für  $S < S_f$  lohnt, aber für  $S \geq S_f$  nicht. Es muss  $S_f < K$  gelten.  $\pi$  sei ein Portfolio bestehend aus der Put-Option und dem Basiswert  $S$ . Sobald  $V_P^{am}(S, t) = \max(K - S, 0)$  gilt, sollte die Option vorzeitig ausgeübt werden, da andernfalls der Besitzer der Option den möglichen Zinsertrag des Verkaufserlöses  $K$  verlieren würde. Diesen könnte er z.B. in Anleihen investieren.

Gilt  $V_P^{am}(S, t) > \max(K - S, 0)$ , so folgt für den Wert des Portfolios  $\pi > K$ . Nach der Ausübung wäre das Portfolio nur noch  $K$  wert, also lohnt sich die vorzeitige Ausübung nicht.

Der kritische Aktienkurs ist zeitabhängig und heißt freier Randwert. Damit gilt für die Amerikanische Put-Option

$$\begin{aligned} V_P^{am}(S, t) &> \max(K - S, 0) \text{ für } S > S_f(t) \\ V_P^{am}(S, t) &= K - S \text{ für } S \leq S_f(t). \end{aligned}$$

Der freie Randwert  $S_f(t)$  ist unbekannt und muss zusätzlich zum Wert der Option bestimmt werden. Dieses Problem der Wertbestimmung wird als freies Randwertproblem bezeichnet.

Die Black-Scholes Gleichung gilt für Europäische Optionen, die kein vorzeitiges Ausübungsrecht besitzen. Aufgrund dessen muss die Argumentation bei der Anwendung auf Amerikanische Optionen modifiziert werden. Das Ergebnis ist die Black-Scholes Ungleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0.$$

Am kritischen Aktienkurs  $S_f(t)$  gibt es eine Zweiteilung der  $S$ -Achse. Es gilt

$$V_P^{am}(S, t) \text{ löst die Black-Scholes Gleichung für } S > S_f(t) \quad (3.24)$$

$$V_P^{am}(S, t) = K - S \text{ für } S \leq S_f(t) \quad (3.25)$$

und

$$V_C^{am}(S, t) \text{ löst die Black-Scholes Gleichung für } S < S_f(t) \quad (3.26)$$

$$V_C^{am}(S, t) = S - K \text{ für } S \geq S_f(t). \quad (3.27)$$

Die Black-Scholes Gleichung ist für Amerikanische Optionen lösbar, jedoch nur mit besonderen Vorkehrungen. Die Lösung erfolgt mittels numerischer Verfahren. Neben dem Wert der Option muss auch der kritische Aktienkurs  $S_f(t)$  berechnet werden.

### 3.1.4 Die Risikokennziffern

Der Wert einer Option im Black-Scholes Modell hängt von verschiedenen Parametern ab. Die wichtigsten Parameter sind der Kurs des Basiswertes, die Restlaufzeit, die Volatilität und der Zinssatz. Bezüglich dieser Parameter lassen sich Sensitivitätskennzahlen bilden. Sie zeigen an, wie stark der Wert der Option bei Konstanz aller anderen Parameter auf Veränderungen des betrachteten Parameters reagiert. Diese verschiedenen Änderungsraten werden mit verschiedenen griechischen Buchstaben

benannt und in ihrer Gesamtheit als Greeks bezeichnet. Die partiellen Ableitungen des Optionswertes nach den jeweiligen Modellparametern bestimmen die Greeks. Ihre Funktion ist die Einschätzung und Kontrolle von Risiken und die damit verbundene Austarierung des Portfolios. Mit Hilfe von dynamischen Hedge-Strategien<sup>1</sup> soll ein bestehendes Portfolio gegen mögliche Schwankungen in den einzelnen Parametern immunisiert werden. Ein Portfolio sollte deshalb möglichst geringe Sensitivitätskennzahlen besitzen. Ein dauerhaftes Immunisieren ist aufgrund der damit verbundenen Transaktionskosten jedoch unmöglich.

Größere Veränderungen im Optionspreis entstehen häufig durch Veränderungen im Basiswert. Diese Preissensitivität bezüglich des Kurses des Basiswertes wird mit Delta bezeichnet. Für eine Call-Option ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta_C &= \frac{\partial V_C}{\partial S} = N(d_1) + S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{\partial d_1}{\partial S} - K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &= N(d_1) + \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \left[ e^{-\frac{d_1^2}{2}} - e^{-(r(T-t) + \ln \frac{S}{K})} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \right] \\ &= N(d_1) > 0.\end{aligned}$$

Das Delta einer Put-Option erhält man über die Put-Call-Parität (2.1):

$$\begin{aligned}\Delta_P &= \frac{\partial V_P}{\partial S} = \Delta_C - 1 \\ &= N(d_1) - 1 \\ &= -N(-d_1) < 0.\end{aligned}$$

Der Wert des Deltas gibt an, um wieviel sich der Wert der Option im Vergleich zu dem des Basiswertes ändert. Das Delta liegt betragsmäßig immer zwischen Null und Eins, d.h. der Optionspreis schwankt nie so auffällig wie der Kurs der zugrunde liegenden Aktie. Der Optionspreis einer extrem stark in-the-money liegenden Option ändert sich mehr oder weniger 1:1, da das Risiko einer Nicht-Ausübung fast Null ist. Für deutlich out-of-the-money liegende Optionen ist die Reaktion der Optionspreise sehr gering oder ungefähr Null, da eine Ausübung sehr unwahrscheinlich ist und sich die Wahrscheinlichkeit auch durch Kursschwankungen kaum erhöht.

Das Delta stellt neben dem Sensitivitätsmaß den Aktienanteil eines replizierenden Portfolios dar. Es zeigt an, wieviele Aktien benötigt werden, um die Preisveränderung der Option zu neutralisieren. Das Risiko der Option bezüglich Kursänderungen im Basiswert wird durch das Delta quantifiziert und kann als Hedge-Ratio interpretiert werden.

Bei der Absicherung eines Portfolios wird darauf geachtet, dass die Gesamtposition Delta-neutral, also vom Wert Null, ist. Der Wert der Option bleibt dann auch bei Veränderungen im Basiswert annähernd konstant.

Die Veränderung des Optionswertes bezüglich des Basiswertes besitzt eine große

<sup>1</sup>ständige Anpassung des Portfolios an die Marktbedingungen

Bedeutung. Auf Grund dessen wird häufig auch die Veränderung dieses Einflusses betrachtet. Gamma misst, wie stark sich das Delta einer Option - und somit der Aktienanteil im replizierenden Portfolio - infolge einer Kursschwankung des Aktienkurses verändert.

Mathematisch stellt Gamma die zweite partielle Ableitung des Optionswertes nach dem Kurs des Basiswertes dar. Der Gamma-Wert ist unabhängig vom Optionstyp und lautet

$$\Gamma_P = \Gamma_C = \frac{\partial^2 V_C}{\partial S^2} = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} > 0.$$

Die Gleichwertigkeit für Put- und Call-Optionen begründet sich in den fast gleichen Delta-Werten. Diese unterscheiden sich lediglich durch eine Konstante.

Gamma beschreibt die Konvexität von Optionswerten. Die partielle Ableitung von Delta ist immer positiv und stellt die Steigung der Delta-Kurven dar. Es besteht eine konvexe Abhängigkeit des Optionswertes vom Kurs des Basiswertes, d.h. bei steigenden Kursen werden Basiswerte gekauft und bei fallenden verkauft. Für die Portfolio-Strategie werden deshalb dynamische Hedge-Verfahren verwendet.

Das Options-Gamma ist am höchsten bei schwach out-of-the-money und at-the-money Optionen und gering bei stark in- und out-of-the-money Optionen.

Die Gesamtposition eines Portfolios sollte Gamma-neutral sein. Dadurch erfolgt die Absicherung gegen eine Delta-Veränderung infolge einer Aktienkursveränderung. Es fallen keine Transaktionskosten an, da eine Anpassung des Portfolios unnötig ist.

Neben der Abhängigkeit des Optionswertes vom Kurs des Basiswertes hängt der Wert der Option auch vom risikolosen Zinssatz  $r$  ab. Mit dem Zinssatz steigt der Erwartungswert der Aktie zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$ . Die Ausübung einer Call-Option wird immer wahrscheinlicher und die einer Put-Option unwahrscheinlicher. Diese Veränderung des Optionspreises aufgrund der Veränderung des Zinssatzes ist deshalb für Call-Optionen positiv und für Put-Optionen negativ. Das Rho für Call-Optionen ist

$$\begin{aligned}\rho_C &= \frac{\partial V_C}{\partial r} = SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} + (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r} \\ &= (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d_2) > 0\end{aligned}$$

mit  $r > 0$  und  $K > 0$ . Das Rho für Put-Optionen lautet nach der Put-Call-Parität (2.1)

$$\begin{aligned}\rho_P &= \frac{\partial V_P}{\partial r} = \frac{\partial V_C}{\partial r} - (T-t)Ke^{-r(T-t)} \\ &= -(T-t)Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) < 0\end{aligned}$$

mit  $r > 0$  und  $K > 0$ .

Im Allgemeinen ist die Abhängigkeit des Optionspreises vom risikolosen Zinssatz eher gering. Jedoch nimmt die Bedeutung des risikolosen Zinssatzes für den Optionspreis bei abnehmender Restlaufzeit immer mehr zu. Mit steigenden Kursen wächst

die Kapitalbindung im risikolosen Portfolio an und damit erlangt der Zinssatz eine größere Bedeutung. Demnach sind die Rho-Werte bei in-the-money Optionen größer als die Werte bei out-of-the-money Optionen.

Die nächste Risikokennzahl beschreibt die Änderung des Optionswertes bezüglich einer Verkürzung der Laufzeit  $T$ . Theta steht somit für den Zeitwertverfall der Option. Mit Verkürzung der Restlaufzeit nähert sich der Optionswert an den Payoff zum Fälligkeitzeitpunkt  $T$  an. Der Zeitwertverfall nimmt mit Annäherung an den Ausübungszeitpunkt deutlich zu. Die Geschwindigkeit, mit der dies geschieht, wird durch Theta ausgedrückt. Ein Hedgen gegen diesen Zeitverfall ist nicht sinnvoll, da sich der Parameter der Laufzeit deterministisch verhält.

Theta wird durch die negative erste Ableitung des Optionspreises nach der Restlaufzeit  $\tau = T - t$  bestimmt. Für eine Call-Option gilt

$$\begin{aligned}\Theta_C &= \frac{\partial V_C}{\partial t} = -\frac{\partial V_C}{\partial \tau} \\ &= -\left[ S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{\partial d_1}{\partial \tau} + r K e^{-r\tau} N(d_2) - K e^{-r\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \frac{\partial d_2}{\partial \tau} \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{S e^{-\frac{d_1^2}{2}} \sigma}{2\sqrt{\tau}} - r K e^{-r\tau} N(d_2) < 0\end{aligned}$$

und für eine Put-Option nach der Put-Call-Parität (2.1)

$$\begin{aligned}\Theta_P &= \frac{\partial V_P}{\partial t} = -\frac{\partial V_P}{\partial \tau} = -\frac{\partial V_C}{\partial \tau} + r K e^{-r\tau} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{S e^{-\frac{d_1^2}{2}} \sigma}{2\sqrt{\tau}} + r K e^{-r\tau} N(-d_2).\end{aligned}$$

Theta weist einen nicht linearen Verlauf auf und ist umso größer, je näher die Option am Verfallstag liegt. Je weiter der Aktienkurs  $S$  vom Ausübungspreis  $K$  entfernt ist, desto geringer ist der Einfluss von Theta auf den Optionspreis.

Als letzte Sensitivitätskennzahl soll das Vega, auch Kappa genannt, betrachtet werden. Das Vega beschreibt die Veränderung des Optionspreises bezüglich der Volatilität. Es ist unabhängig vom Optionstyp und ist durch die erste partielle Ableitung des Optionspreises nach der Volatilität gegeben

$$\begin{aligned}\Lambda_C &= \frac{\partial V_C}{\partial \sigma} = S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\ &= \frac{S \sqrt{(T-t)} e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} > 0 \\ \Lambda_P &= \frac{\partial V_P}{\partial \sigma} = \frac{\partial V_C}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (K e^{-r(T-t)} - S) = \Lambda_C.\end{aligned}$$

Die Abhängigkeit des Optionspreises von der Volatilität ist umso größer, je höher der Kurs des Basiswertes ist und je mehr die Option at-the-money liegt. Die größten

Vega-Werte besitzen at-the-money Optionen. Deutlich in- oder out-of-the-money liegende Optionen haben geringe Vega-Werte. Bei einer Verkürzung der Optionslaufzeit kommt es zu einem Bedeutungsverlust der Volatilität für den Optionspreis. Dies steht im Gegensatz zum Options-Theta.

Der Zusammenhang zwischen Optionspreis und Volatilität ist fast linear. Somit steigt der Wert einer Option bei steigender Volatilität.

Im nachfolgenden Beispiel soll die praktische Bedeutung der Greeks verdeutlicht werden.

**Beispiel 3.1.17** [BEDEUTUNG DER GREEKS]

*Eine Call-Option auf Aktien mit einem Ausübungspreis von 100 €, einer Restlaufzeit von einem Jahr und einer erwarteten zukünftigen Volatilität der Aktie von 20 % besitzt bei einem momentanen Aktienkurs von 80 € und einem stetigen konstanten Zinssatz von 3 % folgende Greeks*

Greeks	$\Delta$	$\Gamma$	$\Lambda$	$\Theta$	$\rho$
Werte	0.914	0.008	15.737	-1.596	68,175

Dies bedeutet für den Wert der Option, dass

- bei einem Anstieg des Aktienkurses um 1 €, der Wert der Call-Option um ungefähr 0.914 € zunimmt und Delta selbst um 0.008 € auf 0.922 € steigt,
- bei einem Anstieg der Volatilität um 10 Prozent, der Wert der Call-Option um  $15.737 \text{ €} \cdot 10\% = 1.5737 \text{ €}$  steigt,
- bei einem Anstieg der Restlaufzeit um -1 Tag, der Wert der Call-Option um  $1.596 \text{ € pro Jahr} / 365 \text{ Tage} \approx 0.004 \text{ €}$  fällt und
- bei einem Anstieg des Zinssatzes um 1 Prozent, der Wert der Call-Option um  $68,175 \text{ €} \cdot 1\% \approx 6.8175 \text{ €}$  steigt.

## 3.2 Das Black-Modell

Nach der Veröffentlichung des Black-Scholes Modells im Jahre 1973 wurde das Modell stetig erweitert, um Optionen auf ganz unterschiedliche Basiswerte in diesem Modell bewerten zu können. Zunächst wurden Aktien mit Dividendenzahlungen bewertet, später Optionen auf Devisen, Aktienindizes und Future-Kontrakte. Die Erweiterung des Black-Scholes Modells für Zinsderivate ist das Black-Modell. Es wurde 1976 von F. Black publiziert und diente ursprünglich der Bewertung von Optionen auf Rohstoffe. Das Black-Modell besitzt sehr flexible Rahmenbedingungen, so dass Europäische Optionen unterschiedlichster Basiswerte bewertet werden können.

Das Black-Modell für Europäische Optionen auf Future-Kontrakte wird im Folgenden vorgestellt und anschließend auf Swaptions angewendet. Hierzu wird zunächst die Bewertung von Zinsswaps kurz erläutert. Zum Abschluß des Kapitels werden kurz die Risikokennziffern für Swaptions dargestellt.

Die Herleitung der Formel für die Bewertung von Optionen auf Futures wird nicht

ausführlich beschrieben, da sie analog zur Herleitung der Black-Scholes Formel erfolgt.

### 3.2.1 Das Black-Modell für Future-Optionen

Als zugrunde liegende Basiswerte werden im Black-Modell Future-Kontrakte<sup>2</sup> verwendet. Eine Europäische Option wird so bewertet, als wäre der Wert bei Fälligkeit der Option nicht vom Kassapreis<sup>3</sup> des zugrunde liegenden Basiswertes abhängig sondern vom Futurepreis.

Es werden dieselben Annahmen wie im Black-Scholes Modell getroffen. Hierbei gilt als wichtigste Annahme die Lognormalverteilung des Futurepreises des zugrunde liegenden Basiswertes zum Fälligkeitzeitpunkt  $T$ . Ferner entwickelt sich der Futurepreis  $F$  gemäß einer Geometrisch Brownschen Bewegung

$$dF = \mu F dt + \sigma F dW, \quad (3.28)$$

wobei  $dF$  die Kursänderung,  $\mu$  die Driftrate,  $\sigma$  die Volatilität und  $W$  ein verallgemeinerter Wiener-Prozess seien.

Future-Kontrakte werden genau so behandelt wie Wertpapiere mit kontinuierlichem Dividendenenertrag in Höhe des risikolosen Zinssatzes  $r$ .

#### Bemerkung 3.2.1

*Eine Europäische Option auf eine Aktie mit Kurs  $S$ , die einen kontinuierlichen Dividendenenertrag in Höhe  $q$  zahlt, hat denselben Wert zum Zeitpunkt  $t$  wie die entsprechende Europäische Option mit Kurs  $Se^{-q(T-t)}$ , die keine Dividenden zahlt. Für die Black-Scholes Formel im Falle einer Put-Option folgt*

$$V_P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-\hat{d}_2) - Se^{-q(T-t)}N(-\hat{d}_1) \quad (3.29)$$

mit

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (3.30)$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \sigma\sqrt{T - t} \quad (3.31)$$

wobei  $N(x)$  die kumulative Standard-Normalverteilung darstellt.

Hieraus ergibt sich der Call- und Put-Preis für eine Europäische Future-Option zum Zeitpunkt  $t$ . Der Aktienkurs  $S$  wird durch den Futurepreis  $F$  ersetzt und die Dividende in Höhe  $q$  durch den risikolosen Zinssatz  $r$ . Es gilt:

$$V_P(F, t) = e^{-r(T-t)}[KN(-\tilde{d}_2) - FN(-\tilde{d}_1)] \quad (3.32)$$

$$V_C(F, t) = e^{-r(T-t)}[FN(\tilde{d}_1) - KN(\tilde{d}_2)] \quad (3.33)$$

<sup>2</sup>Ein Future ist eine Art von börsengehandelten Termingeschäften. Es bezeichnet einen verbindlichen Börsenvertrag (Kontrakt) zwischen zwei Parteien.

<sup>3</sup>Als Kassakurs wird der Einheitskurs von Wertpapieren bezeichnet, deren Kurs während der Börsensitzung nur einmal festgestellt wird.

mit

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3.34)$$

$$\tilde{d}_2 = \hat{d}_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (3.35)$$

wobei  $N(x)$  die kumulative Standard-Normalverteilung ist.

Die erwartete Wachstumsrate einer Aktie mit Dividendenzahlungen in Höhe  $q$  ist  $r - q$  in der risikoneutralen Welt. Der erwartete Gesamtertrag aus Dividenden und Kapital, der mit dieser Wachstumsrate erzielt wird, ist  $r$ . Da sich Futurepreise wie Aktien mit Dividendenertrag  $q$  verhalten und  $q = r$  gilt, ergibt sich eine erwartete Wachstumsrate des Futurepreises von Null. Wie erwartet entstehen keine Kosten für den Eintritt in Future-Kontrakte. In der risikoneutralen Welt ist der erwartete Ertrag eines Future-Kontrakt Besitzers gleich Null.

Analog zu Europäischen Aktienoptionen stehen auch Europäische Future-Optionen in einer Put-Call Beziehung. Es ergibt sich somit eine Put-Call-Parität.

$F_T$  bezeichnet hierbei den Futurepreis zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$ . Eine Europäische Call-Option und  $Ke^{-r(T-t)}$  Geldeinheiten besitzen den Endwert

$$\max(F_T - K, 0) + K = \max(F_T, K).$$

Ein Betrag von  $Fe^{-r(T-t)}$  Geldeinheiten, ein Future-Kontrakt und eine Europäische Put-Option weisen einen Endwert von

$$F + (F_T - F) + \max(K - F_T, 0) = \max(F_T, K)$$

auf.

Zwischen Forward- und Future-Kontrakten besteht an dieser Stelle kein Unterschied, da der risikolose Zinssatz  $r$  als konstant angenommen wird. Einen Beweis hierzu befindet sich in [Hul97] auf Seite 76.

Beide Portfolios verfügen zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  über einen identischen Wert. Deshalb müssen beide Portfolios auch heute denselben Wert besitzen. Der Future-Kontrakt ist zum heutigen Zeitpunkt wertlos. Somit gilt folgende Put-Call-Beziehung für Optionen auf Future-Kontrakte

$$V_C(F, t) + Ke^{-r(T-t)} = V_P(F, t) + Fe^{-r(T-t)}. \quad (3.36)$$

Der Unterschied zur Put-Call-Parität für Europäische Aktienoptionen besteht darin, den Aktienkurs  $S(t)$  durch  $Fe^{-r(T-t)}$  zu ersetzen. Ansonsten gilt dieselbe Put-Call-Beziehung auch für Optionen auf Future-Kontrakte.

### 3.2.2 Bewertung von Zinsswaps

Ein Zinsswap stellt eine Vereinbarung für eine bestimmte Laufzeit zwischen Parteien (Swappartner) zum Austausch von Zinszahlungen zu vorher festgelegten Zeitpunkten dar, die auf einen Nennwert bezogen sind.

Dabei zahlt z.B. Partei A in bestimmten Zeitabständen den variablen Zinssatz an

die Gegenpartei B und erhält im Gegenzug den festen Zinssatz. Zu einem Kapitalaustausch kommt es hierbei nicht.

Swaps sind in Payer- und Receiver-Swaps zu unterscheiden.

**Definition 3.2.2** [PAYER-SWAP]

*Für die Vertragspartei, die den festen Zinssatz zu zahlen hat, stellt der Swap einen Payer-Swap dar. Diese Vertragspartei erhält dafür einen variablen Zinssatz (z.B. Euribor).*

**Definition 3.2.3** [RECEIVER-SWAP]

*Für die Vertragspartei, die den festen Zinssatz erhält, stellt der Swap einen Receiver-Swap dar. Diese Vertragspartei muss dafür den variablen Zinssatz zahlen.*

Jeder Swap ist daher ein Payer- und ein Receiver-Swap. Es kommt lediglich darauf an, von welcher Vertragspartei aus der Swap betrachtet wird.

Mittels Swaps können Zinsänderungsrisiken gehedget werden. Swaps eignen sich außerdem zur Umgestaltung der Struktur von Verbindlichkeiten, sowohl eingehender als auch bereits eingegangener Verbindlichkeiten.

Gemäß der Definition von Swaps läßt sich die Zahlungsreihe eines Swaps mit Hilfe von Kupon-Anleihen, sogenannten Bonds, duplizieren.

**Definition 3.2.4** [KUPON-ANLEIHE/BOND]

*Kupon-Anleihen sind festverzinsliche Wertpapiere. Der Käufer einer Kupon-Anleihe erhält während der Laufzeit des Finanztitels eine feste Verzinsung (die Nominalverzinsung oder den Kupon) und am Ende der Laufzeit den Nominalbetrag der Anleihe ausgezahlt.*

Der Wert eines Swaps zum Zeitpunkt  $t=0$ , d.h. bei Vertragsabschluss, muss aus Arbitragegründen gleich Null sein. Der feste Zinssatz, der sogenannte Swapsatz, wird bei Vertragsabschluss so bestimmt, dass der Swapwert, d.h. die Differenz der Zahlungsströme Null ergibt.

Im Folgenden betrachten wir den Wert eines Swaps nach Vertragsabschluss [Hul97].

Für die Bewertung eines Receiver-Swaps mittels Bonds ergibt sich folgende Ausgangssituation:

Partei A verkauft einen Bond mit variablen Zinszahlungen zum Nennwert  $L$  an Partei B und erwirbt einen Bond mit festen Zinszahlungen von Partei B. Der Wert des Swap  $V_{Swap}$  für Partei A setzt sich zusammen aus der Differenz der beiden Bondwerte. Es gilt:

$$V_{Swap}^{Receiver} = B_{fix} - B_{fl} \quad (3.37)$$

mit  $B_{fix}$  Wert des Bonds mit festem Zinssatz und  $B_{fl}$  Wert des Bonds mit variablem Zinssatz.

Handelt es sich jedoch aus Sicht von Partei A um einen Payer-Swap, d.h. Partei A zahlt feste Zinszahlungen und erhält variable Zinszahlungen, so ergibt sich für den Wert des Swap aus Sicht von Partei A

$$V_{Swap}^{Payer} = B_{fl} - B_{fix}. \quad (3.38)$$

Gewöhnlich werden die Zahlungsströme eines Swap auf variable Zinssätze diskontiert.  $r_i$  bezeichnet den Diskontierungsfaktor mit zugehöriger Laufzeit  $t_i$ . Für den Wert des Bonds mit festen Zinszahlungen ergibt sich:

$$B_{fix} = \sum_{i=1}^n ke^{-r_it_i} + Le^{-r_nt_n} \quad (3.39)$$

Der Bond zahlt jeweils  $k$  zum Zeitpunkt  $t_i$  und den Nennwert  $L$  zum Zeitpunkt  $t_n$  aus.

Die Betrachtung des Bonds mit variablen Zinszahlungen ergibt, dass unmittelbar nach einem Zahlungstermin der Wert des Bonds dem Nennwert  $L$  entspricht. Zwischen den Zahlungsterminen wird der Fakt genutzt, dass der Wert  $B_{fl}$  unmittelbar nach dem nächsten Zahlungstermin wieder dem Nennwert  $L$  entspricht. Die Zeit bis zum nächsten Zahlungstermin sei  $t_1$ , dann gilt

$$B_{fl} = Le^{-r_1t_1} + k^*e^{-r_1t_1}, \quad (3.40)$$

wobei  $k^*$  die variable Zinszahlung zum Zeitpunkt  $t_1$  ist. Diese variable Zinszahlung zum Zeitpunkt  $t_1$  ist bekannt, da der variable Zinssatz dem variablen Zinssatz zum letzten Zahlungstermin entspricht.

Für den Wert eines Receiver-Swaps ergibt sich

$$V = B_{fix} - B_{fl} = \sum_{i=1}^n ke^{-r_it_i} + Le^{-r_nt_n} - [Le^{-r_1t_1} + k^*e^{-r_1t_1}] \quad (3.41)$$

und für einen Payer-Swap entsprechend

$$V = B_{fl} - B_{fix} = [Le^{-r_1t_1} + k^*e^{-r_1t_1}] - \sum_{i=1}^n ke^{-r_it_i} + Le^{-r_nt_n}. \quad (3.42)$$

Während der Laufzeit kann der Swap einen positiven oder einen negativen Wert besitzen.

### 3.2.3 Das Black-Modell für Swaptions

Eine Swaption stellt eine Kombination der beiden Finanzinstrumente Zinsswap und Option dar. Der Inhaber einer Europäischen Payer-Swaption sichert sich gegen steigende Zinsen ab. Gegen Zahlung einer Prämie erwirbt er das Recht, zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  in einen Swap einzutreten, um den variablen Zinssatz (z.B. 6-Monats Libor) für eine festgelegte Laufzeit, die Swapplaufzeit, zu erhalten und den festen Zinssatz, den Swapsatz, zu zahlen. Ist zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  der Markt-Swapsatz kleiner als der Ausübungssatz, so wird die Swaption nicht ausgeübt. Die Option verfällt und der Inhaber finanziert sich zu dem aktuellen, niedrigen variablen Zinssatz. Kommt es zu einer Ausübung der Swaption, d.h. der Markt-Swapsatz ist höher als der Ausübungssatz, so kann der Inhaber seine variablen Zinsverpflichtungen unterhalb der Marktzinsen tauschen.

Europäische Swaptions können mit Hilfe des Black-Modells bewertet werden. Hierzu sei der feste Zinssatz, der Swapsatz zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  der Swaption, lognormalverteilt. Die Volatilität dieses Forward-Swapsatzes sei konstant. Die Zahlungstermine  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  des Swap seien auf beiden Seiten gleich und es gilt  $t_0 = T$ . Demnach beginnt die Swaplaufzeit mit dem Fälligkeitszeitpunkt  $T$  der Swaption, falls sie ausgeübt wird. Der Fälligkeitszeitpunkt stellt gleichzeitig den ersten Zinsausgleichstermin dar.

Wir betrachten im Folgenden eine Payer-Swaption, die uns das Recht gibt, den Festzins  $R_X$  zu zahlen und den variablen Zins zu bekommen. Die Laufzeit der Option beträgt  $T$  Jahre und die Swaplaufzeit  $n$  Jahre; folglich summiert sich die Gesamtlaufzeit auf  $n + T$  Jahre. Pro Jahr erfolgen  $m$  Zahlungen im Rahmen des Swaps mit dem Kapitalvolumen  $L$ . Den Swapsatz eines  $n$ -jährigen Swaps bei Fälligkeit  $T$  der Swaption bezeichnen wir mit  $R$ . Der Payoff einer Swaption besteht aus einer Folge von Zahlungsströmen

$$\frac{L}{m} \max\{R - R_X, 0\}.$$

Hierbei ist  $\frac{LR}{m}$  der Zahlungsstrom eines Swaps mit festem Zinssatz  $R$  und  $\frac{LR_X}{m}$  der Zahlungsstrom eines Swaps mit festem Zinssatz  $R_X$ .

Während der  $n$ -jährigen Laufzeit des Swaps werden die Zahlungsströme  $m$  mal pro Jahr empfangen. Die Zahlungen finden, gemessen in Jahren ab heute, zu den Zeitpunkten  $T + 1/m, T + 2/m, \dots, T + nm/m$  statt. Jeder Zahlungsstrom ist der Payoff einer Call-Option auf  $R$  mit Ausübungspreis  $R_X$ .

Nun sei  $t_i = T + i/m$ . Dann ist der Wert des Zahlungsstroms, der zum Zeitpunkt  $t_i$  empfangen wird, mit Hilfe des Black-Modells

$$\frac{L}{m} e^{-r_i t_i} [FN(d_1) - R_X N(d_2)] \quad (3.43)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln(F/R_X) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} \quad (3.44)$$

$$d_2 = \frac{\ln(F/R_X) - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}. \quad (3.45)$$

$F$  bezeichnet hierbei den Forward Swapsatz bezüglich des Fälligkeitszeitpunktes  $T$  und  $r_i$  den Nullkupon-Zinssatz mit Fälligkeit  $t_i$ .  $N(x)$  ist die kumulative Standard-Normalverteilung.

Der Gesamtwert der Payer-Swaption  $V_{PS}(F, 0)$  ist die Summe aller diskontierten Zahlungsströme

$$V_{PS}(F, 0) = \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} e^{-r_i t_i} [FN(d_1) - R_X N(d_2)] \quad (3.46)$$

Mit  $A$  wird der Wert eines Kontrakts benannt, der eine Geldeinheit zu den Zeitpunkten  $t_i$  ( $1 \leq i \leq mn$ ) auszahlt. Der Wert der Swaption wird damit zu

$$V_{PS}(F, 0) = \frac{LA}{m} [FN(d_1) - R_X N(d_2)] \quad (3.47)$$

mit

$$A = \sum_{i=1}^{mn} e^{-r_i t_i}. \quad (3.48)$$

Handelt es sich um eine Receiver-Swaption, bei der der Halter den Festzins  $R_X$  erhält und nicht zahlt, so ist der Payoff der Swaption

$$\frac{L}{m} \max(R_X - R, 0).$$

Es handelt sich hierbei um eine Put-Option auf  $R$ . Wie schon zuvor wird zu jedem Zeitpunkt  $t_i$  ( $1 \leq i \leq mn$ ) ein solcher Zahlungsstrom empfangen.

Der Wert der Receiver-Swaption  $V_{RS}(F, 0)$  ist gegeben durch

$$V_{RS}(F, 0) = \frac{LA}{m} [R_X N(-d_2) - FN(-d_1)] \quad (3.49)$$

mit

$$A = \sum_{i=1}^{mn} e^{-r_i t_i}. \quad (3.50)$$

[Hul97]

### 3.2.4 Die Risikokennziffern einer Swaption

Die partiellen Ableitungen des Preises einer Swaption quantifizieren das Risiko, das sich durch Änderungen der Einflussfaktoren auf den Swaptionpreis ergibt. Der Anwender erhält durch sie Signale zum Eingehen, Halten oder Glattstellen von Portfolio positionen. Die Greeks, die wichtigsten Risikokennzahlen, für Swaptions werden nachfolgend kurz dargestellt.

Der Preis einer Swaption hängt bei einer spezifizierten Zinsstruktur und einem vorgegebenen Swap als Basiswert von dem Fälligkeitszeitpunkt  $T$  und dem Ausübungspreis  $R_X$  ab. Das Ausmaß der durch die Wertveränderung des Swaps induzierten Preisveränderung von Swaptions mit gleichem Basiswert  $F$  hängt demnach von den Variablen  $T$  und  $R_X$  ab. Für das Delta  $\Delta_{PS}$  einer Europäischen Payer-Swaption gilt in Analogie zum Delta einer Aktien-Call-Option

$$\Delta_{PS} = \frac{\partial V_{PS}}{\partial F} = L \cdot A \cdot N(d_1), \quad (3.51)$$

wobei  $N(x)$  die kumulative Standard-Normalverteilung ist. Delta ist somit die erste Ableitung des Wertes einer Swaption nach dem zugrunde liegenden Basiswert, dem Forward Swapsatz. Für eine Receiver-Swaption ergibt sich das Delta  $\Delta_{RS}$  analog.

$$\Delta_{RS} = \frac{\partial V_{RS}}{\partial F} = L \cdot A \cdot (N(d_1) - 1) = -L \cdot A \cdot N(-d_1). \quad (3.52)$$

Das Gamma ist die zweite Ableitung des Wertes der Swaption nach dem Forward Swapsatz. Es misst die Sensitivität, d.h. die Änderung, von Delta bezüglich des Forward Swapsatzes  $F$ . Es ergibt sich das gleiche Gamma für Payer- und Receiver-Swaptions.

$$\Gamma_{RS} = \Gamma_{PS} = \frac{\partial^2 V_{PS}}{\partial F^2} = \frac{L \cdot A \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{F \sigma \sqrt{2\pi T}} \quad (3.53)$$

Die Gesamtposition eines Portfolio sollte sowohl Delta- als auch Gamma-neutral gehalten werden.

Theta drückt die durch die Änderung der Restlaufzeit  $T$  induzierte Wertänderung der Swaption aus. Für die Payer-Swaption gilt

$$\Theta_{PS} = \frac{\partial V_{PS}}{\partial T} = r_T V_{PS} - \frac{L \cdot A \cdot F \cdot \sigma \cdot N(d_1)}{2\sqrt{T}}. \quad (3.54)$$

Analog ergibt sich für eine Receiver-Swaption über die Put-Call-Beziehung

$$\Theta_{RS} = \frac{\partial V_{RS}}{\partial T} = r_T V_{RS} - \frac{L \cdot A \cdot F \cdot \sigma \cdot N(d_1)}{2\sqrt{T}}. \quad (3.55)$$

Die letzte wichtige Risikokennzahl stellt das Vega dar. Vega beschreibt die Änderung des Swaption-Wertes bezüglich einer Volatilitätsänderung. Durch Ableiten ergibt sich für die Payer- und Receiver-Swaption

$$\Lambda_{RS} = \Lambda_{PS} = \frac{\partial V_{PS}}{\partial \sigma} = L \cdot A \cdot F \cdot \sqrt{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}. \quad (3.56)$$

$\sigma$  stellt eine Einschätzung zukünftig zu erwartender Änderungen des zugrunde liegenden Forward Swapsatzes dar. Das Portfolio sollte Vega-neutral sein. Damit ist es vor Schwankungen der Volatilität geschützt.

# Kapitel 4

## Bewertungsverfahren für Bermudsche Optionen

Der Wert einer Europäischen Option kann sehr einfach über die Black-Scholes Formel bestimmt werden. Diese Einfachheit ist für komplexere Optionstypen nicht gegeben. Bermudsche Optionen können nur mit Hilfe numerischer Verfahren bewertet werden, da es aufgrund des vorzeitigen Ausübungsrechtes keine analytische Lösungsformel gibt.

Viele Bewertungsmethoden für Bermudsche Optionen basieren auf stochastischer Simulation. Monte-Carlo Methoden simulieren dabei die Entwicklung des zugrunde liegenden Basiswertes mit Hilfe von Zufallszahlen. Hieraus ergeben sich dann viele verschiedene Optionspreise aufgrund der unterschiedlichen Kursentwicklungen. Durch Mittelung über alle daraus entstandenen Optionspreise ergibt sich dann der approximative Preis für eine Option. Diese Methode wurde zunächst von Boyle [Boy77] eingeführt und durch Bossaerts [Bos88] und Tilley [Til93] angewendet. Die Herausforderung in der Anwendung von Monte-Carlo Methoden liegt darin, eine Entscheidung über den optimalen vorzeitigen Ausübungszeitpunkt der Option zu treffen, nachdem die Pfade der Kursentwicklung simuliert worden sind.

Die Stochastic Mesh Methode von Broadie und Glasserman [BG97] berechnet, nachdem ein Zufallsbaum simuliert worden ist, zwei Erwartungswerte für den Optionspreis, einen mit zu hohem Bias und einen mit zu niedrigem Bias. Hieraus ergibt sich dann ein Konfidenzintervall für den Optionspreis. Mit Erhöhung der Simulationen strebt der Bias der beide Erwartungswerte gegen 0.

Der Ansatz von Haugh und Kogan [HK01] und Rogers [Rog02] präsentiert die Berechnung des Preises einer Bermudschen Option als Minimierungsproblem über eine Klasse von Supermartingalen oder Martingalen. Diese Martingale können dabei entweder durch eine Approximation der Optionspreisfunktion [HK01] oder der Ausübungsstrategie [AB01] konstruiert werden. Eine suboptimale Ausübungsstrategie liefert dann eine untere Grenze für den Optionswert. Durch die Wahl eines Martingals aus dieser suboptimalen Ausübungsstrategie, das die vorzeitige Ausübungsstrategie annähernd optimal approximiert, wird diese untere Grenze durch eine obere Grenze ergänzt.

Der Ansatz von Longstaff und Schwartz [LS01] verwendet die Methode der kleinsten Quadrate um die bedingte Erwartungswertfunktion an den diskreten Ausübungszeitpunkten zu approximieren. Als Basisfunktionen dienen hierzu Hermite-, Legendre-, Chebyshev- oder Jacobi-Polynome. Zunächst wird mit Hilfe der Monte-Carlo Methode die Entwicklung des zugrunde liegenden Basiswertes simuliert. Die realisierten

Cash Flows an den Ausübungzeitpunkten der Option werden abdiskontiert und mittels linearer Regression ergeben sich die bedingten Erwartungswerte bei Fortführung der Option. Hieraus ergibt sich eine optimale Stoppzeit der Option für jeden Pfad. Durch Abdiskontierung und Mittelung über alle Pfade ergibt sich der Wert der Option.

Bewertungsmethoden, die auf Monte-Carlo Simulation basieren, können leicht generalisiert werden, so dass allgemeine Optionstypen, wie pfadabhängige Optionen oder Optionen auf mehrere Wertpapiere bewertet werden können. Jedoch benötigen sie für die Optionpreisberechnung einen erheblichen Rechenaufwand. Ziel dieser Arbeit ist es, effizientere Verfahren für die Bewertung Bermudscher Optionen vorzustellen. Im nachfolgenden Kapitel werden zwei Verfahren, die Binomialmethode und ein Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson vorgestellt und ihre Anwendung auf Bermudsche Optionen gezeigt.

1979 veröffentlichten Cox, Ross und Rubinstein ihre Ideen zur Binomialmethode [CRR79]. Der Binomialmethode liegt ein diskretes Modell zugrunde. Hierbei wird der zugrunde liegende Aktienkurs im Zeitverlauf modelliert. Bei der Binomialmethode handelt es sich um ein Baumverfahren. Dieses eignen sich besonders gut für Optionen die ein vorzeitiges Ausübungsrecht beinhalten.

Die Berechnung von Bermudschen Optionen kann darüber hinaus auch mittels einer Erwartungsdarstellung erfolgen. Geske und Johnson erläutern diesen Ansatz in ihrem 1984 erschienenen Artikel [GJ84] über die Bewertung von Amerikanischen Optionen. Der Wert einer Bermudschen Option wird mit Hilfe ihres Erwartungswertes dargestellt. Die daraus resultierende Formel muss dann mittels numerischer Verfahren berechnet werden.

## 4.1 Das Binomialmodell nach Cox, Ross und Rubinstein

Das Black-Scholes Modell ist ein kontinuierliches Modell, da der Aktienkursverlauf mittels einer Geometrisch Brownschen Bewegung modelliert wird. Das Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein [CRR79] stellt eine diskrete Approximation des Black-Scholes Modells dar. Der kontinuierliche Prozess der Geometrisch Brownschen Bewegung wird durch einen diskreten stochastischen Prozess, den Binomialprozess, ersetzt. Hieraus lässt sich dann die Binomialmethode formulieren.

Aufgrund der Einfachheit, der Intuitivität und der einfachen Handhabung von komplizierten Problemen ist das Binomialverfahren eine weit verbreitete numerische Methode um Optionen, für die keine geschlossene Lösungsformel existiert, zu bewerten. Die grundlegenden Gesichtspunkte des Binomialmodells sowie der Binomialmethode werden im Folgenden diskutiert. Es wird die Konvergenz des Binomialmodells gegen das Black-Scholes Modell gezeigt. Des Weiteren wird die Methode von Leisen und Reimer [LM96] vorgestellt. Sie entwickelten ein verbessertes Binomialverfahren hinsichtlich der Konvergenzgeschwindigkeit. Außerdem werden die verschiedenen Lösungsansätze für die Bewertung von Bermudschen Optionen im Binomialmodell erläutert. Abschließend sollen die Risikokennziffern im Binomialmodell kurz vorgestellt werden.

### 4.1.1 Zeitdiskretisierung

Die Laufzeit  $T$  der Option wird in  $M$  äquidistante Zeitschritte der Länge

$$\Delta t := \frac{T}{M}$$

unterteilt. Hieraus ergeben sich  $M + 1$  diskrete Zeitpunkte  $t_i$  im Zeitintervall  $[0, T]$ . Es gilt:

$$t_i := i \cdot \Delta t, \quad i = 0, \dots, M$$

Im Binomialmodell folgt der Kurs des Basiswertes, d.h. der Aktienkurs einem diskreten stochastischen Prozess, dem Binomialprozess. Nach Ablauf eines Zeitschrittes  $\Delta t$  steigt der Kurs des Basiswertes entweder um den Faktor  $u$  mit  $u > 1$  oder fällt um den Faktor  $d$  mit  $0 < d < 1$ . Die Wahrscheinlichkeit für einen Kursanstieg wird mit  $p$  bezeichnet. Demnach kommt es zu einem Kursabfall mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - p$ .

Die Anzahl an Aufwärtsbewegungen  $X_n$  nach  $n$  Zeitschritten ist dann binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p$ . Es gilt also

$$X_n \sim B(n, p)$$

#### Definition 4.1.1 [BINOMIALVERTEILUNG]

Sind bei einem Versuch nur die beiden Ereignisse  $A$  und  $\bar{A}$  möglich und sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $P(A) = p$  und  $P(\bar{A}) = 1 - p$ , so ist

$$p_k := B(k|n; p) := \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei  $n$ -maliger Wiederholung des Versuches das Ereignis  $A$  genau  $k$ -mal eintritt. Eine Zufallsvariable  $X_n$ , bei der  $P(X_n = k) = B(k|n; p)$  ist, heißt binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p$ . Es gilt für den Erwartungswert  $E(X_n) = \mu = n \cdot p$  und für die Varianz  $Var(X_n) = \sigma^2 = n \cdot p(1 - p)$ .  $B(k|n; p)$  heißt Binomialverteilung mit den Parametern  $n$  und  $p$ .

#### Bemerkung 4.1.2

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei  $n$ -maliger Wiederholung des Versuches das Ereignis  $A$  mindestens  $k$ -mal eintritt, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P(X_n \geq k) &= B(k|n; p) + B(k+1|n; p) + \dots + B(n|n; p) \\ &= \sum_k^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Für den Ein-Perioden-Fall ergibt sich folgendes Schema. Der Aktienkurs  $S_0$  zum Zeitpunkt  $t_0=0$

- steigt auf den Wert  $u \cdot S_0$  im Zeitschritt  $\Delta t$  mit Wahrscheinlichkeit  $p$ ,
- bzw. fällt auf den Wert  $d \cdot S_0$  im Zeitschritt  $\Delta t$  mit Wahrscheinlichkeit  $1 - p$ .

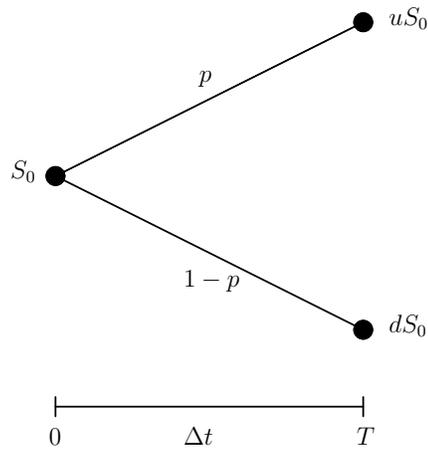


Abbildung 4.1: Binomialbaum im Ein-Perioden-Fall.

wobei  $\Delta t = \frac{T}{1} = T$  ist. Abbildung 4.1 verdeutlicht das Schema des Binomialansatzes im Ein-Perioden-Fall.

Im Mehr-Perioden-Fall ergibt sich für den Preis des Wertpapieres zum Zeitpunkt  $t_i$

$$S(t_i) = S_0 \prod_{j=1}^i \xi_j \quad (4.1)$$

mit  $\xi_i \in \{u, d\}$ ,  $1 \leq i \leq M$ . Abbildung 4.2 verdeutlicht den Mehr-Perioden-Fall.

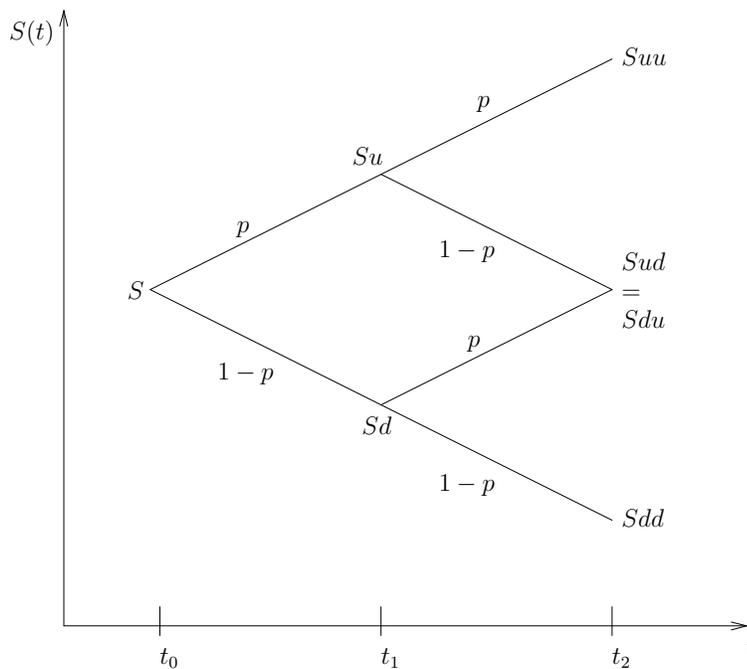


Abbildung 4.2: Die ersten beiden Schritte des Binomialbaumes.

### 4.1.2 Herleitung der Faktoren $u$ , $d$ und $p$

Die Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  werden auf der Grundlage der risikoneutralen Bewertung bestimmt. Die risikoneutrale Bewertung von Derivaten erfolgt unter den folgenden Annahmen.

#### Annahme 4.1.3 [RISIKONEUTRALE BEWERTUNG]

1. Jedes gehandelte Wertpapier besitzt eine erwartete Rendite in Höhe des risikolosen Zinssatzes.
2. Der Wert einer zukünftigen Zahlung entspricht ihrem, mit dem risikolosen Zinssatz diskontierten Erwartungswert.

Das Verhalten des Aktienkurses in einer risikoneutralen Welt kann mit Hilfe des Binomialbaumes dargestellt werden.

Aus dem Binomialmodell läßt sich die Binomialmethode formulieren.

#### Annahme 4.1.4 [BINOMIALMETHODE]

- (A1)** Ein Kurs  $S$  kann sich nach Ablauf eines Zeitschrittes  $\Delta t$  nur zu zwei Kurswerten entwickeln, entweder aufwärts zu  $Su$  ( $u > 1$ ) oder abwärts zu  $Sd$  ( $0 < d < 1$ ).
- (A2)** Die Wahrscheinlichkeit einer Kurssteigerung sei  $p$ .
- (A3)** Die erwartete Rendite entspricht dem risikoneutralen Zinssatz  $r$ . Für das kontinuierliche Modell gilt die Beziehung

$$E(S(t_{i+1})) = S(t_i) \cdot e^{r\Delta t}$$

- (A4)** Zur Vereinfachung der Herleitung finden keine Dividendenzahlungen statt.

Die Werte von  $u$ ,  $d$  und  $p$  sind zunächst unbekannt und werden später durch drei Gleichungen bestimmt, die für eine risikoneutrale Bewertung des Optionspreises sorgen.

Die erste Gleichung sei

$$u \cdot d = 1.$$

Diese Gleichung spiegelt eine Symmetrie zwischen Kurssteigerung und Kursabfall wider.

Um die beiden übrigen Gleichungen zu erhalten, werden die Erwartungswerte und die Varianzen des kontinuierlichen und des diskreten Modells gleichgesetzt. Auf diese Weise werden implizit Eigenschaften des kontinuierlichen Modells mit einbezogen.

Der Erwartungswert des Kurses  $S$  zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$  im diskreten Modell folgt aus (A1) und (A2):

$$E(S(t_{i+1})) = pS(t_i)u + (1 - p)S(t_i)d.$$

Gleichsetzen mit  $E(S(t_{i+1})) = S(t_i) \cdot e^{r\Delta t}$  ergibt

$$S(t_i) \cdot e^{r\Delta t} = E(S(t_{i+1})) = pS(t_i)u + (1 - p)S(t_i)d$$

oder

$$e^{r\Delta t} = pu + (1 - p)d. \quad (4.2)$$

Nun werden die Varianzen der beiden Modelle gleichgesetzt. Die Volatilität  $\sigma$ , die Schwankungsbreite des Kurses  $S$  geht in die Varianz mit ein. Für die Varianz des Aktienkurses  $S$  zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$  im kontinuierlichen Modell gilt

$$\text{Var}(S(t_{i+1})) = S^2(t_i)e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1).$$

Für das diskrete Modell gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}(S(t_{i+1})) &= \text{E}(S^2(t_{i+1})) - (\text{E}(S(t_{i+1})))^2 \\ &= pS(t_i)^2u^2 + (1 - p)S(t_i)^2d^2 - S(t_i)^2[pu + (1 - p)d]^2. \end{aligned}$$

Gleichsetzen der Varianzen der beiden Modelle führt zu

$$S^2(t_i)e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1) = pS(t_i)^2u^2 + (1 - p)S(t_i)^2d^2 - S(t_i)^2[pu + (1 - p)d]^2$$

oder

$$e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1) = pu^2 + (1 - p)d^2 - [pu + (1 - p)d]^2.$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.2) ergibt sich

$$e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1) = pu^2 + (1 - p)d^2 - [e^{r\Delta t}]^2$$

und somit

$$e^{2r\Delta t + \sigma^2\Delta t} = pu^2 + (1 - p)d^2.$$

Nun können die Werte  $u$ ,  $d$  und  $p$  durch das folgende Gleichungssystem bestimmt werden.

$$u \cdot d = 1 \quad (4.3)$$

$$e^{r\Delta t} = pu + (1 - p)d \quad (4.4)$$

$$e^{2r\Delta t + \sigma^2\Delta t} = pu^2 + (1 - p)d^2 \quad (4.5)$$

**Lösung von (5.1), (5.2), (5.3):**

Die Bestimmung der Unbekannten  $d$  erfolgt mittels der ersten Gleichung (5.1)

$$d = \frac{1}{u}.$$

Löst man Gleichung (5.2) nach  $p$  auf, so ergibt sich

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Durch Einsetzen von  $p$  und  $d = \frac{1}{u}$  in Gleichung (5.3) folgt durch Umformungen

$$u^2 - u \underbrace{(\alpha^{-1} + \alpha e^{\sigma^2\Delta t})}_{:=2\beta} + 1 = 0$$

wobei  $\alpha := e^{r\Delta t}$  sei.

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung lautet

$$u = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

Für  $d$  ergibt sich aufgrund von  $ud=1$  und des Satzes von Vieta die Lösung

$$d = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

Die drei Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  sind nun als Funktionen von  $\sigma$ ,  $r$  und  $\Delta t$  bestimmt:

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (4.6)$$

$$d = \frac{1}{u} = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (4.7)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (4.8)$$

mit

$$\beta = \frac{1}{2}(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t}). \quad (4.9)$$

Diese sind die exakten Lösungen der Gleichungen (5.1), (5.2), (5.3) [Sey00]. Werden Terme höherer Ordnung als  $\Delta t$  ignoriert [CRR79], so ergeben sich die folgenden Lösungen

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (4.10)$$

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (4.11)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (4.12)$$

Da nun die Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  festgelegt sind, ist auch das Gitter des Binomialbaumes fixiert.

Zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  ist der Aktienkurs  $S$  bekannt. Es sei im Folgenden  $S = S_0$ . Nach einem Zeitschritt  $\Delta t$  gibt es zwei mögliche Aktienkurse  $Su$  und  $Sd$ ; nach einem weiteren Zeitschritt gibt es drei mögliche Aktienkurse  $Su^2$ ,  $S$  und  $Sd^2$ . Die Beziehung  $d = \frac{1}{u}$  sorgt für eine Pfadunabhängigkeit und für eine Symmetrie zwischen Kurssteigerung und Kursabfall. Eine Aufwärtsbewegung gefolgt von einer Abwärtsbewegung führt zum gleichen Aktienkurs wie eine Abwärtsbewegung gefolgt von einer Aufwärtsbewegung. Somit wiederholt sich nach jeweils zwei Zeitschritten der gleiche Kurs  $S$ . Es kommt zu einer Reduktion der möglichen Aktienkurswerte an den verschiedenen Zeitpunkten. Nach  $M$  Zeitschritten kann  $S(t_M)$  nur  $M + 1$  verschiedene Werte annehmen. Wäre  $u \cdot d \neq 1$ , so gäbe es  $2^M$  verschiedene Möglichkeiten der Kursentwicklung. Dies wäre im Verhältnis zu  $M + 1$  Möglichkeiten sehr viel. Für den Zeitpunkt  $t_i = i\Delta t$  ergeben sich  $(i + 1)$  mögliche Werte für den Aktienkurs  $S$ . Sie sind gegeben durch

$$Su^j d^{i-j}$$

mit  $i=1, 2, \dots, M$  und  $j=0, 1, \dots, i$ .

Die Anzahl der Knoten des Baumes wächst quadratisch mit der Anzahl der Zeitschritte  $M$ . Entsprechend der Anzahl an Knoten steigt auch der Rechenaufwand quadratisch mit  $M$ .

Die Symmetrie von (5.1) zeigt sich in Abbildung 4.3. Der Baum in der  $(t, S)$ -Ebene kann als Gitter von Exponentialkurven gedeutet werden.

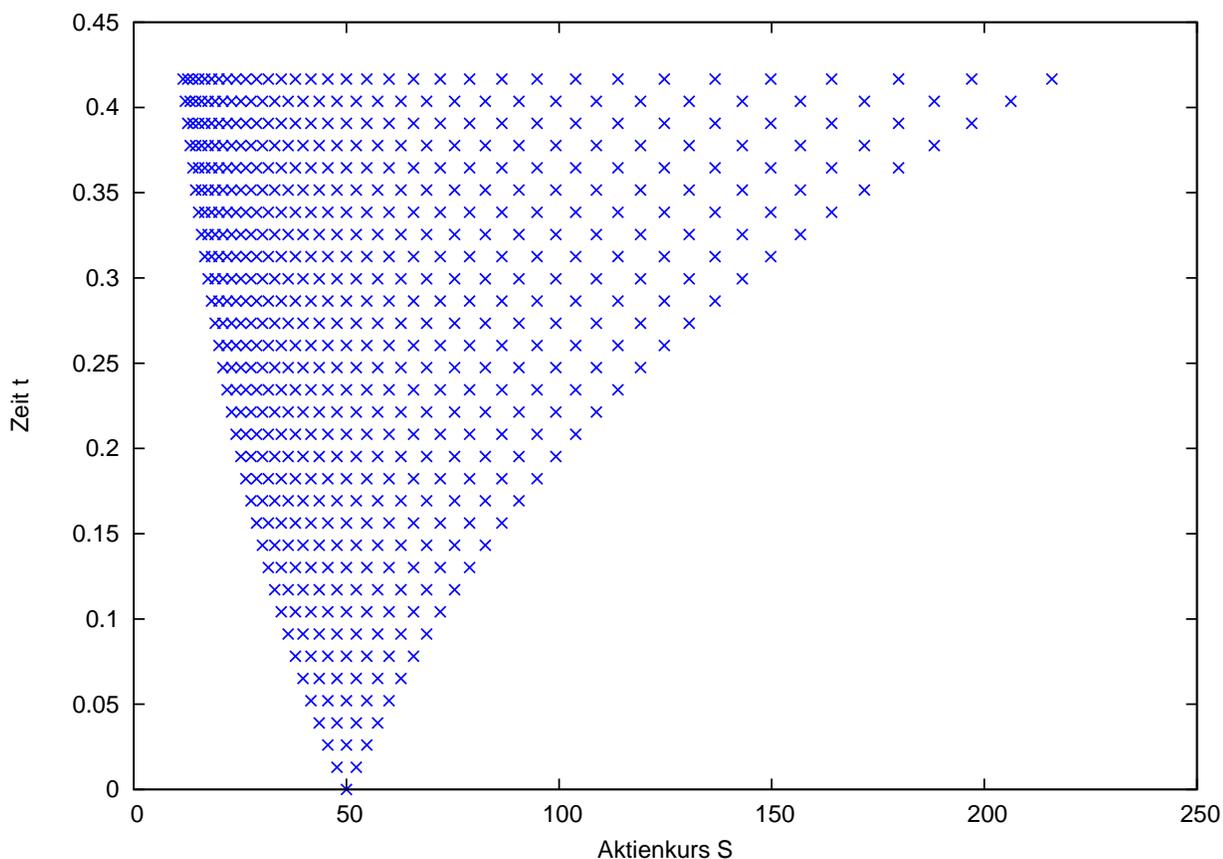


Abbildung 4.3: Baum in der  $(S, t)$ -Ebene eines amerikanischen Puts mit  $S = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $T = 0.41666\dots$  (d.h. 5 Monate) und  $M = 32$ .

### 4.1.3 Die Binomialmethode

Die Binomialmethode besteht aus zwei Phasen, zum einen aus einer Vorwärtsphase und zum anderen aus einer Rückwärtsphase.

#### Vorwärtsphase:

Die Vorwärtsphase dient zur Berechnung der zukünftigen Aktienkurse, d.h. zur Berechnung des Gitters und zur Initialisierung des Baumes. Da die Werte für  $u$  und  $d$  bekannt sind, können die diskreten Werte des Kurses  $S$  für jeden Zeitpunkt  $t_i$  bis zum Fälligkeitszeitpunkt  $t_M = T$  berechnet werden. Der Kurs  $S_0$  ist dabei der Startwert. Er ist bekannt und stellt damit die Wurzel des Baumes dar. Für jeden

Anfangskurs  $S_0$  gibt es einen anderen Baum von Werten.

Ein zweidimensionales Gitter muss berechnet werden. Der Startwert  $S_0$  wird deshalb mit  $S_{00}$  bezeichnet. Die verschiedenen Aktienkurse werden mittels der folgenden Gleichung berechnet.

$$S_{ji} := S_0 u^j d^{i-j} \quad (4.13)$$

mit  $i=1, 2, \dots, M$  und  $j=0, 1, \dots, i$ .  $S_{ji}$  beschreibt hierbei den  $j$ -ten möglichen Ausgang zum Zeitpunkt  $t_i$ . Die Gitterpunkte  $(t_j, S_{ji})$  sind damit festgelegt. An diesen Gitterpunkten werden anschließend die Werte  $V_{ji} := V(t_i, S_{ji})$  der Option berechnet.

### Rückwärtsphase:

In der Rückwärtsphase werden die Optionswerte bestimmt. Zum Zeitpunkt  $t_M$  ist der Wert der Option durch die Auszahlungsfunktion gegeben. Es gilt für den Call

$$V_{jM} = (S_{jM} - K)^+, \quad (4.14)$$

entsprechend für den Put

$$V_{jM} = (K - S_{jM})^+. \quad (4.15)$$

Aus diesen  $V_{jM}$  werden die Optionswerte für alle Zeitpunkte  $t_i$  berechnet. Als Grundlage hierzu dient die risikoneutrale Bewertung. Aus Gleichung (5.2) mit dem Aktienkurs  $S_{ji}$

$$S_{ji} e^{r\Delta t} = p S_{ji} u + (1-p) S_{ji} d$$

folgt

$$S_{ji} e^{r\Delta t} = p S_{j+1, i+1} + (1-p) S_{j, i+1}.$$

Bei Annahme einer risikoneutralen Welt, entspricht der Wert der Option zum Zeitpunkt  $t_i$  dem abdiskontierten Erwartungswert des Optionswertes zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$  mit dem risikolosen Zinssatz  $r$ . Es gilt

$$V_i = e^{-r\Delta t} \mathbf{E}(V_{i+1}).$$

Hieraus folgt

$$V_{ji} = e^{-r\Delta t} \cdot (p V_{j+1, i+1} + (1-p) V_{j, i+1}) \quad (4.16)$$

mit dem gleichen Parameter  $p$  für die Wahrscheinlichkeit, der unter den getroffenen Annahmen eine risikoneutrale Wirtschaft repräsentiert.

Die Werte  $V_{ji}$  zum Zeitpunkt  $t_i$  werden nun rückwärts aus den Werten zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$  berechnet. Der sich daraus ergebende Wert  $V_{00}$  ist der berechnete Optionswert zum Zeitpunkt  $t_0$ .

Der Optionswert  $V_{00}$  ist ein Näherungswert für den Wert  $V(S_0, 0)$  des kontinuierlichen Modells. Die Genauigkeit hängt dabei hauptsächlich von der Anzahl der Zeitschritte  $M$  ab. Aufgrund der Konstruktion konvergiert dieser Näherungswert für  $M \rightarrow \infty$  gegen den Black-Scholes Wert  $V(S_0, 0)$ .

Bei Amerikanischen Optionen muss zusätzlich an jedem Zeitpunkt  $t_i$  geprüft werden, ob eine vorzeitige Ausübung sinnvoll ist. Dazu wird der Wert der Option  $V_{ji}$  zum

Zeitpunkt  $t_i$  mit dem inneren Wert der Option zu diesem Zeitpunkt verglichen. Es ergibt sich für eine Amerikanische Call-Option

$$V_{ji} = \max\{(S_{ji} - K)^+, e^{-r\Delta t} \cdot (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1})\} \quad (4.17)$$

und entsprechend für eine Amerikanische Put-Option

$$V_{ji} = \max\{(K - S_{ji})^+, e^{-r\Delta t} \cdot (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1})\}. \quad (4.18)$$

#### Bemerkung 4.1.5

Für Europäische Optionen reicht es aus, die Aktienkurse  $S_{ji}$  für  $i = M$  und  $j = 0, 1, \dots, i$  zu berechnen, da nur diese Werte für die Berechnung des Optionswertes von Bedeutung sind. Bei Amerikanischen Optionen geht dies aufgrund der vorzeitigen Ausübungsmöglichkeit nicht. Hier muss das vollständige Gitter bestimmt werden.

#### Bemerkung 4.1.6 [CONTROL VARIATE TECHNIK]

Die Control Variate Technik wird zur Verbesserung der Genauigkeit bei der Bewertung von Amerikanischen Optionen verwendet. Der Werte einer Amerikanischen und einer Europäischen Option werden mit Hilfe desselben Binomialbaumes bestimmt. Zusätzlich wird der Wert der Europäischen Option mit Hilfe der Black-Scholes Formel berechnet. Der Fehler, der bei der Berechnung der Europäischen Option im Binomialbaum auftritt, ist identisch zu dem Fehler der bei der Bewertung der Amerikanischen Option im Binomialbaum entsteht. Es folgt der korrigierte Wert  $V^{am}$  einer Amerikanischen Option

$$V^{am} = V_{Binom}^{am} + V_{BS}^{eur} - V_{Binom}^{eur}. \quad (4.19)$$

Mit Hilfe dieser Technik können Fehler bei der Bewertung von Amerikanischen Optionen im Binomialbaum reduziert werden. Eine Anwendung auf andere Verfahren, z.B. Monte Carlo Simulation, ist möglich. Ausführlichere Informationen zur Control Variate Technik im Kontext der Optionsbewertung können in [HW88] nachgelesen werden.

#### Bemerkung 4.1.7

Die Einbeziehung von Dividendenzahlungen im Binomialmodell ist möglich. Findet eine Ausschüttung während der Optionslaufzeit zum Zeitpunkt  $t_k$  statt, so fällt der Wert des Kurses  $S$  sprunghaft um den entsprechenden Ausschüttungsbetrag. Die Aktienkurswerte des Baumes zum Zeitpunkt  $t_k$  werden entsprechend heruntergesetzt.

#### Bemerkung 4.1.8

Das Binomialmodell lässt sich leicht erweitern. Eine einfache Erweiterung ist das Trinomialmodell. Hierbei gibt es an den einzelnen Knoten drei Entwicklungsmöglichkeiten mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$ . Es gilt dabei  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ . Aufgrund der drei Entwicklungsmöglichkeiten bietet das Trinomialmodell eine höhere Genauigkeit für den Optionspreis.

### 4.1.4 Die Risikokennziffern

Entsprechend der Risikokennziffern im Black-Scholes Modell können im Binomialmodell diese Kennziffern auch bestimmt werden.

Die Risikokennziffer Delta beschreibt die Änderungsrate des Optionswertes bezüglich des zugrunde liegenden Aktienkurses. Es gilt also

$$\Delta = \frac{\Delta V}{\Delta S}$$

wobei  $\Delta S$  eine kleine Änderung im Aktienkurs und  $\Delta V$  die zugehörige kleine Änderung im Optionswert beschreibt. Zum Zeitpunkt  $t_1$  ist  $V_{11}$  der Wert der Option, wenn der Aktienkurs  $Su$  ist.  $V_{01}$  ist der Wert der Option, wenn sich der Aktienkurs zu  $Sd$  entwickelt. Die Änderung des zugrunde liegenden Aktienkurses  $S$  beträgt demnach

$$\Delta S = Su - Sd.$$

Die Änderung des Optionswertes ist

$$\Delta V = V_{11} - V_{01}.$$

Es ergibt sich schließlich als Schätzung für Delta zum Zeitpunkt  $t_1 = \Delta t$

$$\Delta = \frac{V_{11} - V_{01}}{Su - Sd} = \frac{V_{11} - V_{01}}{S_{11} - S_{01}}.$$

Die nächste Risikokennziffer, das Gamma, beschreibt die Änderungsrate von Delta bezüglich einer Änderung im Aktienkurs. Um Gamma zu bestimmen, betrachten wir die beiden Schätzungen von Delta zum Zeitpunkt  $t_2 = 2\Delta t$ . Wenn der Aktienkurs  $S = \frac{(Su^2 + S)}{2}$  ist, beträgt das Delta  $\Delta = \frac{V_{22} - V_{12}}{Su^2 - S} = \frac{V_{22} - V_{12}}{S_{22} - S_{12}}$ . Bei  $S = \frac{(S + Sd^2)}{2}$  gilt für Delta  $\Delta = \frac{V_{12} - V_{02}}{S - Sd^2} = \frac{V_{12} - V_{02}}{S_{12} - S_{02}}$ .  $h$  sei die Differenz der beiden Werte für  $S$

$$h = 0.5(Su^2 - Sd^2).$$

Für Gamma ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\frac{V_{22} - V_{12}}{Su^2 - S} - \frac{V_{12} - V_{02}}{S - Sd^2}}{h} \\ &= \frac{\frac{V_{22} - V_{12}}{S_{22} - S_{12}} - \frac{V_{12} - V_{02}}{S_{12} - S_{02}}}{h} \end{aligned}$$

Theta, die Änderungsrate des Optionswertes bezüglich der Zeit, kann direkt am Baum bestimmt werden. Eine Schätzung für Theta ist

$$\Theta = \frac{V_{12} - V_{00}}{2\Delta t}.$$

Die nächste Risikokennziffer, das Vega, beschreibt die Änderungsrate des Optionswertes bezüglich einer Änderung in der Volatilität. Um Vega zu berechnen, muss

zunächst ein neuer Baum, mit veränderter Volatilität bestimmt werden. Hieraus ergibt sich ein neuer Wert für die Option. Sei  $V$  der ursprüngliche Optionswert und  $V^*$  der Optionswert mit veränderter Volatilität. Für Vega gilt

$$\Lambda = \frac{V - V^*}{\Delta\sigma}.$$

Die Schätzung der Risikokennziffer Rho erfolgt auf ähnliche Weise wie zuvor bei der Schätzung von Vega. Zwei Bäume werden berechnet, wobei bei einem Baum ein veränderter Zinssatz zur Berechnung verwendet wird. Die Optionswerte sind  $V$  und  $V^*$  mit verändertem Zinssatz. Es ergibt sich für Rho

$$\rho = \frac{V - V^*}{\Delta r}.$$

#### 4.1.5 Approximation des Black-Scholes Modells durch das Binomialmodell

Im kontinuierlichen Black-Scholes Modell kann der Optionswert exakt bestimmt werden. Für genügend kleine Zeitschritte  $\Delta t$  konvergiert der Optionswert, berechnet im Binomialmodell nach Cox, Ross und Rubinstein gegen den exakten Black-Scholes Wert. Daher approximiert das Binomialmodell das Black-Scholes Modell. Die Risiko-neutralität des Black-Scholes Modells spiegelt sich auch im diskreten Binomialmodell wieder. Die subjektiven Wahrscheinlichkeiten der Aufwärts- und Abwärtsbewegungen des Aktienkurses gehen nicht in die Binomialformel ein. Es folgt eine Konvergenzuntersuchung des Binomialmodells auf Grundlage von [Kwo98, Seite 199-2002].

##### Approximation der Black-Scholes Gleichung durch die Binomialformel

Die Binomialformel für den Wert einer Europäischen Call-Option ist gegeben durch

$$C = [pC_u^{\Delta t} + (1 - p)C_d^{\Delta t}]e^{-r\Delta t}$$

mit  $C_u^{\Delta t} = \max(uS - K, 0)$  und  $C_d^{\Delta t} = \max(dS - K, 0)$ . Für genügend kleine Zeitschritte  $\Delta t$  konvergiert die Binomialmethode gegen die Black-Scholes Gleichung des kontinuierlichen Modells. Es gilt  $\Delta t \rightarrow 0$ . Die Gitterfunktion der Binomialmethode muss zunächst in eine stetige Funktion überführt werden, so dass beide Funktionen in den Gitterpunkten übereinstimmen. Für die Binomialformel folgt deshalb

$$C(S, t - \Delta t) = [pC(uS, t) + (1 - p)C(dS, t)]e^{-r\Delta t}. \quad (4.20)$$

Die Laufzeit der Option sei  $t - \Delta t$ , damit die spätere Untersuchung der Taylorentwicklung von  $C(uS, t + \Delta t)$  und  $C(dS, t + \Delta t)$  nicht nötig ist. Unter der Annahme, dass  $C(S, t)$  ausreichend stetig ist, ergibt sich für die Taylorentwicklung der Bino-

Binomialformel (4.20) in  $(S, t)$ :

$$\begin{aligned}
 & -C(S, t - \Delta t) + [pC(uS, t) + (1 - p)C(dS, t)]e^{-r\Delta t} \\
 &= \frac{\partial C}{\partial t}(S, t)\Delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}(S, t)\Delta t^2 + \dots - (1 - e^{-r\Delta t})C(S, t) \\
 &+ e^{-r\Delta t}\{[p(u - 1) + (1 - p)(d - 1)]S\frac{\partial C}{\partial S}(S, t) \\
 &+ \frac{1}{2}[p(u - 1)^2 + (1 - p)(d - 1)^2]S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, t) \\
 &+ \frac{1}{6}[p(u - 1)^3 + (1 - p)(d - 1)^3]S^3\frac{\partial^3 C}{\partial S^3}(S, t) + \dots\}
 \end{aligned}$$

Durch die Anwendung weiterer Taylorentwicklungen, basierend auf den Binomialparametern nach Cox, Ross und Rubinstein, ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
 1 - e^{-r\Delta t} &= r\Delta t + O(\Delta t^2) \\
 e^{-r\Delta t}[p(u - 1) + (1 - p)(d - 1)] &= e^{-r\Delta t}[e^{r\Delta t} - 1 + O(\Delta t^2)] = r\Delta t + O(\Delta t^2) \\
 e^{-r\Delta t}[p(u - 1)^2 + (1 - p)(d - 1)^2] &= \sigma^2\Delta t + O(\Delta t^2) \\
 e^{-r\Delta t}[p(u - 1)^3 + (1 - p)(d - 1)^3] &= O(\Delta t^2)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann die Taylorentwicklung der Binomialformel vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned}
 & -C(S, t - \Delta t) + [pC(uS, t) + (1 - p)C(dS, t)]e^{-r\Delta t} \\
 &= \left[ \frac{\partial C}{\partial t}(S, t) + rS\frac{\partial C}{\partial S}(S, t) + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, t) - rC(S, t) \right] \Delta t + O(\Delta t^2).
 \end{aligned}$$

$C(S, t)$  erfüllt die Binomialformel und es gilt

$$0 = \frac{\partial C}{\partial t}(S, t) + rS\frac{\partial C}{\partial S}(S, t) + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, t) - rC(S, t) + O(\Delta t).$$

Dies entspricht bis auf den Rundungsfehler  $O(\Delta t)$  der Black-Scholes Gleichung. Die Binomialformel

$$C = [pC_u^{\Delta t} + (1 - p)C_d^{\Delta t}]e^{-r\Delta t}$$

approximiert somit die Black-Scholes Gleichung exakt bis zur 1. Ordnung.

### Konvergenz der Bewertungsformel im $n$ -Perioden Binomialmodell gegen die Black-Scholes Formel

Der Wert einer Europäischen Call-Option im  $n$ -Perioden-Modell kann geschrieben werden als

$$C = \left[ \sum_{j=0}^n C_j^n p^j (1 - p)^{n-j} \max(u^j d^{n-j} S - K)^+ \right] \left( e^{-r\Delta t} \right)^n$$

wobei  $C_j^n = \frac{n!}{j!(n-j)!} = \binom{n}{j}$  der Binomialkoeffizient ist. Im weiteren Verlauf wird der Diskontierungsfaktor mit  $D$  bezeichnet, es gilt also  $e^{-r\Delta t} = D$ .

Eine Call-Option wird nur dann ausgeübt, wenn ihr innerer Wert größer als null ist. Es sei  $k \in \mathbb{N}$  die kleinste nicht-negative ganze Zahl, so dass  $u^k d^{n-k} S \geq K$  gilt. Es folgt

$$k \geq \frac{\ln \frac{K}{Sd^n}}{\ln \frac{u}{d}}.$$

Für den inneren Wert der Option gilt somit

$$\max(u^j d^{n-j} S - K, 0) = \begin{cases} 0 & \text{für } j < k \\ u^j d^{n-j} S - K & \text{für } j \geq k. \end{cases}$$

$k$  beschreibt hierbei die Mindestanzahl an Aufwärtsbewegungen, die notwendig ist, damit die Call-Option in-the-money verfällt.

Die obige Gleichung für den Wert einer Call-Option im  $n$ -Perioden Modell kann vereinfacht werden zu

$$C = \sum_{j=k}^n C_j^n p^j (1-p)^{n-j} u^j d^{n-j} D^n - K D^n \sum_{j=k}^n C_j^n p^j (1-p)^{n-j}. \quad (4.21)$$

Der letzte Term der Gleichung (4.21) kann als risikoneutraler Erwartungswert der Zahlung des Halters zum Fälligkeitszeitpunkt mit Diskontierungsfaktor  $D^n$  interpretiert werden.

$$\sum_{j=k}^n C_j^n p^j (1-p)^{n-j}$$

kennzeichnet die Wahrscheinlichkeit in der risikoneutralen Welt für einen Verfall der Option in-the-money. Diese Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die Binomialverteilung. Sie ist definiert durch

$$\tilde{B}(k|n, p) = \sum_{j=k}^n C_j^n p^j (1-p)^{n-j}.$$

Hierbei gibt  $\tilde{B}(k|n, p)$  die Wahrscheinlichkeit für mindestens  $k$  Erfolge bei  $n$ -maliger Wiederholung des Versuches an.  $p$  kennzeichnet die Erfolgswahrscheinlichkeit in jedem Versuch.

Mit  $p' = up \cdot D$  und  $1 - p' = d(1 - p) \cdot D$  läßt sich der Optionswert im  $n$ -Perioden Modell auch schreiben als

$$C = S \tilde{B}(k|n, p') - K D^n \tilde{B}(k|n, p). \quad (4.22)$$

Der erste Term repräsentiert dabei den diskontierten Erwartungswert des Aktienkurses zum Fälligkeitszeitpunkt, falls die Call-Option in-the-money verfällt. Der Barwert der erwarteten Kosten bei Ausübung der Call-Option ist durch den zweiten Term bestimmt. Der diskontierte Erwartungswert wird gemäß der angepassten risikoneutralen diskreten Binomialverteilung verwendet.

Der Grenzwert der Binomialformel ist die Black-Scholes Gleichung. Es läßt sich

vermuten, dass die Formel für eine Europäische Call-Option im  $n$ -Perioden Binomialmodell, gegeben in Gleichung (4.22), für  $n \rightarrow \infty$ , bzw.  $\Delta t \rightarrow 0$  gegen die Black-Scholes Formel konvergiert. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S\tilde{B}(k|n, p') - KD^n \tilde{B}(k|n, p)] = SN(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) \quad (4.23)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \text{ und } \tau = T - t.$$

$N(x)$  bezeichnet wie zuvor die kumulative Standard-Normalverteilung.

Der Beweis dieser Aussage basiert auf dem Zentralen Grenzwertsatz.

**Satz 4.1.9** [ZENTRALER GRENZWERTSATZ]

$X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$E(X_i) = \mu \text{ und } \text{Var}(X_i) = \sigma^2 = E(X_i - \mu)^2 > 0$$

. Definiere die standardisierte Summe

$$Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

. Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert die Verteilungsfunktion  $F_n(z) = P(Z_n \leq z)$  gegen die Verteilungsfunktion  $N(z)$  der Standardnormalverteilung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\bar{X} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Aus dem Zentralen Grenzwertsatzes ergibt sich das folgende Theorem.

**Theorem 4.1.10** [APPROXIMATION DER BINOMIALVERTEILUNG]

Sei  $Y$  eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern  $n$  und  $p$ , wobei  $n$  für die Anzahl an Wiederholungen und  $p$  für die Erfolgswahrscheinlichkeit steht. Dann ist  $Y$  für große  $n$  annähernd normalverteilt mit Erwartungswert  $np$  und Varianz  $np(1-p)$ .

Für den Beweis ist es ausreichend

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}(k|n, p) = N\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \quad (4.24)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}(k|n, p) = N\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \quad (4.25)$$

zu zeigen.

$\tilde{B}(k|n, p)$  bezeichnet im  $n$ -Perioden Binomialmodell die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl an Aufwärtsbewegungen des Aktienkurses größer oder gleich  $k$  ist. Hierbei

ist  $p$  die Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung.  $j$  sei eine ganzzahlige Zufallsvariable, die die Anzahl an Aufwärtsbewegungen in den  $n$  Perioden angibt. Die Gegenwahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$1 - \tilde{B}(k|n, p) = P(j < k - 1) = P\left(\frac{j - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{k - 1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \quad (4.26)$$

mit der normalisierten Binomialvariablen  $\frac{j - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ .  $S$  und  $S^*$  bezeichnen den Aktienkurs heute und in  $n$  Perioden. Für  $S^*$  gilt  $S^* = u^j d^{n-j} S$ . Hieraus folgt für die relative Aktienkursänderung

$$\ln S^* - \ln S = \ln \frac{S^*}{S} = j \ln \frac{u}{d} + n \ln d.$$

Die binomialverteilte Zufallsvariable  $j$  besitzt den Erwartungswert  $E(j) = np$  und die Varianz  $\text{Var}(j) = np(1-p)$ . Es besteht eine lineare Abhängigkeit zwischen  $\ln \frac{S^*}{S}$  und  $j$ . Deshalb ergibt sich für den Erwartungswert und die Varianz von  $\ln \frac{S^*}{S}$

$$\begin{aligned} E\left(\ln \frac{S^*}{S}\right) &= E(j) \ln \frac{u}{d} + n \ln d = n\left(p \ln \frac{u}{d} + \ln d\right) \\ \text{Var}\left(\ln \frac{S^*}{S}\right) &= \text{Var}(j) \left(\ln \frac{u}{d}\right)^2 = np(1-p) \left(\ln \frac{u}{d}\right)^2. \end{aligned}$$

#### Bemerkung 4.1.11

*Im Black-Scholes Modell folgt der logarithmierte Aktienkurs einem Wiener Prozess. Seien  $S$  und  $S_T$  Aktienkurse zum Zeitpunkt  $t$  und zum späteren Zeitpunkt  $T$ , dann ist  $\ln S_T - \ln S = \ln \frac{S_T}{S}$  normalverteilt mit Erwartungswert  $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)$  und Varianz  $\sigma^2(T - t)$ . Hierbei wird die Driftrate  $\mu$  durch den risikolosen Zinssatz  $r$  ersetzt, um eine risikoneutrale Bewertung zu gewährleisten.*

Für genügend kleine Zeitschritte  $\Delta t$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  bzw.  $n \rightarrow \infty$ , sollten der Erwartungswert und die Varianz der logarithmierten, relativen Aktienkursänderung  $\ln \frac{S^*}{S}$  des diskreten Binomialmodells und des kontinuierlichen Black-Scholes Modell übereinstimmen. Mathematisch formuliert bedeutet dies:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(p \ln \frac{u}{d} + \ln d\right) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \quad (4.27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np(1-p) \left(\ln \frac{u}{d}\right)^2 = \sigma^2\tau, \quad \tau = T - t. \quad (4.28)$$

Mit  $k \geq \frac{\ln \frac{K}{Sd^n}}{\ln \frac{u}{d}}$  gilt

$$k - 1 = \frac{\ln \frac{K}{Sd^n}}{\ln \frac{u}{d}} - \alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (4.29)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann die Gegenwahrscheinlichkeit  $1 - \tilde{B}(k|n, p)$  geschrie-

ben werden als

$$\begin{aligned}
 1 - \tilde{B}(k|n, p) &= P(j < k - 1) \\
 &= P\left(\frac{j - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{k - 1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
 &= P\left(\frac{j - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{\frac{\ln \frac{K}{Sd^n}}{\ln \frac{u}{d}} - \alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
 &= P\left(\frac{j - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{\ln \frac{K}{S} - n(p \ln \frac{u}{d} + \ln d) - \alpha \ln \frac{u}{d}}{\sqrt{np(1-p)} \ln \frac{u}{d}}\right).
 \end{aligned}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  bzw.  $\Delta t \rightarrow 0$  besitzen  $\sqrt{np(1-p)} \ln \frac{u}{d}$  und  $n(p \ln \frac{u}{d} + \ln d)$  einen Grenzwert (siehe Gleichungen (4.27), (4.28)). Der Term  $\alpha \ln \frac{u}{d}$  ist von der Ordnung  $O(\sqrt{\Delta t})$ .

Das Zusammenfügen aller bisherigen Ergebnisse liefert für den Grenzfall  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - \tilde{B}(k|n, p)] = N\left(\frac{\ln \frac{K}{S} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad \tau = T - t.$$

Mittels Umformung ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}(k|n, p) = 1 - N\left(\frac{\ln \frac{K}{S} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

Daraus folgt aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Standard-Normalverteilung  $\forall x \in \mathbb{R} N(-x) = 1 - N(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}(k|n, p) = 1 - N\left(\frac{\ln \frac{K}{S} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) = N\left(\frac{\ln \frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

was zu zeigen war.

Der Beweis von Gleichung (4.25) erfolgt analog.

Zu zeigen ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}(k|n, p') = N\left(\frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

mit  $\tau = T - t$  und  $p' = up \cdot R = up \cdot e^{-r\Delta t}$ .

Es gilt für die Gegenwahrscheinlichkeit

$$1 - \tilde{B}(k|n, p') = P(j < k - 1) = P\left(\frac{j - np'}{\sqrt{np'(1-p')}} < \frac{k - 1 - np'}{\sqrt{np'(1-p')}}\right). \quad (4.30)$$

Wie bereits im vorangegangenen Beweis ergibt sich mit  $S^* = u^j d^{n-j} S$  für die relative Aktienkursänderung

$$\ln \frac{S^*}{S} = j \ln \frac{u}{d} + n \ln d.$$

Die binomialverteilte Zufallsvariable  $j$  hat den Erwartungswert  $E(j) = np'$  und die Varianz  $\text{Var}(j) = np'(1 - p')$ . Daher ergibt sich für den Erwartungswert und die Varianz von  $\ln \frac{S^*}{S}$

$$\begin{aligned} E\left(\ln \frac{S^*}{S}\right) &= E(j) \ln \frac{u}{d} + n \ln d = n\left(p' \ln \frac{u}{d} + \ln d\right) \\ \text{Var}\left(\ln \frac{S^*}{S}\right) &= \text{Var}(j) \left(\ln \frac{u}{d}\right)^2 = np'(1 - p') \left(\ln \frac{u}{d}\right)^2. \end{aligned}$$

Mittels der Taylorentwicklung von  $n\left(p' \ln \frac{u}{d} + \ln d\right)$  und  $np'(1 - p') \left(\ln \frac{u}{d}\right)^2$  in Abhängigkeit von  $\Delta t$  ergibt sich für den Grenzfall  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(p' \ln \frac{u}{d} + \ln d\right) = \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \quad (4.31)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np'(1 - p') \left(\ln \frac{u}{d}\right)^2 = \sigma^2\tau, \quad \tau = T - t. \quad (4.32)$$

Mit  $k \geq \frac{\ln \frac{K}{Sd^n}}{\ln \frac{u}{d}}$  gilt

$$k - 1 = \frac{\ln \frac{K}{Sd^n}}{\ln \frac{u}{d}} - \alpha, \quad \text{mit } 0 < \alpha \leq 1.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ergibt sich dann

$$\begin{aligned} 1 - \tilde{B}(k|n, p') &= P(j < k - 1) \\ &= P\left(\frac{j - np'}{\sqrt{np'(1 - p')}} < \frac{\ln \frac{K}{S} - n\left(p' \ln \frac{u}{d} + \ln d\right) - \alpha \ln \frac{u}{d}}{\sqrt{np'(1 - p')} \ln \frac{u}{d}}\right). \end{aligned}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  besitzen  $\sqrt{np'(1 - p')} \ln \frac{u}{d}$  und  $n\left(p' \ln \frac{u}{d} + \ln d\right)$  obige Grenzwerte.  $\alpha \ln \frac{u}{d}$  ist von der Ordnung  $O(\sqrt{\Delta t})$ . Für den Grenzwert von  $1 - \tilde{B}(k|n, p)$  für  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - \tilde{B}(k|n, p')] = N\left(\frac{\ln \frac{K}{S} - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

Mittels einer Umformung und der Symmetrieeigenschaft der Standard-Normalverteilung folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}(k|n, p') = 1 - N\left(\frac{\ln \frac{K}{S} - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) = N\left(\frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

was zu zeigen war.

Die Binomialformel für eine Europäische Call-Option im  $n$ -Perioden Modell konvergiert für genügend kleine Zeitschritte gegen die Black-Scholes Formel. Zusammenfassend gilt: Das diskrete Binomialmodell approximiert das kontinuierliche Black-Scholes Modell.

### 4.1.6 Die Methode von Leisen und Reimer

Das diskrete Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein (CRR-Modell) konvergiert für genügend kleine Diskretisierungszeitschritte gegen das kontinuierliche Black-Scholes Modell. Die Konvergenz verhält sich jedoch nicht monoton, sondern oszillierend. Zusätzlich weist sie eine Wellenstruktur auf. Dies verdeutlicht Abbildung 4.4 anhand eines Beispiels. Es wurde der Wert einer Europäischen Put-Option mit folgenden Parametern berechnet:  $S = 100$ ,  $K = 110$ ,  $T = 1$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.3$  und  $M = 10, \dots, 100$ . Die linke Abbildung veranschaulicht die Preisentwicklung des binomialen Optionswertes. Der exakte Black-Scholes Wert ist zusätzlich als horizontale Gerade angegeben. In der rechten Abbildung ist der absolute Fehler gegen den Aufwand  $M^2$  der Binomialmethode aufgetragen. Zur absoluten Fehlerberechnung wurde der exakte Black-Scholes Wert verwendet. Die Konvergenzrate des Binomialverfahrens ist  $\frac{1}{2}$ .

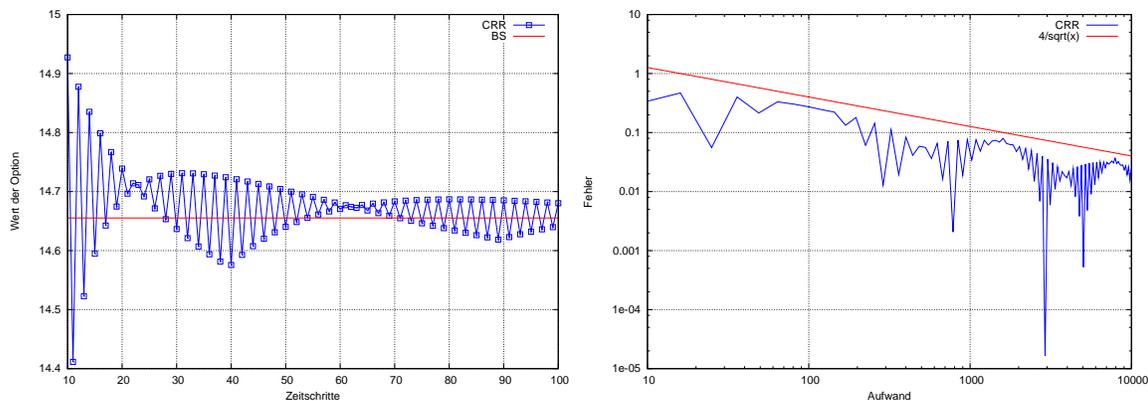


Abbildung 4.4: Preisentwicklung (links) einer Europäischen Put-Option im CRR-Modell und Konvergenzrate (rechts) der Binomialmethode nach Cox, Ross und Rubinstein.

Dietmar Leisen und Matthias Reimer präsentieren in ihrem Artikel [LM96] eine Methode zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens von Binomialverfahren. Mit Hilfe einer Modifikation der Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  des Binomialbaumes werden das Oszillationsverhalten sowie die Wellenstruktur der Preisfunktion bei gleichbleibender Baumstruktur minimiert. Die Forderung von maximaler Genauigkeit bei einer minimalen Anzahl von Zeitschritten  $M$  steht neben der Minimierung der Unregelmäßigkeiten im Vordergrund.

Die Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  im Binomialmodell nach Cox, Ross und Rubinstein sind so konstruiert, dass Konvergenz gegen die Standard-Normalverteilung gegeben ist. Dabei wird die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert. Im einfachsten Fall wird hierzu das Moivre-Laplace Theorem<sup>1</sup> verwendet. Bei der Anwendung der Camp und Paulson Methode [Cam51], sowie vor allen bei der Anwendung

<sup>1</sup>Es sei  $X_n$  binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p$ . Dann konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  die Verteilung von  $Y_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$  gegen die Standard-Normalverteilung:  $P(Y_n \leq x) \rightarrow N(x) \forall x \in \mathbb{R}$ .

Der Quotient  $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$  ist also approximativ  $N(0, 1)$ -verteilt.

der Peizer und Pratt Approximationen [Pra68] ist der Grad der Genauigkeit beachtlich. Mit Hilfe dieser Approximationsmethoden wird der Eingabewert  $z$  für die Standard-Normalverteilung  $N(z)$  so bestimmt, dass die Binomialverteilung  $B(n, p)$  mit möglichst geringem Fehler approximiert wird. Leisen und Reimer wählen die umgekehrte Ausgangsposition. Sie approximieren die Normalverteilung mittels der Binomialverteilung. Zu diesem Zweck verwenden sie die Inversionsformel der Camp-Paulson Methode und die Inversionsformeln von Peizer und Pratt. Für eine gegebene Baumstruktur ergeben sich die folgenden Inversionsformeln zur Bestimmung des Verteilungsparameters  $p$ , so dass die Normalverteilung  $N(z)$  mittels der Binomialverteilung  $B(n, p)$  approximiert wird.

**(A) Camp-Paulson Inversion:**

$$p(z) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left( \frac{[9x-1][9y-1] + 3z[x(9y-1)^2 + y(9x-1)^2 - 9xyz^2]^{\frac{1}{2}}}{[9y-1]^2 - 9yz^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.33)$$

mit  $x = n - a$ ,  $y = a + 1$  und  $z$  steht für den Eingabewert der Standard-Normalverteilung, der in der Black-Scholes Formel benutzt wird.

**(B) Peizer-Pratt-Methode-1-Inversion:**

$$p(z) = \frac{1}{2} + \text{sign}(z) \frac{1}{2} \sqrt{1 - \exp \left[ - \left( \frac{z}{n + \frac{1}{3}} \right)^2 \left( n + \frac{1}{6} \right) \right]}, \quad (4.34)$$

mit  $n = 2a + 1$  und  $z$  steht für den Eingabewert der Standard-Normalverteilung, der in der Black-Scholes Formel benutzt wird.

**(C) Peizer-Pratt-Methode-2-Inversion:**

$$p(z) = \frac{1}{2} + \text{sign}(z) \frac{1}{2} \sqrt{1 - \exp \left[ - \left( \frac{z}{n + \frac{1}{3} + \frac{1}{10 \cdot (n+1)}} \right)^2 \left( n + \frac{1}{6} \right) \right]}, \quad (4.35)$$

mit  $n = 2a + 1$  und  $z$  steht für den Eingabewert der Standard-Normalverteilung, der in der Black-Scholes Formel benutzt wird.

$n$  ist hierbei die Anzahl der Zeitschritten im Binomialbaum und  $a$  beschreibt die Anzahl der Aufwärtsbewegungen, die benötigt werden, um den Ausübungspreis  $K$  zu überschreiten. Für die Peizer-Pratt Methode muss die Baumstruktur auf eine ungerade Anzahl an Zeitschritten eingeschränkt werden. Die Camp-Paulson Methode ist auf eine beliebige Baumstruktur anwendbar.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse können die Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  im CRR-Binomialmodell so verändert werden, dass die Konvergenz verbessert wird. Durch Einsetzen der beiden Black-Scholes Parameter  $d_1$  und  $d_2$  in die Inversionsformeln werden zwei Verteilungsparameter  $p(d_+) = p(d_1)$  und  $p(d_-) = p(d_2)$  bestimmt. Die Parameter  $u$  und

$d$  für die Aufwärts- und Abwärtsbewegungen im Baum lassen sich aufgrund der No-Arbitrage Bedingung wie folgt berechnen. Für  $p(d_-)$  gilt  $p(d_-) = (e^{r\Delta t} - d)/(u - d)$  unter Ausschluß von Arbitrage. Darüber hinaus gilt für  $p(d_+) = (u \cdot p(d_-))/e^{r\Delta t}$ . Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich ein Gleichungssystem. Durch Lösen dieser Gleichungen sind die Parameter  $u$  und  $d$  definiert. Zusammenfassend gilt:

$$u = e^{r\Delta t} \cdot \frac{p(d_+)}{p(d_-)}, \quad (4.36)$$

$$d = \frac{e^{r\Delta t} - p(d_-)u}{1 - p(d_-)}, \quad (4.37)$$

$$d_{\pm} = d_{1,2} = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (4.38)$$

Die daraus resultierenden Binomialbaum-Parameter unterscheiden sich nur geringfügig von den ursprünglichen CRR-Modell Parametern. Jedoch beinhalten sie erstaunliche Konvergenzeigenschaften.

In Abbildung 4.5 sind die verbesserten Konvergenzeigenschaften anhand eines Beispiels für die Peizer-Pratt Inversionen dargestellt. Die Optionsparameter lauten wie

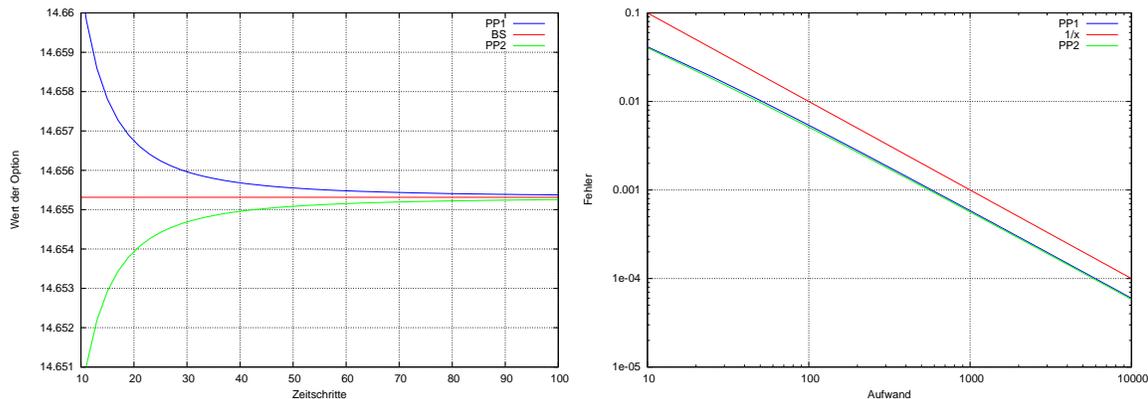


Abbildung 4.5: Binomialmodell mit PP1 und PP2

im obigen Beispiel  $S = 100$ ,  $K = 110$ ,  $T = 1$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.3$  und  $M = 11, \dots, 99$ . Die Anzahl der Zeitschritte  $M$  muss bei den Inversionsformeln von Peizer-Pratt ungerade gewählt werden. Der berechnete Optionswert im Binomialbaum mit den Inversionsformeln von Peizer-Pratt konvergiert monoton gegen den exakten Black-Scholes Wert mit Rate 1. Der Unterschied zwischen beiden Inversionen ist sehr gering. Die Anwendung der Camp-Paulson Inversion führt auch zu einem verbessertem Konvergenzverhalten der Binomialmethode. Die Konvergenz ist monoton, erfolgt jedoch nur mit Konvergenzrate  $\frac{1}{2}$ .

Eine ausführlichere Untersuchung der Konvergenz des Binomialmodells nach Cox, Ross und Rubinstein, sowie deren Verbesserung, ist in [LM96] nachzulesen.

### 4.1.7 Das Binomialverfahren für Bermudsche Optionen

Bermudsche Optionen dürfen nur zu vorher festgelegten Zeitpunkten während der Laufzeit der Option vorzeitig ausgeübt werden. Sie können beispielsweise halbjährlich, monatlich oder wöchentlich ausgeübt werden. Die Anzahl der vorzeitigen Ausübungszeitpunkten sei  $A$ . Der Fälligkeitszeitpunkt  $T$  ist dabei in der Anzahl der Ausübungszeitpunkte enthalten. Die äquidistante Zeitschrittweite zwischen den Ausübungszeitpunkten ist bestimmt durch

$$\Delta a = \frac{T}{A}.$$

Hieraus ergeben sich die Ausübungszeitpunkte

$$a_j = j \cdot \Delta a \text{ mit } j = 1, \dots, A.$$

Im Binomialmodell wird die Laufzeit der Option in  $M$  äquidistante Zeitschritte der Länge

$$\Delta t = \frac{T}{M}$$

unterteilt. Die diskreten Zeitpunkte sind gegeben durch

$$t_i = i \cdot \Delta t \text{ mit } i = 0, \dots, M.$$

Nun stellt sich die Frage, wie die Anzahl an Diskretisierungszeitschritten im Binomialmodell zu wählen ist, um den Wert einer Bermudschen Option mit vorzeitigen Ausübungszeitpunkten zu bestimmen. Im Folgenden werden drei mögliche Lösungsansätze erläutert.

#### Anpassung

Die einfachste Lösung ist die Anpassung der verschiedenen Zeitpunkte, Diskretisierungszeitpunkte und Ausübungszeitpunkte, aneinander, d.h. die Anzahl an Diskretisierungszeitpunkten wird so gewählt, dass jeder Ausübungszeitpunkt  $a_j$  mit einem diskreten Zeitpunkt  $t_i$  übereinstimmt.

Dies impliziert, dass mindestens soviele Diskretisierungszeitpunkte gewählt werden müssen, wie es Ausübungszeitpunkte gibt. Die Anzahl der Diskretisierungszeitpunkte muss einem Vielfachen der Ausübungszeitpunkte entsprechen. Für die Zeitschritte im Binomialmodell muss

$$M = k \cdot A \text{ mit } k \in \mathbb{N}$$

gelten.

Die Bewertung einer Bermudschen Option mittels der Binomialmethode erfolgt in diesem Fall analog zu der Bewertung Amerikanischer Optionen. Eine Prüfung der vorzeitigen Ausübung wird jedoch nur an den vorher festgelegten Ausübungszeitpunkten durchgeführt und nicht wie bei Amerikanischen Optionen an jedem Diskretisierungszeitpunkt.

In der Vorwärtsphase werden die diskreten Aktienkurse zu jedem Zeitpunkt  $t_i$  mit

Startkurs  $S_0$  nach Formel (4.13) berechnet. Danach wird in der Rückwärtsphase zunächst mittels der Auszahlungsfunktionen (4.14) bzw. (4.15) der Wert der Option am Fälligkeitszeitpunkt  $T = t_M$  bestimmt. Hieraus werden die Optionswerte für alle Zeitpunkte  $t_i$  mit  $i = M - 1, \dots, 0$  berechnet. Für jeden Zeitpunkt  $t_i = a_j$  ist zusätzlich die vorzeitige Ausübungsmöglichkeit zu prüfen. Hierzu werden die Formeln (4.17) bzw. (4.18) für Amerikanische Optionen verwendet. Ist der Zeitpunkt  $t_i$  kein Ausübungszeitpunkt, so wird der Wert der Bermudischen Option zu diesem Zeitpunkt mit Hilfe der Formel (4.16) für Europäische Optionen bestimmt. Der Wert der Bermudischen Option zum Zeitpunkt  $t_0$  ist damit schließlich bestimmt.

### Interpolation

Die Anzahl der Zeitschritten im Binomialmodell muss nicht grundsätzlich an die Anzahl an vorzeitigen Ausübungszeitpunkten angepasst werden. Fallen die gewählten Diskretisierungszeitpunkte  $t_i$  nicht mit den vorzeitigen Ausübungszeitpunkten  $a_j$  zusammen, können die benötigten Aktienkurse an den Ausübungszeitpunkten mittels Interpolation berechnet werden.

Seien  $t_i$  und  $t_{i+1}$  zwei diskrete Zeitpunkte. Ein vorzeitiger Ausübungszeitpunkt  $a_j$  liegt zwischen diesen beiden Zeitpunkten. Der Aktienkurs an diesem Ausübungszeitpunkt muss bestimmt sein, damit die vorzeitige Ausübungsmöglichkeit geprüft werden kann. Zur Berechnung des fehlenden Kurses können verschiedene Interpolationsmethoden verwendet werden. Im Folgenden werden diese Interpolationsmethoden kurz erläutert.

#### Konstante Interpolation:

$$S(a_j) = S(t_i) \text{ bzw. } S(a_j) = S(t_{i+1}) \quad (4.39)$$

#### Lineare Interpolation:

$$S(a_j) = \frac{a_j - t_i}{t_{i+1} - t_i} (S(t_{i+1}) - S(t_i)) + S(t_i) \quad (4.40)$$

#### Exponentielle Interpolation:

$$S(a_j) = S(t_i) \cdot \exp\left(\frac{(a_j - t_i)}{(t_{i+1} - t_i)} \cdot \ln\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right)\right) \quad (4.41)$$

Zur Berechnung des Wertes einer Bermudischen Option werden zunächst die Aktienkurse an den Diskretisierungszeitpunkten  $t_i$  mit  $i = 0, \dots, M$  mittels (4.13) bestimmt. Anschließend müssen die fehlenden Aktienkurse an den Ausübungszeitpunkten, die nicht mit einem diskreten Zeitpunkt übereinstimmen, interpoliert werden. Mit Hilfe der Auszahlungsfunktionen (4.14) bzw. (4.15) wird der Wert der Option am Fälligkeitszeitpunkt  $T$  an jedem Baumknoten berechnet. Hieraus werden dann die Optionswerte für alle Zeitpunkte  $t_i$  mit  $i = M - 1, \dots, 0$  durch (4.16) sukzessive berechnet. Es muss jedoch zusätzlich an den dazwischen liegenden Zeitpunkten  $a_j$

die vorzeitige Ausübung überprüft werden. Dies geschieht mittels der Formeln (4.17) bzw. (4.18) für Amerikanische Optionen, wobei als Aktienkurs der interpolierte Aktienkurs verwendet wird. Die Diskontierungsschrittweite muss dabei entsprechend verkürzt werden. Liegt z.B. der Ausübungszeitpunkt  $a_j$  zwischen den diskreten Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$ , so wird die Diskontierungsschrittweite zu  $(i+1) \cdot \Delta t - j \cdot \Delta a$ . Die hieraus berechneten Optionswerte an den Ausübungszeitpunkten werden dann für die Berechnung des Optionswertes am nächsten Diskretisierungszeitschritt benutzt. Die Diskontierungsschrittweite ist hierbei ebenfalls anzupassen. Am Ende der Rückwärtsphase ist der Wert der Bermudschen Option zum Zeitpunkt  $t_0$  bestimmt.

### Extrapolation

Fallen die vorzeitigen Ausübungszeitpunkte  $a_j$  nicht mit den Diskretisierungszeitpunkten  $t_i$  zusammen, so können die benötigten Aktienkurse an den Ausübungszeitpunkten auch mittels Extrapolation berechnet werden.

Es seien  $t_i$  und  $t_{i+1}$  zwei diskrete Zeitpunkte. Mit Hilfe der Aktienkurse an diesen beiden Zeitpunkten kann der Aktienkurs an einem vorzeitigen Ausübungszeitpunkt  $a_j$  bestimmt werden. Im Unterschied zur Interpolationsmethode liegt dieser vorzeitige Ausübungszeitpunkt  $a_j$  jedoch nicht zwischen den diskreten Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$ , sondern vor dem Zeitpunkt  $t_i$ , also  $a_j < t_i$ , oder hinter dem Zeitpunkt  $t_{i+1}$ , also  $a_j > t_{i+1}$ . Die Berechnung des fehlenden Aktienkurses erfolgt mit Hilfe der beiden Aktienkurse  $S(t_i)$  und  $S(t_{i+1})$ . Im Folgenden werden zwei verschiedene Extrapolationsmethoden kurz dargestellt.

#### Lineare Extrapolation:

$$S(a_j) = \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \cdot (a_j - t_{i+1}) + S(t_{i+1})$$

#### Exponentielle Extrapolation:

Es gibt zwei verschiedene Exponentielle Extrapolationsmethoden. Die Unterscheidung erfolgt auf Grundlage der verwendeten Basisfunktion. Als Basisfunktion dienen die Funktionen  $a \cdot e^x + b$  und  $a \cdot e^{b \cdot x}$ .

$$S(a_j) = \frac{e^{a_j} - e^{t_{i+1}}}{e^{t_i} - e^{t_{i+1}}} (S(t_i) - S(t_{i+1})) + S(t_{i+1})$$

$$S(a_j) = S(t_i) \cdot \exp \left( \frac{a_j - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot \ln \left( \frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)} \right) \right)$$

Nachdem die fehlenden Aktienkurse extrapoliert worden sind, erfolgt die Berechnung des Optionswertes analog zur Berechnung des Optionswertes nach Interpolation.

#### Bemerkung 4.1.12

*Analog zur Interpolation und Extrapolation der Aktienkurse an den vorzeitigen Ausübungszeitpunkten können auch die Optionswerte an den Ausübungszeitpunkten in der Rückwärtsphase mit Hilfe der Interpolations und Extrapolationsmethoden berechnet werden.*

## 4.2 Das Rendleman-Bartter Modell

Das Black Modell (siehe Kapitel 3.2.3) zur Bewertung von Zinsoptionen basiert auf der Annahme, dass der Zinssatz zu einem zukünftigen Zeitpunkt lognormalverteilt ist. Jedoch können mit Hilfe des Black Modells nur Europäische Zinsoptionen bewertet werden. Zur Bewertung von Zinsoptionen mit vorzeitigem Ausübungsrecht kann das Modell von Rendleman und Bartter [RB80] verwendet werden.

### 4.2.1 Herleitung

Im Gegensatz zum Binomialmodell nach Cox, Ross und Rubinstein (CRR-Modell) ist der zugrunde liegende Basiswert der Option keine Aktie sondern ein Zinssatz oder ein Finanzinstrument, wie z.B. ein Swap. Der zugrunde liegende Zinssatz  $\tilde{r}$  folgt einer Geometrischen Brownschen Bewegung

$$d\tilde{r} = \mu\tilde{r} d\tilde{t} + \sigma\tilde{r} dW$$

im kontinuierlichen Black-Modell. Somit ist der Zinssatz zu einem zukünftigen Zeitpunkt lognormalverteilt.

Der risikoneutrale Prozess von  $\tilde{r}$  beinhaltet die beiden Parameter  $\mu$  und  $\sigma$ .  $\mu$  symbolisiert den erwarteten Ertrag in einer kurzen Zeitperiode. Der Parameter  $\sigma$  ist die Volatilität des Zinssatzes.

Dem Rendleman und Bartter Modell liegen folgende Annahmen zugrunde:

- Es gibt keine Arbitargemöglichkeiten.
- Es fallen keine Transaktionskosten, Steuern oder Dividenden an.
- Jede Partei hat kostenlosen Zugang zu allen Information.
- Die Volatilität und der erwartete Ertrag sind konstant und für alle gleich.

Analog zum CRR-Modell erfolgt eine Diskretisierung des kontinuierlichen Modells. Die Laufzeit  $T$  der Option wird in  $M$  äquidistante Zeitschritte der Länge  $\Delta t = \frac{T}{M}$  unterteilt. In jedem Zeitschritt  $\Delta t$  gibt es nur zwei mögliche Entwicklungen für den Zinssatz. Der Zinssatz steigt um den Faktor  $u$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  oder fällt um den Faktor  $d$  mit der Gegenwahrscheinlichkeit. Die Faktoren  $u$  und  $d$  sind dabei konstant über die gesamte Laufzeit der Option. Im CRR-Modell entspricht die erwartete Rendite der Aktie dem risikolosen Zinssatz  $r$ . Die erwartete Rendite  $\mu$  des Zinssatzes  $\tilde{r}$  entspricht jedoch nicht dem risikolosen Zinssatz  $r$ . Für die Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  ergeben sich damit folgende Werte analog zum CRR-Modell.

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ p &= \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d} \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.2.1**

Das Black Modell liefert einen exakten Wert für Zinsoptionen. Wird die erwartete Rendite  $\mu$  im Rendleman und Bartter Modell auf Null gesetzt, so ist die Differenz zum wahren Wert am geringsten. Es entsteht also der kleinstmögliche Fehler. [RB79]

Mit Hilfe dieser Parameter kann nun in der Vorwärtsphase ein Binomialbaum für den Zinssatz  $\tilde{r}$  analog zum Binomialbaum in Kapitel 4.1.3 entwickelt werden. Es sei  $\tilde{r}_0$  der Zinssatz zum Zeitpunkt  $t_0$ . Die Zinssätze im Binomialbaum werden dann wie folgt berechnet

$$\tilde{r}_{ji} = \tilde{r}_0 u^j d^{i-j}$$

mit  $i = 1, 2, \dots, M$  und  $j = 0, 1, \dots, i$ .

In der Rückwärtsphase werden die Werte der Option  $V_{ji}$  an den Zeitpunkten  $t_i$  mit  $i = M, M - 1, \dots, 0$  bestimmt. Zum Fälligkeitszeitpunkt  $T = t_M$  ist der Wert der Option durch die entsprechende Auszahlungsfunktion des zugrunde liegenden Finanzinstrument bestimmt. Der Wert einer Europäischen Option zum Zeitpunkt  $t_i$  entspricht dann dem Erwartungswert des Optionswertes zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$ . Es gilt

$$V_{ji} = (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1})$$

für  $i = M - 1, \dots, 0$  und  $j = 1, \dots, i$ .

Handelt es sich bei der Option um eine Amerikanische bzw. Bermudsche Option, so muss die vorzeitige Ausübung an erlaubten Zeitpunkten  $t_i = i \cdot \Delta t$  mit  $i < M$  überprüft werden. Der Wert der Option ist dann das Maximum aus der Auszahlungsfunktion des zugrunde liegenden Finanzinstrument und dem Optionswert bei Fortführung.

Die Annahme von Rendleman und Bartter, dass sich der Zinssatz wie eine Aktie verhält, ist ungenau. Der Unterschied zwischen einer Aktie und einem Zinssatz besteht darin, dass der Zinssatz in Wirklichkeit nicht unendlich steigt, bzw. fällt. Es scheint, als würde sich der Zinssatz im Zeitverlauf immer wieder einem Durchschnittsniveau annähern. Dieses Phänomen wird als Mean Reversion bezeichnet. Steigt der Zinssatz sehr hoch, so wird er mittels einer negativen Drift zurückgezogen. Fällt der Zinssatz sehr stark, so zieht eine positive Drift den Zinssatz wieder zurück zum Durchschnittsniveau. Die Idee der Mean Reversion wurde von Rendleman und Bartter nicht aufgenommen. Es gibt viele ökonomische Argumente, warum Modelle mit Mean Reversion (Vasicek Modell, Cox, Ingersoll und Ross Modell, Hull und White Modell) zu bevorzugen sind. Ist der Zinssatz sehr hoch, so wird die Wirtschaft abgeschwächt und die Nachfrage an Anlagefonds geht zurück. Als Konsequenz sinken die Zinsen wieder. Das Gegenteil lässt sich bei niedrigen Zinsen beobachten. Die Nachfrage an Fonds steigt und dadurch steigt der Zinssatz. Auch wenn das Modell von Rendleman und Bartter diese Effekte nicht aufgreift, überzeugt es durch seine Einfachheit. Es lässt sich leicht implementieren und benötigt wenig Rechenzeit.

**4.2.2 Anwendung auf Bermudsche Swaptions**

Es folgt eine detaillierter Darstellung des Rendleman und Bartter Modells für die Anwendung auf eine Bermudsche Swaption.

Der Käufer einer Bermudischen Payer-Swaption erwirbt das Recht, zu im voraus festgelegten Zeitpunkten in einen Payer-Swap mit fester Laufzeit eintreten zu dürfen, d.h. den Festzins  $R_X$  zu zahlen und den variablen Zinssatz  $\tilde{r}$  zu erhalten. Die Laufzeit der Option beträgt  $T$  und die Swaplafzeit  $n$  Jahre. Im Rahmen des Swap erfolgen  $m$  Zahlungen pro Jahr. Das Kapitalvolumen des Swaps beträgt  $L$ . Sind die Zinssätze nicht mit den gleichen Verzinsungsintervallen ausgestattet, so müssen sie angepasst werden. Es sei  $R_c$  der Zinssatz mit jährlichen Zahlungen und  $R_m$  der Zinssatz mit  $m$  Zahlungen pro Jahr. So lassen sich beide Zinssätze mit den folgenden Gleichungen in den jeweils anderen Zinssatz transformieren.

$$R_c = m \cdot \ln\left(1 + \frac{R_m}{m}\right)$$

$$R_m = m \cdot \left(e^{\frac{R_c}{m}} - 1\right)$$

Weitere Optionsparameter sind die Volatilität  $\sigma$ , der erwartete Ertrag  $\mu$  und der Nullkupon-Zinssatz  $r_i$  mit Fälligkeit  $\tilde{t}_i$ , wobei  $\tilde{t}_i = T + i/m$  gilt. Der Käufer einer Bermudischen Receiver-Swaption erwirbt das Recht, zu im voraus festgelegten Zeitpunkten in einen Receiver-Swap mit fester Laufzeit eintreten zu dürfen, d.h. den Festzins  $R_X$  zu erhalten und den variablen Zinssatz  $\tilde{r}$  zu zahlen. Die Optionsparameter sind bei beiden Swaptions gleich.

Der Wert der Swaptions wird mittels der Binomialmethode basierend auf dem Rendleman und Bartter Modell bestimmt.

Die Optionslaufzeit  $T$  wird in  $M$  äquidistante Zeitschritte  $t_i$  der Länge  $\Delta t$  unterteilt. Die Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  werden berechnet. Es ist  $\tilde{r}_0$  der variable Zinssatz zum Zeitpunkt  $t_0$ . In der Vorwärtsphase wird der Binomialbaum mit den zukünftigen variablen Zinssätze initialisiert. Es gilt

$$\tilde{r}_{ji} = \tilde{r}_0 u^j d^{i-j}$$

mit  $i = 1, 2, \dots, M$  und  $j = 0, 1, \dots, i$ . Zum Fälligkeitszeitpunkt  $t_M = T$  ergibt sich der Wert einer Bermudischen Payer-Swaption durch

$$V_{jM} = \frac{LA}{m} \cdot (\tilde{r}_{jM} - R_X, 0)^+$$

mit

$$A = \sum_{i=1}^{mn} e^{-r_i \cdot (T + \frac{i}{m})}.$$

Für den Wert einer Bermudischen Receiver-Swaption zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  gilt

$$V_{jM} = \frac{LA}{m} \cdot (R_X - \tilde{r}_{jM}, 0)^+.$$

Nun werden die Werte der Swaption  $V_{ji}$  für  $i = M - 1, \dots, 0$  und  $j = 0, 1, \dots, i$  berechnet. Es gilt

$$V_{ji} = (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1})$$

für den Wert zum Zeitpunkt  $t_i$ , falls keine vorzeitige Ausübung zu diesem Zeitpunkt erlaubt ist. Ist eine vorzeitige Ausübung möglich, dann ergibt sich der Wert einer Payer-Swaption aus

$$V_{ji} = \max \left( \left( \frac{LA}{m} \cdot (\tilde{r}_{jM} - R_X), (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}) \right) \right),$$

und für eine Receiver-Swaption gilt

$$V_{ji} = \max \left( \left( \frac{LA}{m} \cdot (R_X - \tilde{r}_{jM}), (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}) \right) \right).$$

Damit ist schließlich der Wert der Swaption zum Zeitpunkt  $t_0$  bestimmt.

Sollten die Ausübungszeitpunkte nicht mit den Diskretisierungszeitpunkten übereinstimmen, so kann der Wert dieser Option mit Hilfe der Anpassungsmethode oder Interpolation bestimmt werden.

## 4.3 Erwartungswertdarstellung nach Geske-Johnson

Geske und Johnson präsentieren in ihrem im Jahr 1984 erschienenen Artikel „The American Put Option Valued Analytically“ [GJ84] einen Bewertungsansatz für Amerikanische Optionen. Ihre Idee besteht darin, Amerikanische Optionenswerte mittels einer Folge von Bermudscher Optionenswerten zu approximieren. Aus den Werten der Bermudschen Optionen wird mit Hilfe von Extrapolation der Wert der Amerikanischen Option bestimmt. Die kontinuierliche Ausübungsmöglichkeit der Amerikanischen Option wird durch eine diskrete Anzahl an Ausübungsmöglichkeiten zu bestimmten, vorher festgelegten Zeitpunkten approximiert. Der Wert einer Bermudschen Option lässt sich über den Erwartungswertansatz mit Hilfe von numerischen Verfahren berechnen. Die Bewertung einer Bermudschen Option nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson wird im Folgenden vorgestellt.

### 4.3.1 Herleitung

Ein grundlegender Ansatz zur Optionspreisbestimmung ist der Martingalansatz. Hierbei entspricht der faire Wert einer Option (ohne vorzeitiges Ausübungsrecht) dem diskontierten Erwartungswert der Auszahlungsfunktion unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugrunde liegenden ökonomischen Faktoren [GG03a]. Der Wert einer Option zum heutigen Zeitpunkt lässt sich dann allgemein schreiben als

$$V(S, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}^*[V(S, T)]$$

wobei  $\mathbb{E}^*$  das äquivalente Martingalmaß bezeichnet. Der Erwartungswert  $\mathbb{E}^*$  lässt sich für Europäische Optionen als folgendes Integral schreiben

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} V(S, T) dx.$$

Als exakte Lösung dieses Integrals ergibt sich die Black-Scholes Formel. Zunächst wird der Wert einer Europäischen Call-Option betrachtet. Mit Hilfe von (3.10) in risikoneutraler Form ( $\mu=r$ ) sowie der Submultiplikationseigenschaft der Normalverteilung

$$N(0, t) = \sqrt{t}N(0, 1) \quad (\sim W(t))$$

gilt für das Integral

$$V_C(S, 0) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \max\{S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}x} - K, 0\} dx.$$

$\chi$  sei die Lösung der Gleichung  $S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}x} - K = 0$ , also

$$\chi = \frac{\ln \frac{K}{S_0} - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Dann gilt

$$V_C(S, 0) = e^{-rT} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}x} - K) dx.$$

Die Lösung des ersten Summanden des Integrals lautet

$$\begin{aligned} & e^{-rT} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}x} dx \\ &= S_0 \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sigma\sqrt{T}-x)^2} dx \\ &= S_0 N(\sigma\sqrt{T} - \chi). \end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden gilt entsprechend

$$e^{-rT} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} K dx = K e^{-rT} N(-\chi).$$

Daraus ergibt sich für den Wert der Call-Option

$$V_C(S, 0) = S_0 N(\sigma\sqrt{T} - \chi) - K e^{-rT} N(-\chi).$$

Dies entspricht genau der Black-Scholes Formel für eine Europäische Call-Option

$$V_C(S, 0) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Put-Call Parität (2.1) ergibt sich für den Wert einer Europäischen Put-Option

$$\begin{aligned}
 V_P(S, 0) &= V_C(S, 0) + Ke^{-rT} - S_0 \\
 &= S_0N(\sigma\sqrt{T} - \chi) - Ke^{-rT}N(-\chi) + Ke^{-rT} - S_0 \\
 &= S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) + Ke^{-rT} - S_0 \\
 &= S_0[N(d_1) - 1] + Ke^{-rT}[1 - N(d_2)] \\
 &= Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1).
 \end{aligned}$$

Geske und Johnson approximieren eine Amerikanische Option mittels Bermudscher Optionen. Auf diese Art von Option ist der Erwartungswertansatz anwendbar. Der Wert einer Bermudschen Option mit  $n$  Ausübungszeitpunkten lässt sich als Summe von Erwartungswerten darstellen. Die Herleitung erfolgt für Put-Optionen, ist aber analog für Call-Optionen durchführbar.

### Annahme 4.3.1

Der Aktienkurs  $S$  folgt einer Geometrischen Brownschen Bewegung. Somit sind die zukünftigen Aktienkurse lognormalverteilt. Hieraus ergibt sich für den Korrelationskoeffizient zwischen den überlappenden Zuwächsen zu den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$ , mit  $t_2 > t_1$

$$\rho_{12} = \frac{\text{Cov}(\Delta z_1, \Delta z_2)}{[\text{Var}(\Delta z_1)\text{Var}(\Delta z_2)]^{1/2}} = (t_1/t_2)^{1/2}$$

mit  $\Delta z_1 = z(t_1) - z(0)$  und  $\Delta z_2 = z(t_2) - z(0)$ .

Außerdem berechnet sich der Preis einer Europäischen Option durch die Black-Scholes Formel.

Im Sinne einer verständlichen Formulierung werden folgende Bezeichnungen gewählt:

- $P_1$  = Wert einer Europäischen Put-Option mit Ausübungszeitpunkt  $T$
- $P_2$  = Wert einer Bermudschen Put-Option mit Ausübungszeitpunkten  $T/2$  und  $T$
- $P_3$  = Wert einer Bermudschen Put-Option mit Ausübungszeitpunkten  $T/3$ ,  $2T/3$  und  $T$
- $\vdots$
- $P_n$  = Wert einer Bermudschen Put-Option mit  $n$  Ausübungszeitpunkten

Hierbei bezeichnet  $T$  die Laufzeit der Put-Option und damit den Fälligkeitszeitpunkt.

Für die Bewertung einer Bermudschen Option mit  $n$  Ausübungszeitpunkten ist die Berechnung von zwei ein-dimensionalen Standard-Normalverteilungen + zwei zwei-dimensionalen Standard-Normalverteilungen + ... + zwei  $n$ -dimensionalen Standard-Normalverteilungen erforderlich. Formal ausgedrückt ergibt sich für eine Bermudsche

Put-Option mit  $n$  vorzeitigen Ausübungszeitpunkten nach dem Erwartungswertansatz folgende Formel

$$\begin{aligned} P_n &= Ke^{c_1} N_1(d_{11}) - SN_1(d_{12}) \\ &\quad + Ke^{c_2} N_2(d_{21}) - SN_2(d_{22}) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + Ke^{c_n} N_n(d_{n1}) - SN_n(d_{n2}). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $e^{c_n}$  den  $n$ -ten Diskontierungsfaktor und  $N_n(\cdot)$  die  $n$ -dimensionale kumulative Standard-Normalverteilung.

Wir betrachten zunächst eine Bermudsche Put-Option mit zwei Ausübungszeitpunkten. Die Laufzeit der Option beträgt  $T$  und beginnt zum Zeitpunkt  $t_0=0$ . Der vorzeitige Ausübungszeitpunkt liegt bei  $T/2$ . Mit  $S_{T/2}$  und  $S_T$  werden die Aktienkurse zum Zeitpunkt  $T/2$  und  $T$  bezeichnet.  $S_{T/2}^*$  bezeichnet den kritischen Aktienkurs zum Zeitpunkt  $T/2$ . Als kritischer Aktienkurs wird der Kurs verstanden, für den es noch gerade vorteilhaft ist, die Option auszuüben.

Die verschiedenen Ausübungsmöglichkeiten zum Zeitpunkt  $T/2$  und  $T$  sind:

- Ausübungsmöglichkeiten zum Zeitpunkt  $T/2$ :
  - $S_{T/2} \leq S_{T/2}^*$  : Die Ausübung ist optimal.
  - $S_{T/2} > S_{T/2}^*$  : Die Ausübung ist nicht optimal, es findet keine Ausübung statt.
- Ausübungsmöglichkeiten zum Zeitpunkt  $T$ :
  - $S_T < K$  : Die Ausübung ist vorteilhaft.
  - $S_T \geq K$  : Es findet keine Ausübung statt.

Der Wert der Bermudschen Put-Option setzt sich also zusammen aus dem Recht, die Option bei  $T/2$  auszuüben, und dem Recht sie bei  $T$  auszuüben. Somit kann der Wert der Option folgendermaßen formuliert werden:

$$\begin{aligned} P_2 &= \text{diskontierter Erwartungswert von } K - S_{T/2}, \text{ wobei } S_{T/2} \leq S_{T/2}^* \\ &\quad + \text{diskontierter Erwartungswert von } K - S_T, \text{ unter der Bedingung,} \\ &\quad \text{dass bei } T/2 \text{ nicht ausgeübt wurde, d.h. } S_{T/2} > S_{T/2}^* \end{aligned}$$

Um den kritischen Aktienkurs  $S_{T/2}^*$  zu berechnen, muss die nichtlineare Gleichung

$$K - P_1(S_{T/2}^*, K; T/2) = S_{T/2}^* \quad (4.42)$$

gelöst werden. Es handelt sich hierbei um eine Fixpunktgleichung die mittels des Newtonverfahrens gelöst wird. Mit  $P_1(S_{T/2}^*, K, T/2)$  wird der Wert einer Europäischen Put-Option zum Zeitpunkt  $t_0$  mit zugrunde liegendem Basiswert  $S_{T/2}^*$ , Laufzeit  $T/2$

und Ausübungspreis  $K$  bezeichnet. Dieser Wert wird mit Hilfe der Black-Scholes Formel berechnet.

$$P_1(S_{T/2}^*, K; T/2) = Ke^{-rT/2}N(-d_2(S_{T/2}^*, K; T/2)) - S_{T/2}^*N(-d_1(S_{T/2}^*, K; T/2))$$

mit

$$d_1(S_{T/2}^*, K; T/2) = \frac{\ln(S_{T/2}^*/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T/2}{\sigma\sqrt{T/2}}$$

und

$$d_2(S_{T/2}^*, K; T/2) = d_1 - \sigma\sqrt{T/2}.$$

$N(\cdot)$  ist die kumulative Standard-Normalverteilung.

Der Wert einer Bermudschen Option mit zwei Ausübungszeitpunkten zum Zeitpunkt  $t_0$  entspricht der Summe der diskontierten Erwartungswerten der Auszahlungsfunktionen  $K - S_{T/2}$  und  $K - S_T$  zu den Zeitpunkten  $T/2$  und  $T$ .

Der diskontierte Erwartungswert von  $K - S_{T/2}$  unter der Bedingung  $S_{T/2} \leq S_{T/2}^*$ , lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} & e^{-rT/2} \int_0^{S_{T/2}^*} (K - S_{T/2})\psi(S_{T/2}; S) dS_{T/2} \\ & = Ke^{-rT/2}N(-d_2(S, S_{T/2}^*; T/2)) - SN(-d_1(S, S_{T/2}^*; T/2)), \end{aligned}$$

wobei  $\psi(S_{T/2}; S)$  die Übergangs-Dichtefunktion ist. Die Übergangs-Dichtefunktion gibt dabei die Wahrscheinlichkeit des Aktienkurses  $S = S_{T/2}$  zum Zeitpunkt  $T/2$  an, falls  $S = S_0$  der Wert zum heutigen Zeitpunkt  $t_0$  ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Option zum Zeitpunkt  $T/2$  ausgeübt wird, ist gegeben durch  $N(-d_2(S, S_{T/2}^*; T/2))$ .

Der diskontierte Erwartungswert von  $K - S_T$  unter der Bedingung  $S_{T/2} > S_{T/2}^*$  und  $S_T < K$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \left[ e^{-rT} \int_0^K (K - S_T)\psi(S_T; S_{T/2}) dS_T \right] N(d_2(S, S_{T/2}^*; T/2)) \\ & = e^{-rT} \int_{S_{T/2}^*}^{\infty} \int_0^K (K - S_T)\psi(S_T; S_{T/2})\psi(S_{T/2}; S) dS_T dS_{T/2}. \end{aligned}$$

$N(d_2(S, S_{T/2}^*; T/2))$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Option zum Zeitpunkt  $T/2$  nicht ausgeübt wird.

Die Übergangs-Dichtefunktionen sind gegeben durch

$$\psi(S_{t_1}, S_{t_2}) = \frac{1}{S_{t_1}\sigma\sqrt{2\pi(t_1 - t_2)}} \exp\left(-\frac{[\ln S_{t_1} - [\ln S_{t_2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(t_1 - t_2)]]^2}{2\sigma^2(t_1 - t_2)}\right).$$

Nach [Kwo98, Seite 52, 77-79] ergibt sich für den Wert des obigen Integrals

$$\begin{aligned} & Ke^{-rT}N_2\left(d_2(S, S_{T/2}^*; T/2), -d_2(S, K; T); -1/\sqrt{2}\right) \\ & - SN_2\left(d_1(S, S_{T/2}^*; T/2), -d_1(S, K; T); -1/\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

$N_2(x, y; \rho)$  bezeichnet die zweidimensionale kumulative Standard-Normalverteilung mit Korrelationskoeffizient  $\rho$ . Diese zweidimensionale Standard-Normalverteilung berechnen wir mittels der Methode von Drezner [Dre78]. Der Aktienkurs folgt der Annahme einer Geometrischen Brownschen Bewegung. Somit ist  $1/\sqrt{2}$  der Korrelationskoeffizient zwischen den überlappenden Zuwächsen über den Zeitintervallen  $[0, T/2]$  und  $[0, T]$ .

Zusammenfassend ist der Wert einer Bermudschen Put-Option mit den zwei Ausübungszeitpunkten  $T/2$  und  $T$  gegeben als

$$\begin{aligned} P_2(S, K; T) &= K e^{-rT/2} N(-d_2(S, S_{T/2}^*; T/2)) - SN(-d_1(S, S_{T/2}^*; T/2)) \\ &\quad + K e^{-rT} N_2\left(d_2(S, S_{T/2}^*; T/2), -d_2(S, K; T); -1/\sqrt{2}\right) \\ &\quad - SN_2\left(d_1(S, S_{T/2}^*; T/2), -d_1(S, K; T); -1/\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Der Korrelationskoeffizient ist negativ zwischen dem Argument des augenblicklich betrachteten Zeitpunktes und den Argumenten der vorherigen Zeitpunkte, jedoch positiv zwischen den Argumenten der vorherigen Zeitpunkte. Dies folgt aus der Annahme, dass die Option augenblicklich ausgeübt wird, falls der Aktienkurs unter dem kritischen Kurs liegt, unter der Bedingung, dass die Option zuvor nicht ausgeübt wurde, weil der Aktienkurs an jedem vorherigen Zeitpunkt über dem kritischen Aktienkurs lag.

Als nächstes wird der Wert einer Bermudschen Put-Option mit drei Ausübungszeitpunkten bestimmt. Die Option darf zum Zeitpunkt  $T/3$ ,  $2T/3$  und zum Endzeitpunkt  $T$  ausgeübt werden.  $P_3(S, K; T)$  bezeichnet den Optionswert zum Zeitpunkt  $t_0$ .

Der Optionswert setzt sich zusammen aus der Summe der diskontierten Erwartungswerte der einzelnen Erträge:

- $K - S_{T/3}$  zum Zeitpunkt  $T/3$
- $K - S_{2T/3}$  zum Zeitpunkt  $2T/3$
- $K - S_T$  zum Endzeitpunkt  $T$

$S_{T/3}^*$  und  $S_{2T/3}^*$  bezeichnen die kritischen Aktienkurse zum Zeitpunkt  $T/3$  bzw.  $2T/3$ . An den Zeitpunkten  $T/3$  und  $2T/3$  ist es optimal, die Option auszuüben, wenn  $S_{T/3} \leq S_{T/3}^*$  bzw.  $S_{2T/3} \leq S_{2T/3}^*$ . Die kritischen Aktienkurse lösen die folgenden Fixpunktgleichungen

$$S_{T/3}^* = K - P_2(S_{T/3}^*, K; 2T/3)$$

und

$$S_{2T/3}^* = K - P_1(S_{2T/3}^*, K; T/3).$$

Die Summe der diskontierten Erwartungswerte läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned}
 P_3(S, K; T) &= e^{-rT/3} \int_0^{S_{T/3}^*} (K - S_{T/3}) \psi(S_{T/3}; S) dS_{T/3} \\
 &+ \left[ e^{-r2T/3} \int_0^{S_{2T/3}^*} (K - S_{2T/3}) \psi(S_{2T/3}; S_{T/3}) dS_{2T/3} \right] \\
 &N(d_2(S, S_{T/3}^*; T/3)) \\
 &+ \left[ e^{-rT} \int_0^K (K - S_T) \psi(S_T; S_{2T/3}) dS_T \right] \\
 &N\left(d_2(S, S_{T/3}^*; T/3), d_2(S, S_{2T/3}^*; 2T/3); 1/\sqrt{2}\right).
 \end{aligned}$$

Hierbei gibt  $N\left(d_2(S, S_{T/3}^*; T/3), d_2(S, S_{2T/3}^*; 2T/3); 1/\sqrt{2}\right)$  die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit an, dass  $S_{T/3} > S_{T/3}^*$  und  $S_{2T/3} > S_{2T/3}^*$  gilt.

Der Wert des obigen Integrals ist bestimmt durch

$$\begin{aligned}
 P_3(S, K; T) &= Ke^{-rT/3} N(-d_2(S, S_{T/3}^*; T/3)) - SN(-d_1(S, S_{T/3}^*; T/3)) \\
 &+ Ke^{-r2T/3} N_2(d_2(S, S_{T/3}^*; T/3), -d_2(S, S_{2T/3}^*; 2T/3); -1/\sqrt{2}) \\
 &- SN_2(d_1(S, S_{T/3}^*; T/3), -d_1(S, S_{2T/3}^*; 2T/3); -1/\sqrt{2}) \\
 &+ Ke^{-rT} N_3(d_2(S, S_{T/3}^*; T/3), d_2(S, S_{2T/3}^*; 2T/3), \\
 &\quad -d_2(S, K; T); 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{3}, -\sqrt{2/3}) \\
 &- SN_3(d_1(S, S_{T/3}^*; T/3), d_1(S, S_{2T/3}^*; 2T/3), \\
 &\quad -d_1(S, K; T); 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{3}, -\sqrt{2/3}).
 \end{aligned}$$

Wir berechnen die beiden dreidimensionalen kumulativen Standard-Normalverteilungen

$$N_3(d_1(S, S_{T/3}^*; T/3), d_1(S, S_{2T/3}^*; 2T/3))$$

und

$$N_3(d_2(S, S_{T/3}^*; T/3), d_2(S, S_{2T/3}^*; 2T/3))$$

mit dem Algorithmus von Genz [Gen92].

Analog lässt sich der Wert einer Bermudschen Put-Option mit  $n$  möglichen Ausübungszeitpunkten herleiten. Die entstehenden Fixpunktgleichungen lösen wir mit Hilfe des Newtonverfahrens. Die eindimensionalen Standard-Normalverteilungen werden durch das Moro-Verfahren bestimmt und die zweidimensionalen Standard-Normalverteilungen mittels der Methode von Drezner [Dre78]. Für höherer Dimensionen verwenden wir den Algorithmus von Genz [Gen92]. Der Wert einer Bermudschen Option mit  $n$  Ausübungszeitpunkten kann damit bestimmt werden.

Der Grenzwert der Folge  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  führt zum Wert der Amerikanischen Put-Option. Es gibt verschiedene Verfahren um diesen Grenzwert zu berechnen. Eine Methode ist beispielsweise die Richardson-Extrapolation. Sie ermöglicht die Bestimmung des Grenzwertes einer Größe, während die Schrittweite  $h$  gegen null läuft. In unserem Fall ist die zu bestimmende Größe der Wert der Amerikanischen Put-Option mit den Parametern  $S, K, T, r$  und  $\sigma$ . Die Schrittweite ist die Zeit zwischen den Zeitpunkten, an denen die Ausübung erlaubt ist. Die Anwendung der Richardson Extrapolation aus [GJ84] führt zu folgender Gleichung

$$P = P_3 + 7/2(P_3 - P_2) - 1/2(P_2 - P_1).$$

$P$  ist dann der Wert der Amerikanischen Option. Ausgehend von numerischen Experimenten in [GJ84] ist anzunehmen, dass diese Approximationsformel für Amerikanische Optionen eine sinnvolle Genauigkeit für die meisten Fälle erbringt.

### 4.3.2 Berechnung eindimensionaler Normalverteilungen

Eine Zufallsvariable  $X$  heißt mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  normalverteilt, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $X$  höchstens gleich  $x$  ist, durch das Integral der Gaussischen Fehlerfunktion gegeben ist. Formal ausgedrückt führt dies zur Verteilungsfunktion  $F(x)$  der Normalverteilung

$$P(X \leq x) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Die Kurzschreibweise lautet  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

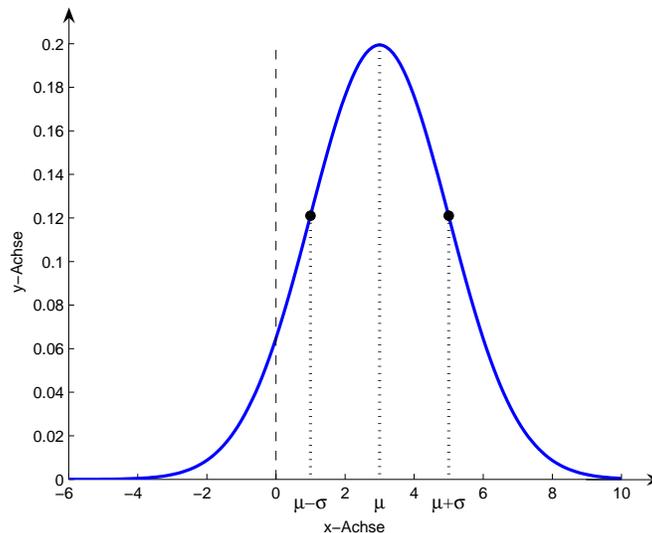


Abbildung 4.6: Dichtefunktion der Normalverteilung  $N(3, 2)$ .

Die erste Ableitung

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ist die Dichtefunktion der Normalverteilung. Sie nimmt an der Stelle  $t = \mu$  ihr Maximum an und hat bei  $\mu \pm \sigma$  ihre Wendepunkte (siehe Abb. 4.6). Die Dichtefunktion ist symmetrisch um den Erwartungswert  $\mu$  und für alle reelle Zahlen positiv. Für  $x \rightarrow \pm\infty$  nähert sich die Funktion asymptotisch der  $x$ -Achse.

Die Normalverteilung mit dem Erwartungswert Null und der Varianz Eins heißt Standard-Normalverteilung bzw. kumulative Standard-Normalverteilung. Ihre Verteilungsfunktion lautet

$$P(X \leq x) = N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Die Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung ist gegeben durch

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Sie beschreibt die Gausssche Glockenkurve (siehe Abb. 4.7).

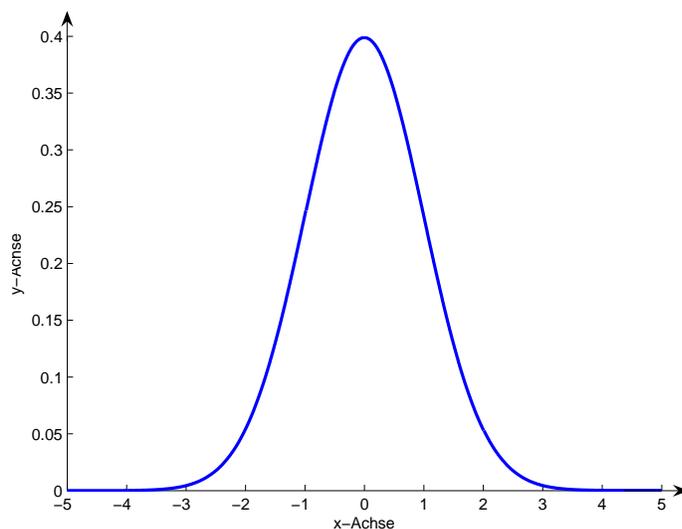


Abbildung 4.7: Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung  $N(0, 1)$ .

Mit der Standardisierungsformel

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

kann jede normalverteilte Zufallsvariable  $X$  in eine Standardnormalverteilung transformiert werden. Aufgrund der Symmetrie-Eigenschaft gilt

$$N(-x) = 1 - N(x).$$

### Berechnung der eindimensionalen Standard-Normalverteilung

Die Berechnung der eindimensionalen kumulativen Standard-Normalverteilung ist für viele Bewertungsverfahren erforderlich. Sie wird beispielsweise zur Berechnung

der Black-Scholes Formel benötigt. Es existiert keine geschlossene Lösung für das Integral der eindimensionalen kumulativen Standard-Normalverteilung. Daher dienen zur schnellen Berechnung Approximationsverfahren, die stückweise polynomiale Interpolation verwenden. Das Moro-Verfahren ist hierbei ein sehr bewährtes Verfahren, da es die kumulative Standard-Normalverteilung mit einer Genauigkeit von 8 Stellen berechnet. Die Idee besteht darin, den Definitionsbereich  $[0, \infty]$  in drei Bereiche,  $[0, 1.87]$ ,  $(1.87, 6)$  und  $[6, \infty]$ , zu unterteilen. Für  $x < 0$  wird dabei die Formel  $1 - N(x)$  verwendet.

Das Moro-Verfahren läßt sich schnell und einfach implementieren. Zunächst werden folgende Werte definiert

$$\begin{aligned} A0 &= 0.398942270991 & A1 &= 0.020133760596 \\ A2 &= 0.002946756074 & B1 &= 0.217134277847 \\ B2 &= 0.018576112465 & B3 &= 0.000643163695 \\ C0 &= 1.398247031184 & C1 &= -0.360040248231 \\ C2 &= 0.022719786588 & D0 &= 1.460954518699 \\ D1 &= -0.305459640162 & D2 &= 0.038611796258 \\ D3 &= -0.003787400686. \end{aligned}$$

Die kumulative Standard-Normalverteilung kann dann durch die folgenden Formeln ermittelt werden:

Falls  $0 \geq x \leq 1,87$ ,

$$N = 0,5 + x \cdot (A0 + (A1 + A2 \cdot x^2) \cdot x^2) / (1 + (B1 + (B2 + B3 \cdot x^2) \cdot x^2) \cdot x^2),$$

wenn  $1,87 < x < 6$ ,

$$N = 1 - ((C0 + (C1 + C2 \cdot x) \cdot x) / (D0 + (D1 + (D2 + D3 \cdot x) \cdot x) \cdot x))^{16},$$

und  $N=1$  anderenfalls.

Mit diesem Algorithmus (siehe [GG03b]) können wir nun die kumulative Standard-Normalverteilung auf acht Stellen genau bestimmen. Zur Berechnung der inversen kumulativen Standard-Normalverteilung, die im späteren Verlauf benötigt wird, verwenden wir auch ein schnelles Moro-Verfahren (siehe [GG03a]). Zunächst werden folgende Werte bestimmt:

$$\begin{aligned} E0 &= 2.50662823884 & E1 &= -18.61500062529 & E2 &= 41.39119773534 \\ E3 &= -25.44106049637 & F0 &= -8.47351093090 & F1 &= 23.08336743743 \\ F2 &= -21.06224101826 & F3 &= 3.13082909833 & G0 &= 0.3374754822726147 \\ G1 &= 0.9761690190917186 & G2 &= 0.1607979714918209 & G3 &= 0.0276438810333863 \\ G4 &= 0.0038405739373609 & G5 &= 0.0003951896511919 & G6 &= 0.0000321767881768 \\ G7 &= 0.0000002888167364 & G8 &= 0.0000003960315187 \end{aligned}$$

Mit diesen Werten lässt sich der Algorithmus für die Berechnung der inversen Normalverteilung folgendermaßen formulieren:

$$p = x - 0.5$$

$$\text{falls } |x| < 0.42$$

$$r = p \cdot p$$

$$N_{inv} = \frac{p \cdot (((E3 \cdot r + E2) \cdot r + E1) \cdot r + E0)}{((((F3 \cdot r + F2) \cdot r + F1) \cdot r + F0) \cdot r + 1.0)}$$

sonst

$$\text{falls } p < 0$$

$$r = x$$

sonst

$$r = 1 - x$$

$$r = \log(-\log(r))$$

$$r = G0 + r \cdot (G1 + r \cdot (G2 + r \cdot (G3 + r \cdot (G4 + r \cdot (G5 + r \cdot (G6 + r \cdot (G7 + r \cdot G8)))))))))$$

$$\text{falls } p < 0$$

$$N_{inv} = -r$$

sonst

$$N_{inv} = r$$

### 4.3.3 Berechnung mehrdimensionaler Normalverteilungen

Ogleich die Berechnung von eindimensionalen Standard-Normalverteilungen für viele Optionsbewertungsverfahren ausreicht, gibt es Verfahren, die die Berechnung mehrdimensionaler Standard-Normalverteilungen voraussetzen.

Ein  $n$ -dimensionaler Vektor von Zufallsvariablen  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  mit der Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) &= F_n(x_1, x_2, \dots; \Sigma) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} e^{-\frac{1}{2}(y^t - \mu)\Sigma^{-1}(y - \mu)} dy \end{aligned}$$

heißt  $n$ -dimensional normalverteilt, genauer  $N(\mu, \Sigma)$ -normalverteilt.  $n$  bezeichnet hierbei die Dimension,  $y$  den Vektor  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ ,  $\mu$  den Erwartungswertvektor  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^t$  und  $\Sigma$  eine symmetrische, positiv definite  $n \times n$  Matrix, die sogenannte Korrelationsmatrix.  $|\Sigma|$  beschreibt dabei die Determinante der Korrelationsmatrix. Die zugehörige Dichtefunktion ist

$$f_n(y; \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}(2\pi)^n} e^{-\frac{1}{2}(y^t - \mu)\Sigma^{-1}(y - \mu)}.$$

Die  $n$ -dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor  $\mu = \vec{0}$  und Varianzen vom Wert eins heißt  $n$ -dimensionale Standard-Normalverteilung bzw.  $n$ -dimensionale kumulative Standard-Normalverteilung. Ihre Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$N_n(x_1, x_2, \dots; \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} e^{-\frac{1}{2}y^t \Sigma^{-1} y} dy,$$

und die zugehörige Dichte lautet

$$n_n(y; \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}(2\pi)^n} e^{-\frac{1}{2}y^t \Sigma^{-1} y}.$$

Die Abbildungen 4.8 und 4.9 verdeutlichen den Einfluss der Korrelationsmatrix

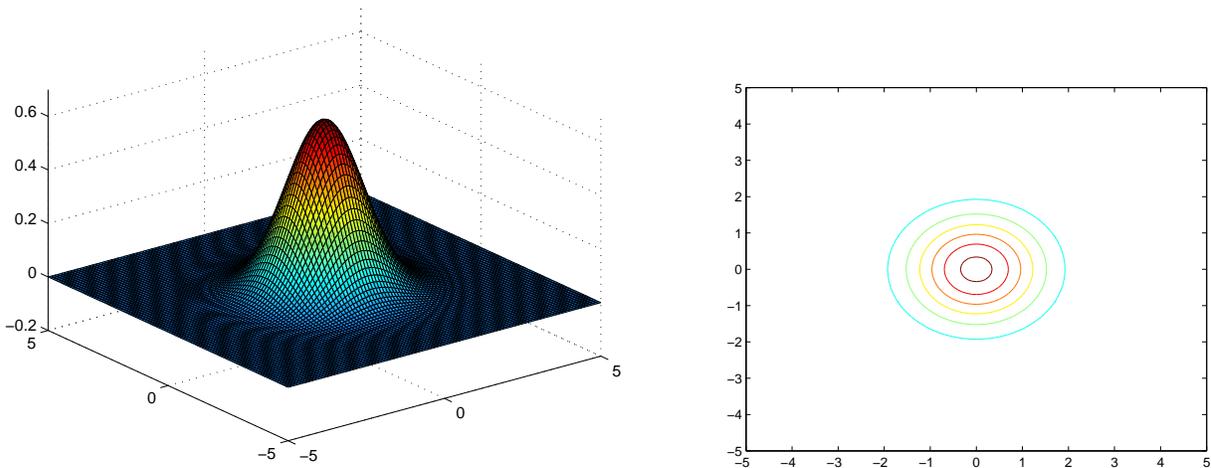


Abbildung 4.8: Zweidimensionale Standard-Normalverteilung mit zugehörigen Isolinien mit Korrelationsmatrix  $\Sigma_1$ .

am Beispiel von zweidimensionalen Standard-Normalverteilungen mit zugehörigen Isolinien. Als erste Korrelationsmatrix wurde die Einheitsmatrix gewählt, d.h. es besteht kein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Zufallsvariablen; sie sind unkorreliert.

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im zweiten Fall besteht ein positiver linearer Zusammenhang zwischen den beiden

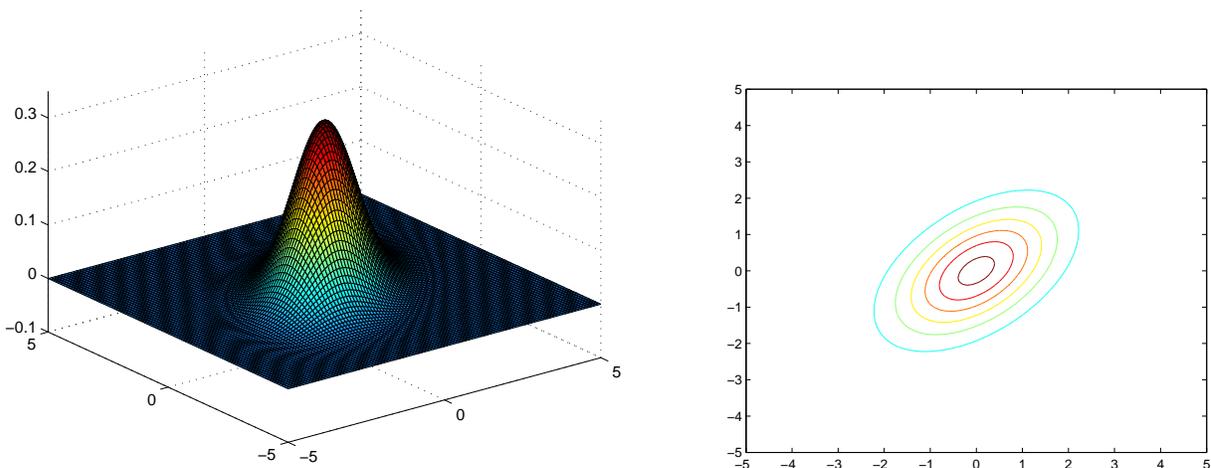


Abbildung 4.9: Zweidimensionale Standard-Normalverteilung mit zugehörigen Isolinien mit Korrelationsmatrix  $\Sigma_2$ .

Zufallsvariablen vom Grad 0.6.

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

### Berechnung der mehrdimensionalen Standard-Normalverteilung

Die Berechnung von  $n$ -dimensionalen Standard-Normalverteilungen

$$N_n(x_1, x_2, \dots; \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|(2\pi)^n}} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} e^{-\frac{1}{2}y^t \Sigma^{-1}y} dy$$

ist für einige Optionsbewertungsmethoden notwendig. Beispielsweise in der Erwartungswertdarstellung nach Geske Johnson müssen mehrdimensionale Normalverteilungen berechnet werden.

Wie schon im eindimensionalen Fall existieren keine geschlossenen Lösungen für die Integrale mehrdimensionaler Standard-Normalverteilungen. Die Berechnung mittels Quadraturverfahren erweist sich als sehr schwierig, da die Funktion fast überall nahe bei null verläuft, d.h. nur ein kleines Gebiet um den Ursprung bestimmt wesentlich den Wert des Integrals. Ein zusätzliches Problem ist der Fluch der Dimensionen, der mit steigender Anzahl an Dimensionen auftritt. Mit der Anzahl der Dimensionen steigt die Rechenzeit exponentiell an. Nicht-adaptive Verfahren scheitern am Peak der Funktion, da dieser erst bei sehr vielen Punkten richtig aufgelöst wird und vernünftige Ergebnisse liefert. In hohen Dimensionen benötigt diese kleine Schrittweite sehr viel Rechenzeit. Um numerische Integrationsmethoden wie z.B. Monte Carlo Methoden anzuwenden, muss das Integral entweder durch Transformation auf ein beschränktes Integrationsgebiet überführt werden, oder das unbeschränkte Integrationsgebiet muss an einer sorgfältig ausgewählten Grenze abgeschnitten werden.

Für zwei- und dreidimensionale Standard-Normalverteilungen gibt es spezielle Verfahren, z.B. von Donnelly [Don73], Cox/Wermuth [CW91] und Drezner [Dre78], die die Funktion approximieren.

Die Methode von Drezner [Dre78] für zweidimensionale Standard-Normalverteilungen basiert auf der direkten Berechnung des Doppelintegrals mittels der Gauss-Quadratur Methode. Im Folgenden wird der Algorithmus kurz vorgestellt. Ziel ist es, die zweidimensionale kumulative Standard-Normalverteilung  $N_2(a, b; \rho)$  zu ermitteln.

Falls  $a \leq 0$ ,  $b \leq 0$  und  $\rho \leq 0$  gilt

$$N_2(a, b; \rho) = \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\pi} \sum_{i,j=1}^4 A_i A_j f(B_i, B_j),$$

wobei

$$f(x, y) = \exp[a'(2x - a') + b'(2y - b') + 2\rho(x - a')(y - b')]$$

mit

$$a' = \frac{a}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \quad b' = \frac{b}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$$

und

$$\begin{aligned} A1 &= 0.3253030 & A2 &= 0.4211071 & A3 &= 0.1334425 & A4 &= 0.006374323 \\ B1 &= 0.1337764 & B2 &= 0.6243247 & B3 &= 1.3425378 & B4 &= 2.2626645. \end{aligned}$$

Wenn  $a \cdot b \cdot \rho \leq 0$  gilt, ermittelt sich die zweidimensionale Standard-Normalverteilung durch folgende Fallunterscheidungen:

$$\begin{aligned} a \leq 0, b \geq 0, \rho \geq 0 &: N_2(a, b; \rho) = N(a) - N_2(a, -b; -\rho) \\ a \geq 0, b \leq 0, \rho \geq 0 &: N_2(a, b; \rho) = N(b) - N_2(-a, b; -\rho) \\ a \geq 0, b \geq 0, \rho \leq 0 &: N_2(a, b; \rho) = N(a) + N(b) - 1 + N_2(-a, -b; \rho) \end{aligned}$$

Falls  $a \cdot b \cdot \rho > 0$  ist, ergibt sich der Wert aus

$$N_2(a, b; \rho) = N_2(a, 0; \rho_1) + N_2(b, 0; \rho_2) - \delta$$

mit

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{(\rho a - b) \operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2 - 2\rho ab + b^2}} \\ \rho_2 &= \frac{(\rho b - a) \operatorname{sgn}(b)}{\sqrt{a^2 - 2\rho ab + b^2}} \\ \delta &= \frac{1 - \operatorname{sgn}(a) \operatorname{sgn}(b)}{4} \\ \operatorname{sgn}(x) &= \begin{cases} +1 & \text{falls } x \geq 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit diesem Algorithmus kann die zweidimensionale Standard-Normalverteilung auf vier Stellen genau berechnet werden. Eine detaillierte Darstellung befindet sich in [Dre78] und [Hul97].

Ein Verfahren bis Dimension 8 wurde von Schervish [Sch84] entwickelt. Der Algorithmus verwendet eine lokal adaptive, numerische Integrationsidee, die auf der Simpson-Regel basiert. Ab einer Dimension  $n > 6$  kann der Algorithmus jedoch sehr lange Rechenzeit erfordern [Gen93].

Für beliebige Dimensionen stehen keine Approximationen zur Verfügung. Mit Hilfe von Transformationen kann die mehrdimensionalen Standard-Normalverteilung in einfach integrierbare Funktionen überführt werden. Verfahren für beliebige Dimensionen wurden von Deák [Deá80] [Deá86], Tong [Ton90] und Genz [Gen92] entwickelt. Die von Genz vorgeschlagene Transformation stellt sich in [Gen93] als schnelles und robustes Verfahren zur Berechnung einer mehrdimensionale Standard-Normalverteilung mit beliebiger Dimension heraus. Ab Dimension drei ist es nicht langsamer als die Methoden von Schervish und Deák [Gen93]. Im folgenden wird die Transformation von Genz [Gen92] erläutert.

## Der Algorithmus von Genz

Der Algorithmus von Genz überführt das Integral über einem beliebigen Hyperwürfel

$$F(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|(2\pi)^n}} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} e^{-\frac{1}{2}y^t \Sigma^{-1} y} dy$$

in ein Integral über dem Einheitshyperwürfel. Dies geschieht mit Hilfe von drei Transformationen.

Zunächst wird die Cholesky-Zerlegung  $CC^t = \Sigma$  der Korrelationsmatrix bestimmt. Hierbei bezeichnet  $L$  eine untere Dreiecksmatrix.

### Satz 4.3.2

Zu jeder positiv definiten  $n \times n$ -Matrix  $A$  existiert genau eine untere  $n \times n$ -Dreiecksmatrix  $L$  mit  $l_{ik} = 0$  für  $k > i$  und  $l_{ii} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so dass  $A = LL^t$  gilt.

Mit  $y = Cx$  und  $CC^t = \Sigma$  ergibt sich

$$y^t \Sigma^{-1} y = x^t C^t C^{-t} C^{-1} C x = x^t x$$

und

$$dy = |C| dx = \sqrt{|\Sigma|} dx.$$

Da  $a \leq y = Cx \leq b$ , folgt für  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j}{c_{ii}} \leq x_i \leq \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j}{c_{ii}},$$

und es ergibt sich

$$F(a, b) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{a'_1}^{b'_1} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \int_{a'_2(x_1)}^{b'_2(x_1)} e^{-\frac{x_2^2}{2}} \dots \int_{a'_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b'_n(x_1, \dots, x_{n-1})} e^{-\frac{x_n^2}{2}} dx$$

mit

$$a'_i(x_1, \dots, x_{i-1}) = \frac{a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j}{c_{ii}}$$

und

$$b'_i(x_1, \dots, x_{i-1}) = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j}{c_{ii}}.$$

Nun wird jedes  $x_i$  einzeln mit Hilfe der eindimensionalen inversen Standard-Normalverteilung

$$x_i = N^{-1}(z_i)$$

transformiert. Nach dieser Transformation erhalten wir für  $F(a, b)$

$$F(a, b) = \int_{d_1}^{e_1} \int_{d_2(z_1)}^{e_2(z_1)} \dots \int_{d_n(z_1, \dots, z_{n-1})}^{e_n(z_1, \dots, z_{n-1})} dz$$

mit

$$d_i(z_1, \dots, z_{i-1}) = N\left(\frac{a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} N^{-1}(z_j)}{c_{ii}}\right)$$

und

$$e_i(z_1, \dots, z_{i-1}) = N\left(\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} N^{-1}(z_j)}{c_{ii}}\right).$$

Das Integral besitzt nun einen sehr viel einfacheren Integranden, jedoch ein viel komplizierteres Integrationsgebiet. Dieses Integrationsgebiet kann nicht mit den bekannten Standard-Integrationsverfahren behandelt werden. Mit einer zusätzlichen Transformation ist das Integrationsgebiet der Einheitshyperwürfel.

Mit  $z_i = d_i + w_i(e_i - d_i)$  bekommt das Integral konstante Grenzen. Es ergibt sich abschließend folgendes Integral:

$$F(a, b) = (e_1 - d_1) \int_0^1 (e_2 - d_2) \dots \int_0^1 (e_n - d_n) \int_0^1 dw$$

mit

$$d_i = N\left(\frac{(a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} N^{-1}(d_j + w_j(e_j - d_j)))}{c_{ii}}\right)$$

und

$$e_i = N\left(\frac{(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} N^{-1}(d_j + w_j(e_j - d_j)))}{c_{ii}}\right).$$

Das innerste Integral über  $w_n$  kann explizit gelöst werden, da  $d_n$  und  $e_n$  von  $w_n$  nicht abhängig sind. Somit reduziert sich die Anzahl an Integrationsvariablen um eins.

Die Standard-Normalverteilung und die inverse Standard-Normalverteilung in der transformierten Funktion werden mit Hilfe des Moro-Verfahrens berechnet. Die Genauigkeit dieses Verfahrens ist völlig ausreichend.

Zur Intergration der transformierten Funktion können beliebige Integrationsverfahren verwendet werden, z.B. Monte-Carlo oder Quasi-Monte-Carlo Methoden.

Beim Monte-Carlo Verfahren wird das Integral mit Hilfe von (gleichverteilten) zufällig ausgewählten Stützstellen berechnet. An diesen Stützstellen wird jeweils der Funktionswert bestimmt. Der Integralwert ist dann das arithmetische Mittel der Funktionswerte. Es gilt somit

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i).$$

Nach dem Gesetz der großen Zahlen konvergiert das Monte-Carlo Verfahren gegen den wahren Integralwert im statistischen Mittel. Wenn die Anzahl an Stützstellen  $N$  gegen  $\infty$  geht, dann approximiert das Monte-Carlo Verfahren den wahren Integralwert hinreichend gut. Jedoch ist die Konvergenz nur von der Ordnung  $\frac{1}{2}$ . Für eine größere Genauigkeit, in Form von einer weiteren Stelle nach dem Komma, müssen

100-mal mehr Funktionsauswertungen durchgeführt werden.

Eine bessere Konvergenzrate ergibt sich bei Quasi-Monte-Carlo Verfahren. Der Unterschied zu Monte-Carlo Verfahren liegt in der Wahl der Stützstellen. Sie werden nicht zufällig gewählt, sondern deterministisch. Die gleiche Mittellung wie bei Monte-Carlo Verfahren liefert dann den Integralwert. Folglich gilt

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i).$$

Punktfolgen mit niedriger Diskrepanz bestimmen hier die Stützstellen, um von der guten Gleichverteilung zu profitieren. Als Punktfolge kann beispielsweise die van-der-Corput Folge verwendet werden.

Die Generierung des  $i$ -ten Folgengliedes  $x_i$  lautet:

- Die Zahl  $i$  wird zur Basis  $b$  geschrieben, wobei  $b$  eine Primzahl sein sollte. D.h

$$i = \sum_{k=0}^j d_k c^k$$

mit  $d_k \in \{0, \dots, c-1\}$ , den Ziffern der Zahlendarstellung.

- Die Stützstelle  $x_i$  ist dann definiert als die radikale Inverse (die Spiegelung am Dezimalpunkt) der Zahl  $i$ . Es gilt

$$x_i = \sum_{k=0}^j d_k c^{-k-1}.$$

Die ersten van-der-Corput Folgenglieder zur Primzahlbasis 3 sind gegeben durch  $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}\}$ .

Eine Erweiterung auf mehrere Dimensionen wird erreicht, indem für jede Dimension eine andere Primzahlbasis  $b$  verwendet wird. Die daraus entstehende Folge von Vektoren heißt Halton-Folge. Für die zweidimensionale Halton-Folge ergeben sich folgende erste Glieder:  $(0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{4}, (\frac{2}{3}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{9}), (\frac{1}{8}, \frac{4}{9})$ .

Für Quasi-Monte-Carlo Verfahren ergibt sich eine deterministische Konvergenzrate von eins.

#### 4.3.4 Newton-Verfahren zur Ermittlung der kritischen Aktienkurse

Die Bewertung einer Bermudschen Option über den Erwartungswertansatz erfordert die Berechnung von kritischen Aktienkursen. Diese kritischen Aktienkurse sind Lösungen von nicht-linearen Gleichungen. Eine Bermudsche Put-Option mit zwei Ausübungszeitpunkten wird zum Zeitpunkt  $T/2$  vorzeitig ausgeübt, falls  $S_{T/2} \leq S_{T/2}^*$  ist.  $S_{T/2}^*$  bezeichnet dabei den kritischen Aktienkurs. Für den kritischen Aktienkurs gilt

$$K - P_1(S_{T/2}^*, K; T/2) = S_{T/2}^*.$$

Hierbei handelt es sich um eine Fixpunktgleichung. Der kritische Aktienkurs  $S_{T/2}^*$  löst diese Gleichung. Mittels Umformung ergibt sich die Nullstellengleichung

$$K - P_1(S_{T/2}^*, K; T/2) - S_{T/2}^* = 0$$

mit der Nullstelle  $S_{T/2}^*$ . Der Fixpunkt und die Nullstelle stimmen dabei überein. Die Bestimmung des Wertes einer Bermudischen Put-Option mit drei Ausübungszeitpunkten erfordert das Lösen der zwei Fixpunktgleichungen

$$S_{T/3}^* = K - P_2(S_{T/3}^*, K; 2T/3)$$

und

$$S_{2T/3}^* = K - P_1(S_{2T/3}^*, K; T/3).$$

$S_{T/3}^*$  und  $S_{2T/3}^*$  bezeichnen dabei die kritischen Aktienkurse an den Zeitpunkten  $T/3$  und  $2T/3$ . Entsprechend müssen drei Fixpunktgleichungen bei der Bewertung einer Bermudischen Put-Option mit vier Ausübungszeitpunkten gelöst werden. Demzufolge müssen  $n - 1$  Fixpunktgleichungen bei der Bewertung einer Bermudischen Option mit  $n$  Ausübungszeitpunkten gelöst werden.

Zur Lösung dieser Fixpunktgleichungen wird das Newtonverfahren verwendet. Die Idee des Newtonverfahrens sowie eine Untersuchung der Konvergenz wird im Folgenden erläutert.

Das Newtonverfahren ist ein Iterationsverfahren zur Berechnung von Nullstellen nichtlinearer Abbildungen. Es überzeugt durch seine einfache Konstruktion.

Sei  $f(x) = 0$  eine nichtlineare Gleichung mit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  sei in einer Umgebung einer Nullstelle  $x^*$  stetig differenzierbar.

Die Idee des Newtonverfahrens besagt:

- Sei  $x_k$  eine Näherung für die Nullstelle  $x^*$  von  $f$ . Durch  $(x_k, f(x_k))$  wird eine Tangente an  $f$  gelegt. Ist diese nicht parallel zu der  $x$ -Achse, ist also  $f'(x_k) \neq 0$ , so besitzt sie genau einen Schnittpunkt  $x_{k+1}$  mit der  $x$ -Achse, den man als neue (und hoffentlich bessere) Näherung nimmt [Wer92].

Die Gleichung der Tangente lautet  $y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$ .  $x_{k+1}$  ergibt sich dann aus

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \text{ bzw. } x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (4.43)$$

Abbildung 4.10 veranschaulicht die Idee des Newtonverfahrens.

**Definition 4.3.3** [KONVERGENZ VON ITERATIONSVERFAHREN]

Sei  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Iterationsfunktion mit Fixpunkt  $x^*$ , und es gebe eine Umgebung  $\mathcal{U}(x^*)$ , eine Zahl  $p \geq 1$  und eine Konstante  $C \geq 0$  (mit  $C < 1$  für  $p = 1$ ), so dass für alle  $x \in \mathcal{U}(x^*)$  gilt

$$\|\Phi(x) - x^*\| \leq C \|x - x^*\|^p.$$

Dann gibt es eine Umgebung  $\mathcal{V}(x^*) \subset \mathcal{U}(x^*)$ , so dass das zu  $\Phi$  gehörige Iterationsverfahren für jeden Startpunkt  $x_0 \in \mathcal{V}(x^*)$  Iterierte  $x_i$ ,  $i \geq 0$ , erzeugt, die mindestens

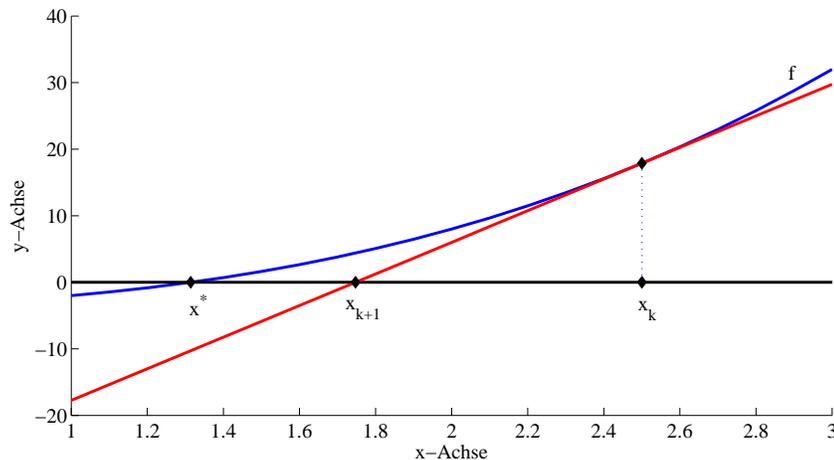


Abbildung 4.10: Motivation des Newton-Verfahrens

mit der Ordnung  $p$  gegen  $x^*$  konvergieren.

Das Verfahren heißt dann lokal konvergent mit Konvergenzbereich  $\mathcal{V}(x^*)$ .

Falls  $\mathcal{V}(x^*) = \mathbb{R}^n$ , heißt das Verfahren global konvergent.

Das Newton-Verfahren im eindimensionalen Fall ist lokal quadratisch konvergent.

Sei  $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .  $f$  sei genügend oft stetig differenzierbar in einer Umgebung der einfachen Nullstelle  $x^*$  von  $f$ . Es sei  $f(x^*) = 0$  und  $f'(x^*) \neq 0$ . Dann folgt

$$\Phi(x^*) = x^*, \quad \Phi'(x^*) = \frac{f(x)f'(x)}{(f'(x))^2} \Big|_{x=x^*} = 0, \quad \Phi''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}.$$

#### Bemerkung 4.3.4 [KONVERGENZVERHALTEN]

Das Newton-Verfahren konvergiert mindestens lokal quadratisch, d.h. falls die Konvergenz eingetreten ist, verdoppelt sich die Anzahl der richtigen Stellen pro Iterationsschritt. Jedoch wird diese quadratische Konvergenz nur dann erreicht, wenn die Gleichung bestimmte Eigenschaften erfüllt. Ist die gesuchte Nullstelle von gerader Ordnung oder liegen zwei Nullstellen sehr nahe beieinander, so konvergiert das Verfahren sehr langsam. Sollte die Steigung im Bereich der Nullstelle sehr klein sein, kann die quadratische Konvergenz oft nicht erreicht werden. In diesem Fall ist ein sehr hohes Maß an Genauigkeit bei der Berechnung der Zwischenwerte für  $f(x_k)$  und  $f'(x_k)$  erforderlich um eine akzeptable Näherung  $x_{k+1}$  zu erhalten.

Für wenige Ausnahmefälle kann globale Konvergenz erreicht werden. Eine solche Ausnahme ist gegeben, wenn die Funktion  $f$  konvex ist.

#### Satz 4.3.5 [GLOBALE KONVERGENZ DES NEWTON-VERFAHRENS]

Sei  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, streng monoton wachsend und konvex mit (eindeutiger) Nullstelle  $x^* \in \mathcal{I}$ . Dann konvergiert das Newton-Verfahren für alle  $x_0 \in \mathcal{I}$  mit  $x_0 \geq x^*$  monoton gegen  $x^*$ .

*Beweis:*

Für ein  $k \geq 0$  sei die aktuelle Iterierte  $x_k$  größer als  $x^*$ . Die Induktionsbehauptung

$$x^* \leq x_{k+1} \leq x_k. \quad (4.44)$$

ist zu beweisen.

Da  $f$  differenzierbar ist, folgt aus der Konvexität, dass der Graph von  $f$  oberhalb der Tangente an  $f$  im Punkt  $x_k$  verläuft, also dass

$$f(x) \geq f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k).$$

Für  $x = x_{k+1}$  wird die rechte Seite dieser Ungleichung null aufgrund der Newton-Vorschrift (4.43). Also ist  $f(x_{k+1})$  nicht negativ und wegen der Monotonie von  $f$  folglich  $x_{k+1} \geq x^*$ . Andererseits ist wegen (4.43)  $x_{k+1} \leq x_k$ , da nach Voraussetzung bzw. Induktionsvoraussetzung sowohl  $f(x_k)$  als auch  $f'(x_k)$  nicht negativ sind. Die Konvergenz folgt nun aus der Monotonie und der Beschränktheit der Iterierten. Auf Grund von (4.43) muss der Grenzwert eine Nullstelle von  $f$  sein. Damit ist die Induktionsbehauptung (4.44) vollständig bewiesen. Dieser Beweis befindet sich in [HB02].

□

Für konkave und monoton fallende Funktionen gelten die entsprechenden Behauptungen.

Wir betrachten nun exemplarisch die zu lösende nicht-lineare Gleichung

$$f(S_{T/2}^*) = P_1(S_{T/2}^*, K; T/2) + S_{T/2}^* - K = 0 \quad (4.45)$$

aus dem Erwartungswertansatz. Die Funktion  $f(S_{T/2}^*)$  wird auf Monotonie und Krümmungsverhalten untersucht, um zu zeigen, dass globale Konvergenz in der Anwendung des Newtonverfahrens auf diese Funktion zu erwarten ist.

Hierzu wird zunächst die erste Ableitung der Funktion nach  $S_{T/2}^*$  betrachtet. Die erste Ableitung beschreibt die Änderungsrate der Funktion bezüglich des kritischen Aktienkurses  $S_{T/2}^*$ .

$$\begin{aligned} f(S_{T/2}^*) &= P_1(S_{T/2}^*, K; T/2) + S_{T/2}^* - K \\ &= Ke^{-rT/2}N(-d_2(S_{T/2}^*, K; T/2)) - S_{T/2}^*N(-d_1(S_{T/2}^*, K; T/2)) + S_{T/2}^* - K \\ f'(S_{T/2}^*) &= -N(-d_1) + 1 = N(d_1) - 1 + 1 = N(d_1) > 0 \end{aligned}$$

Die Funktion ist streng monoton wachsend. Es wird daraufhin die zweite Ableitung gebildet:

$$f''(S_{T/2}^*) = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S_{T/2}^* \sigma \sqrt{2\pi \frac{T}{2}}} > 0$$

Die zweite Ableitung ist immer positiv. Die Funktion ist also streng konvex. Somit ist globale Konvergenz für die verwendete Funktion  $f(S_{T/2}^*)$  gegeben. Das Newton-Verfahren konvergiert unabhängig vom Startkurs gegen die Nullstelle  $S_{T/2}^*$ .

Entsprechendes gilt für alle Fixpunktgleichungen aus dem Erwartungswertansatz.



# Kapitel 5

## Numerische Ergebnisse

In den vorangegangenen Kapiteln wurden verschiedene Verfahren zur Bewertung von Bermudischen Optionen vorgestellt. Diese Verfahren werden in diesem Kapitel hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften untersucht und verglichen.

Zunächst wird das Binomialverfahren nach Cox, Ross und Rubinstein betrachtet. Es werden Optionswerte von Europäischen und Amerikanischen Optionen mit diesem Verfahren berechnet und die Konvergenzrate wird für beide Optionstypen bestimmt. Der exakte Wert einer Europäischen Option wird mittels der Black-Scholes Formel berechnet. Der exakte Wert einer Amerikanischen Option lässt sich nicht berechnen. Ein hinreichend genauer Wert für die Amerikanische Option wird mit Hilfe der Control Variate Technik bestimmt. Des Weiteren wird die Methode von Leisen und Reimer für die Konvergenzbeschleunigung des Binomialverfahren angewendet und auf verbesserte Konvergenzeigenschaften untersucht.

Es folgt die Bewertung von Bermudischen Optionen mittels der Binomialmethode. Hierbei werden die beiden möglichen Ansätze, die Anpassung der Diskretisierungszeitschritte, sowie die Interpolation bzw. Extrapolation der fehlenden Aktienkursen diskutiert und verglichen.

Die Erwartungswertdarstellung nach Geske und Johnson in Anwendung auf Bermudische Optionen wird im weiteren Verlauf untersucht. Dabei werden die zur Lösung verwendeten numerischen Verfahren hinsichtlich ihres Aufwandes betrachtet.

Im Anschluss soll die Binomialmethode mit dem Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung in Anwendung auf Bermudischer Optionen hinsichtlich der Genauigkeit und der Rechenzeit verglichen werden.

Zum Abschluss wird die Bewertung von Bermudischen Swaptions im Rendleman und Bartter Modell dargestellt.

### 5.1 Europäische und Amerikanische Optionswerte im Binomialmodell

Im Folgenden untersuchen wir die Konvergenzeigenschaften der Binomialmethode nach Cox, Ross und Rubinstein aus Abschnitt 4.1.3. Wir werden zeigen, dass die Optionswerte im Binomialmodell für genügend kleine Zeitschrittweiten  $\Delta t$  gegen die exakt berechneten Optionswerte im Black-Scholes Modell konvergieren. Dazu berechnen wir den Wert einer Europäischen Put-Option mit Hilfe des Binomialverfahrens und der exakten Black-Scholes Formel. Die Option ist durch die Werte aus Tabelle 5.1 bestimmt. Für die weiteren Optionswertberechnungen werden ebenfalls

Parameter	Wert
aktueller Aktienkurs $S$	100
Ausübungspreis $K$	110
Laufzeit $T$	1
risikoloser Zinssatz $r$	0.05
Volatilität $\sigma$	0.2

Tabelle 5.1: Gewählte Eingabewerte für die Optionsparameter

diese Eingabewerte verwendet. Sollten veränderte Eingabewerte benutzt werden, so wird explizit darauf hingewiesen. Der exakte Wert einer Europäischen Put-Option kann mit Hilfe der Black-Scholes Formel bestimmt werden. Die eindimensionale kumulative Standard-Normalverteilung in der Black-Scholes Formel wird mittels des Moro-Verfahrens berechnet.

Um die Konvergenz der Binomialmethode zu zeigen, wird die Anzahl der Diskretisierungszeitschritte  $M$  sukzessive erhöht. Tabelle 5.2 gibt den Wert der Europäischen Put-Option für die Anzahl der gewählten Diskretisierungszeitschritte an. Zusätzlich ist der absolute Fehler zwischen den Optionswerten aus der Binomialmethode  $V_{Binom}$  und dem exakten Black-Scholes Wert  $V_{BS}$  aufgeführt.

Zeitschritte $M$	$V_{Binom}$	$ V_{BS} - V_{Binom} $
1	11.304236452	6.289116e-01
10	10.734421599	5.909673e-02
100	10.688461355	1.313649e-02
200	10.681644858	6.319991e-03
300	10.673084895	2.239973e-03
400	10.676417512	1.092644e-03
500	10.677455963	2.131095e-03
1000	10.676848729	1.523861e-03
2000	10.675904917	5.800490e-04
3000	10.674773678	5.511900e-04
4000	10.674977453	3.474150e-04
5000	10.675248951	7.591660e-05
6000	10.675576714	2.518460e-04
7000	10.675116239	2.086290e-04
8000	10.675447318	1.224500e-04
9000	10.675476938	1.520700e-04
10000	10.675309367	1.550100e-05

Tabelle 5.2: Optionswerte einer Europäischen Put-Option, berechnet mittels der Binomialmethode nach Cox, Ross und Rubinstein und der absolute Fehler zum exakten Black-Scholes Wert 10.6753248679.

Das linke Bild in Abbildung 5.1 stellt die Entwicklung des Optionspreises im Binomialmodell dar. Der Wert der Europäischen Put-Option ist in Abhängigkeit von der Anzahl an Diskretisierungszeitschritten dargestellt. Die Darstellung ist auf  $M = 250$  Zeitschritte beschränkt, um die Merkmale der Entwicklung zu verdeutlichen. Zusätz-

lich ist der entsprechende exakte Black-Scholes Wert als horizontale Gerade aufgetragen. Das Konvergenzverhalten ist oszillierend und weist eine Art Wellenstruktur auf. Der exakte Black-Scholes Wert wird dabei beliebig oft überschritten. Im rechten Bild von Abbildung 5.1 ist der absolute Fehler gegen den Aufwand aufgetragen. Der absolute Fehler wurde dabei mit Hilfe des exakten Black-Scholes Wertes berechnet. Der Aufwand der Binomialmethode beträgt  $M^2$ . Er wächst also quadratisch mit der Anzahl an Zeitschritten. Die Konvergenzrate der Binomialmethode lässt sich aus Abbildung 5.1 ablesen, sie beträgt  $\frac{1}{2}$ .

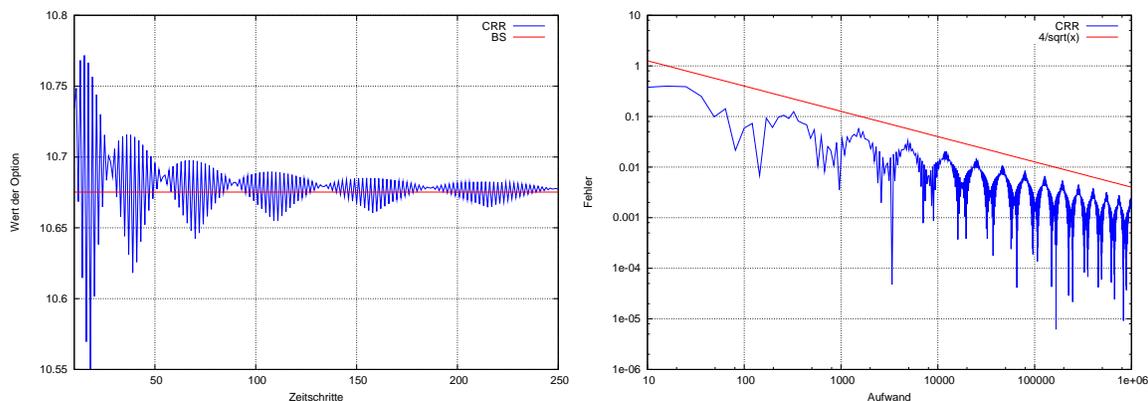


Abbildung 5.1: Preisentwicklung (links) einer Europäischen Put-Option sowie die Konvergenzrate (rechts) des verwendeten Binomialverfahrens nach Cox, Ross und Rubinstein.

In Kapitel 4.1.6 wurde die Methode von Leisen und Reimer vorgestellt. Mit Hilfe von verschiedenen Inversionsformeln zur Approximation der Normalverteilung erhalten Leisen und Reimer leicht veränderte Baumparameter  $u$ ,  $d$  und  $p$ . Das Ergebnis ist ein verbessertes Binomialverfahren bezüglich des Konvergenzverhaltens. Im Folgenden zeigen wir dieses verbesserte Konvergenzverhalten der Binomialmethode für die Inversionsformeln von Peizer und Pratt. Wir vernachlässigen die Inversionsformel von Camp und Paulson, da sie keine Verbesserung der Konvergenzrate bewirkt, sondern nur das oszillierende Verhalten des Preisentwicklung entschärft [LM96]. Wir berechnen wie schon zuvor den Wert einer Europäischen Put-Option mit den Eingabeparametern aus Tabelle 5.1 unter Verwendung der Methode von Leisen und Reimer. Hierzu werden die Inversionsformeln von Peizer und Pratt verwendet. Die daraus resultierenden Optionswerte bezeichnen wir mit  $V_{PP1}$  und  $V_{PP2}$ . Tabelle 5.3 gibt den absoluten Fehler zum exakten Black-Scholes Wert in Abhängigkeit der Anzahl der Zeitschritte an. Die Anzahl der Zeitschritte muss bei der Anwendung der Peizer und Pratt Inversionen ungerade gewählt werden (siehe Abschnitt 4.1.6). Zusätzlich zum absoluten Fehler der Optionswerte aus der Binomialmethode mit den Peizer-Pratt Formeln, ist der absolute Fehler der Optionswerte aus der Binomialmethode mit den Cox, Ross und Rubinstein Parametern angegeben. Im direkten Vergleich der Fehler ist zu erkennen, dass der Fehler der verbesserten Binomialmethode mit den Inversionsformeln von Peizer und Pratt schon bei einer geringen Anzahl an Diskretisierungszeitschritten sehr klein wird. Der Unterschied zwischen den beiden Inversionsformeln ist sehr gering.

Zeitschritte $M$	$ V_{BS} - V_{Binom} $	$ V_{BS} - V_{PP1} $	$ V_{BS} - V_{PP2} $
1	6.289116e-01	1.311181e-01	1.60517625e-01
11	5.909673e-02	3.071260e-03	2.747015e-03
101	1.313649e-02	3.989130e-05	3.668739e-05
201	6.319991e-02	1.009469e-05	9.367600e-06
301	2.239973e-03	4.485699e-06	4.212000e-06
401	1.092644e-03	2.510899e-06	2.395100e-06
501	2.131095e-03	1.593999e-06	1.551100e-06
1001	1.523861e-03	3.674000e-07	4.215000e-07
2001	5.800490e-04	5.969999e-08	1.379000e-07
3001	5.511900e-04	2.700000e-09	8.519999e-08
4001	3.474150e-04	1.730000e-08	6.680000e-08
5001	7.591660e-05	2.660000e-08	5.830000e-08
6001	2.518460e-04	3.160000e-08	5.370000e-08
7001	2.086290e-04	3.470000e-08	5.090000e-08
8001	1.224500e-04	3.670000e-08	4.910000e-08
9001	1.520700e-04	3.800000e-08	4.780000e-08
10001	1.550100e-05	3.900000e-08	4.690000e-08

Tabelle 5.3: Absoluter Fehler der Optionswerte einer Europäischen Put-Option aus dem Binomialverfahren nach Cox, Ross und Rubinstein und aus dem Binomialverfahren nach Leisen und Reimer mit den Peizer-Pratt Inversionsformeln bezüglich des exakten Black-Scholes Wertes 10.6753248679.

In Abbildung 5.2 ist die Entwicklung des Optionswertes, berechnet mittels der verbesserten Binomialmethode mit Hilfe der Peizer-Pratt Inversionsformeln sowie der absolute Fehler gegen den Aufwand dargestellt. Im linken Bild der Abbildung lässt sich erkennen, dass die Entwicklung des Optionswertes nicht mehr oszillierend ist. Der Optionswert nähert sich mit geringerem Anfangsfehler dem exakten Black-Scholes Wert an. Es nähert sich der Optionswert des verbesserten Binomialverfahrens mit der

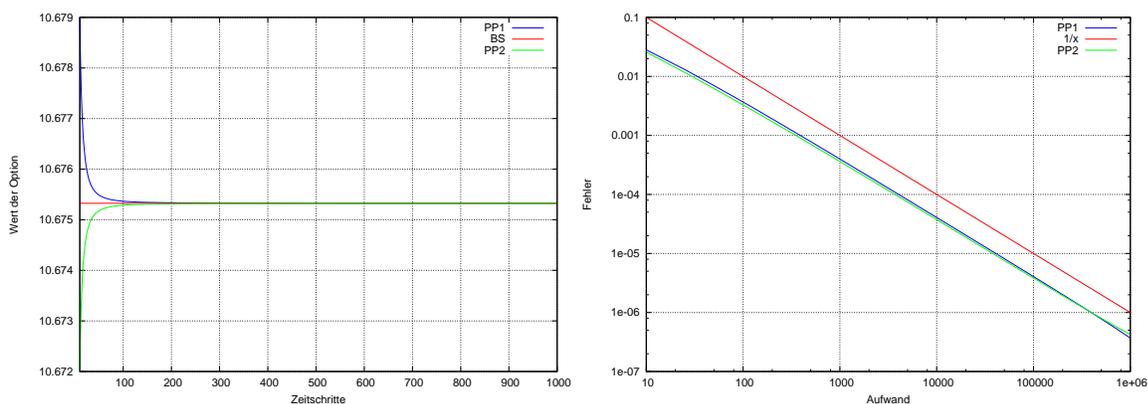


Abbildung 5.2: Preisentwicklung (links) einer Europäischen Put-Option sowie die Konvergenzrate (rechts) des verwendeten Binomialverfahrens nach Leisen und Reimer mit den Peizer-Pratt Inversionsformeln.

ersten Peizer-Pratt Inversionsformel von oben dem exakten Black-Scholes Wert an

und bei Verwendung der zweiten Peizer-Pratt Inversionsformel erfolgt die Annäherung von unten. Bei beiden Annäherungen wird der exakte Black-Scholes Wert, im Gegensatz zum ursprünglichen Binomialverfahren, nicht überschritten bzw. unterschritten. Das rechte Bild der Abbildung zeigt, dass die Binomialmethode mit Hilfe der Inversionsformeln von Peizer und Pratt monoton mit Konvergenzrate 1 gegen den Black-Scholes Wert konvergiert.

Des Weiteren untersuchen wir das Konvergenzverhalten des Binomialverfahrens nach Cox, Ross und Rubinstein bei der Berechnung des Wertes einer Amerikanischen Option. Wir berechnen den Wert einer Amerikanischen Put-Option mit den obigen Eingabeparametern aus Tabelle 5.1. Für diesen Optionstyp existiert keine geschlossene Lösungsformel wie bei Europäischen Optionen. Somit gibt es keinen exakten Optionswert für eine Amerikanische Option. Als Ersatz für diesen exakten Optionswert verwenden wir im Folgenden den Optionswert, der mittels der Control Variate Technik bestimmt wurde. Für die dazu benötigten Binomialwerte wurde die Anzahl an Diskretisierungszeitschritten auf  $M = 15000$  festgelegt. Aus der Control Variate Technik ergibt sich für den fairen Optionswert der Amerikanischen Option

$$\begin{aligned} V(S, 0)^{am} &= V(S, 0)_{Binom}^{am} + V(S, 0)_{BS}^{eur} - V(S, 0)_{Binom}^{eur} \\ &= 11.9728477854 + 10.6753248679 - 10.6753211951 \\ &= 11.972851458. \end{aligned}$$

Die Entwicklung des Optionswertes der Amerikanischen Option sowie die Konvergenzrate der Binomialmethode nach Cox, Ross und Rubinstein für Amerikanische Optionen sind in Abbildung 5.3 veranschaulicht. Die Binomialmethode für Amerikanische Optionen konvergiert oszillierend mit Konvergenzrate  $\frac{1}{2}$ , analog zum Verhalten bei Anwendung auf Europäische Optionen.

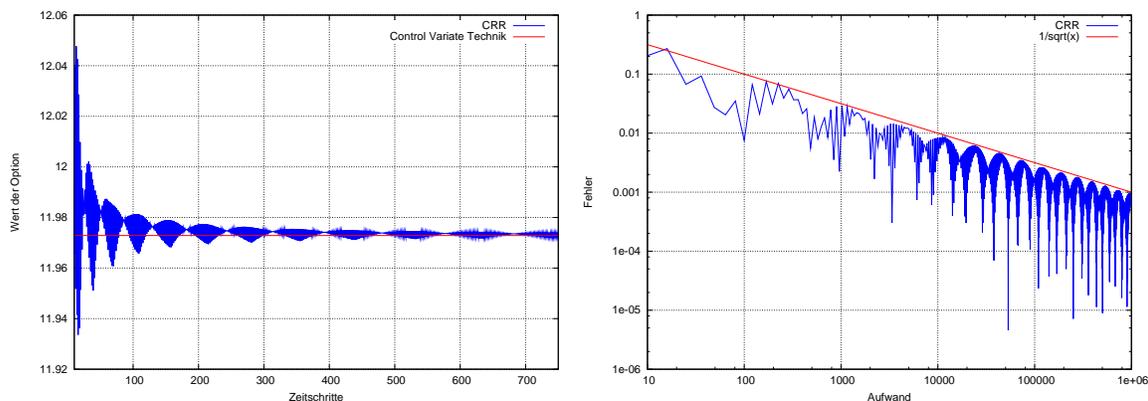


Abbildung 5.3: Preisentwicklung (links) einer Amerikanischen Put-Option sowie die Konvergenzrate (rechts) des verwendeten Binomialverfahrens nach Cox, Ross und Rubinstein.

Im Folgenden betrachten wir das verbesserte Binomialverfahren mit den Inversionsformeln von Peizer und Pratt in Anwendung auf eine Amerikanische Put-Option. Die zur Berechnung verwendeten Werte für die Optionsparameter befinden sich in Tabelle 5.1. In Abbildung 5.4 ist die Preisentwicklung sowie der absolute Fehler

aufgetragen. Als genauen Wert zur Fehlerberechnung verwenden wir analog zu den Betrachtungen des Binomialverfahrens nach Cox, Ross und Rubinstein den Wert aus der Control Variate Technik. Es lässt sich beobachten, dass das verbesserte Bi-

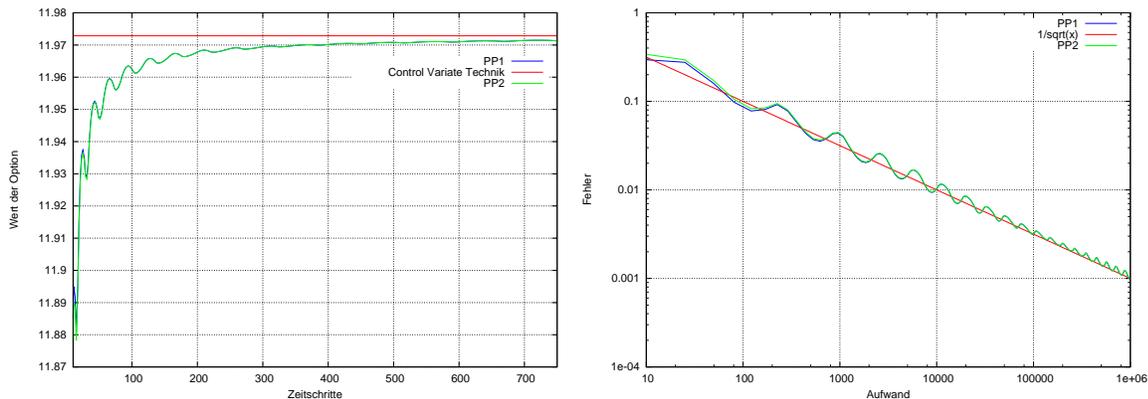


Abbildung 5.4: Preisentwicklung (links) einer Amerikanische Put-Option sowie die Konvergenzrate (rechts) des verwendeten Binomialverfahrens nach Leisen und Reimer mit den Peizer-Pratt Inversionsformeln.

nomialverfahren nach der Methode von Leisen und Reimer nicht ohne den Verlust der verbesserten Konvergenzeigenschaften auf Amerikanische Optionen übertragbar ist. Im linken Bild von Abbildung 5.4 ist die Preisentwicklung für beide Inversionsformeln dargestellt. Die Preisentwicklung weist bei beiden Inversionsformeln eine leicht oszillierende Bewegung auf und nähert sich in beiden Fällen von unten dem Control Variate Technik Wert an. Dieser Wert wird dabei nicht überschritten. Die fast identische Entwicklung des Preises bei beiden Inversionsformeln ist bei Europäischen Optionen nicht zu erkennen. Der Anfangsfehler bei der Berechnung des Optionswertes mit dem verbesserten Binomialverfahren ist geringer als bei der Verwendung des ursprünglichen Binomialverfahrens. Im rechten Bild von Abbildung 5.4 ist der absolute Fehler gegen den Aufwand aufgetragen. Die Konvergenzrate beträgt  $\frac{1}{2}$  analog zum ursprünglichen Binomialverfahren nach Cox, Ross und Rubinstein. Somit liefert das verbesserte Binomialverfahren nach Leisen und Reimer für Amerikanische Optionen keine wirkliche Verbesserung hinsichtlich der Konvergenzrate. Lediglich der Anfangsfehler ist geringer. Eine mögliche Erklärung dafür ist die vorzeitige Ausübungsmöglichkeit der Amerikanischen Optionen. In der Rückwärtsphase des Binomialverfahrens bestimmt sich der Wert der Amerikanischen Option aus dem Maximum des abdiskontierten Erwartungswertes des zukünftigen Zeitpunktes und des inneren Wertes. Im Erwartungswert enthalten, ist die veränderte Wahrscheinlichkeit aus der Anwendung der Inversionsformeln. Diese Wahrscheinlichkeit ist im inneren Wert der Option nicht enthalten. Sie geht folglich verloren. Entspricht nun der Wert der Amerikanischen Option während der Rückwärtsphase oft dem inneren Wert der Option, so geht der Einfluss der veränderten Wahrscheinlichkeit verloren und damit die verbesserten Konvergenzeigenschaften des Binomialverfahrens von Leisen und Reimer. Somit führt die Anwendung des Binomialverfahrens von Leisen und Reimer mit den Peizer-Pratt Inversionsformeln zu keinem verbesserten Konvergenzverhalten bei der Anwendung auf Amerikanische Optionen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass zur Berechnung des Optionswertes von Europäischen Optionen ein verbessertes Binomialverfahren nach der Methode von Leisen und Reimer mit den Peizer-Pratt Inversionen verwendet werden kann. Dadurch verdoppelt sich die Konvergenzrate und es ergibt sich eine Rate von 1. Das ursprüngliche Binomialverfahren nach Cox, Ross und Rubinstein liefert nur eine Konvergenzrate von  $\frac{1}{2}$ .

Das Binomialverfahren nach Cox, Ross und Rubinstein in Anwendung auf Amerikanische Optionen konvergiert wie bei Europäischen Optionen mit Konvergenzrate  $\frac{1}{2}$ . Eine Verbesserung der Konvergenzrate mit Hilfe der Methode von Leisen und Reimer ergibt sich bei Amerikanischen Optionen nicht. Die verbesserten Konvergenzeigenschaften in der Anwendung dieser Methode auf Europäische Optionen gehen bei Amerikanischen Optionen aufgrund der vorzeitigen Ausübung verloren. Somit können Amerikanische Optionen im Binomialmodell nur mit Konvergenzrate  $\frac{1}{2}$  bewertet werden.

## 5.2 Bermudsche Optionswerte im Binomialmodell

Im Folgenden wird die Bewertung von Bermudschen Optionen im Binomialmodell nach Cox, Ross und Rubinstein untersucht. Bei der Bewertung dieses Optionstypes im Binomialmodell kann es passieren, dass die Ausübungszeitpunkte nicht mit den Diskretisierungszeitpunkten übereinstimmen. In Kapitel 4.1.7 wurden dazu verschiedene Lösungsansätze zur Bewertung von Bermudschen Optionen im Binomialmodell vorgestellt. Die Möglichkeit der Anpassung der verschiedenen Zeitpunkte aneinander, sowie die Interpolation bzw. Extrapolation fehlender Aktienkurse, falls die verschiedenen Zeitpunkte unabhängig voneinander gewählt werden, wurden dabei erläutert.

Zunächst betrachten wir die Möglichkeit der Anpassung. Die Anzahl an Diskretisierungszeitpunkten wird in Abhängig von der Anzahl an Ausübungszeitpunkten gewählt. Sie ist folglich ein Vielfaches der Anzahl an Ausübungszeitpunkten. Dies ist die am einfachsten zu wählende Möglichkeit, da sie keinerlei zusätzlichen Aufwand bedeutet im Gegensatz zur Interpolation oder Extrapolation, die später betrachtet werden. Die Prüfung der vorzeitigen Ausübung findet dann nur an den vorzeitigen Ausübungszeitpunkten statt. Die Berechnung des Wertes an diesen Ausübungszeitpunkten erfolgt analog zu Amerikanischen Optionen. An den Diskretisierungszeitpunkten, die keine Ausübungszeitpunkte darstellen, wird der Optionswert wie bei Europäischen Optionen bestimmt.

Im Folgenden betrachten wir drei verschiedene Bermudsche Put-Optionen. Die Optionsparameter werden identisch zu denen in Tabelle 5.1 gewählt. Die drei Optionen unterscheiden sich nur hinsichtlich ihrer Ausübungsfrequenz. Eine dieser Optionen beinhaltet das Recht der täglichen Ausübung, eine der wöchentlichen Ausübung und eine Option darf nur in monatlichen Intervallen vorzeitig ausgeübt werden. Mit steigender Ausübungsfrequenz erhöht sich der Wert einer Bermudschen Option, d.h. der Wert einer Bermudschen Option mit täglicher Ausübungsmöglichkeit entspricht fast dem Wert der entsprechenden Amerikanischen Option. Tabelle 5.4 verdeutlicht dies an berechneten Optionswerten mit Hilfe des Binomialverfahrens mit den Eingabe-

Optionstyp	Anzahl an Ausübungszeitpunkten	Optionswert
Europ. Option	1	10.675324867 (BS)
Bermud. Option	12	11.893383456(Binom)
	52	11.954251538(Binom)
	365	11.970272117(Binom)
Amerik. Option	$\infty$	11.972847785(Binom)

Tabelle 5.4: Vergleich von Optionswerten bezüglich ihrer Ausübungsfrequenz.

werten aus Tabelle 5.1. Die Laufzeit der Optionen beträgt ein Jahr. Hieraus ergibt sich intuitiv die Anzahl an Ausübungszeitpunkten bei monatlicher, wöchentlicher und täglicher Ausübungsmöglichkeit. Die verschiedenen, am Finanzmarkt verwendeten, Day Count Methoden<sup>1</sup> wurden dabei nicht berücksichtigt.

Die folgenden drei Abbildungen 5.5, 5.6 und 5.7 verdeutlichen die jeweilige Preisentwicklung der drei verschiedenen Bermudschen Put-Optionen sowie die dazugehörigen Konvergenzraten. Die Anzahl an Diskretisierungszeitschritten wurde dabei jeweils so gewählt, dass die Ausübungszeitpunkte mit einem Diskretisierungszeitpunkt zusammen fallen. Für Bermudsche Optionen gibt es keine exakten Lösungsformeln und somit keinen exakten Optionswert. Für die absolute Fehlerberechnung wurde deshalb jeweils, als Ersatz für den exakten Wert, ein Wert mittels der Control Variate Technik bestimmt. Die Werte sind in Tabelle 5.5 angegeben. Für alle drei Bermudschen

Ausübungsfrequenz	Control Variate Technik Wert
monatlich	11.893387131
wöchentlich	11.954221558
täglich	11.970192417

Tabelle 5.5: Optionswerte mittels des Binomialverfahrens und der Control Variate Technik für eine Bermudsche Put-Option mit monatlicher, wöchentlicher bzw. täglicher Ausübungsfrequenz.

Put-Optionen lässt sich eine oszillierende Preisentwicklung beobachten. Jedoch wird der hochaufgelöste Optionswert aus der Control Variate Technik dabei nur selten überschritten. Alle drei Optionswerte nähern sich für genügend kleine Zeitschritte diesem Wert an. Die Konvergenzraten sind jeweils  $\frac{1}{2}$ .

Wir haben in Abschnitt 5.1 gesehen, dass bei der Anwendung des Binomialverfahrens nach Leisen und Reimer auf Amerikanische Optionen die beobachteten verbesserten Konvergenzeigenschaften bei der Anwendung auf Europäische Optionen verloren gehen. Es stellt sich die Frage, ob dies bei Bermudschen Optionen, die nicht zu jedem Zeitpunkt ausübbar sind analog passiert. Wir berechnen zwei Bermudsche Put-Optionen nach dem Binomialverfahren mit Anpassung und der Peizer-Pratt Inversion 2 mit den Eingabeparametern aus Tabelle 5.1. Eine Option besitzt 5 vorzeitige Ausübungszeitpunkte, die andere 15 vorzeitige Ausübungsmöglichkeiten. In Abbil-

<sup>1</sup>Gebräuchliche Tagesberechnungskonventionen am Finanzmarkt

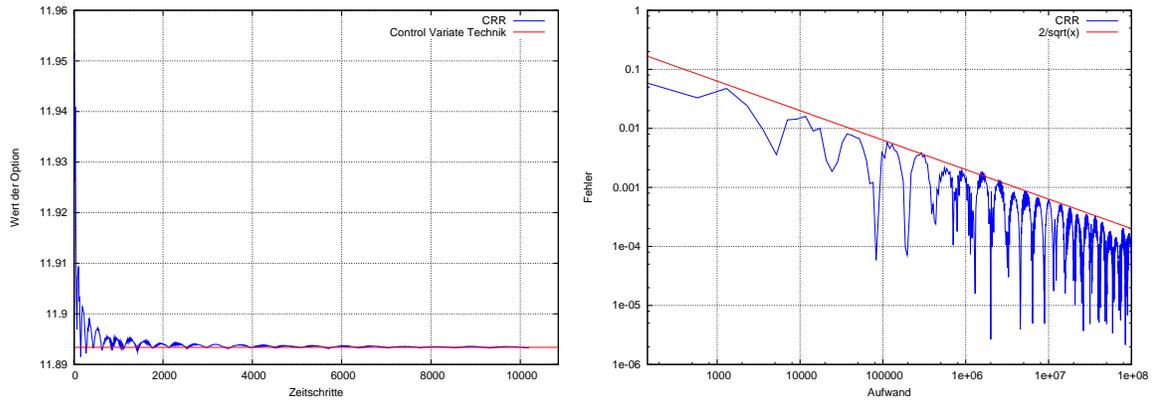


Abbildung 5.5: Preisentwicklung (links) einer Bermudschen Put-Option mit monatlicher Ausübungsmöglichkeit sowie die Konvergenzrate (rechts) des verwendeten Binomialverfahrens nach Cox, Ross und Rubinstein mit Anpassung der Diskretisierungszeitpunkte.

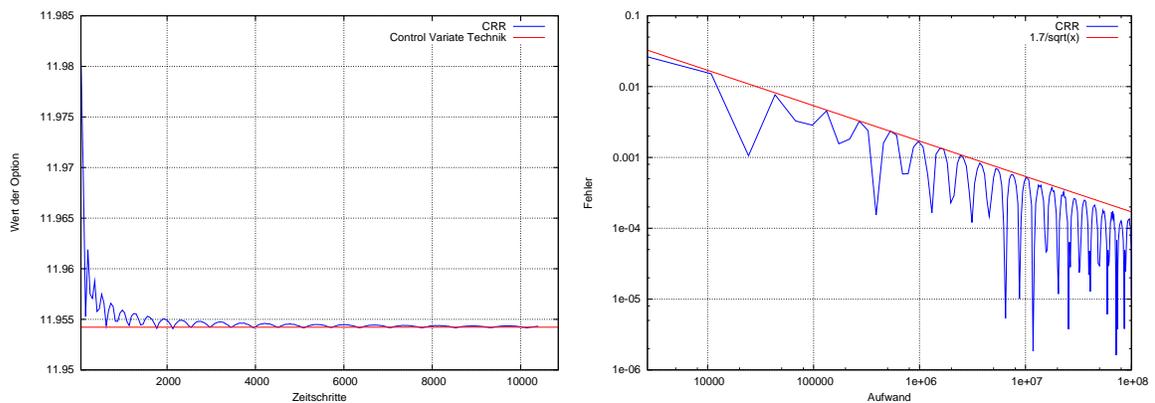


Abbildung 5.6: Preisentwicklung (links) einer Bermudschen Put-Option mit wöchentlicher Ausübungsmöglichkeit sowie die Konvergenzrate (rechts) des verwendeten Binomialverfahrens nach Cox, Ross und Rubinstein mit Anpassung der Diskretisierungszeitpunkte.

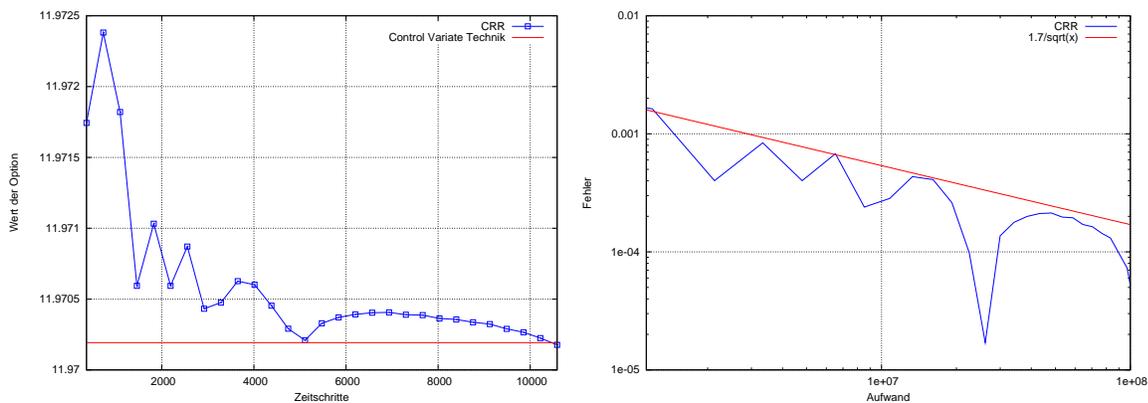


Abbildung 5.7: Preisentwicklung (links) einer Bermudischen Put-Option mit täglicher Ausübungsmöglichkeit sowie die Konvergenzrate (rechts) des verwendeten Binomialverfahrens nach Cox, Ross und Rubinstein mit Anpassung der Diskretisierungszeitpunkte.

Abbildung 5.8 ist jeweils der absolute Fehler bezüglich des hochaufgelösten Optionswert in Kombination mit der Control Variate Technik gegen den Aufwand dargestellt. Die Konvergenzrate der Bermudischen Put-Option mit 5 Ausübungsmöglichkeiten ist

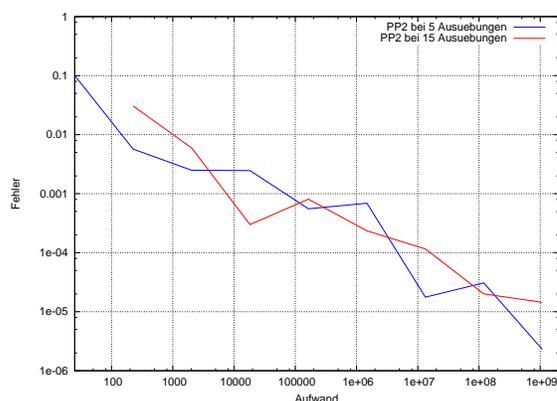


Abbildung 5.8: Absoluter Fehler gegen Aufwand einer Bermudischen Put-Option mit 5 bzw. 15 vorzeitigen Ausübungszeitpunkten berechnet mittels der Binomialmethode in Kombination mit Anpassung und Peizer-Pratt Inversionsformel 2.

größer als  $\frac{1}{2}$ . Das bedeutet, dass die berechnete Optionswerte schneller konvergieren, als bei der Verwendung des ursprünglichen Binomialverfahrens mit Anpassung ohne Inversionsformel. Die Verbesserung ist jedoch sehr gering. Es ergibt sich eine ungefähre Konvergenzrate von  $\frac{2}{3}$  für das Binomialverfahren in Kombination mit Anpassung und Peizer-Pratt Inversionsformel bei der Anwendung auf eine Bermudsche Option mit 5 vorzeitigen Ausübungszeitpunkten.

Diese Verbesserung entfällt, sobald die Anzahl an vorzeitigen Ausübungszeitpunkten erhöht wird. In Abbildung 5.1 ist zu erkennen, dass die Konvergenzrate des Verfahrens für eine Bermudsche Option mit 15 vorzeitigen Ausübungen wieder  $\frac{1}{2}$  beträgt. Aufgrund dessen wird im weiteren Verlauf auf die Anwendung der Methode von

Leisen und Reimer auf Bermudsche Optionen verzichtet. Dadurch betrachten wir im Folgenden die garantierte Konvergenzrate von  $\frac{1}{2}$  für das Binomialverfahren.

Des Weiteren untersuchen wir nun die Optionswertberechnung von Bermudschen Optionen im Binomialmodell, wenn die Ausübungszeitpunkte nicht mit den Diskretisierungszeitpunkten übereinstimmen. In diesem Fall müssen die Aktienkurse an den Ausübungszeitpunkten zusätzlich mittels Interpolation oder Extrapolation berechnet werden, damit die Prüfung der vorzeitigen Ausübung überhaupt möglich ist. Die in Kapitel 4.1.7 erläuterten Interpolations- und Extrapolationsmethoden werden auf ihre Genauigkeit hin untersucht. Es gelten im weiteren Verlauf die Bezeichnungen aus Tabelle 5.6, um die verschiedenen Interpolations- und Extrapolationsmethode zu unterscheiden.

Methoden	Bezeichnung
Lineare Interpolation	0
Exponentielle Interpolation ( $a \cdot e^{b \cdot x}$ )	1
Konstante Interpolation mit späterem Zeitpunkt	2
Konstante Interpolation mit vorherigem Zeitpunkt	3
Lineare Extrapolation mit späteren Zeitpunkten	4
Lineare Extrapolation mit vorherigen Zeitpunkten	5
Exponentielle Extrapolation ( $a \cdot e^{b \cdot x}$ ) mit späteren Zeitpunkten	6
Exponentielle Extrapolation ( $a \cdot e^{b \cdot x}$ ) mit vorherigen Zeitpunkten	7
Exponentielle Extrapolation ( $a \cdot e^x + b$ ) mit späteren Zeitpunkten	8
Exponentielle Extrapolation ( $a \cdot e^x + b$ ) mit vorherigen Zeitpunkten	9

Tabelle 5.6: Verwendete Interpolations- und Extrapolationsmethoden.

Die folgende Untersuchung soll die beste Interpolations- bzw. Extrapolationsmethode bestimmen. Dazu betrachten wir eine Bermudsche Put-Option mit monatlicher Ausübungsmöglichkeit. Die Eingabewerte für die Optionsparameter sind wie zuvor gewählt. Wir berechnen nun den Optionswert einmal mit dem Binomialverfahren mit Hilfe der Anpassungsmethode und einmal mit dem Binomialverfahren in Kombination mit den Interpolations- und Extrapolationsmethoden. Mit der richtigen Interpolations- bzw. Extrapolationsmethode muss sich die gleiche Genauigkeit für den Optionswert aus dem Binomialverfahren mit Interpolation bzw. Extrapolation ergeben, wie für den Optionswert aus dem Binomialverfahren mit Anpassung der Diskretisierungszeitpunkte. Das bedeutet, dass mit einer Verfeinerung der Diskretisierung bei beiden Verfahren, der Unterschied zwischen beiden Optionswerten sehr gering wird. Die zum Vergleich gewählte Bermudsche Put-Option gibt dem Besitzer der Option die Möglichkeit an 12 Zeitpunkten während der Optionslaufzeit von einem Jahr die Option vorzeitig auszuüben. Aufgrund dessen starten wir das Binomialverfahren mit der Anpassungsmethode mit  $M = 12$  Diskretisierungszeitschritten und verdoppeln die Anzahl an Zeitschritten sukzessive auf  $2M, 4M, 8M, \dots$ . Für das Binomialverfahren in Kombination mit den Interpolations- und Extrapolationsmethoden werden die vorzeitigen Ausübungszeitpunkte um  $\Delta t/2$  versetzt. Somit startet das Verfahren mit  $M + 1 = 12 + 1$  Zeitschritten. Auch hier wird die Diskretisierung nach und nach verfeinert durch  $2M + 1, 4M + 1, 8M + 1, \dots$  Zeitschritte. Nun

messen wir den Fehler zwischen dem Optionswert, der mit Hilfe der Interpolations- und Extrapolationsmethoden berechnet wurde, und dem Optionswert aus dem Binomialverfahren mit der Anpassungsmethode. Die Fehlerberechnung erfolgt dabei jeweils auf fast identischer Diskretisierungsschrittweite. Um den Effekt der Diskretisierungsverfeinerung in der Fehlerberechnung auszugleichen, normieren wir den Fehler mit der Wurzel aus der Anzahl der Zeitschritte. Zur formalen Formulierung der Fehlerberechnung werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt. Es sei  $V_M^{angepasst}$  der Wert der Bermudischen Put-Option mit monatlichem Ausübungsrecht berechnet mittels des Binomialverfahren mit Hilfe der Anpassungsmethode mit  $M$  Zeitschritten. Entsprechend bezeichnet  $V_{M+1}^{Inter/Extra}$  den Wert der Put-Option berechnet im Binomialmodell in Kombination mit den Interpolation- bzw. Extrapolationsmethoden auf dem Gitter mit  $M + 1$  Zeitschritten.

Es ergibt sich für die normierte Fehlerberechnung:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{M} \cdot |V_M^{angepasst} - V_{M+1}^{Inter/Extra}| \\
 & \sqrt{2M} \cdot |V_{2M}^{angepasst} - V_{2M+1}^{Inter/Extra}| \\
 & \sqrt{4M} \cdot |V_{4M}^{angepasst} - V_{4M+1}^{Inter/Extra}| \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Mit der falschen Interpolations- bzw. Extrapolationsmethode konvergiert der hieraus resultierende Fehler gegen eine Konstante. Für die richtige Methode erwarten wir eine Konvergenz des Fehlers gegen Null. In Abbildung 5.9 ist der normierte Fehler für die Bermudische Put-Option mit monatlicher Ausübungsmöglichkeit sowie für wöchentliche Ausübung mit den verschiedenen Interpolations- und Extrapolationsmethoden dargestellt. Die Bezeichnungen in der Legende sind identisch mit denen in Tabelle 5.6. Die konstante Interpolation mit dem Aktienkurs des vorheri-

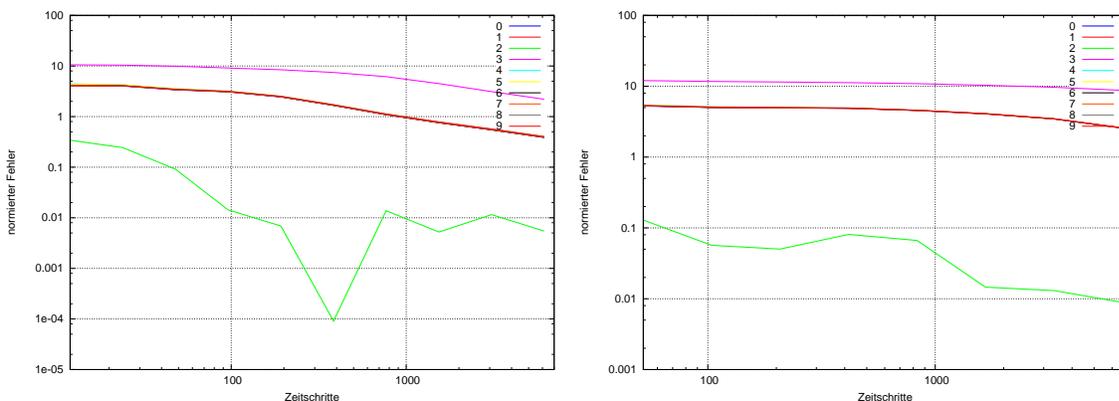


Abbildung 5.9: Normierter Fehler zur Bestimmung der richtigen Interpolation- bzw. Extrapolationsmethode am Beispiel einer Bermudischen Put-Option mit monatlichem Ausübungsrecht (links) und wöchentlichem Ausübungsrecht (rechts).

gen Zeitpunktes liefert die schlechteste Genauigkeit in der Berechnung der fehlenden Aktienkurse an den Ausübungszeitpunkten. Es lässt sich sofort erkennen, dass der Fehler bei dieser Interpolation gegen eine Zahl konvergiert und sogar bei steigender

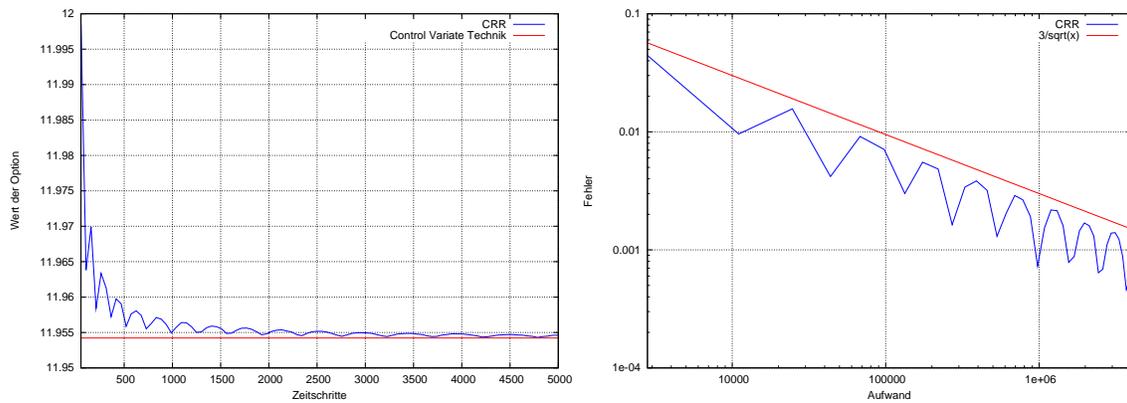


Abbildung 5.10: Preisentwicklung (links) einer Bermudschen Put-Option mit wöchentlicher Ausübungsmöglichkeit sowie die Konvergenzrate (rechts) des verwendeten Binomialverfahrens nach Cox, Ross und Rubinstein mit der besten Interpolationsmethode.

Ausübungsfrequenz (siehe rechtes Bild in Abbildung 5.9) fast konstant bleibt. Im Gegensatz hierzu ist die konstante Interpolation mit dem Aktienkurs zum späteren Zeitpunkt die beste Methode um fehlende Aktienkurse an den Ausübungszeitpunkten mit hoher Genauigkeit zu bestimmen. Der Aktienkurs am späteren Zeitpunkt stellt die bestmögliche Schätzung für den fehlenden Aktienkurs aufgrund des Erwartungswertprinzips dar. Die Fehler der anderen Interpolations- und Extrapolationsmethoden liegen fast exakt aufeinander und konvergieren gegen eine Konstante. In Abbildung 5.10 ist die Entwicklung des Optionspreises sowie die Konvergenzrate des Binomialverfahrens in Kombination mit der konstanten Interpolation mit dem späteren Zeitpunkt bei der Berechnung der Bermudschen Put-Option mit wöchentlichem Ausübungsrecht dargestellt, da diese Interpolationsmethode die fehlenden Aktienkurse am besten approximiert. Die Entwicklung des Optionspreises ist oszillierend, aber der hochaufgelöste Wert wird nicht überschritten. Die Annäherung erfolgt von oben und die Konvergenzrate beträgt  $\frac{1}{2}$ .

Wird die Anzahl an Diskretisierungszeitpunkten im Binomialmodell kleiner gewählt als die Anzahl an Ausübungszeitpunkten, so kann mit Hilfe der Interpolationsmethode der Optionswert mit dem Binomialverfahren berechnet werden. An jedem vorzeitigen Ausübungszeitpunkt, der nicht mit einem Diskretisierungszeitpunkt übereinstimmt, wird der fehlende Aktienkurs mit Hilfe des Aktienkurses zum späteren Zeitpunkt konstant interpoliert. Im linken Bild von Abbildung 5.11 ist die Preisentwicklung einer Bermudschen Put-Option mit wöchentlichem Ausübungsrecht mit den Eingabewerten aus 5.1 dargestellt. Die Anzahl an Diskretisierungszeitpunkten wurde dabei kleiner gewählt als die Anzahl der Ausübungszeitpunkte. Bei wöchentlicher Ausübung und Optionslaufzeit von einem Jahr ergeben sich 52 mögliche vorzeitige Ausübungszeitpunkte. Die Anzahl der Zeitschritte wurde  $M = 1, 2, \dots, 51$  gewählt. Im rechten Bild von Abbildung 5.11 wurde der absolute Fehler gegen den Aufwand aufgetragen. Zur absoluten Fehlerberechnung wurde der Wert aus der Control Variate Technik aus Tabelle 5.5) verwendet. Es ergibt sich wie vorher eine Konvergenzrate von  $\frac{1}{2}$ .

Um Bermudsche Optionen im Binomialmodell zu bewerten, gibt es zwei mögliche

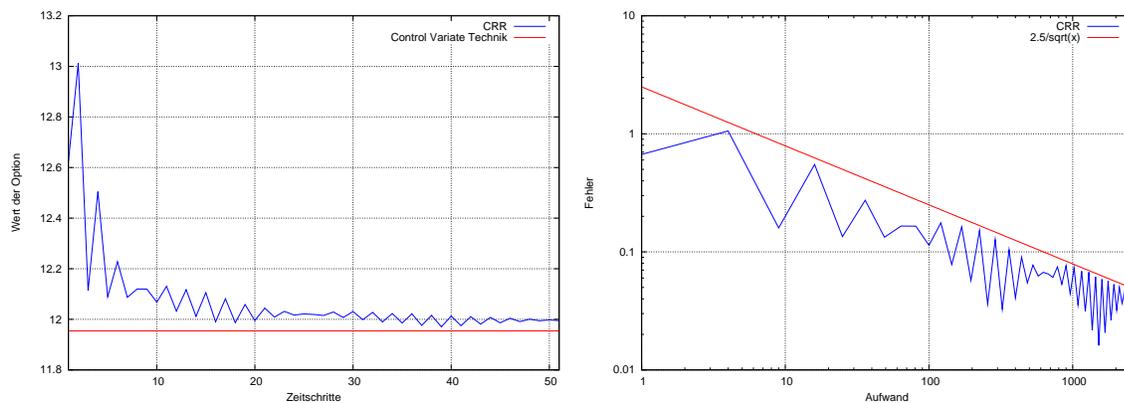


Abbildung 5.11: Preisentwicklung (links) einer Bermudischen Put-Option mit wöchentlicher Ausübungsmöglichkeit sowie die Konvergenzrate (rechts) des verwendeten Binomialverfahrens nach Cox, Ross und Rubinstein mit der besten Interpolationsmethode bei weniger Diskretisierungs- als Ausübungszeitpunkten.

Ansätze, die in diesem Kapitel auf ihr Konvergenzverhalten untersucht wurden. Das Binomialverfahren mit der Anpassungsmethode eignet sich sehr gut zur Berechnung von Bermudischen Optionen, da es in den meisten Fällen keine Schwierigkeiten gibt, die Diskretisierungszeitpunkte als Vielfaches der Ausübungszeitpunkte zu wählen. Dadurch entsteht kein zusätzlicher Aufwand bei der Prüfung der vorzeitigen Ausübungszeitpunkte, da die benötigten Aktienkurse an den Ausübungszeitpunkten existieren. Wir haben gesehen, dass das Verfahren mit Anpassung der Diskretisierungszeitschritte mit Konvergenzrate  $\frac{1}{2}$  konvergiert. Diese Konvergenzrate ist identisch zu der des Binomialverfahrens nach Cox, Ross und Rubinstein für Europäische und Amerikanische Optionen. Bei Bermudischen Optionen mit einer sehr geringen Anzahl an Ausübungszeitpunkten kann die Konvergenz durch die Anwendung der Methode von Leisen und Reimer geringfügig verbessert werden.

Als zweites Verfahren haben wir das Binomialverfahren in Kombination mit den Interpolations- und Extrapolationsmethoden betrachtet, welches Anwendung findet, wenn die Ausübungszeitpunkte nicht mit den Diskretisierungszeitpunkten übereinstimmen. Insbesondere ist dies der Fall, wenn die Anzahl an Diskretisierungszeitpunkten geringer ist, als die Anzahl an Ausübungszeitpunkten. Wir haben festgestellt, dass als beste Interpolations- bzw. Extrapolationsmethode die konstante Interpolation mit dem Aktienkurs zum späteren Zeitpunkt zu wählen ist. Das Binomialverfahren in Kombination mit der konstanten Interpolation mit dem Aktienkurs zum späteren Zeitpunkt konvergiert mit Konvergenzrate  $\frac{1}{2}$  gegen den hochauflösten Wert des Binomialverfahrens mit Anpassung zusammen mit der Control Variate Technik. Im Gegensatz zur Anpassungsmethode müssen hier alle fehlenden Aktienkurse an den Ausübungszeitpunkten interpoliert werden. Dies bedeutet einen erhöhten Aufwand.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Binomialverfahren mit Anpassung der Diskretisierungszeitpunkte an die Ausübungszeitpunkte die einfachste und schnellste Methode von beiden ist, um eine Bermudsche Option zu bewerten. Sollten die Diskretisierungszeitpunkte nicht an die Ausübungszeitpunkte anpassbar sein, so stellt

das Binomialverfahren in Kombination mit der konstanten Interpolation ein hinreichend gutes Verfahren dafür dar.

### 5.3 Bermudsche Optionswerte mit der Erwartungswertdarstellung nach Geske und Johnson

Bermudsche Optionen können auch mit Hilfe der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson bewertet werden. Nachdem in Kapitel (4.3) die Methode erläutert wurde, soll sie nun hinsichtlich ihrer Konvergenz und ihres Aufwands untersucht werden.

Zunächst betrachten wir eine Bermudsche Put-Option mit den Eingabewerten aus Tabelle 5.1 die vier Ausübungszeitpunkte besitzt. Die Option darf zu den Zeitpunkten  $T/4, 2T/4 = T/2, 3T/4$  und  $T$  ausgeübt werden. Zur Berechnung des Optionswertes nach dem Ansatz von Geske und Johnson müssen zunächst drei Fixpunktgleichungen gelöst werden, um die kritischen Aktienkurse an den Ausübungszeitpunkten zu erhalten. Die Anzahl an Fixpunktgleichungen verringert sich um eins gegenüber der Anzahl an Ausübungszeitpunkten, da zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  der kritische Aktienkurs identisch mit dem Ausübungspreis  $K$  ist. Die drei Fixpunktgleichungen sind gegeben durch

$$S_{3T/4}^* = K - P_1(S_{3T/4}^*, K; 3T/4) \quad (5.1)$$

$$S_{2T/4}^* = K - P_2(S_{2T/4}^*, K; 2T/4) \quad (5.2)$$

$$S_{1T/4}^* = K - P_3(S_{1T/4}^*, K; 1T/4). \quad (5.3)$$

Diese drei Fixpunktgleichungen werden mittels des Newton-Verfahrens gelöst. Hierzu verwenden wir unterschiedliche Toleranzwerte als Abbruchbedingung des Newton-Verfahrens. Als Toleranzwerte wählen wir  $10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-7}$ . Als Startwert für das Newton-Verfahren dient der Anfangskurs der Aktie, also  $S_0$ . Die zu berechnenden eindimensionalen Normalverteilungen werden mit Hilfe des Moro-Verfahrens bestimmt, die zweidimensionalen Normalverteilungen mittels der Methode von Drezner und für höhere Dimensionen verwenden wir die Transformationsmethode von Genz. In der Methode von Genz verwenden wir ein Quasi-Monte-Carlo Verfahren mit  $10^1, 10^2, \dots, 10^7$  Iterationen. Die Fixpunktgleichungen (5.1) und (5.2) können ohne die Verwendung der Genz-Transformationen für die Normalverteilungen mittels des Newtonverfahrens gelöst werden. In der dritten Fixpunktgleichung (5.3) verwendet das Newton-Verfahren die Genz-Transformation um die dreidimensionale Normalverteilung zu berechnen. Das bedeutet, dass in jedem Newtonschritt durch die Transformation von Genz ein Quasi-Monte-Carlo Verfahren gestartet wird. Zusätzlich zu den Fixpunktgleichungen, in denen die mehrdimensionalen Normalverteilungen gelöst werden, müssen bei der Berechnung des Optionswertes nach der Erwartungswertformel auch mehrdimensionale Normalverteilungen berechnet werden, jeweils bis zu der Dimension, die der Anzahl an Ausübungszeitpunkten entspricht. In unserem gewählten Fall also bis Dimension vier.

In Abbildung 5.12 ist der absolute Fehler des Optionswertes in Abhängigkeit zur

Newton-Toleranz und der Anzahl an Quasi-Monte-Carlo Iterationen dargestellt. Aus der Control Variate Technik ergibt sich als Ersatz für den exakten Optionswert 11.72434247. Mit diesem Wert erfolgt dann die absolute Fehlerberechnung. An der Abbildung 5.12 lässt sich erkennen, dass der absolute Fehler mit steigender Anzahl an Quasi-Monte-Carlo Iterationen kleiner wird. Wenn die Newton-Toleranz verfeinert wird, so wird nur anfänglich auch der absolute Fehler kleiner, d.h. es stellt sich nicht automatisch eine Konvergenz des Fehlers bezüglich der Newton-Toleranz ein. Die Genauigkeit der Optionswerte erhöht sich nicht mehr in Abhängigkeit von der Newton-Toleranz ab einer Newton-Toleranz von  $10^{-2}$ . Die beste Kombination aus der Newton-Toleranz und den Quasi-Monte-Carlo Iterationen zur Berechnung des Optionswertes ist eine Toleranz von  $10^{-2}$  mit  $10^{-7}$  Quasi-Monte-Carlo Iterationen im Algorithmus von Genz.

Das Newton-Verfahren konvergiert quadratisch. Die Konvergenzrate der Quasi-Monte-Carlo Simulation ist 1. Folglich ergibt sich für das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson eine Konvergenzrate von ungefähr 1.

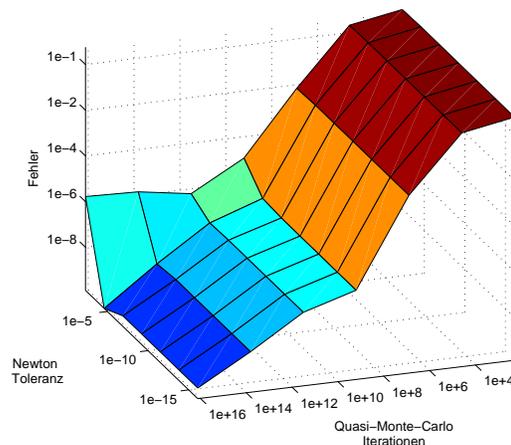


Abbildung 5.12: Absoluter Fehler in Abhängigkeit von der Newton-Toleranz und den Quasi-Monte-Carlo Iterationen bei der Berechnung einer Bermudischen Put-Option mit 4 Ausübungszeitpunkten nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson.

In Tabelle 5.7 ist der absolute Fehler, der bei der Berechnung der Bermudischen Put-Option mit vier Ausübungszeitpunkten auftritt, in Abhängigkeit von der gewählten Newton Toleranz und den gewählten Quasi-Monte-Carlo Iterationen angegeben. Die Laufzeit der einzelnen Berechnungen wurde zusätzlich sekundengenau gemessen. Außerdem sind die benötigten Newton Iterationen für die Lösung der einzelnen Fixpunktgleichungen aufgeführt. An den angegebenen Werten sind die Merkmale von Abbildung 5.12 eindeutig nachvollziehbar. Außerdem erhöht sich bei Verfeinerung der Newton Toleranz die Anzahl an Newtonschritten. Ab einer Quasi-Monte-Carlo Iterationsanzahl von  $10^3$  bleibt die Anzahl an Newtonschritten konstant für die einzelnen Toleranzwerte. Die Laufzeit der Berechnung des Optionswertes ist insbesondere abhängig von der gewählten Anzahl an Quasi-Monte-Carlo Iterationen.

Newton Toleranz	QMC	(5.1)	(5.2)	(5.3)	Gesamtlaufzeit in Sek.	abs. Fehler
$10^{-1}$	10	1	9	3	0.08	2.075778
$10^{-1}$	$10^2$	1	9	12	0.09	1.380757
$10^{-1}$	$10^3$	1	9	13	0.11	1.146945e-01
$10^{-1}$	$10^4$	1	9	13	0.3	7.178793e-03
$10^{-1}$	$10^5$	1	9	13	2.2	2.005139e-03
$10^{-1}$	$10^6$	1	9	13	21.03	2.880532e-03
$10^{-1}$	$10^7$	1	9	13	215.14	3.096470e-03
$10^{-2}$	10	18	26	14	0.09	2.134738
$10^{-2}$	$10^2$	18	26	28	0.09	1.408657
$10^{-2}$	$10^3$	18	26	30	0.13	1.212864e-01
$10^{-2}$	$10^4$	18	26	30	0.53	2.709470e-03
$10^{-2}$	$10^5$	18	26	30	4.42	1.228464e-03
$10^{-2}$	$10^6$	18	26	30	46.26	2.692760e-04
$10^{-2}$	$10^7$	18	26	30	438.71	5.085850e-05
$10^{-3}$	10	34	43	25	0.08	2.140650
$10^{-3}$	$10^2$	34	43	45	0.1	1.412249
$10^{-3}$	$10^3$	34	43	48	0.16	1.216846e-01
$10^{-3}$	$10^4$	34	43	48	0.76	2.543017e-03
$10^{-3}$	$10^5$	34	43	48	7.13	1.268616e-03
$10^{-3}$	$10^6$	34	43	48	69.06	2.996690e-04
$10^{-3}$	$10^7$	34	43	48	683.45	8.100040e-05
$10^{-4}$	10	49	60	37	0.09	2.141187
$10^{-4}$	$10^2$	49	60	63	0.09	1.412657
$10^{-4}$	$10^3$	49	60	66	0.19	1.217203e-01
$10^{-4}$	$10^4$	49	60	66	1.02	2.529944e-03
$10^{-4}$	$10^5$	49	60	66	9.47	1.269782e-03
$10^{-4}$	$10^6$	49	60	66	93.64	2.999050e-04
$10^{-4}$	$10^7$	49	60	66	970.14	8.121220e-05
$10^{-5}$	10	65	78	48	0.09	2.141253
$10^{-5}$	$10^2$	65	78	80	0.1	1.412692
$10^{-5}$	$10^3$	65	78	83	0.22	1.217234e-01
$10^{-5}$	$10^4$	65	78	83	1.28	2.528648e-03
$10^{-5}$	$10^5$	65	78	83	11.71	1.269870e-03
$10^{-5}$	$10^6$	65	78	83	116.47	2.999050e-04
$10^{-5}$	$10^7$	65	78	83	1171.45	8.120970e-05
$10^{-6}$	10	80	95	60	0.09	2.141258
$10^{-6}$	$10^2$	80	95	97	0.11	1.412695
$10^{-6}$	$10^3$	80	95	101	0.23	1.217238e-01
$10^{-6}$	$10^4$	80	95	101	1.53	2.528511e-03
$10^{-6}$	$10^5$	80	95	101	14.46	1.269879e-03
$10^{-6}$	$10^6$	80	95	101	149.03	2.999040e-04
$10^{-6}$	$10^7$	80	95	101	1414.33	8.120830e-05
$10^{-7}$	10	96	112	72	0.09	2.141258
$10^{-7}$	$10^2$	96	112	114	0.11	1.412695
$10^{-7}$	$10^3$	96	112	119	0.27	1.217238e-01
$10^{-7}$	$10^4$	96	112	119	1.79	2.528497e-03
$10^{-7}$	$10^5$	96	112	119	16.70	1.269881e-03
$10^{-7}$	$10^6$	96	112	119	165.47	2.999036e-04
$10^{-7}$	$10^7$	96	112	119	1660.83	8.120820e-05

Tabelle 5.7: Wichtige Kennzahlen bei der Berechnung einer Bermudschen Put-Option mit vier Ausübungszeitpunkten nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson.

## 5.4 Vergleich des Binomialverfahrens und der Erwartungswertdarstellung nach Geske und Johnson in Anwendung auf Bermudsche Optionen

In diesem Abschnitt vergleichen wir das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson mit dem Binomialverfahren in Kombination mit der Anpassungsmethode in der Anwendung auf Bermudsche Optionen. Mit beiden Verfahren wurde der Wert einer Bermudschen Option mit vier Ausübungszeitpunkten mit den Eingabewerten aus 5.1 bestimmt. Um die Verfahren hinsichtlich ihrer Effizienz zu vergleichen, betrachten wir den absoluten Fehler und die dazu benötigte Rechenlaufzeit. Zur absoluten Fehlerberechnung wurde als Ersatz für den exakten Wert der hochaufgelöste Optionswert (60000 Zeitschritte) des Binomialverfahrens mit Anpassung verwendet. In Abbildung 5.13 ist jeweils der absolute Fehler gegen

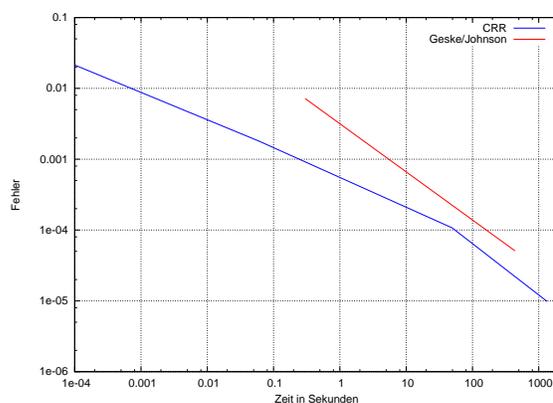


Abbildung 5.13: Absoluter Fehler/Zeit des Binomialverfahrens mit Anpassung und des Verfahrens nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson.

die Rechenlaufzeit der beiden Verfahren dargestellt. Aus dem Erwartungswertansatz wurde die jeweils bestmögliche Genauigkeit für eine feste Newton Toleranz gewählt. Mit diesen Werten wurde dann der absolute Fehler für die dazugehörigen Laufzeiten bestimmt. Im Binomialverfahren mit der Anpassungsmethode wurde die Anzahl an Diskretisierungszeitschritten sukzessive erhöht. Hier wurden analog die absoluten Fehler für die jeweilige Rechenlaufzeit berechnet.

Aus der Abbildung lässt sich erkennen, dass das Binomialverfahren in Kombination mit der Anpassungsmethode im Vergleich zum Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung mit geringerer Rechenlaufzeit eine bessere Genauigkeit für den Optionswert liefert. Jedoch konvergiert das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson schneller, so dass das Binomialverfahren für höhere Genauigkeiten überholt werden wird.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Binomialverfahren mit Anpassung der Diskretisierungszeitpunkte eine ausreichende Genauigkeit für den Optionswert in adäquater Rechenzeit liefert. Das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson konvergiert mit einer besseren Rate als das Binomialver-

fahren für Bermudsche Optionen, besitzt jedoch eine höhere Konstante. Das Binomialverfahren benötigt selbst für einen Fehler der Größenordnung  $1e^{-5}$  bei der Bewertung einer Bermudschen Option mit vier Ausübungszeitpunkten weniger Rechenlaufzeit als das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung. Aufgrund der schnelleren Konvergenzrate würde für eine höhere Genauigkeit, das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung ein Ergebnis in kürzerer Rechenlaufzeit liefern, als das Binomialverfahren. Dies stellen die beiden Graphen in Abbildung 5.13 dar. Die beiden Graphen werden sich schneiden, so dass zu erkennen ist, dass der Erwartungswertansatz für höhere Genauigkeiten schneller ein akzeptables Ergebnis liefert, als das Binomialverfahren.

## 5.5 Swaptionwerte im Rendleman-Bartter Modell

In Kapitel 4.2 wurde das Rendleman-Bartter Modell zur Bewertung von Swaptions mittels eines Baumverfahrens vorgestellt. In diesem Abschnitt untersuchen wir das Konvergenzverhalten dieses Modells. Dazu betrachten wir zunächst eine Europäische Swaption, die dem Halter der Swaption das Recht gibt in  $n$  Jahren in einen Swap einzutreten. Während der Swaplaufzeit erhält der Halter den fixen Zinssatz und zahlt im Gegenzug einen variablen Zinssatz. Es handelt sich also dabei um eine Europäische Receiver-Swaption.

Der zugrunde liegende variable Zinssatz entspricht dem Liborzinssatz und beträgt 6% per annum bei kontinuierlicher Verzinsung. Die Swaption gibt dem Halter das Recht in fünf Jahren in einen Swap mit Laufzeit drei Jahre einzutreten und einen festen Zinssatz von 6.2% zu erhalten. Die Volatilität beträgt dabei 0.2. Die Zahlungen des Swaps erfolgen halbjährlich und das Kapitalvolumen des Swaps beträgt 100.

Wir berechnen den Wert dieser Europäischen Swaption im Black Modell mit Hilfe der exakten Formel und im Rendleman-Bartter Modell, um das Konvergenzverhalten des Verfahrens nach Rendleman und Bartter zu untersuchen. Der exakte Swaptionwert aus der Black Formel wird außerdem zur absoluten Fehlerberechnung verwendet. Wir wählen für den erwarteten Ertrag  $\mu = 0$  im Rendleman und Bartter Modell, um möglichst gleiche Baumparameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  zum Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein zu erhalten. In der linken Abbildung von 5.14 ist die Preisentwicklung der Europäischen Swaption im Rendleman-Bartter Modell dargestellt. Es lässt sich eine ähnliche Entwicklung wie im Binomialmodell für Europäische Optionen beobachten. Die Preisentwicklung weist eine oszillierende Struktur auf und der exakte Wert der Swaption aus dem Black Modell wird bei der Entwicklung des Preises mehrfach überschritten. In der rechten Abbildung von 5.14 wird der absolute Fehler gegen den Aufwand des Verfahrens abgebildet. Die Konvergenzrate des Verfahren von Rendleman und Bartter beträgt für Europäische Swaptions  $\frac{1}{2}$ . Wir erhalten somit die gleiche Konvergenzrate für Europäische Swaptions mit dem Verfahren von Rendleman und Bartter wie für Europäische Optionen mit dem Binomialverfahren nach Cox, Ross und Rubinstein.

Nun betrachten wir die identische Bermudsche Receiver-Swaption im Rendleman

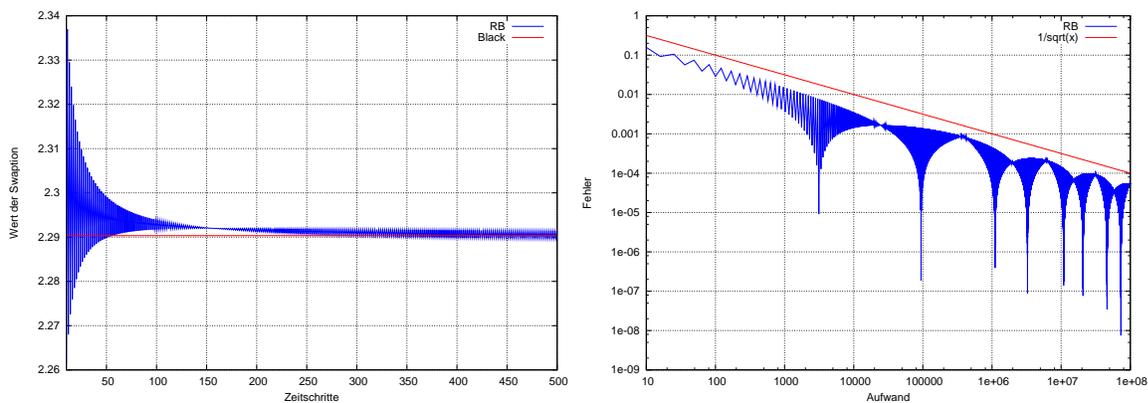


Abbildung 5.14: Preisentwicklung (links) einer Europäischen Swaption und Konvergenzrate des Rendleman und Bartter Verfahrens.

und Bartter Modell. Der Swaptionwert ist durch die gleichen Parameterwerte bestimmt wie die Europäische Swaption. Zusätzlich beinhaltet sie jedoch ein vorzeitiges Ausübungsrecht. Dieses vorzeitige Ausübungsrecht gestattet eine wöchentliche vorzeitige Ausübung der Swaption. Die Diskretisierungszeitpunkte sind so gewählt, dass alle Ausübungszeitpunkte mit einem Diskretisierungszeitpunkt zusammenfallen. Somit wird die Anpassungsmethode für Bermudische Optionen auf Bermudische Swaptions übertragen. Als Ersatz für den exakten Wert verwenden wir einen hochaufgelösten Wert aus der Control Variate Technik. Die linke Abbildung von 5.15

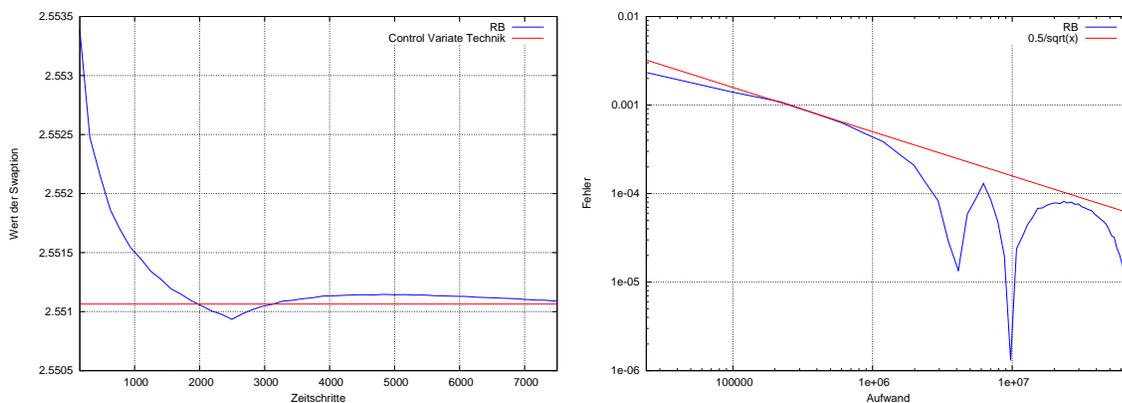


Abbildung 5.15: Preisentwicklung (links) einer Bermudischen Swaption mit wöchentlichem Ausübungsrecht und Konvergenzrate des Rendleman und Bartter Verfahrens.

stellt die Preisentwicklung der Bermudischen Swaption im Rendleman und Bartter Modell dar. Die Entwicklung des Preises ist nicht oszillierend, sondern im weitesten Sinne monoton. Der exakte Wert wird nur zweimal überschritten. Wenn die Zeitschrittweite hinreichend klein gewählt wird, so erhalten wir Konvergenz. In der rechten Abbildung von 5.15 wurde der absolute Fehler gegen den Aufwand aufgetragen. Das Verfahren nach Rendleman und Bartter konvergiert mit Konvergenzrate  $\frac{1}{2}$ . Wir erhalten die gleiche Konvergenzrate wie bei Europäischen Swaptions.

In diesem Abschnitt haben wir gezeigt, dass die Anpassungsmethode für Bermudische Optionen auch auf Bermudische Swaptions anwendbar ist. Mit dem Verfahren von Rendleman und Bartter in Kombination mit der Anpassungsmethode können Bermudische Swaptions einfach und effizient mit Konvergenzrate  $\frac{1}{2}$  bewertet werden.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden zwei verschiedene Ansätze zur Bewertung Bermudscher Optionen diskutiert. Die Verwendung des Binomialverfahrens nach Cox, Ross und Rubinstein stellte sich mit unseren Ergänzungen, Anpassung und Interpolation, als effizientes Verfahren zur Bewertung Bermudscher Optionen heraus. Die Wahl der Diskretisierungszeitpunkte in Abhängigkeit von der Anzahl an Ausübungszeitpunkten macht die Bewertung Bermudscher Optionen ohne zusätzlichen Aufwand möglich. Sollten die Ausübungszeitpunkte der Bermudschen Option nicht mit den Diskretisierungszeitpunkten übereinstimmen, so können die fehlenden Aktienkurse mit Hilfe der Interpolationsmethode mit dem Kurs zum späteren Zeitpunkt bestimmt werden. Diese Interpolationsmethode ermöglicht zusätzlich die Berechnung des Bermudschen Optionspreises mit weniger Diskretisierungs- als Ausübungszeitpunkten.

Das Binomialverfahren nach Cox, Ross und Rubinstein in Anwendung auf Europäische und Amerikanische Optionen liefert eine Konvergenzrate von  $\frac{1}{2}$ . Mit Hilfe der Methode von Leisen und Reimer kann diese Konvergenzrate des Binomialverfahrens in der Anwendung auf Europäische Optionen auf 1 verdoppelt werden. Wir haben jedoch gesehen, dass diese verbesserte Konvergenzrate des Binomialverfahrens bei der Anwendung auf Amerikanische Optionen vollständig verloren geht. Für Bermudsche Optionen mit einer sehr geringen Anzahl der Ausübungszeitschritte erhalten wir nur eine leichte Verbesserung für die Konvergenz bei der Anwendung der Methode von Leisen und Reimer auf das Binomialverfahren. Mit einer steigenden Anzahl der Ausübungszeitpunkte geht diese jedoch auch bei Bermudschen Optionen verloren. Wir erreichen somit eine Konvergenzrate von mindestens  $\frac{1}{2}$  für Bewertung von Bermudschen Optionen im Binomialmodell. Wir haben ebenfalls gezeigt, dass wir Bermudsche Swaptions im Rendleman und Bartter Modell mit einer Konvergenzrate von  $\frac{1}{2}$  bewerten können.

Als zweiter Ansatz in dieser Arbeit wurde die analytische Approximation des Bermudschen Optionspreises nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson betrachtet. Diese analytische Approximation kann mit Hilfe numerischer Verfahren bestimmt werden. Die kritischen Aktienkurse an den vorzeitigen Ausübungszeitpunkten sind durch Fixpunktgleichungen bestimmt, die wir mittels des Newton-Verfahrens lösen. Die mehrdimensionalen Normalverteilungen in der Erwartungswertdarstellung lösen wir mit Hilfe des Moro-Verfahrens, der Methode von Drezner und der Transformation von Genz. Die Transformation von Genz verwendet dabei die Quasi Monte-Carlo Methode. Es ergibt sich eine Konvergenzrate von ungefähr 1 für das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson.

In numerischen Experimenten haben wir diese beiden Ansätze für die Bewertung Bermudscher Optionen miteinander verglichen. Das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung von Geske und Johnson konvergiert mit einer besseren Rate als das Binomialverfahren für Bermudsche Optionen. Jedoch benötigt das Binomialverfahren selbst für einen Fehler der Größenordnung  $1e^{-5}$  bei der Bewertung einer Bermudschen Option mit vier Ausübungszeitpunkten weniger Rechenlaufzeit als das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung. Aufgrund der schnelleren Konvergenzrate würde für eine höhere Genauigkeit das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung ein Ergebnis in kürzerer Rechenlaufzeit liefern, als das Binomialverfahren. Ist die Anzahl der Ausübungszeitpunkte einer Bermudschen Option sehr groß, so erhöht sich die Rechenzeit des Verfahrens nach der Erwartungswertdarstellung sehr schnell, da sehr viele Fixpunktgleichungen zu lösen sind, in denen wiederum mehrdimensionale Normalverteilungen zu berechnen sind. Die Rechenzeit des Binomialverfahrens hängt dagegen in erster Linie von der gewählten Anzahl an Diskretisierungszeitpunkten ab und nicht von der Anzahl an Ausübungszeitpunkten. Deshalb liefert das Binomialverfahren für eine Bermudsche Option mit vielen Ausübungszeitpunkten sehr viel schneller hinreichend genaue Ergebnisse, als das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung. Damit haben wir zwei Verfahren mittels derer, je nach gewünschter Genauigkeiten, eine Bermudsche Option bewertet werden kann.

Beide Verfahren besitzen noch Potential hinsichtlich der Verbesserung ihrer Konvergenzgeschwindigkeit. Die verbesserte Konvergenzrate der Methode von Leisen und Reimer geht mit einer steigenden Anzahl der Ausübungszeitschritte für Bermudsche Optionen verloren. Um die Konvergenzrate des Binomialverfahrens für Bermudsche Optionen mit einer beliebigen Anzahl der Ausübungszeitpunkte zu verbessern, muss die Methode von Leisen und Reimer tiefergehender analysiert werden, um dann eventuell die Konvergenzrate des Verfahrens für Bermudsche Optionen zu verbessern. Das Verfahren nach der Erwartungswertdarstellung kann eventuell noch beschleunigt werden, wenn sich Rechenzeit im Lösungsprozess der Darstellung sparen lässt. Dazu müsste dieser noch genauer untersucht werden.

# Literaturverzeichnis

- [AB01] ANDERSEN, L. und M. BROADIE: *A Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multidimensional American Options*. Working Paper, 2001.
- [Bau02] BAUER, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. De-Gruyter-Lehrbuch, 5. Auflage, 2002.
- [BG97] BROADIE, M. und P. GLASSERMAN: *Pricing American-Style Securities using Simulation*. Journal of Economic Dynamics and Control, 21(8/9):1323–1352, 1997.
- [BJ00] BUNCH, D. S. und H. JOHNSON: *The American Put Option and Its Critical Stock Price*. Journal of Finance, 55(5):2333–2356, 2000.
- [BM01] BRIGO, D. und F. MERCURIO: *Interest Rate Models, Theory and Practice*. Springer, 2001.
- [Bos88] BOSSAERTS, P.: *Simulation Estimators of Optimal Early Exercise*. Working Paper, 1988.
- [Boy77] BOYLE, P. P.: *Options: A Monte Carlo Approach*. Journal of Financial Economics, 4:323–338, 1977.
- [BS73] BLACK, F. und M. SCHOLES: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, 81:637–654, 1973.
- [Cam51] CAMP, B. H.: *Approximation to the point binomial*. Annals of Mathematical Statistics, 22:130–131, 1951.
- [CR76] COX, J. und S. ROSS: *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes*. Journal of Financial Economics, 3:145–166, 1976.
- [CR85] COX, J. und M. RUBINSTEIN: *Options Markets*. Prentice Hall, 1985.
- [CRR79] COX, J. C., S. A. ROSS und M. RUBINSTEIN: *Option pricing: A simplified approach*. Journal of Financial Economics, 7:229–263, 1979.
- [CW91] COX, D. R. und N. WERMUTH: *A Simple Approximation for Bivariate and Trivariate Normal Integral*. International Statistical Review, 59(2):263–269, 1991.
- [Deá80] DEÁK, I: *Three Digit Accurate Multiple Normal Probabilities*. Numer. Math., 35:369–380, 1980.

- [Deá86] DEÁK, I: *Computing Probabilities of Rectangles in Case of Multinormal Distribution*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 26:101–114, 1986.
- [Deu04] DEUTSCH, H.-P.: *Derivative und Interne Modelle*. Schäffer Poeschel, 3. Auflage, 2004.
- [Don73] DONNELLY, T. G.: *Bivariate Normal Distribution [S15] (Algorithm 462)*. Commun. ACM, 16(10):638, 1973.
- [Dör] DÖRNER, J.-H.: *Kapitel 4-Optionskennzahlen*. <http://www.wiwi.uni-frankfurt.de/~doerner/> (06.04.2005).
- [Dre78] DREZNER, Z.: *Computation of the Bivariate Normal Integral*. Mathematics of Computation, 32(141):277–279, 1978.
- [FHH] FRANKE, W., J. HÄRDLE und C. HAFNER: *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*. <http://www.quantlet.com/mdstat/scripts/sfm/html/> (09.02.2006), 2. Auflage.
- [Gen92] GENZ, A.: *Numerical Computation of Multivariate Normal Probabilities*. J. Comput. Graph. Stat., 1:141–150, 1992.
- [Gen93] GENZ, A.: *Comparison of Methods for the Computation of Multivariate Normal Probabilities*. Computing Science and Statistics, 25:400–405, 1993.
- [GG03a] GRIEBEL, M. und T. GERSTNER: *Praktikum Numerische Verfahren der Finanzmathematik (Computational Finance)*. Nummer 2. Institut für Angewandte Mathematik der Friedrich-Wilhelms Universität Bonn, Abteilung Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation, 2003.
- [GG03b] GRIEBEL, M. und T. GERSTNER: *Praktikum Numerische Verfahren der Finanzmathematik (Computational Finance)*. Nummer 1. Institut für Angewandte Mathematik der Friedrich-Wilhelms Universität Bonn, Abteilung Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation, 2003.
- [GJ84] GESKE, J. und H. E. JOHNSON: *The American Put Option Valued Analytically*. The Journal of Finance, 39(5), 1984.
- [Gla04] GLASSERMAN, P.: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 1. Auflage, 2004.
- [HB02] HANKE-BOURGEOIS, M.: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. Teubner, 1. Auflage, 2002.
- [HK79] HARRISON, M. J. und D. M. KREPS: *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*. Journal of Economic Theory, 1979.
- [HK01] HAUGH, M. und L. KOGAN: *Pricing American Options: a Duality Approach*. Operations Research, 2001.

- [Hol04] HOLTZ, M.: *Konstruktion B-Spline-basierter monotoner Mehrgitterverfahren zur Bewertung Amerikanischer Optionen*. Diplomarbeit, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn, 2004.
- [Hul97] HULL, J. C.: *Options, Futures and other Derivatives*. Prentice Hall, 3. Auflage, 1997.
- [Hul01a] HULL, J. C.: *Einführung in Futures- und Optionsmärkte*. Oldenburg, 3. Auflage, 2001.
- [Hul01b] HULL, J. C.: *Optionen, Futures und andere Derivative*. Oldenbourg, 4. Auflage, 2001.
- [HW88] HULL, J. und A. WHITE: *The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 23:237–251, 1988.
- [Jäc02] JÄCKEL, P.: *Monte Carlo Methods in Finance*. Wiley Finance, 2002.
- [KK99] KORN, R. und E. KORN: *Optionsbewertung und Portfoliooptimierung (Moderne Methoden der Finanzmathematik)*. Vieweg, 1. Auflage, 1999.
- [Kwo98] KWOK, Y.-K.: *Mathematical Models of Financial Derivates*. Springer Finance, 1998.
- [LM96] LEISEN, D. und REIMER M.: *Binomial Models for Option Valuation - Examining and Improving Convergence*. Appl. Math. Finance, 3:319–346, 1996.
- [LS01] LONGSTAFF, F. A. und E. S. SCHWARTZ: *Valuing American Options by Simualtion: A simple Least-Square Approach*. The Review of Financial Studies, 14(1):113–147, 2001.
- [LT] LINDEE, C. und N. THOMOPOULOS: *Values for the Cumulative Distribution Function of the Standard Multivariate Normal Distribution*.
- [Mor95] MORO, B.: *The full Monte*. RISK, 8(2), 1995.
- [Nef96] NEFTCI, S. N.: *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press, 1996.
- [PP68] PEIZER, D.B. und J. W. PRATT: *A Normal Approximation for Binomial, F, Beta and Other Common Related Tail Probabilitiesn I*. The Journal of the American Statistical Association, 63:1416–1456, 1968.
- [Pra68] PRATT, J.W.: *A Normal Approximation for Binomial, F, Beta and Other Common Related Tail Probabilitiesn II*. The Journal of the American Statistical Association, 63:1457–1483, 1968.
- [RB79] RENDLEMAN, R. J. und B. J. BARTTER: *Two-State Option Pricing*. The Journal of Finance, 34(5), 1979.

- [RB80] RENDLEMAN, R. und B. BARTTER: *The Pricing of Options on Debt Securities*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 15(1), March 1980.
- [Rog02] ROGERS, L. C. G.: *Monte Carlo Valuation of American Options*. Mathematical Finance, 12:271–286, 2002.
- [Sch84] SCHERVISH, M.: *Multivariate Normal Probabilities with Error Bound*. Applied Statistics, 33:81–87, 1984.
- [Sey00] SEYDEL, R.: *Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten (Computational Finance)*. Springer, 2000.
- [Ste01] STENTOFT, LARS: *Assessing the Least Squares Monte-Carlo Approach to the American Option Valuation*. CAF Working Paper Series, 2001.
- [Sto99] STOER, J.: *Numerische Mathematik I*. Springer, 8. Auflage, 1999.
- [Til93] TILLEY, J. A.: *Valuing American Options in a Path Simulation Model*. Transactions of the Society of Actuaries, 45:549–565, 1993.
- [Ton90] TONG, Y. L.: *The Multivariate Normal Distribution*. Springer Verlag, 1990.
- [WDH93] WILLMOTT, P., J. N. DEWYNNE und S. D. HOWISON: *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press, 1993.
- [WDH95] WILLMOTT, P., J. N. DEWYNNE und S. D. HOWISON: *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press, 1995.
- [Wer92] WERNER, J.: *Numerische Mathematik I*. Vieweg Studium, 1992.
- [Wes] WEST, G.: *Better Approximations to Cumulative Normal Functions*.
- [Wit03] WITTSTOCK, G.: *Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Kurzfassung: Definitionen und Sätze, Vorlesung für Bio-Informatiker und Lehramtskandidaten*. Universität des Saarlandes, 2003.
- [Zha98] ZHANG, H.: *Exotic options: A Guide to second Generation Options*. World Scientific Publishing Co., 2. Auflage, 1998.