Approximation und Kompression mit Tensorprodukt-Multiskalen-Approximationsräumen

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn

vorgelegt von

Stephan Knapek

aus

Erding

Bonn 2000

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn

1. Referent: Prof. Dr. M. Griebel

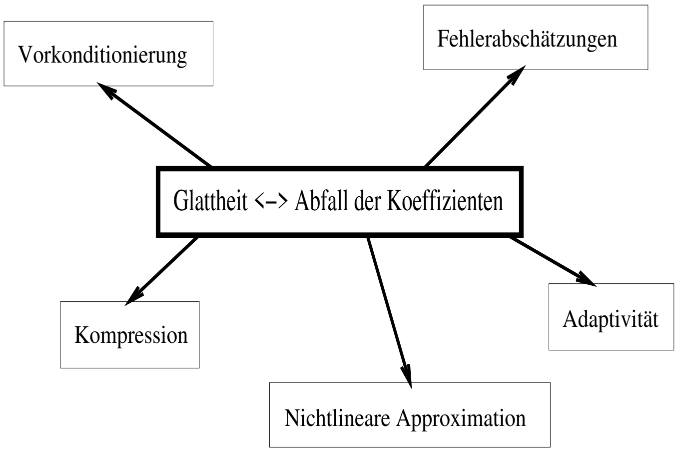
2. Referent: Prof. Dr. M. Rumpf

Tag der Promotion: 18.4.2000

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Zusammenhang zwischen der Glattheit einer periodischen Funktion und dem Abfall ihrer Fourierkoeffizienten ist seit langem bekannt [Ar61, Ad75, Tri78] und es gelten ähnliche Zusammenhänge auch für nicht periodische Funktionen und deren Koeffizienten bezüglich anderer Multiskalenbasen [But68, Dah92, Os92]. In der Numerik wird dieser Zusammenhang in vielfacher Weise ausgenutzt, zum Beispiel bei der Konstruktion von Fehlerschätzern zur Steuerung adaptiver Verfeinerungen bei der approximativen Lösung von Operatorgleichungen [Babu94, Ve94, Da97a], bei der Konstruktion von optimalen Vorkonditionierern [Dah92, Os92, Bram90, Zh92], bei der Kompression von Operatoren [DeV92, Dah93], wie auch bei der (nichtlinearen) Approximation [Da97a, DeV98b]. Man kann sagen, daß die Charakterisierung von Glattheitsklassen von Funktionen durch bestimmte Eigenschaften der Koeffizienten inzwischen ein wohlbekanntes Instrument in der numerischen Analysis ist und den Ausgangspunkt für die Entwicklung mächtiger Techniken in der Approximationstheorie darstellt. Die folgende Abbildung zeigt eine unvollständige Darstellung von Anwendungsbereichen.



Eine zentrale Rolle spielt dieser Zusammenhang bei der Konstruktion von Algorithmen zur Approximation von Funktionen und zur Approximation von Lösungen von Differential- oder Integralgleichungen, genauer bei der Auswahl geeigneter Approximationsräume und Basen. Bei einer schlechten Wahl der Approximationsräume (beziehungsweise der Basen) leidet die Approximationsordnung, was in der Praxis zu nur sehr langsam konvergierenden Verfahren, beziehungsweise – bei höherdimensionalen Problemen – zu Algorithmen mit zu hohen Anforderungen an Speicher- wie auch Rechenkapazitäten führt. Gesucht sind deswegen Approximationsräume, die die über ein Problem vorhandene Information über zum Beispiel die lokale oder globale Glattheit der zu approximierenden Funktion optimal ausnutzen. Eine solche Anpassung der Approximationsräume an die lokale Glattheit der zu approximierenden Funktion läßt sich bei der Lösung von Operatorgleichungen einerseits a-posteriori durchführen, das heißt in diesem Zusammenhang während der Lösung, indem die durch geeignete Fehlerschätzer gewonnene Information dazu benutzt wird, die Approximationsräume so zu verändern, daß möglichst wenige Freiheitsgrade genügen um gute Approximationen zu erhalten

[Babu78, Ve94]. Andererseits lassen sich ebenso a-priori vorhandene Informationen über insbesondere die globale Glattheit der rechten Seite oder der Lösung bei der Konstruktion von Approximationsräumen verwenden. Letzteres ist von entscheidender Bedeutung insbesondere bei Problemen in höheren Raumdimensionen. Trotz der schnellen Entwicklung in der Computertechnologie sind in solchen Fällen viele Probleme einer direkten numerischen Simulation aufgrund ihrer hohen Komplexität nicht zugänglich. Das heißt, eine angemessene Genauigkeit erfordert zu viele Unbekannte, beziehungsweise der Aufwand pro Unbekannter ist zu groß. Schon bei dreidimensionalen Problemen, wie zum Beispiel bei Problemstellungen aus der Strömungsmechanik oder der direkten Turbulenzsimulation ist der für eine hinreichende Genauigkeit erforderliche Aufwand sehr groß.

Die Abhängigkeit von der Raumdimension n des zur Lösung einer Operatorgleichung nötigen Aufwands ist in erster Linie bestimmt durch die Glattheit der beteiligten Funktionen (wie rechter Seite, Lösung und eventueller Koeffizientenfunktionen). Ein typisches Glattheitsmaß ist hier gegeben durch isotrope Sobolevräume [Ad75]. Andere (stärkere) Glattheitsvoraussetzungen können die Abhängigkeit der Komplexität von der Dimension verringern und eine approximative Lösung solcher Probleme wieder möglich machen, indem Unterräume mit relativ großer Dimension, die jedoch nur wenig zur Fehlerreduktion beitragen, identifiziert und aus dem Approximationsraum weggelassen werden. In Extremfällen lassen sich dann Algorithmen konstruieren, deren Kosten zur Lösung bis auf ϵ-Genauigkeit asymptotisch unabhängig sind von der Dimension des Problems [Bun99]. Bei Problemen mit Integraloperatoren ergibt sich noch die zusätzliche Schwierigkeit, daß der Aufwand bei der Lösung sich durch den eventuell globalen Kern des Operators drastisch erhöht. Dies äußert sich darin, daß die Steifigkeitsmatrizen von Galerkindiskretisierungen von Integraloperatoren im Gegensatz zu denen von Differentialoperatoren voll besetzt sind [Hac89a]. Auch hier ist die Situation jedoch so geartet, daß die Abhängigkeit der Komplexität des Problems von der Glattheit der Lösung abhängt und für entsprechende Glattheitsvoraussetzungen die Komplexität des Problems entsprechend vermindert ist.

Als geeignete Glattheitsmaße für Probleme in höheren Dimensionen haben sich insbesondere Tensorprodukte von eindimensionalen Sobolevräumen herausgestellt [Tem93b]. Zusammen mit Tensorprodukt-Basen lassen sich dann geeignete Approximationsräume angeben. Entsprechende Konstruktionen wurden bereits in [Babe60, Sm63] unter dem Namen "hyperbolisches Kreuz"-Approximationsräume (auch Dünne Gitter oder Boolsche Blending-Schemata) eingeführt. In diesen Approximationsräumen ist die Zahl der Freiheitsgrade gegenüber dem zugeordneten vollen Gitter signifikant reduziert, von $O(2^{Jn})$ im Fall des vollen Gitters auf $O(2^J J^{n-1})$ im Fall des hyperbolischen Kreuzes (J: Level der Diskretisierung, n: Raumdimension). Gleichzeitig wird bei der Approximation von Funktionen aus solchen Tensorprodukträumen die Genauigkeit der Approximation in Abhängigkeit von der Fehlernorm annähernd aufrecht erhalten und dies trotz der erheblich verminderten Anzahl der Freiheitsgrade, siehe zum Beispiel [Tem89]. Damit wird das Verhältnis von Aufwand zu Genauigkeit im Vergleich zu vollen Gittern erheblich verbessert und der Aufwand zur Lösung von Differential- oder auch Integralgleichungen kann sehr stark reduziert werden [Bun92, Gri98c].

Für die Verringerung des Aufwands bei der Lösung von Integralgleichungen läßt sich der Zusammenhang zwischen der Glattheit einer Funktion und dem Abklingverhalten ihrer Multiskalenkoeffizienten auch in Bezug auf den Kern statt auf die Lösung oder die rechte Seite der Operatorgleichung ausnutzen. Besitzt der Kern bestimmte Glattheit, das heißt bestimmte Abklingeigenschaften im Fourierraum, so läßt sich dies zur Definition von Kernapproximationen nutzen, die wiederum sehr wenig Gitterpunkte benötigen [Pe89].
Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, geeignete Tensorprodukt-Approximationsräume für die Approximation von Differential- und Integralgleichungen zu bestimmen und dabei außerdem einen Beitrag zur Beantwortung der folgenden Fragen zu liefern: Wie sehen sinnvolle und relevante Glattheitsmaße für Operatorprobleme aus? Wie sollten Approximationsräume in Abhängigkeit von den Glattheiten der betrachteten Funktionen beziehungsweise Operatoren konstruiert werden? Was läßt sich über die Kosten von Lösungsalgorithmen sagen? Wie hängen die Ergebnisse von den Glattheitsparametern ab, insbesondere, gibt es Unterschiede bei Operatoren positiver beziehungsweise negativer Ordnung? Wie kann man (Integral-) Operatoren durch Tensorprodukt-Basen komprimieren?
Zur Beantwortung dieser Fragen definieren wir geeignete zweiparametrige Glattheitsmaße, die die isotropen Sobolevräume wie auch die Sobolevräume mit dominierender gemischter Glattheit enthalten, und wir führen eine Sequenz von Approximationsräumen ein die sowohl Vollgitter-Approximationsräume wie auch die "hyperbolisches Kreuz"-Approximationsräume beinhalten. Diese Konstruktionen geben uns die nötige Flexibilität, die bei der Konstruktion von "hyperbolisches Kreuz"-Approximationsräumen verwendeten Ideen zu verallgemeinern und den Zusammenhang zwischen der optimalen Wahl von Approximationsräumen und den zugrundeliegenden Glattheitsannahmen genauer zu untersuchen. Außerdem erlauben sie uns Aussagen über optimale Approximationsräume für elliptische Operatoren. Es zeigt sich, daß die Wahl geeigneter Approximationsräume nur vom Verhältnis zwischen dem Anteil an isotroper Glattheit und dem Anteil an gemischter Glattheit abhängt. In diesem Sinne verallgemeinern wir insbesondere Aussagen aus [Bun99] über die Poisson-Gleichung auf Operatoren beliebiger Ordnung, insbesondere auch auf Integraloperatoren. Die Anwendung des Dünngitteransatzes auf Randintegralgleichungen (das heißt die Verwendung von Dünngitter-Approximationsräumen als Finite Elemente Räume bei der Diskretisierung im Galerkinverfahren) bietet sich schon deswegen an, weil der Kompressionsschritt, der nötig ist um Algorithmen mit optimalem Aufwand zu erhalten [Schn98], eventuell vermieden werden kann. Als Nebenprodukte unserer Untersuchungen erhalten wir auch Blending-Schemata für unsere Approximationsräume.
Bezüglich der Kompression von Integraloperatoren untersuchen wir einerseits, wie der Abfall der Kernfunktion im Fourierraum zusammen mit der Glattheit der Lösung des Operatorproblems ausgenutzt werden kann, um geeignete Approximationsräume für den Kern zu konstruieren. Das Konstruktionsprinzip ist sehr ähnlich zu dem bei der Approximation von Funktionen und führt ebenfalls zu Verallgemeinerungen der Dünnen Gitter und unter bestimmten Voraussetzungen an die Glattheit des Kerns, die Norm in der der Fehler gemessen wird und bei geeigneter Wahl der Räume, zu (fast) opti-

maler Kompression. Aufgrund der Produktstruktur des Integranden und der daraus resulierenden Abfallgesetze der Koeffizienten des Integranden ist dieser Ansatz auch bei rein isotroper Glattheit erfolgreich [Pe89]. Es ergeben sich ähnliche Aussagen wie im Fall der Approximation von Funktionen. Insbesondere zeigen wir wieder, wie die Kompressionsrate von der Norm abhängt in der der Fehler gemessen wird. In diesem Sinne verallgemeinern wir insbesondere Ideen aus [Pe89, Fr96].
Außerdem untersuchen wir noch eine Kompressionstrategie, die auf dem Abklingen des Kerns im physikalischen Raum beruht. Verwendet man dann z.B. biorthogonale Waveletbasen mit einer hinreichend hohen Zahl von verschwindenden Momenten, so können viele Einträge in der Diskretisierungsmatrix durch Null ersetzt werden ohne die Approximationsordnung zu zerstören. Dabei untersuchen wir, nach welchen Kriterien Einträge in der Steifigkeitsmatrix zu Null gesetzt werden können. Wir beschäftigen uns hier mit der Frage wie entsprechende Konstruktionen für Tensorprodukt-Approximationsräume aussehen und wie diese Art von Kompression mit Dünngitter-Diskretisierungen und den von uns betrachteten Glattheitsmaßen zusammenspielt.
Für Nicht-Tensorprodukt Wavelets auf einem vollen Gitter des Levels J wurde diesbezüglich in [Dah93, Schn98] gezeigt, daß diese a-priori Kompression bei Pseudodifferentialoperatoren mit bestimmtem Abfallverhalten im physikalischen Raum so durchgeführt werden kann, daß die Anzahl der Einträge der Steifigkeitsmatrix nach Kompression nur noch von der Ordnung $O(J^k 2^{Jn})$ mit einem $k \in \mathbb{R}^+$ ist, siehe auch [Dah94]. Unter bestimmten Voraussetzungen an die Anzahl der verschwindenen Momente der primalen und der dualen Wavelets, sagt die Theorie sogar voraus, daß es möglich ist $k = 0$ zu setzen, das heißt die komprimierte Steifigkeitsmatrix hat $O(2^{Jn})$ Einträge – im Gegensatz zu $O(2^{2Jn})$ Einträgen für die unkomprimierte Steifigkeitsmatrix [Schn98].

Insgesamt beschäftigen wir uns also in dieser Arbeit mit drei Arten der Approximation bzw. Kompression, die auf drei unterschiedlichen Kriterien beruhen, und zwar auf

- der Glattheit der Lösung bzw. der rechten Seite des betrachteten variationellen Problems (d.h. auf dem Abklingen im Fourierraum),
- der Glattheit des Kerns des betrachteten Integraloperators (d.h. auf dem Abklingen im Fourierraum),
- dem Abklingen des Kerns des betrachteten Integraloperators im physikalischen Raum.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:
Kapitel 1 der Arbeit führt notwendige Notation ein und schildert die Problemstellung der wir uns dann in den folgenden Kapiteln widmen.
In Kapitel 2 werden die Glattheitsklassen definiert die in dieser Arbeit betrachtet werden. Es handelt sich dabei um eine Mischung aus isotropen Sobolevräumen und Sobolevräumen mit dominierenden gemischten Glattheiten, die sich durch Schnitte aus Tensorprodukten eindimensionaler Sobolevräume ergeben. Die entstehenden Sobolevräume sind zweiparametrig, wobei der eine Parameter die gemischte Glattheit bestimmt und

der andere die isotrope Glattheit. Außerdem werden in aller Kürze Tensorprodukt-Multiskalenbasen definiert und der Zusammenhang zwischen der Glattheit einer Funktion und dem Abfall der Koeffizienten in der Multiskalenbasis exemplarisch dargestellt. Weiterhin werden Normäquivalenzen für diese Tensorprodukt-Multiskalenbasen und die von uns betrachteten Glattheitsklassen aus eindimensionalen Normäquivalenzen hergeleitet. Diese zeigen den Zusammenhang zwischen dem Abfall der Koeffizienten in einer Multiskalendarstellung und der Glattheit der betrachteten Funktion.
In Kapitel 3 wenden wir uns der Konstruktion von Approximationsräumen für die in Kapitel 2 definierten Glattheitsklassen zu. Nach einem einleitenden Abschnitt definieren wir eine Sequenz von Approximationsräumen, die sowohl die Vollgitterräume als auch die "hyperbolisches Kreuz"-Räume beeinhaltet. Dann untersuchen wir die Approximationseigenschaften dieser Räume und schätzen deren Dimension ab. Insbesondere bestimmen wir diejenigen Fälle, in denen sich der Vollgitter-Approximationsraum beziehungsweise die "hyperbolisches Kreuz"-Approximationsräume durch kleinere Approximationsräume ersetzen lassen, ohne daß sich die Approximationsordnung verschlechtert. Dabei verwenden wir der Einfachheit halber zu Beginn stabile Zerlegungen. Dann zeigen wir unter welchen Voraussetzungen die Approximationsresultate auch für nicht stabile Zerlegungen Gültigkeit haben. Als ein wichtiges Beispiel betrachten wir gesondert trigonometrische Approximationsräume.
Da die resultierenden Approximationsräume im allgemeinen numerisch nicht so einfach zu handhaben sind wie Standardräume die mit vollen Gittern assoziiert sind, geben wir Blending-Schemata für die Darstellung von Funktionen aus unseren Approximationsräumen an. Funktionen aus diesen Approximationsräumen können nämlich als Summe von Approximationen auf vollen Gittern mit unterschiedlichen Gitterweiten in verschiedene Koordinatenrichtungen dargestellt werden. Diese Idee wurde im Zusammenhang mit hyperbolischen Kreuzen zum Beispiel in [Bas85, Bas89, De89, Gon89, Gri92] benutzt und kann in einfacher Weise auf den hier vorgestellten allgemeineren Fall erweitert werden. Auf diese Weise kann die Notwendigkeit komplizierter Datenstrukturen umgangen werden. Darüberhinaus erlaubt dieser Ansatz die direkt Verwendung von hierarchischen Methoden, wie Multilevelmethoden und schneller Fouriertransformation, wie sie bereits in [Bas89, Hal92, Bi99] für die hyperbolischen Kreuze verwendet wurden. Dann erläutern wir in Anlehnung an [Bun99] wie unsere Approximationsräume durch eine Optimierung hergeleitet werden können.
Den Abschluß dieses Kapitels bilden Anwendungsbeispiele aus den Bereichen Approximation und Interpolation, Differential- und Integralgleichungen. Wir beschäftigen uns mit der Frage, wie viele Gitterpunkte benötigt werden um eine vorgegebene Genauigkeit bei der Approximation zu erreichen und ob diese Zahl von der Dimension abhängig ist oder nicht. Dann diskutieren wir die Eignung unserer Approximationsräume für die Lösung von Operatorgleichungen. Dazu werden zuerst einige Bemerkungen über Vorkonditionierer gemacht. Insbesondere diskutieren wir in Anlehnung an [Gri94b] einen BPX-artigen Vorkonditionierer für Diskretisierungen auf unseren neuartigen Approximationsräumen der zu einer Kondition der vorkonditionierten Steifigkeitsmatrix von $O(J^{n-2})$ führt. Außerdem stellen wir ein Resultat bezüglich eines Zweilevelverfahrens vor, bei dem ein Dünngitterraum als Grobgitter verwendet wird. Wir zeigen,

daß auf diese Weise keine vom Level der Diskretisierung unabhängige Konvergenzrate erzielt werden kann. Dann werden die Kosten zur Lösung von Operatorgleichungen abgeschätzt. Insbesondere zeigen wir, für welche Glattheitsklassen das Poisson-Problem mit einem (asymptotisch) von der Dimension unabhängigen Aufwand gelöst werden kann. Dabei verbessern und verallgemeinern wir ein Resultat von [Bun99], in dem eine Teilmenge des hyperbolischen Kreuzes zusammen mit stückweise multi-linearen Splines als Basen zur Konstruktion eines Algorithmus zur Lösung des Poisson-Problems verwendet wird, dessen Kosten unabhängig von der Dimension sind.
In Kapitel 4 widmen wir uns der Approximation bzw. Kompression von Integraloperatoren. Wir untersuchen, welche Approximationsräume zur Approximation der Kernfunktionen in Abhängigkeit von deren Glattheit und der Glattheit der Lösung am besten geeignet sind. Die Vorgehensweise ist dabei ähnlich zu der bei der Konstruktion der Approximationsräume für Funktionen in Kapitel 3. Insbesondere zeigen wir, daß sowohl die Glattheit der beteiligten Funktionen als auch die Norm in der der Fehler gemessen wird, bei der Wahl der Approximationsräume berücksichtigt werden sollte. In Extremfällen sind dann Approximationen möglich bei denen der Einfluß der Dimension n asymptotisch vollständig verschwindet. Wir verallgemeinern damit Ergebnisse von [Fr95, Fr96] in Bezug auf allgemeinere Normen und auf allgemeinere Glattheitsannahmen. Als ein wichtiges Beispiel betrachten wir trigonometrische Approximationsräume. Weiterhin führen wir Blending-Schemata an, mit denen dann Algorithmen konstruiert werden können die mit einfachen Datenstrukturen arbeiten und die einfache Anwendung von Multilevelmethoden wie der schnellen Fourier- beziehungsweise Wavelettransformation erlauben.
Außerdem untersuchen wir die Kompression von Operatoren durch eine Kompressionsstrategie die auf dem Abfall des Kerns im physikalischen Raum beruht. Dabei werden kleine Einträge in der Steifigkeitsmatrix a-priori (d.h. ohne daß sie berechnet werden) identifiziert, zu Null gesetzt und bei Matrix-Vektor-Multiplikationen nicht berücksichtigt. Dazu geben wir eine Abschätzung für die Größe der Einträge der Galerkin-Steifigkeitsmatrix von Integraloperatoren an, geben ein Kompressionsverfahren an und schätzen den bei der Kompression entstehenden Fehler ab. Dies ermöglicht es, die Kompression so vorzunehmen, daß (asymptotisch) der durch die Diskretisierung eingeführte Fehler durch diese zusätzliche Kompression nicht vergrößert wird.
In Kapitel 5 führen wir einige numerische Beispiele zur Theorie der vorhergehenden Kapitel an. Wir diskutieren numerische Beispiele zur Interpolation mit bilinearen Splines und mit trigonometrischen Funktionen, zur Lösung von Integralgleichungen (Einfachschicht-Potentialgleichung) und zur Approximation von Integraloperatoren mit glatten Kernen. Das Ziel hierbei ist, die Effekte zu zeigen, die die Verwendung unterschiedlicher Approximationsräume mit sich bringen.
Den Abschluß dieser Arbeit bilden einige Bemerkungen darüber, wie man zusätzlich verfügbare Informationen über den Operator ausnutzen kann um weitere vorteilhafte Modifikationen der Approximationsräume durchzuführen. Dies führt zum Beispiel zur Definition anisotroper Dünner Gitter [Roe91]. Dies ist von besonderem Interesse für Operatoren mit großen Elliptizitätskonstanten, die wiederum zu großen Konstanten in den Abschätzungen der Approximationsfehler führen.

Sämtliche Berechnungen in dieser Arbeit wurden am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn auf Workstations der Firma Silicon Graphics, und zwar auf Maschinen des Typs O2 mit MIPS R10000 (150MHz), IP32 und IRIX 6.3, O200 mit MIPS R10000 (180MHz), IP27 und IRIX 6.4, sowie O200 mit MIPS R10000 (195MHz), IP27 und IRIX 6.4, durchgeführt. Die einzelnen Programme wurden in C geschrieben.
An dieser Stelle möchte ich meinen Dank an diejenigen Personen aussprechen, die beim Erstellen dieser Arbeit hilfreich waren. Als erstes ist hier Prof. M. Griebel zu nennen, der immer mit wertvollen Ratschlägen und Ideen zur Verfügung stand. Bei Prof. Dr. Martin Rumpf bedanke ich mich für die Übernahme des Zweitgutachtens. Zudem danke ich Dr. T. Schiekofer für das Berechnen der Steifigkeitsmatrizen für die Einfachschicht-Potentialprobleme, Frank Kiefer und Dr. K. Giebermann für das Korrekturlesen und allen meinen Kollegen am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn für das gute Arbeitsklima. Finanzielle Unterstützung kam mir zu von der Universität Bonn und dem Sonderforschungsbereich 256 an der Universität Bonn. Dank auch dafür.

Bonn, im Februar 2000

1 Notation und Problemstellung

In diesem Kapitel geben wir eine Einführung in die Problemstellung und führen in die in dieser Arbeit verwendete Terminologie ein. Für detailliertere Darstellungen verweisen wir auf die an den jeweiligen Stellen im Text zitierte Literatur.

Beginnen wir mit ein paar Bezeichnungen. Es sei C im folgenden eine generische Konstante, die von den Glattheitsannahmen und der Dimension n des Problems, nicht jedoch von der Anzahl der Level J abhängen kann. Andere Abhängigkeiten werden jeweils angezeigt oder sollten aus dem Kontext klar sein. Multiindizes (Vektoren) werden fett geschrieben, zum Beispiel $\mathbf{j}$ für $(j_1, \ldots, j_n)$. Ungleichungen wie $\mathbf{l} \le \mathbf{t}$ oder $\mathbf{l} \le 0$ sind komponentenweise zu lesen. Außerdem benutzen wir die Notationen $|\mathbf{j}|_1 = |j_1| + \cdots + |j_n|$, $|\mathbf{j}|_\infty = \max_{1 \le i \le n}\{|j_i|\}$ und $|\mathbf{j}, \mathbf{k}|_1 = |\mathbf{j}|_1 + |\mathbf{k}|_1$, $|\mathbf{j}, \mathbf{k}|_\infty = \max\{|\mathbf{j}|_\infty, |\mathbf{k}|_\infty\}$. Der Ausdruck $x \simeq y$ bedeutet, daß es zwei Konstanten C_1, C_2 gibt, so daß $C_1 \cdot y \le x \le C_2 \cdot y$ gilt. Abhängigkeiten der Konstanten von irgendwelchen Parametern, von denen x oder y abhängen mögen, sollten immer aus dem Zusammenhang klar sein.

Was wir bei dem von uns betrachteten Problemkreis einschränken sind die Geometrie des Problems und die Randbedingungen, da wir die einfache Anwendbarkeit von Tensorprodukt-Konstruktionen ermöglichen wollen. Dies läßt sich am leichtesten auf dem Würfel mit periodischen Randbedingungen erreichen. Unsere Untersuchungen sind jedoch nicht auf diesen Fall beschränkt, sondern lassen sich auch auf allgemeinere Problemstellungen anwenden was wir im Text an einigen Stellen ausnutzen werden. Insbesondere allgemeinere Randbedingungen wie natürliche oder homogene Randbedingungen und allgemeinere Gebiete sind möglich, insoweit sie Tensorprodukt-Konstruktionen zulassen, siehe [Ho00]. Mit T^n bezeichnen wir den n-dimensionalen Torus. Wir stellen T^n dar als Würfel

$$T := [0, 1], \; T^n = T \times T \times \cdots \times T,$$

wobei gegenüberliegende Seiten identifiziert werden. Mit $\mathcal{L}^2(T^n)$ bezeichnen wir den Raum der $\mathcal{L}^2$-integrablen Funktionen auf dem n-dimensionalen Torus T^n und mit $\mathcal{H}^t, t \in \mathbb{R}$, bezeichnen wir eine Skala von isotropen Sobolev Räumen in n Dimensionen [Ad75]. Definitionen und allgemeinere Sobolevräume finden sich in Kapitel 2. Wenn die Bedeutung aus dem Kontext klar ist schreiben wir $\mathcal{L}^2$ anstelle $\mathcal{L}^2(T^n)$ und analog für andere Funktionenräume.

Wir betrachten ein elliptisches variationelles Problem: Zu einer gegebenen Funktion $f \in \mathcal{H}^{-s}, s \in \mathbb{R}$, finde $u \in \mathcal{H}^s$, so daß

$$a(u, v) = (f, v) \;\; \forall v \in \mathcal{H}^s \tag{1.1}$$

gilt, wobei a eine symmetrische positiv definite Bilinearform sei, die der Relation

$$a(v, v) \simeq \|v\|^2_{\mathcal{H}^s} \tag{1.2}$$

genügt. (Offensichtlich ist die untere Abschätzung $a(u, u) \ge \alpha \cdot \|u\|^2_{\mathcal{H}^s}$ in (1.2) im allgemeinen für Probleme auf dem Torus nicht erfüllt, falls nicht zusätzliche Bedingungen erfüllt sind, die die Eindeutigkeit der Lösung von (1.1) garantieren. Im folgenden nehmen wir an, daß die Lösung des variationellen Problems (1.1) eindeutig ist. Man beachte, daß wir bei der Konstruktion von Approximationsräumen nur die obere Abschätzung in (1.2) verwenden werden.)

Modellbeispiele Modellbeispiele für (1.1) sind die variationellen Formen

- der biharmonischen Gleichung ($s = 2$)

  $$\Delta^2 u = f,$$

  die Anwendungen bei der Interpolation von Daten und in der Mechanik elastischer Körper besitzt [Brae92];

- der (anisotropen) Helmholtz Gleichung ($s = 1$)

  $$-\nabla \cdot K \nabla u + cu = f$$

  wobei $K(x) \simeq I$ und $\exists\, C > 0 : 0 \leq c(x) \leq C$; diese modelliert zum Beispiel eine Einphasenströmung in einem porösen Medium mit Permeabilität K, oder einen Diffusionsprozeß in einem (möglicherweise) anisotropen Medium, welches durch den Diffusionstensor K charakterisiert wird [Al88];

- der hypersingulären Gleichung ($s = \frac{1}{2}$)

  $$\frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \cdot g(y) dy = f(x),$$

- der Fredholm Gleichung der zweiten Art ($s = 0$)

  $$g(x) - \int K(x,y)\; g(y) dy = f(x),$$

  mit gegebener Kernfunktion K, speziell die Doppelschicht-Potentialgleichung

  $$g(x) - \frac{1}{c} \int \frac{n_y \cdot (y-x)}{|x-y|^3}\; g(y) dy = f(x),$$

- der Einfachschicht-Potentialgleichung ($s = -\frac{1}{2}$)

  $$\frac{1}{c} \int \frac{g(y)}{|x-y|}\; dy = f(x). \tag{1.3}$$

Die letzten Beispiele entstehen zum Beispiel durch eine Umformulierung der Poisson-Gleichung [Hac89a]. Siehe auch [Lon77] für einige physikalische Hintergründe und Anwendungen von Integralgleichungen.

Die Galerkinmethode Die Galerkinmethode zur numerischen Lösung von Problemen des Typs (1.1) besteht darin, einen eindlichdimensionalen Unterraum aus $\mathcal{H}^s \cap \mathcal{L}^2$ zu wählen und das variationelle Problem in diesem Unterraum anstelle von $\mathcal{H}^s$ zu lösen, das heißt anstelle von (1.1) betrachtet man das Problem

$$a(u_{FE}, v) = (f, v) \; \forall v \in V_J \tag{1.4}$$

bezüglich eines Finite Elemente Approximationraumes $V_J \subset \mathcal{H}^s$ [Brae92]. Dann gilt aufgrund der $\mathcal{H}^s$-Elliptizität (1.2) und Ceas Lemma [Brae92]

$$\sqrt{a(u - u_J, u - u_J)} \simeq \|u - u_J\|_{\mathcal{H}^s} \simeq \inf_{v \in V_J} \|u - v\|_{\mathcal{H}^s} \tag{1.5}$$

für den Fehler $\sqrt{a(u - u_J, u - u_J)}$ zwischen der Lösung u des kontinuierlichen Problems (1.1) und der Lösung u_J des approximativen Problems (1.4) gemessen in der Energienorm. Man ist also für ein gegebenes Element u eines Sobolevraumes $\mathcal{H}^s$ an Fehlerabschätzungen des Typs

$$\inf_{v \in V_J} \|u - v\|_{\mathcal{H}^s} \leq C \cdot g(J) \|u\|_{\mathcal{H}^t} \tag{1.6}$$

interessiert. Hierbei bezieht sich J auf die Feinheit der Diskretisierung, das heißt auf die Dimension des Approximationsraumes. Bei dyadischer Verfeinerung ist der Ausdruck $g(J)$ typischerweise von der Form $2^{-\alpha J}$ mit einem $\alpha \in \mathbb{R}^+$ [DeV93].
Es ist bekannt, daß die effizientesten Methoden zur Lösung solcher Probleme die Interaktion zwischen verschiedenen Skalen der Diskretisierung ausnutzen, wie dies in Multilevelmethoden [Hac85, Xu92, Ys92, Gri94a] und auch Multipolmethoden [Roh85, Gre87] und Panel-Clustering-Verfahren [Hac89b] in der einen oder anderen Form geschieht. Multilevelmethoden verwenden eine Sequenz von abgeschlossenen geschachtelten Unterräumen $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset \mathcal{H}^s \cap \mathcal{L}^2$ des zugrundeliegenden Hilbertraumes $\mathcal{H}^s$ zur Approximation des Problems, deren Vereinigung dicht in $\mathcal{H}^s$ ist. Fixiert man eine Basis von V_J so führt dies dann zu einem linearen Gleichungssystem

$$\mathcal{A}_J x_J = b_J \tag{1.7}$$

der Dimension $dim(V_J)$. Hierbei wird $\mathcal{A}_J$ als Steifigkeitsmatrix und b_J als Lastvektor bezeichnet. Speicheranforderungen und Rechenzeiten schließen im allgemeinen direkte Löser aus, da $dim(V_J)$ im allgemeinen sehr groß ist. Insbesondere für Vollgitterräume mit Verfeinerungsrate zwei gilt $dim(V_J) = O(2^{nJ})$. Das heißt, die Dimension des Ansatzraumes V_J wächst exponentiell mit der Raumdimension n.
Für Differentialoperatoren sind die resultierenden linearen Gleichungssysteme (1.7) dünn besetzt, falls die Basisfunktionen der Ansatzräume lokale Träger besitzen. Die Diskretisierung von Integralgleichungen führt hingegen in den meisten Fällen zu vollbesetzten diskreten Systemen. Das heißt, auf einem regulären vollen Gitter mit $O(2^{nJ})$ Unbekannten hat der diskrete Operator $O(2^{2nJ})$ Einträge.

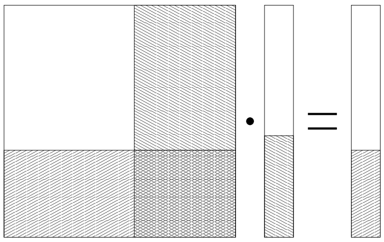
Die Problemstellung Bei der iterativen Lösung von (1.4) oder (1.7) treten nun die folgenden Probleme und Fragestellungen auf. Ist es möglich, den Raum V_J als einen Unterraum des Vollgitterraumes zu wählen, ohne Approximationsgenauigkeit zu verlieren? Dabei sollte idealerweise gelten, daß $dim(V_J)$ nur polynomial von n abhängt, verglichen mit einer exponentiellen Abhängigkeit von n für den Vollgitterraum. So eine Wahl eines Finite Elemente Raumes erfordert offensichtlich, daß man diejenigen Basisfunktionen die "am meisten" zu einer genauen Darstellung der Lösung des variationellen Problems beitragen, a-priori identifizieren kann. Die einzige a-priori Information die wir hier in dieser Arbeit ausnutzen wollen, ist die Glattheit der den betrachteten Problemen zugrundeliegenden Funktionen, das heißt der rechten Seite und/oder der Lösung und bei Integralgleichungen die Glattheit des Kerns. Wie können nun diese Informationen über die Glattheiten bei der Konstruktion von Approximationsräumen ausgenutzt werden? Dies umfaßt insbesondere auch die Frage ob und wie Eigenschaften des Kerns von Integraloperatoren – wie Glattheit oder Abklingverhalten – ausgenutzt werden können, um den Aufwand bei der Auswertung von Integralausdrücken und damit den Aufwand bei der Lösung von Integralproblemen zu senken.

Ideen Wir erläutern die Ideen am Beispiel der trigonometrischen Basis. Eine eindimensionale periodische s-mal differenzierbare Funktion u läßt sich charakterisieren durch den Abfall ihrer Fourierkoeffizienten c_k. Der bekannte Zusammenhang lautet, daß die Funktion $u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ genau dann s-mal schwach differenzierbar ist, wenn für die Fourierkoeffizienten die Bedingung $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|)^{2s}|c_k|^2 < \infty$ gilt, das heißt die Koeffizienten müssen notwendig schneller als $(1+|k|)^{-s}$ abfallen. Die Frage nach der Approximierbarkeit einer beliebigen s-mal differenzierbaren Funktion durch eine Teilmenge der trigonometrischen Ansatzfunktionen läßt sich damit reduzieren auf die Betrachtung der Differenzen der Fourierkoeffizienten von u und der Fourierkoeffizienten der Approximation.

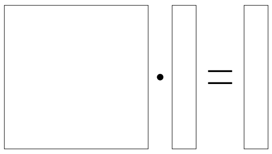
Verallgemeinerungen auf die optimale Wahl von Approximationsräumen in höheren Dimensionen hängen von den jeweiligen Glattheitsvoraussetzungen und damit dem Verhalten der Fourierkoeffizienten ab. So fallen die Fourierkoeffizienten bestimmter multivariater Funktionen wie das Produkt der Frequenzen in verschiedenen Koordinatenrichtungen ab. Dies ist zum Beispiel der Fall für Funktionen aus Sobolevräumen mit dominierender gemischter Glattheit [Schm87]. Im Gegensatz dazu verhalten sich die Fourierkoeffizienten der Standard (isotropen) Sobolevräume wie eine Potenz der maximalen Frequenz über alle Koordinatenrichtungen. Im ersten Fall ist folglich die trigonometrische Approximation mittels Würfeln aus dem Frequenzraum inadäquat, weil dabei diese besonderen Abfallgesetze nicht berücksichtigt werden. Statt dessen sollten die Approximationsräume an die Abklingeigenschaften der Fourierkoeffizienten angepaßt werden.

Die Verbindung zwischen der Glattheit einer Funktion und den Abklingeigenschaften der Koeffizienten in einer Basisdarstellung ist jedoch nicht beschränkt auf den Fall trigonometrischer Approximation und damit auch nicht auf periodische Funktionen. In der Tat gibt es diesen Zusammenhang in vielen Produktbasen die eine Multilevelstruktur besitzen.

Anwendung bei der approximativen Lösung von Differential- und Integralproblemen Bezüglich der approximativen Lösung von Operatorgleichungen lassen sich diese Ideen vorteilhaft einsetzen. Nutzt man die vorhandene Information über die (lokale oder globale) Glattheit der rechten Seite der Gleichung aus und hat man eine geeignete Basis gewählt, so sind in der rechten Seite b_J aus (1.7) viele Einträge nahe bei Null. Selbiges läßt sich mit der Lösung x_J durchführen, da die Glattheit der Lösung durch die Glattheit der rechten Seite und der Ränder und die Abbildungseigenschaften des Operators A_J vollständig bestimmt ist. Nutzt man nun den Abfall der Koeffizienten in der Darstellung der Approximation der Lösung beziehungsweise der Approximation der rechten Seite aufgrund ihrer Glattheit aus, so lassen sich kleine Einträge a-priori identifizieren und man kann diese bei der Diskretisierung vernachlässigen. Dadurch verringert sich die Dimension des Problems. Das heißt, aus dem ursprünglichen Problem



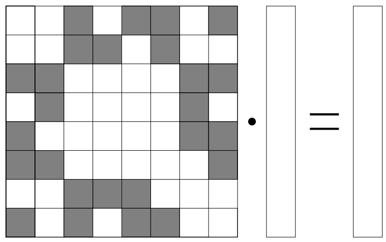
erhält man ein dimensionsreduziertes Problem



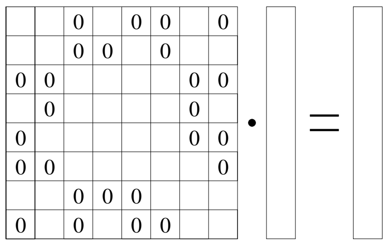
Der Vorteil dieses Ansatzes ist (vorausgesetzt daß die erforderlichen Glattheitsvoraussetzungen erfüllt sind), daß die Abhängigkeit der Anzahl der Unbekannten von der Dimension n des Problems signifikant reduziert wird. In einigen Fällen sogar von einer exponentiellen zu einer polynomialen Abhängigkeit. Folglich erlaubt diese Technik Probleme in höheren Dimensionen anzugehen, die mit Vollgitter-Approximationsräumen nur schwerlich zu behandeln wären.
Einen ähnlichen Effekt kann man bei Integraloperatoren mit glattem Kern erreichen, indem man geeignete Approximationsräume zu dessen Approximation verwendet. Durch die Produktstruktur des Integranden ergeben sich spezielle von den Glattheiten abhängige Abfallgesetze für die Koeffizienten des Integranden, was dann analog zum Fall der Approximation von Funktionen ausgenutzt werden kann, um geeignete Approximationsräume für den Kern zu konstruieren. Dies senkt auf einfache Weise den Aufwand bei der Integralauswertung und damit auch bei der Lösung von Integralgleichungen.

Kompression von Integraloperatoren Abhängig von der Form des betrachteten Integraloperators beziehungsweise von der Form des zugehörigen Kerns bietet sich noch eine weitere Möglichkeit zur Verringerung des Aufwands bei Integralproblemen an. Diese ist insbesondere für Probleme mit singulären Kernen geeignet und kann mit obiger

Idee der Auswahl geeigneter Ansatz- und Testräume kombiniert werden. Dabei wird ein eventueller Abfall des Kerns im physikalischen Raum ausgenutzt, indem man Basen verwendet, die dann “nahezu” dünnbesetzte Steifigkeitsmatrizen ergeben, wie zum Beispiel biorthogonale Waveletbasen mit einer hinreichend großen Zahl verschwindender Momente. Denn dann sind die meisten Einträge in der Steifigkeitsmatrix nahe bei Null und können durch Null ersetzt werden, ohne die Approximationsordnung zu zerstören [DeV92, Dah93, Schn98]. Man identifiziert also a priori kleine Einträge im Operator



und setzt diese zu Null:



Ausnutzen dieser Nulleinträge bei Matrix-Vektor-Multiplikationen führt zu einer Verringerung des Aufwands bei der Anwendung in Iterationsverfahren.

Bevor wir uns nun mit der Wahl geeigneter Approximationsräume für die Approximation von elliptischen Differential- und Integralgleichungen beschäftigen, legen wir im nächsten Kapitel die Glattheitsklassen fest die wir in dieser Arbeit betrachten, und beschreiben kurz die Konstruktion von Tensorprodukt-Multiskalenbasen. Die Wahl der Glattheitsklassen ist dabei motiviert durch die Abbildungseigenschaften der Operatoren aus (1.1).

2 Sobolevräume und Tensorprodukt-Multiskalenbasen

Dieser Abschnitt führt Definitionen von Sobolevräumen und Tensorprodukt-Approximationsräumen ein und diskutiert einige Zusammenhänge zwischen Glattheitsklassen und Multiskalenkoeffizienten insofern sie von uns benötigt werden und für das darauffolgende wichtig sind. Dazu leiten wir Normäquivalenzen in höheren Dimensionen aus eindimensionalen Normäquivalenzen her. Diese ermöglichen uns später die einfache Konstruktion von Vorkonditionieren und Approximationsräumen. Besonderen Wert legen wir auf den Übergang vom Eindimensionalen ins Mehrdimensionale mittels Tensorprodukt-Bildung und zwar sowohl für Sobolevräume als auch für Approximationsräume. In erster Linie geht es dabei um den Zusammenhang zwischen dem Konzept der Glattheit, den Unterschieden zwischen verschiedenen Glattheitsvoraussetzungen in höheren Dimensionen und den Auswirkungen die diese Unterschiede auf die Approximation durch Tensorprodukt-Basen haben.
Sobolevräume und ihre zahlreichen Verallgemeinerungen sind Räume schwach differenzierbarer Funktionen reeller Variablen, die sich im Zusammenhang mit der Theorie partieller Differentialgleichungen und Integralgleichungen ergeben. Wir diskutieren ausschießlich Sobolevräume quadratintegrabler Funktionen.
Wir beginnen mit der Definition von Sobolevräumen in höheren Dimensionen.

2.1 Die Sobolevräume $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$

Zuerst definieren wir Sobolevräume ganzzahliger Ordnung. Sei $s \in \mathbb{N}$. Es sei

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}) \quad := \quad \left\{ u(x) \in \mathcal{L}^2 : \sum_{0 \leq \alpha \leq s} \|D^\alpha u\|^2_{\mathcal{L}^2} < \infty \right\}. \tag{2.1}$$

Hierbei bezeichnet $D^\alpha u$ die verallgemeinerte (oder schwache) Ableitung von u [Ad75]. Es gibt zahlreiche Verallgemeinerungen von (2.1), insbesondere in höheren Dimensionen. Beispielsweise kann auf reelle und vektorwertige s aufgebaut werden. Diese beiden Verallgemeinerungen sind in unserem Kontext von Interesse. Reelle Werte von s lassen sich als zugehörig zu Ableitungen gebrochener Ordnung einführen. Daneben läßt sich der Sobolevraum $\mathcal{H}^s$ für $s \in \mathbb{R}$ direkt mittels Fouriertransformation einführen, da $\mathcal{L}^2$ unter der durch $((1 + |.|^2)^{-s/2}\hat{u}(.))^\vee$ definierten linearen Abbildung stetig auf $\mathcal{H}^s$ abgebildet wird. Es gilt

$$\mathcal{H}^s(T) \quad = \quad \left\{ u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ikx} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|)^{2s} \cdot |c_k|^2 < \infty \right\}. \tag{2.2}$$

Der Abfall der Koeffizienten einer Funktion aus $\mathcal{H}^s$ in der Fourierdarstellung ist folglich gekennzeichnet durch $|c_k| \leq C \cdot (1 + |k|)^{-s}$ für fast alle $k \in \mathbb{Z}$.
Uns interessieren nun Verallgemeinerungen auf den mehrdimensionalen Fall. Offensichtlich lassen sich hier verschiedene direkte Erweiterungen angeben, je nach dem wie die

Abfallgesetze der Fourierkoeffizienten für die einzelnen Koordinatenrichtungen miteinander verknüpft werden. Die einfachsten Varianten sind dabei additive beziehungsweise multiplikative Verknüpfung. Dies entspricht, in Bezug auf die Definition via schwacher Ableitung (2.1), der Summation beziehungsweise Hintereinanderausführung von Ableitungen in die verschiedenen Koordinatenrichtungen. Wir definieren zweiparametrige Sobolevräume, wobei die zwei Parameter diesen beiden Möglichkeiten zugeordnet sind.

Definition 1 *Für $-\infty < t, l < \infty$, setze*

$$\mathcal{H}^{t,l}_{mix}(T^n) = \Bigg\{ u(x) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}x} : \\ \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} = \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \prod_{i=1}^{n} (1+|k_i|)^{2t} \cdot (1+|\mathbf{k}|_\infty)^{2l} \cdot |c_{\mathbf{k}}|^2 \right)^{1/2} < \infty \Bigg\}. \tag{2.3}$$

Die Standard Sobolevräume [Ad75] wie auch die Sobolevräume mit dominierender gemischter Glattheit (siehe zum Beispiel [Tem93b]) sind in dieser Definition beinhaltet. Sie können geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(T^n) &= \mathcal{H}^{0,s}_{mix}(T^n) \\ &= \left\{ u(x) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}x} : \|u\|_{\mathcal{H}^s} = \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} (1+|\mathbf{k}|_\infty)^{2s} \cdot |c_{\mathbf{k}}|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{t}_{mix}(T^n) \quad = \quad \mathcal{H}^{t,0}_{mix}(T^n) = \Bigg\{ & u(x) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}x} : \\ & \|u\|_{\mathcal{H}^{t,0}_{mix}} = \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \prod_{i=1}^{n} (1+|k_i|)^{2t} \cdot |c_{\mathbf{k}}|^2 \right)^{1/2} < \infty \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Im ersten Fall werden die Abfallgesetze für die Fourierkoeffizienten in die einzelnen Koordinatenrichtungen additiv miteinander verknüpft, wohingegen im zweiten Fall die Verknüpfung multiplikativ ist.

Für $t \in \mathbb{N}$ besitzt der Raum $\mathcal{H}^t_{mix}$ die äquivalente Norm

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}^t_{mix}} \simeq \sum_{\mathbf{0}\leq\mathbf{k}\leq t} \|u^{(\mathbf{k})}\|^2_{\mathcal{L}^2}.$$

Hierbei ist $u^{(\mathbf{k})}$ die verallgemeinerte gemischte Ableitung $\frac{\partial^{|\mathbf{k}|_1}}{\partial^{k_1}\ldots\partial^{k_n}}u$ Zum Beispiel ist $u^{(t,\ldots,t)}$ die t-te gemischte Ableitung und beschreibt die zusätzliche Glattheitsvoraussetzung für den Raum $\mathcal{H}^t_{mix}$ verglichen mit dem größeren isotropen Sobolevraum $\mathcal{H}^t$. Daher die Bezeichnung “Räume mit dominierender gemischter Glattheit”.

Die Räume $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ geben uns einen relativ flexiblen Rahmen für die Untersuchung von Problemen in periodischen Sobolevräumen. Allgemeinere Räume mit zum Beispiel unterschiedlichen Glattheiten in verschiedene Koordinatenrichtungen können analog definiert werden [Gri98a].
Der entscheidende Punkt bezüglich (2.3) (zumindest in unserem Zusammenhang) ist die Charakterisierung des Raumes mittels der Abklingeigenschaften der Fourierkoeffizienten $c_{\mathbf{k}}$. Zum Beispiel impliziert (2.3), daß für $u \in \mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ die Beziehung $|c_{\mathbf{k}}| \le C \cdot 1/\left(\prod_{i=1}^n (1+|k_i|)^t (1+|\mathbf{k}|_\infty)^l\right)$ für fast alle $c_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ gelten muß.
Es ist wohlbekannt, daß Tensorprodukte von Sobolevräumen Sobolevräume mit dominierender gemischter Glattheit sind, siehe [Si99b] für den periodischen Fall und [Ho99] für Verallgemeinerungen auf homogene Randbedingungen. Analog lassen sich die Räume $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ als Schnitte von Tensorprodukten eindimensionaler Sobolevräume darstellen. Erinnern wir uns dazu an die Definition des Tensorproduktes zweier (separabler) Hilberträume H mit assoziiertem Skalarprodukt $a(.,.)$ und $\hat{H}$ mit Skalarprodukt $\hat{a}(.,.)$, siehe zum Beispiel [Wei80]. Seien $\{e_j\}_{j=1}^m$, $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^{\hat{m}}$ vollständige Orthonormalsysteme in H beziehungsweise $\hat{H}$. Dann ist $\{e_j \otimes \hat{e}_i\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in

$$H \otimes \hat{H} := \{\sum_{i,j} \gamma_{ij} \;\; e_i \otimes \hat{e}_j : \sum_{i,j} \gamma_{ij}^2 < \infty\} \tag{2.6}$$

mit Skalarprodukt

$$a \otimes \hat{a} \left(\sum_{i,j} \gamma_{ij}\, e_i \otimes \hat{e}_j, \sum_{k,\ell} \gamma'_{k\ell} \;\; e_k \otimes \hat{e}_\ell \right) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}\gamma'_{ij}.$$

Wir identifizieren das Tensorprodukt $H \otimes \hat{H}$ mit einem Funktionenraum über dem zugehörigen Produktgebiet mittels der Abbildung

$$f \otimes \hat{f} \mapsto f(x)\hat{f}(\hat{x}).$$

Das heißt, eine Basis von $H \otimes \hat{H}$ ist gegeben durch $\{\psi_{(j_1,j_2)}(x) = e_{j_1}(x_1)\hat{e}_{j_2}(x_2) : (1,1) \le (j_1, j_2) \le (m, \hat{m})\}$. Diese Definitionen lassen sich in natürlicher Weise auf höhere Dimensionen $n > 2$ übertragen.
Sei $t \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}_0^+, t + l \ge 0$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ und $\mathbf{e_i} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$. Dann läßt sich $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ aus (2.3) schreiben als

$$\mathcal{H}^{t,l}_{mix}(T^n) = \mathcal{H}^{t\mathbf{1}+l\mathbf{e_1}}_{mix}(T^n) \cap \cdots \cap \mathcal{H}^{t\mathbf{1}+l\mathbf{e_n}}_{mix}(T^n), \tag{2.7}$$

mit

$$\mathcal{H}^{\mathbf{k}}_{mix}(T^n) := \mathcal{H}^{k_1}(T) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}^{k_n}(T). \tag{2.8}$$

Damit sieht man dann auch, daß sich $\mathcal{H}^t(T^n)$ beziehungsweise $\mathcal{H}^t_{mix}(T^n)$ schreiben lassen als

$$\mathcal{H}^t_{mix}(T^n) = \mathcal{H}^{t,0}_{mix}(T^n) = \mathcal{H}^t(T) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}^t(T) \tag{2.9}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{0,t}_{mix}(T^n) &= \mathcal{H}^{(t,0,\dots,0)}_{mix}(T^n) \cap \dots \cap \mathcal{H}^{(0,\dots,0,t)}_{mix}(T^n) \\ &= \mathcal{H}^{t\mathbf{e_1}}_{mix}(T^n) \cap \dots \cap \mathcal{H}^{t\mathbf{e_n}}_{mix}(T^n) \\ &= \mathcal{H}^t(T^n), \end{aligned} \tag{2.10}$$

wobei

$$\mathcal{H}^{(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}_{mix}(T^n) = \mathcal{L}^2(T) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}^2(T) \otimes \mathcal{H}^t(T) \otimes \mathcal{L}^2(T) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}^2(T)$$

ist, vgl. (2.8). Zum Beweis von (2.7) wähle man eine Orthogonalbasis von $\mathcal{H}^t(T)$ und verwende die Definition des Tensorproduktes via Orthonormalsysteme (2.6).
Mit der Formulierung (2.7) läßt sich die Definition von $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ direkt auf andere Randbedingungen, wie zum Beispiel Dirichlet oder Neumann Randbedingungen und bestimmte Fälle von gemischten Randbedingungen verallgemeinern. Siehe [Gri95a, Ho99] für einige Beispiele für die Räume mit dominierender gemischter Glattheit $\mathcal{H}^t_{mix}$.
Aus Definition 1 ersieht man, daß die Relationen

$$\mathcal{H}^t_{mix} \subset \mathcal{H}^t \subset \mathcal{H}^{t/n}_{mix} \text{ für } t \geq 0 \text{ und } \mathcal{H}^{t/n}_{mix} \subset \mathcal{H}^t \subset \mathcal{H}^t_{mix} \text{ für } t \leq 0 \tag{2.11}$$

gelten.

2.2 Tensorprodukt-Multiskalenbasen

Nachdem wir nun die von uns betrachteten Glattheitsklassen definiert haben, führen wir die von uns verwendeten Basen ein. Es handelt sich dabei um Tensorprodukt-Multiskalenbasen. Wir beschränken uns hier auf eine kurze Darstellung einiger wichtiger Konzepte für den $\mathcal{L}^2$ als zugrundeliegendem Hilbertraum. Für detailliertere Einführungen bezüglich Multiskalenbasen verweisen wir auf die umfangreiche Literatur, siehe zum Beispiel [Dah97].
Ausgehend von einer eindimensionalen Zerlegung $\mathcal{L}^2 = \bigoplus_{j\geq 0} V_j$ mit endlichdimensionalen $V_j \subset \mathcal{L}^2$, nehmen wir an, daß die Komplementräume

$$W_j = V_j \ominus V_{j-1}$$

von V_{j-1} in V_j von einer $\mathcal{L}^2$-stabilen Basis

$$W_j = \operatorname{span}\{\psi_{jk}, k \in \tau_j\}$$

aufgespannt werden, wobei τ_j eine endlichdimensionale Indexmenge ist, die durch die Unterteilungsrate aufeinanderfolgender Verfeinerungslevel bestimmt ist. Das heißt es gilt

$$\| \sum_{k\in\tau_j} C_k \psi_{jk} \|_{\mathcal{L}^2} \simeq \| \{C_k\}_k \|_{\ell^2(\tau_j)}, \tag{2.12}$$

wobei wie gewöhnlich $\|.\|_{\mathcal{L}^2}$ die durch das Skalarprodukt auf $\mathcal{L}^2$ induzierte Norm darstellt und $\|\{C_k\}_k\|^2_{\ell^2(\tau_j)} := \sum_{k\in\tau_j} |C_k|^2$ gilt. Wir nehmen an, daß die ψ_{jk} skalierte Versionen einer einzigen Funktion ψ_0 sind, das heißt,

$$\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi_0(\frac{x-k}{2^{-j}}). \tag{2.13}$$

Wir beschränken uns hier auf dyadische Verfeinerungen, das heißt die Dimension der eindimensionalen Unterräume V_j verhält sich wie 2^j.
Die Räume V_j erlauben die Beschreibung von Funktionen bezüglich eines bestimmten Verfeinerungslevels, während die Komplementräume W_j zusätzliche Information, sozusagen Details oder Differenzen, enthalten. Die zentrale Idee ist, daß die Koeffizienten bezüglich der Detailräume W_j eventuell klein sind beziehungsweise nur wenig relevante Information tragen und sich kleine Einträge deswegen zu Null setzen lassen, ohne die Qualität der Approximation stark zu beeinflußen.
Für den höherdimensionalen Fall $n > 1$ verwenden wir Tensorprodukt-Basen eindimensionaler Ansatzfunktionen. Sei $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n, \mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n)$, gegeben. Mit $W_\mathbf{j}$ bezeichnen wir den zugehörigen Funktionenenraum aus Tensorprodukten eindimensionaler Funktionenräume, das heißt

$$W_\mathbf{j} := W_{j_1} \otimes \cdots \otimes W_{j_n}.$$

Eine Basis von $W_\mathbf{j}$ ist dann gegeben durch $\cup_{\mathbf{k}\in\tau_\mathbf{j}}\{\psi_{\mathbf{jk}}(x) = \psi_{j_1k_1}(x_1)\cdot\cdots\cdot\psi_{j_nk_n}(x_n)\}$. Die Träger dieser Basisfunktionen sind im allgemeinen unterschiedlich groß in verschiedene Koordinatenrichtungen, was zu Interaktionen zwischen verschiedenen Skalen führt.
Erinnern wir uns an den Begriff der verschwindenden Momente. Man sagt die Basisfunktion $\psi_{\mathbf{jk}}$ hat $\mathbf{N}$ verschwindende Momente, falls gilt

$$\int x^\mathbf{r}\psi_{\mathbf{jk}}dx = 0 \ \forall \mathbf{r} \leq \mathbf{N}. \tag{2.14}$$

Der Erfolg des Multiskalenkonzeptes beruht u.a. darauf, daß es die Möglichkeit der schnellen Auswertung von Funktionen in Multiskalendarstellung ermöglicht, indem zwischen der Darstellung in einer Einskalendarstellung und der Multiskalendarstellung umgeschaltet wird [Dau92, Dah97]. Dieses Konzept der Multiskalentransformation, das in ähnlicher Form aus Mehrgitterverfahren wohlbekannt ist [Hac85], baut darauf auf, daß die Transformationen beziehungsweise Abbildungen zwischen Räumen allein durch die Anwendung lokaler Filtermasken (Prolongationsmoleküle) ausgeführt werden können und Verfeinerungsmatrizen (Prolongationen/Restriktionen) nicht explizit aufgestellt werden müssen. Schnelle Verfahren zur Transformation sind zum Beispiel die schnelle Fouriertransformation für trigonometrische Ansatzfunktionen [Coo65] und für Wavelets die schnelle Wavelettransformation [Mal89, Bey91]. Die konkrete Auswahl einer Basis wird durch die jeweilige Anwendung diktiert, insbesondere durch Stabilitätseigenschaften der Zerlegungen, die Größe der lokalen Masken (des Trägers der Mutterfunktion) und verbunden damit dem Aufwand bei der Implementierung.

Betrachten wir zwei wichtige Beispiele:

Beispiel 1: Biorthogonale Wavelets Als erstes Beispiel betrachten wir biorthogonale Wavelets, siehe zum Beispiel [Dah97]. Zu einem System $\{\psi_{jk}, k \in \tau_j, j \in \mathbb{N}_0\}$ von Basisfunktionen sei ein duales System $\{\tilde{\psi}_{jk}, k \in \tau_j, j \in \mathbb{N}_0\}$ gegeben, das heißt,

$$\langle \psi_{jk}, \tilde{\psi}_{j'k'} \rangle = \delta_{jj'}\delta_{kk'}, \;\; j, j' \in \mathbb{N}_0, k \in \tau_j, k' \in \tau_{j'}.$$

Hierbei bezeichnet τ_j wiederum den möglichen Indexbereich von Basisfunktionen des Levels j. Sei

$$S = \cup_{i=0}^{\infty} V_i \text{ und } \tilde{S} = \cup_{i=0}^{\infty} \tilde{V}_i$$

mit $\tilde{V}_i := \operatorname{span}\{\tilde{\psi}_{jk}, 0 \leq j \leq i, k \in \tau_j\}$. Wir nehmen an, daß ψ_{jk} und $\tilde{\psi}_{jk}$ jeweils skalierte und verschobene Versionen einer einzigen Funktion (des Mutter-Wavelets) ψ_0 beziehungsweise $\tilde{\psi}_0$ sind, das heißt,

$$\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi_0(\frac{x-k}{2^{-j}}) \text{ und } \tilde{\psi}_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \tilde{\psi}_0(\frac{x-k}{2^{-j}}). \tag{2.15}$$

Unter der Annahme daß $\{\psi_{jk}, k \in \tau_j, j \in \mathbb{N}_0, \}$ eine Riesz-Basis in $\mathcal{L}^2$ bildet, das heißt es gilt

$$\| \sum_{j,k \in \tau_j} C_{jk} \psi_{jk} \|_{\mathcal{L}^2} \simeq \| \{C_{jk}\}_{jk} \|_{\ell^2(j \in \mathbb{N}_0, k \in \tau_j)}, \tag{2.16}$$

besitzt jedes $u \in \mathcal{L}^2$ eine eindeutige Darstellung

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \tau_j} \langle u, \tilde{\psi}_{jk} \rangle \psi_{jk} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \tau_j} \langle u, \psi_{jk} \rangle \tilde{\psi}_{jk} \tag{2.17}$$

und das zugehörige duale System bildet ebenfalls eine Riesz-Basis in $\mathcal{L}^2$.
Betrachten wir zwei Beispiele, um die Konstruktion solcher eindimensionaler Basen zu illustrieren:

- Stückweise linear Spline Prewavelets [Cu92]: Die Basisfunktionen sind skalierte und verschobene Varianten $\psi_{jk}(x) := \phi\left(2^{j-1}x - k\right)$, einer einzigen Funktion ϕ. Abbildung 2.1 zeigt das Prewavelet ϕ für innere Gitterpunkte. Es gilt offensichtlich $\psi_{jk} \in \mathcal{H}^t$, $t < 3/2$. Randmodifikationen finden sich zum Beispiel in [Au92, Coh93b], vgl. auch Abbildung 3.17. Die durch dieses Beispiel induzierte Zerlegung ist $\mathcal{L}^2$-orthogonal zwischen verschiedenen Leveln.

- Haar basis: Die Basisfunktionen sind definiert als $\psi_{jk}(x) := 2^{(j-1)/2}\phi(2^{j-1}x - k)$, mit
$$\phi(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in [0, 1/2) \\ -1, & \text{für } x \in [1/2, 1) \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$
vergleiche Abbildung 2.2. Dann gilt $\psi_{jk} \in \mathcal{H}^t$, $t < 1/2$. Diese Zerlegung ist $\mathcal{L}^2$-orthogonal.

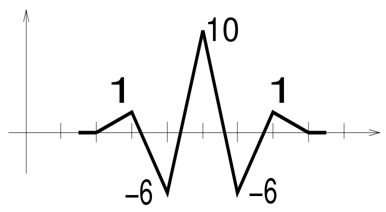


Abbildung 2.1: Semi-orthogonales lineares Spline Prewavelet

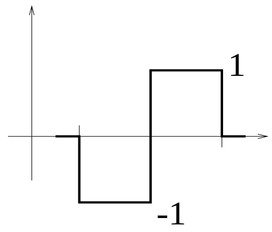


Abbildung 2.2: Haar-Wavelet

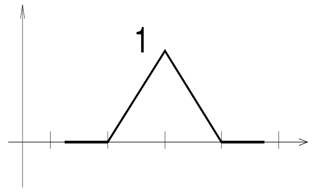


Abbildung 2.3: Nodale Basisfunktion

Andere wichtige Waveletkonstruktionen, insbesondere solche mit beliebiger Glattheit, finden sich zum Beispiel in [Dau92]. Weitere Prewaveletkonstruktionen finden sich zum Beispiel in [Stev97]. Bezüglich Randadaptionen für nicht periodische Probleme sei auf [An94, Coh93a, Cu92] und [Dah98b, Dah99, Gri98b] verwiesen.

Beispiel 2: Stückweise lineare Splines Jedem Gitterpunkt weisen wir diejenige nodale Basisfunktion des zugehörigen Finite Elementraumes zu, die den Wert 1 an diesem Gitterpunkt und an den anderen den Wert 0 annimmt, das heißt die ψ_{jk} sind definiert als $\psi_{jk}(x) := \phi\,(2^{j-1}x - k)$, mit

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 - |x| & \text{für } x \in (-1,1), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

vergleiche Abbildung 2.3 [Ys92]. Es gilt $\psi_{jk} \in \mathcal{H}^t$, $t < 3/2$, womit diese Basis u.a. zur Lösung von $\mathcal{H}^1$-elliptischen Problemen, insbesondere der Poisson-Gleichung verwendet werden kann.

Stellt man eine Funktion aus einem Sobolevraum $\mathcal{H}^s$ in dieser oder einer anderen Multiskalenbasis dar, so spiegelt sich (wie bei der Darstellung in der Fourierbasis) die Glattheit der Funktion im Abfall der Koeffizienten in der Basisdarstellung wider. Für die stückweise linearen Hutbasen gilt zum Beispiel die folgende Abklingeigenschaft der Koeffizienten einer Entwicklung einer $\mathcal{H}^2$-Funktion $u = \sum_j \sum_{k \in \tau_j} c_{jk}\psi_{jk}$ [Bun92]

$$|c_{jk}| \leq C \cdot 2^{-\frac{3}{2}j} \|u\|_{\mathcal{H}^2}. \tag{2.18}$$

Im Gegensatz zur Fourierdarstellung, bei der das Abklingverhalten der Koeffizienten allein durch die Differenzierbarkeitsordnung der Funktion u bestimmt ist, wird hier die maximale Abklingrate durch u und die Ansatzfunktionen beschränkt. Höhere Glattheit der Funktion u führt wegen der linearen Ansatzfunktionen nicht zu einem schnelleren Abfall der Koeffizienten. Im Höherdimensionalen gelten bezüglich der Tensorprodukt-Basis aus stückweise multilinearen Splines für $u \in \mathcal{H}^2_{mix}$ die Beziehungen

$$|c_{\mathbf{jk}}| \leq C \cdot 2^{-\frac{3}{2}|\mathbf{j}|_1} \|u\|_{\mathcal{H}^2_{mix}} \tag{2.19}$$

und

$$\|w_{\mathbf{j}}\|_{\mathcal{L}^2} \leq C \cdot 2^{-2|\mathbf{j}|_1} \|u\|_{\mathcal{H}^2_{mix}} \text{ und } \|w_{\mathbf{j}}\|_{\mathcal{H}^1} \leq C \cdot 2^{|\mathbf{j}|_\infty} 2^{-2|\mathbf{j}|_1} \|u\|_{\mathcal{H}^2_{mix}} \tag{2.20}$$

für $u = \sum_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}} \in \mathcal{H}^2_{mix}$ und $w_{\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{k} \in \tau_{\mathbf{j}}} c_{\mathbf{jk}} \psi_{\mathbf{jk}} \in W_{\mathbf{j}}$, und analoge Beziehungen für Splines höherer Ordnung [Bun98]. Für die schwächere Forderung $u \in \mathcal{H}^2$ erhält man hingegen statt der $|.|_1$-Norm in obigen Abschätzungen die $|.|_\infty$-Norm, also zum Beispiel

$$|c_{\mathbf{jk}}| \leq C \cdot 2^{-\frac{3}{2}|\mathbf{j}|_\infty} \|u\|_{\mathcal{H}^2}. \tag{2.21}$$

Der Abfall der Koeffizienten hängt also vom Level $\mathbf{j}$ und von der Glattheitsklasse der betrachteten Funktion ab. Man beachte dabei besonders die unterschiedlichen Normen in den Exponenten in (2.19) und (2.21) die die unterschiedlichen Glattheitsannahmen widerspiegeln. Analoge Beziehungen gelten auch für biorthogonale Wavelets. Dort wird der Abfall der Koeffizienten durch die Anzahl der verschwindenden Momente bestimmt [Lou94].

2.3 Normäquivalenzen

Wie wir bereits bemerkt haben, ist die Charakterisierung der Glattheit einer Funktion durch die Koeffizienten in der Darstellung einer Basis nicht auf den Fall trigonometrischer Approximation beschränkt, sondern gilt in ähnlicher Weise für eine große Klasse von Multiskalen-Basisfunktionen. Speziell Wavelets, siehe zum Beispiel [Dah96, Dah92], und hierarchische Spline Basen [Ys86, Os92] bieten eine Vielzahl von Möglichkeiten, siehe auch [Tri78, But68, Ci83a, Ci83b]. So ist zum Beispiel die Riesz-Basis Eigenschaft ($\mathcal{L}^2$-Stabilität, vgl. (2.16)) einer Multiskalenbasis nur ein Spezialfall aus einer ganzen Skala ähnlicher Beziehungen. Wir leiten im folgenden die Gültigkeit solcher Beziehungen in n Dimensionen ($n \geq 2$) aus eindimensionalen Normäquivalenzen her.
Die Gültigkeit einer eindimensionalen Normäquivalenz

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}^t} \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \|w_j\|^2_{\mathcal{H}^t} \simeq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2tj} \|w_j\|^2_{\mathcal{L}^2} \text{ für } t \in (-\tilde{r}, r) \tag{2.22}$$

mit $u = \sum_{j=0}^{\infty} w_j, w_j \in W_j$, kann z.B. bei (biorthogonaler) Waveletapproximation aus den folgenden Approximations- und Regularitätseigenschaften der Approximationsräume gefolgert werden, siehe zum Beispiel [Dah96, Os92]:
Aus einer direkten Abschätzung (Abschätzung vom Jackson Typ, Approximationsordnung m)

$$\inf_{u_j \in V_j} \|u - u_j\|_{\mathcal{L}^2} \leq C 2^{-jm} \|u\|_{\mathcal{H}^m} \;\; \forall u \in \mathcal{H}^m \tag{2.23}$$

für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m$, und einer inversen Abschätzung (Bernstein Ungleichung)

$$\|u_j\|_{\mathcal{H}^q} \leq C 2^{jq} \|u_j\|_{\mathcal{L}^2} \;\; \forall u_j \in V_j \tag{2.24}$$

für $q < r$ mit $r \in (0, m]$, für die Approximation mit dem primalen System und analogen Relationen für das duale System nur jetzt mit den Parametern $\tilde{m}$ und $\tilde{r}$.
Abschätzungen des Typs (2.23) und (2.24) gelten für alle sinnnvollen Finite Elemente oder Spline Räume. Für stückweise lineare Finite Elemente hat man zum Beispiel $r = 3/2$ und $m = 2$ in (2.23) beziehungsweise (2.24).
Man beachte, daß aus (2.22) mit $t = 0$ zusammen mit der lokalen Stabilität (2.12) die globale Stabilität

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2} \simeq \|\{\langle u, \tilde{\psi}_{jk}\rangle\}_{jk}\|_{\ell^2(j\in\mathbb{N},k\in\tau_j)},$$

i.e. (2.16), folgt. Die zweiseitige Abschätzung (2.22) erlaubt die Charakterisierung von Glattheitseigenschaften einer Funktion aus den Eigenschaften ihrer Multiskalenzerlegung.

Um Normäquivalenzen in höheren Dimensionen zu erhalten, verwenden wir die Darstellung von Sobolevräumen (insbesondere von $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$) als Tensorprodukte und Schnitte von Räumen in einer Dimension. Dann lassen sich Aussagen über die Stabilität von eindimensionalen Zerlegungen für die einzelnen Komponenten einer solchen Darstellung von Sobolevräumen nutzen, um Aussagen über die Stabilität von Zerlegungen in mehreren Dimensionen zu erhalten.
Wir verwenden die Notation $\{V; a\}$ um einen Hilbertraum V zu bezeichnen der mit einem Skalarprodukt $a(.,.)$ ausgestattet ist. Betrachte eine Menge von Hilberträumen $H_l, l = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N}$, und eine Menge von abgeschlossenen Teilräumen $V_{li} \subset H_l$, so daß $H_l = \sum_i V_{li}$ gilt. Eine additive Unterraumzerlegung $\{H_l; a_l\} = \sum_i \{V_{li}; b_{li}\}$ heißt stabil, falls die Normäquivalenz

$$a_l(u, u) \simeq |||u|||^2 \equiv \inf_{u_i \in V_{li}: u = \sum_i u_i} \sum_i b_{li}(u_i, u_i)$$

gilt, das heißt die charakteristischen Zahlen

$$\lambda_{min,l} = \min_{0 \neq u \in H_l} \frac{a_l(u, u)}{|||u|||^2}, \; \lambda_{max,l} = \max_{0 \neq u \in H_l} \frac{a_l(u, u)}{|||u|||^2}, \; \kappa_l = \frac{\lambda_{max,l}}{\lambda_{min,l}}$$

sind endlich und positiv. Wir zitieren zwei Propositionen aus [Gri95a]. (Wir erweitern sie vom zweidimensionalen auf den n-dimensionalen Fall).

Proposition 1 *Wenn die Zerlegungen*

$$\{H_l; a_l\} = \sum_i \{V_{li}; b_{li}\}, l \in \{1, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}$$

stabil sind und die Konditionszahlen κ_l besitzen, dann ist die Tensorproduktzerlegung

$$\{H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_n; a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\} = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} \{V_{1i_1} \otimes \cdots \otimes V_{ni_n}; b_{1i_1} \otimes \cdots \otimes b_{ni_n}\}$$

ebenfalls stabil und sie besitzt die Konditionszahl $\prod_{l=1}^n \kappa_l$.

Siehe [Gri95a] für einen Beweis im 2D Fall. Die Erweiterung auf den n-dimensionalen Fall ist direkt möglich. In der folgenden Proposition sind alle Bilinearformen b_{li} gleich und auch die Räume V_{li} sind für alle i gleich.

Proposition 2 *Es seien Folgen $\{\alpha_{li}\}_i, l = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N}, \alpha_{li} \in \mathbb{R}_0^+$ gegeben. Unter der Annahme, daß die Zerlegungen*

$$\{H_l; a_l\} = \sum_i \{V_i; \alpha_{li} b\}, l = 1, \ldots, n,$$

stabil und die Summen direkt sind, gilt für alle $\alpha_l > 0, l = 1, \ldots, n$, daß die Zerlegung

$$\{H_1 \cap \cdots \cap H_n; \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n\} = \sum_i \{V_i; (\alpha_1 \alpha_{1i} + \cdots + \alpha_n \alpha_{ni}) b\} \qquad (2.25)$$

ebenfalls stabil ist mit der Konditionszahl

$$\kappa \leq \frac{\max\{\lambda_{max,1}, \ldots, \lambda_{max,n}\}}{\min\{\lambda_{min,1}, \ldots, \lambda_{min,n}\}}.$$

Beweis: Siehe [Gri95a] für einen Beweis im 2D Fall. Wir skizzieren hier den analogen Beweis für den n-dimensionalen Fall.
Da die Summen direkt sind, besitzt jedes $u \in H_1 \cap \cdots \cap H_n$ eine eindeutige Darstellung $u = \sum_i u_i$ bezüglich $\{V_i\}$ so daß gilt

$$\lambda_{max,l}^{-1} a_l(u,u) \leq \sum_i \alpha_{li} b(u_i, u_i) \leq \lambda_{min,l}^{-1} a_l(u,u), \;\; l = 1, \ldots, n.$$

Multiplizieren mit α_l und aufaddieren dieser zweiseitigen Ungleichungen ergibt

$$\sum_l \alpha_l \lambda_{max,l}^{-1} a_l(u,u) \leq \sum_i (\alpha_1 \alpha_{1i} + \cdots + \alpha_n \alpha_{ni}) b(u_i, u_i) \leq \sum_l \alpha_l \lambda_{min,l}^{-1} a_l(u,u).$$

Folglich gilt

$$\frac{\sum_l \alpha_l a_l(u,u)}{\max_l\{\lambda_{max,l}\}} \leq \sum_i (\alpha_1 \alpha_{1i} + \cdots + \alpha_n \alpha_{ni}) b(u_i, u_i) \leq \frac{\sum_l \alpha_l a_l(u,u)}{\min_l\{\lambda_{min,l}\}}.$$

Dies zeigt, daß die Zerlegung (2.25) stabil ist und daß diese Zerlegung die charakteristische Zahl

$$\kappa = \frac{\max_l\{\lambda_{max,l}\}}{\min_l\{\lambda_{min,l}\}}$$

besitzt.
□

Kombiniert man die Darstellung (2.10) von $\mathcal{H}^t(T^n)$ mit diesen Propositionen und dem eindimensionalen Stabilitätsresultat (2.22) dann erhalten wir die folgende Normäquivalenz und stabile Zerlegung von $\mathcal{H}^t(T^n)$.

Theorem 1 *Sei $u \in \mathcal{H}^t(T^n), u = \sum_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}}, w_{\mathbf{j}} \in W_{\mathbf{j}}$, und es gelte die eindimensionale Normäquivalenz (2.22) mit $\tilde{r}, r \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gilt*

$$\|u\|_{\mathcal{H}^t}^2 \simeq \sum_{\mathbf{j}} 2^{2t|\mathbf{j}|_\infty} \|w_{\mathbf{j}}\|_{\mathcal{L}^2}^2 \text{ für } t \in (-\tilde{r}, r). \tag{2.26}$$

Beweis: Im eindimensionalen Fall haben wir wegen (2.22)

$$\|u\|_{\mathcal{H}^t}^2 \simeq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2tj} \|w_j\|_{\mathcal{L}^2}^2 \text{ für } 0 \le t < r, u = \sum_{j=0}^{\infty} w_j, w_j \in W_j, u \in \mathcal{H}^t$$

und aus (2.16)

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2} \simeq \|\{\langle u, \tilde{\psi}_{jl}\rangle\}_{jl}\|_{\ell^2(j\in\mathbb{N}, l\in\tau_j)} \text{ für } u = \sum_{j=0}^{\infty} w_j, w_j \in W_j, u \in \mathcal{L}^2(T).$$

Dies zeigt die Stabilität der 1D Zerlegungen

$$\{\mathcal{H}^t(T); a(.,.)\} = \sum_j \{W_j; 2^{2tj}(.,.)_{\mathcal{L}^2}\}$$

mit $a(u,u) \simeq \|u\|_{\mathcal{H}^t}^2$ und

$$\{\mathcal{L}^2(T); (.,.)_{\mathcal{L}^2}\} = \sum_j \{W_j; (.,.)_{\mathcal{L}^2}\}.$$

Proposition 1 zeigt dann die Stabilität der Zerlegungen

$$\begin{aligned}
&\{\mathcal{H}_{mix}^{(0,\dots,0,t,0,\dots,0)}; (.,.)_{\mathcal{L}^2} \otimes \cdots \otimes (.,.)_{\mathcal{L}^2} \otimes a(.,.) \otimes (.,.)_{\mathcal{L}^2} \otimes \cdots \otimes (.,.)_{\mathcal{L}^2}\} \\
&\quad = \sum_{\mathbf{j}} \{W_{j_1} \otimes \cdots \otimes W_{j_n}; (.,.)_{\mathcal{L}^2} \otimes \cdots \otimes (.,.)_{\mathcal{L}^2} \otimes 2^{2tj_i}(.,.)_{\mathcal{L}^2} \otimes \cdots \otimes (.,.)_{\mathcal{L}^2}\}.
\end{aligned}$$

Jetzt stellen wir $\mathcal{H}^t(T^n)$ dar wie in (2.10) und wenden Proposition 2 an. Damit erhalten wir die Stabilität der Zerlegung

$$\{\mathcal{H}^t(T^n); \|.\|_{\mathcal{H}^t}^2\} = \sum_{\mathbf{j}} \{W_{\mathbf{j}}; (\sum_{i=1}^{n} 2^{2tj_i})\|.\|_{\mathcal{L}^2}^2\}$$

für nichtnegatives $t < r$. Wegen $2^{2t|\mathbf{j}|_\infty} \le \sum_{i=1}^n 2^{2tj_i} \le n 2^{2t|\mathbf{j}|_\infty}$ für $t \ge 0$ ergibt sich dann (2.26) für positive t. Um die Gültigkeit von (2.26) für $-\tilde{r} < t < 0$ zu zeigen, beachte man, daß die gleiche Argumentation wie oben auch für die Darstellung von u in der dualen Basis gültig ist. Der zulässige Parameterbereich ist in diesem Fall $0 \le t < \tilde{r}$. Wegen der Dualität $(\mathcal{H}^t)' = \mathcal{H}^{-t}$ folgt damit die Behauptung für den Bereich $-\tilde{r} < t < 0$ und folglich für den ganzen Bereich $t \in (-\tilde{r}, r)$.

□

Für den Raum H^t_{mix} gelten die folgenden Normäquivalenzen.

Theorem 2 *Sei* $u \in \mathcal{H}^t_{mix}, u = \sum_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}}, w_{\mathbf{j}} \in W_{\mathbf{j}}$ *und es gelte die eindimensionale Normäquivalenz*

$$\|v\|^2_{\mathcal{H}^t} \simeq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2tj}\|v_j\|^2_{\mathcal{L}^2} \;\forall v \in \mathcal{H}^t, v = \sum_j v_j, v_j \in W_j. \tag{2.27}$$

Dann gilt

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}^t_{mix}} \simeq \sum_{\mathbf{j}} 2^{2t|\mathbf{j}|_1}\|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2}. \tag{2.28}$$

Beweis: Die zweiseitige Abschätzung (2.28) ist eine direkte Konsequenz von Proposition 1 und der Definition des Raumes $\mathcal{H}^t_{mix}$ als Tensorprodukt eindimensionaler Hilberträume, vgl. (2.9). Die 1D Normäquivalenz (2.27) zusammen mit Proposition 1 ergibt direkt die Stabilität der Zerlegung

$$\begin{aligned}
&\{\mathcal{H}^t_{mix}; a(.,.) \otimes \cdots \otimes a(.,.)\}\\
&\quad = \{\mathcal{H}^t(T) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}^t(T); a(.,.) \otimes \cdots \otimes a(.,.)\}\\
&\quad = \sum_{\mathbf{j}}\{W_{j_1} \otimes \cdots \otimes W_{j_n}; 2^{2tj_1}(.,.)_{\mathcal{L}^2} \otimes \cdots \otimes 2^{2tj_n}(.,.)_{\mathcal{L}^2}\}\\
&\quad = \sum_{\mathbf{j}}\{W_{j_1} \otimes \cdots \otimes W_{j_n}; 2^{2t|\mathbf{j}|_1}(.,.)_{\mathcal{L}^2} \otimes \cdots \otimes (.,.)_{\mathcal{L}^2}\}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt (2.28).
□

Die Normäquivalenzen in den Theoremen 1 und 2 sind Spezialfälle von Normäquivalenzen für die Räume $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$. Speziell für $0 \le t + l < r, 0 \le t < r$, zeigt man analog

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} \simeq \sum_{\mathbf{j}}\left(\sum_{i=1}^{n} 2^{2t|\mathbf{j}|_1+2lj_i}\right)\|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \simeq \sum_{\mathbf{j}} 2^{2t|\mathbf{j}|_1+2l|\mathbf{j}|_\infty}\|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2}. \tag{2.29}$$

Verglichen mit (2.26), (2.28), spiegeln die zusätzlichen Faktoren $2^{2t|\mathbf{j}|_1}$ beziehungsweise $2^{2l|\mathbf{j}|_\infty}$ in (2.29) die unterschiedlichen Glattheitsvoraussetzungen wider. Für $t = 0$ oder $l = 0$ erhalten wir (2.26) aus Theorem 1 und (2.28) aus Theorem 2 zurück.
Zu (2.26), (2.28) bzw. (2.29) analoge Beziehungen gelten auch jeweils für die Zerlegungen bzgl. der dualen Wavelets. Es ist nur jeweils r durch $\tilde{r}$ bzw. umgekehrt zu ersetzen.
Um die Implikationen der Theoreme beziehungsweise Propositionen etwas zu veranschaulichen, betrachten wir zwei Beispiele.

Wavelet-Basis Sind die in einer Dimension vorliegenden direkten Zerlegungen stabil in $\mathcal{H}^t$ mit einem Bereich von t der die Null umfaßt, so ist aufgrund der Propositionen 1 und 2 die zugehörige Zerlegung in n Dimensionen ebenfalls stabil in $\mathcal{H}^t$, wie auch in $\mathcal{H}^t_{mix}$ mit t in diesem Bereich. Dies gilt speziell für orthogonale Ansatzfunktionen, wie orthogonale Wavelets, die trivialerweise in $\mathcal{L}^2$ stabil sind.

Hierarchische Basis aus stückweise multilinearen Splines Die Situation ist anders, wenn für die eindimensionale Zerlegung der Parameterwert $t = 0$ nicht im Stabilitätsbereich liegt, wie dies zum Beispiel bei der hierarchischen Basis aus stückweise linearen Splines [Ys86] der Fall ist. Diese Zerlegung ist in einer Dimension stabil in $\mathcal{H}^t(T)$ für $t \in (1/2, 3/2)$, also nicht in $\mathcal{L}^2(T)$ [Lor98]. So ist die Tensorprodukt-Basis zum Beispiel stabil in $\mathcal{H}^t(T) \otimes \mathcal{H}^t(T)$, mit $t \in (1/2, 3/2)$ (vgl. Proposition 1), jedoch nicht in zum Beispiel $\mathcal{H}^1(T^n), n \geq 2$.

Fassen wir zusammen. Wir haben in diesem Kapitel Sobolevräume $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ eingeführt, die die Konzepte der isotropen und der dominierenden gemischten Glattheit miteinander verbinden und sich als Schnitte von Tensorprodukten eindimensionaler Sobolevräume darstellen lassen. Unter Verwendung von Tensorprodukt-Multiskalenbasen konnten wir dann n-dimensionale Normäquivalenzen für diese Räume aus eindimensionalen Normäquivalenzen herleiten.
Man beachte, daß obige Herleitung der Normäquivalenzen nicht auf den Fall des Torus als Definitionsgebiet beschränkt ist. Vielmehr können analoge Beziehungen mittels der Darstellung der Räume $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ als Tensorprodukte und Schnitte von eindimensionalen Sobolevräumen in (2.7) auch für andere mit dem Tensorprodukt-Ansatz konsistente Randbedingungen hergeleitet werden. Es werden dazu nur jeweils eindimensionale Waveletzerlegungen benötigt, so daß die entsprechenden Randbedingungen in einer Dimension erfüllt sind.
Mit den Sobolevräumen $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$, den Tensorprodukt-Multiskalenbasen und den obigen Normäquivalenzen haben wir nun Werkzeuge zur Verfügung, die uns die nötige Flexibilität verschaffen um geeignete Approximationsräume zur Lösung von Differential- und Integralgleichungen zu bestimmen. Dies wird in den Kapiteln 3 bzw. 4 auf zwei verschiedene Arten geschehen. Einerseits werden wir Approximationsräume für die Approximation von Funktionen in $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ herleiten, die sich dann als Ansatz- und Testräume zur Diskretisierung in der Finite Elemente Methode verwenden lassen. Andererseits werden wir Approximationsräume zur Tensorprodukt-Kernapproximation von Integraloperatoren mit glatten Kernen konstruieren.
Außerdem lassen sich die zu den jeweiligen Zerlegungen gehörigen Normäquivalenzen nutzen um Vorkonditionierer für Finite Elemente Diskretisierungen von Differential- und Integralgleichungen zu konstruieren.

3 Approximation von Funktionen

In diesem Abschnitt definieren wir unsere Approximationsräume und geben Theoreme über deren Approximationseigenschaften und deren Dimensionen an. Wir leiten Schranken her für

$$\inf_{v \in V_{FE}} \|u - v\|_{\mathcal{H}^s} \tag{3.1}$$

für unterschiedliche Wahl des Approximationsraumes V_{FE} und für unterschiedliche Glattheiten der Funktion u und unterschiedliche Parameter s. Dabei konzentrieren wir uns auf den Fall $u \in \mathcal{H}^{t,l}_{mix}$. Wir definieren Gitter und assoziierte Approximationsräume, die an die Parameter s und die Glattheit der Lösung angepaßt sind. Die Definition der Gitter ist motiviert durch die Resultate des Abschnitts 2.3, speziell durch die Normäquivalenz (2.29) und (für die trigonometrische Approximation) durch die Definition 1.
Die folgende Darstellung gliedert sich in einige einleitende Bemerkungen, die die darauffolgende Definition der Approximationsräume in Abschnitt 3.2.1 motivieren, in eine Diskussion der Approximationseigenschaften der entstehenden Approximationsräume, in die Darstellung des Beispiels der trigonometrischen Approximation, die Konstruktion von Blending-Schemata für die neuen Approximationsräume und die Anwendung der Ergebnisse auf die Approximation von Funktionen und das Lösen von Differential- und Integralgleichungen. Dabei werden wir insbesondere die bekannten Dünngitter-Approximationsräume [Babe60, Ze91] in eine Skala von Approximationsräumen einbetten, aus denen dann jeweils für die Approximation geeignete Räume ausgewählt werden können. Neben einigen Bemerkungen zu Vorkonditionieren und Multilevelverfahren führen wir ein Komplexitätsresultat für die Poisson-Gleichung an. Außerdem zeigen wir wie diese neuen Approximationsräume direkt als Ergebnis eines Optimierungsverfahrens gewonnen werden können.

3.1 Einleitung und Motivation

Bei vorgegebener Indexmenge $I_J \subset \mathbb{Z}^n_+$, $J \in \mathbb{N}$, betrachten wir Approximationsräume

$$V_J := \sum_{\mathbf{j} \in I_J} W_{\mathbf{j}}.$$

Hierbei ist J der maximale Level in V_J, i.e. $j_i \leq J, i = 1, \ldots, n \ \forall \mathbf{j} \in I_J$ und $W_{\mathbf{j}}$ seien Unterräume wie in Abschnitt 2.2 definiert. Assoziiert mit rechteckigen Indexmengen $I_J^{-\infty} := \{|\mathbf{j}|_\infty \leq J\}$ sind die Vollgitterräume

$$V_J^{-\infty} := \bigoplus_{|\mathbf{j}|_\infty \leq J} W_{\mathbf{j}}, J > 0.$$

Die sogenannten Dünngitter-Approximationsräume (oder kurz Dünne Gitter)

$$V_J^0 := \bigoplus_{|\mathbf{j}|_1 \leq J+n-1} W_{\mathbf{j}}, J > 0,$$

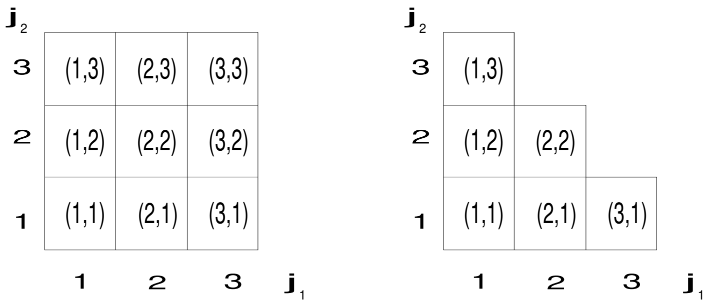


Abbildung 3.1: Indexmengen des Vollgitterraumes $V_3^{-\infty}$ (links) und des Dünngitterraumes V_3^0 (rechts) in 2D

sind assoziiert mit der Indexmenge $I_J^0 := \{|\mathbf{j}|_1 \leq J + n - 1\}$. Abbildung 3.1 zeigt die Indexmengen I_J für die Voll- und Dünngitterräume $V_3^{-\infty}$ und V_3^0 im zweidimensionalen Fall.
Die Dimensionen von $W_{\mathbf{j}}$, $V_J^{-\infty}$ und V_J^0 sind (es werden nur innere Gitterpunkte gezählt)

$$|W_{\mathbf{j}}| = 2^{|\mathbf{j}|_1 - n},$$

$$|V_J^{-\infty}| = (2^J - 1)^n = O(2^{Jn})$$

und

$$|V_J^0| = 2^J \left(\frac{J^{n-1}}{(n-1)!} + O(J^{n-2}) \right),$$

siehe zum Beispiel [Bun92, Bun99]. Die Abschätzung von $|W_{\mathbf{j}}|$ und $|V_J^{-\infty}|$ ist klar. Die Abschätzung von $|V_J^0|$ ist ein Nebenprodukt einer allgemeineren Abschätzung über die Dimension der Räume einer allgemeineren Klasse von Räumen in Abschnitt 3.2.3.
Man beachte, daß die Dimension des Dünngitterraumes V_J^0 im Vergleich zur Dimension des Vollgitterraumes vorteilhaft gering ist, insbesondere in höheren Dimensionen. In Abschnitt 3.2.2 wird gezeigt, daß für eine bestimmte Klasse von glatten Funktionen und für positives s in (3.1), die Approximationsordnung der Dünngitterräume die gleiche ist wie im Falle des Vollgitterraumes $V_J^{-\infty}$. Es ist sogar möglich einen Teilraum des Dünngitterräumes zu wählen, ohne die optimale Approximationsordnung der vollen Gitter zu verlieren.
Bezüglich trigonometrischer Basisfunktionen formen diejenigen Frequenzen, die in den Dünngitter-Approximationsraum aufgenommen werden, ein hyperbolisches Kreuz im Fourierraum, vgl. Abschnitt 3.3.1. Diese Approximationsräume wurden bereits in [Sm63, Babe60] eingeführt und wurden inzwischen nicht nur in Verbindung mit trigonometrischer Approximation/Interpolation sondern auch zusammen mit Wavelets oder Splines als Basisfunktionen verwendet. Beispiele aus der Literatur bezüglich Approximation und Interpolation beinhalten [Bas85, Tem93a, Gon89], [Bas89, Hal92, De82, Sp98a], siehe auch [Bas92, Gord69, Tem89, Tem93b, Tra88, Was95]. In letzter Zeit wurden

wieder einige Arbeiten dazu veröffentlicht, siehe zum Beispiel [Si99a, Ka96, DeV98a]. Beispiele für die Anwendung bei der Integration finden sich in [De89, Bas93, No96, Ge99]. Anwendungen auf die approximative Lösung der Poisson-Gleichung mittels Galerkinverfahren sind in [Ca76, Ze91, Gri92, Bun98, Bun99] (mit stückweise multilinearen Splines) und [Gri95a] (mit Prewavelets) erschienen. Finite Volumenverfahren für die Lösung der Poisson-Gleichung auf hyperbolischen Kreuzapproximationsräumen wurden in [Hem95] entwickelt und ein Finite Differenzenverfahren findet sich in [Schi98]. Andere Anwendungen aus der Literatur beinhalten die Konstruktion von Schätzern für zeitabhängige Spektren in der Statistik [Ne97], die Lösung von Integralgleichungen [Pe89, Fr96, Fr95, Gri98c] und best N-term Approximation mit Haar-Funktionen [Os98b]. In [Pe89, Fr96, Fr95] wurde dabei die Kernapproximation bei Fredholm-Integralgleichungen auf Kreuzapproximationsräumen durchgeführt, wohingegen in [Gri98c] Wavelets beziehungsweise Prewavelets als Test- und Ansatzfunktionen für die Galerkindiskretisierung der Einfachschichtpotentialgleichung verwendet wurden. Theoretische Untersuchungen für die Approximation mit allgemeineren Gebieten im Frequenzraum bei der Approximation mit trigonometrischen Basen findet man in [Gal78, Di83, Di88] und in [Bun99] wurde eine spezielle Dünngitter-Konstruktion zusammen mit stückweise multi-linearen Splines auf ihre Approximationseigenschaften im Raum $\mathcal{H}^2_{mix}$ untersucht. Zur Visualisierung in der Computergraphik wurden Dünne Gitter zum Beispiel in [Tei98, Heus98] mit Erfolg eingesetzt.
Um die Definition allgemeinerer Approximationsräume zu motivieren, beschäftigen wir uns zuerst mit den Fällen $u \in \mathcal{H}^t$ und $u \in \mathcal{H}^t_{mix}$. Der Fall allgemeinerer Glattheit wird dann in Theorem 3 untersucht. In diesem Abschnitt sei $u = \sum_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}}$, mit $w_{\mathbf{j}} \in W_{\mathbf{j}}$. Für den Augenblick betrachten wir Zerlegungen des Raumes die Normäquivalenzen der Form (2.26) und (2.29) mit geeigneten Parameterwerten $-\tilde{r} < s < t < r$ erfüllen. Dies vereinfacht die Betrachtung, ist aber für die Gültigkeit der Argumente keine zwingende Voraussetzung, vgl. Abschnitt 3.2.2.
Seien $t, s \in \mathbb{R}$, $s < t$. Unter diesen Voraussetzungen gilt $\mathcal{H}^t \subset \mathcal{H}^s$. Um die Notation zu vereinfachen beschränken wir uns auf den Fall $t > 0$. Der Fall $t < 0$ kann mit analogen Argumenten untersucht werden.
Als erstes betrachten wir den Fall des vollen Gitters. Sei $u \in \mathcal{H}^s$. Anwendung der Normäquivalenz (2.26) ergibt

$$
\begin{aligned}
\inf_{v \in V_J^{-\infty}} \|u - v\|^2_{\mathcal{H}^s} &\leq \|u - \sum_{|\mathbf{j}|_\infty \leq J} w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{H}^s} \\
&\overset{(2.26)}{\simeq} \sum_{|\mathbf{j}|_\infty > J} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\
&= \sum_{|\mathbf{j}|_\infty > J} 2^{2(s-t)|\mathbf{j}|_\infty} 2^{2t|\mathbf{j}|_\infty} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\
&\leq \max_{|\mathbf{j}|_\infty > J} 2^{2(s-t)|\mathbf{j}|_\infty} \sum_{|\mathbf{j}|_\infty > J} 2^{2t|\mathbf{j}|_\infty} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2}. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Nun setzen wir zusätzliche Glattheit der Lösung voraus, das heißt wir nehmen $u \in \mathcal{H}^t$

an. Jetzt können wir (2.26) nocheinmal anwenden, nun mit $u \in \mathcal{H}^t$. Dies ergibt

$$\max_{|\mathbf{j}|_\infty > J} 2^{2(s-t)|\mathbf{j}|_\infty} \sum_{|\mathbf{j}|_\infty > J} 2^{2t|\mathbf{j}|_\infty} \|w_\mathbf{j}\|^2_{\mathcal{L}^2} \overset{(2.26)}{\leq} C \cdot \max_{|\mathbf{j}|_\infty > J} 2^{2(s-t)|\mathbf{j}|_\infty} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t}. \tag{3.3}$$

Insgesamt erhalten wir die Standardabschätzung

$$\inf_{v \in V_J^{-\infty}} \|u - v\|^2_{\mathcal{H}^s} \leq C \cdot 2^{2(s-t)J} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t} \text{ für } u \in \mathcal{H}^t \text{ and } -\tilde{r} < s < t < r. \tag{3.4}$$

Aus dem Exponenten auf der rechten Seite läßt sich die Approximationsordnung $t - s$ ablesen. Man sieht recht einfach, daß die Approximationsordnung sich für $u \in \mathcal{H}^t_{mix} \subset \mathcal{H}^t$ nicht verbessert.
Wechselt man jedoch von dem Vollgitterraum $V_J^{-\infty}$ zum Approximationsraum V_J^0, so ändert sich die Situation. Wir wenden wiederum die Normäquivalenz (2.26) an. Dies ergibt für $u \in \mathcal{H}^s$

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in V_J^0} \|u - v\|^2_{\mathcal{H}^s} &\leq \|u - \sum_{|\mathbf{j}|_1 \leq J+n-1} w_\mathbf{j}\|^2_{\mathcal{H}^s} \\
&\overset{(2.26)}{\simeq} \sum_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \|w_\mathbf{j}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\
&= \sum_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2(s-t)|\mathbf{j}|_\infty} 2^{2t|\mathbf{j}|_\infty} \|w_\mathbf{j}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\
&\leq \max_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2(s-t)|\mathbf{j}|_\infty} \sum_{|\mathbf{j}|_1 > n+J-1} 2^{2t|\mathbf{j}|_\infty} \|w_\mathbf{j}\|^2_{\mathcal{L}^2}.
\end{aligned}$$

Nun verlangen wir wiederum, daß u von höherer Regularität ist, das heißt $u \in \mathcal{H}^t$. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
&\max_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2(s-t)|\mathbf{j}|_\infty} \sum_{|\mathbf{j}|_1 > n+J-1} 2^{2t|\mathbf{j}|_\infty} \|w_\mathbf{j}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\
&\overset{(2.26)}{\leq} C \cdot \max_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2(s-t)|\mathbf{j}|_\infty} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t} \leq C \cdot 2^{2(s-t)(1-\frac{1}{n})} 2^{2(s-t)\frac{J}{n}} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, daß das Maximum bei $|\mathbf{j}|_\infty = \lceil \frac{J+n-1}{n} \rceil$ angenommen wird. Insgesamt erhalten wir damit

$$\inf_{v \in V_J^0} \|u - v\|^2_{\mathcal{H}^s} \leq C \cdot 2^{2(s-t)\frac{J}{n}} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t} \text{ für } u \in \mathcal{H}^t \text{ und } -\tilde{r} < s < t < r. \tag{3.5}$$

Verglichen mit dem Resultat für das volle Gitter verschlechtert sich die Approximationsordnung von $t - s$ auf $(t - s)/n$.
Für den kleineren Raum $\mathcal{H}^t_{mix} \subset \mathcal{H}^t$ und $s \geq 0$ bleibt die Approximationsordnung jedoch erhalten, wenn der Vollgitterraum durch den Raum V_J^0 ersetzt wird. Die Ursache dafür ist, daß man nun die Normäquivalenz (2.28) anstelle von (2.26) (man erinnere sich

an die unterschiedlichen Exponenten der Vorfaktoren in (2.26) und (2.28)) verwenden kann. Wir wenden (2.26) im Falle von Funktionen aus $\mathcal{H}^s$ und (2.28) für $u \in \mathcal{H}^t_{mix}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in V_J^0} \|u - v\|^2_{\mathcal{H}^s} &\leq \|u - \sum_{|\mathbf{j}|_1 \leq J+n-1} w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{H}^s} \\
&\overset{(2.26)}{\simeq} \sum_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\
&= \sum_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2t|\mathbf{j}|_1} 2^{2t|\mathbf{j}|_1} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\
&\leq \max_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2t|\mathbf{j}|_1} \sum_{|\mathbf{j}|_1 > n+J-1} 2^{2t|\mathbf{j}|_1} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\
&\overset{(2.28)}{\leq} C \cdot \max_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2t|\mathbf{j}|_1} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t_{mix}} \qquad (3.6) \\
&\leq C \cdot 2^{-2tn} 2^{2s} 2^{2(s-t)J} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t_{mix}} \text{ für } u \in \mathcal{H}^t_{mix}, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Tatsache verwendet wurde, daß $2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2t|\mathbf{j}|_1}$ sein Maximum in $(J+1, 1, \ldots, 1)$ annimmt. Zusammengefaßt erhalten wir

$$\inf_{v \in V_J^0} \|u - v\|^2_{\mathcal{H}^s} \leq C \cdot 2^{2(s-t)J} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t_{mix}} \text{ für } u \in \mathcal{H}^t_{mix} \text{ und } -\tilde{r} < s < t < r, t > 0.$$

Das heißt es tritt kein Verlust an Approximationsgüte im Vergleich zum Vollgitterraum auf.

Im Falle $s < 0$ ergibt sich eine andere Situation. Hier, verglichen mit der Abschätzung (3.4) für $u \in \mathcal{H}^t$, verbessert sich die Approximationsordnung ebenfalls, wenn man vom Raum $\mathcal{H}^t$ zum Raum $\mathcal{H}^t_{mix}$ wechselt, aber im Gegensatz zum Fall $s \geq 0$ kann die optimale Ordnung nicht wiedergewonnen werden. Wenden wir (2.26) auf Funktionen aus $\mathcal{H}^s$ zusammen mit (2.28) an, so erhalten wir für $u \in \mathcal{H}^t_{mix}$

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in V_J^0} \|u - v\|^2_{\mathcal{H}^s} &\leq \|u - \sum_{|\mathbf{j}|_\infty > J+n-1} w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{H}^s} \\
&\overset{(2.26)}{\simeq} \sum_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\
&= \sum_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2t|\mathbf{j}|_1} 2^{2t|\mathbf{j}|_1} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\
&\leq \max_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2t|\mathbf{j}|_1} \sum_{|\mathbf{j}|_1 > n+J-1} 2^{2t|\mathbf{j}|_1} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\
&\overset{(2.28)}{\leq} C \cdot \max_{|\mathbf{j}|_1 > J+n-1} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2t|\mathbf{j}|_1} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t_{mix}} \\
&\leq C \cdot 2^{2s(1-\frac{1}{n})} 2^{-2tn} 2^{2(s/n-t)J} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t_{mix}}, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, daß $2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2t|\mathbf{j}|_1}$ sein Maximum bei $|\mathbf{j}|_\infty = \lceil \frac{J+n-1}{n} \rceil$ und $|\mathbf{j}|_1 = J + n$ annimmt, falls $s < 0$ ist. Das heißt, obwohl die Approximationsordnung sich verbessert wenn man von $\mathcal{H}^t$ auf $\mathcal{H}^t_{mix}$ wechselt, so bleibt doch ein Verlust in der Approximationsordnung der Größe $s(1 - 1/n)$ im Vergleich zum vollen Gitter. Diese Tatsache wurde bereits in [Gri98c] im Fall $-1 \leq s < 0$ beschrieben. Dort wurden Prewavelets verwendet, das heißt Wavelets die $\mathcal{L}^2$-orthogonal zwischen unterschiedlichen Leveln $W_\mathbf{j}$ sind und eine Riesz-Basis in den Unterräumen $W_\mathbf{j}$ bilden.
Zusammenfassend haben wir gesehen, daß für $s \geq 0$ und für $u \in \mathcal{H}^t_{mix}$, $s < t$, die Approximationsordnung erhalten bleibt, wenn vom Approximationraum $V_J^{-\infty}$ zum Dünngitterraum V_J^0 gewechselt wird. Für $s < 0$ ergibt sich hingegen eine leichte Verschlechterung der Approximationsordnung.
Im folgenden konstruieren wir Approximationsräume für Funktionen aus $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$, indem wir geeignete Teilräume aus dem Vollgitterraum auswählen. Der Dünngitterraum V_J^0 wie auch der Vollgitterraum $V_J^{-\infty}$ erscheinen als Spezialfälle.
Ungleichung

$$\max_{\mathbf{j} \notin I_J^0} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2t|\mathbf{j}|_1} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t_{mix}} \leq C \cdot 2^{2(s-t)J} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t_{mix}} \text{ für } u \in \mathcal{H}^t_{mix}, 0 \leq s < t,$$

aus (3.6) zeigt, daß man für $s \geq 0$ eventuell Indizes aus der Indexmenge I_J^0 weglassen kann, ohne die optimale Approximationsordnung zu verlieren. Man betrachte dazu eine Indexmenge $I_J \subset I_J^0$ so daß gilt

$$\max_{\mathbf{j} \notin I_J} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2t|\mathbf{j}|_1} \leq C \cdot 2^{2(s-t)J} \tag{3.9}$$

wobei $C \neq C(J)$. Dann bleibt die Approximationsordnung auch für den Approximationsraum erhalten, der mit Hilfe der Indexmenge I_J definiert wird. Nimmt man den Logarithmus auf beiden Seiten von (3.9) und teilt durch $2t$ (erinnern wir uns, wir hatten $t > 0$ vorausgesetzt) so zeigt sich, daß (3.9) äquivalent ist zu

$$\mathbf{j} \in I_J \Leftrightarrow -|\mathbf{j}|_1 + \frac{s}{t}|\mathbf{j}|_\infty \geq -J + \frac{s}{t}J + c, \tag{3.10}$$

wobei $c \neq c(\mathbf{j}, J)$ im wesentlichen der Logarithmus der Konstanten C auf der rechten Seite der asymptotischen Abschätzung (3.9) ist. Für $s < 0$ folgern wir aus (3.8) daß wir zusätzliche Indizes zur Indexmenge I_J^0 "spendieren" müssen, um die optimale Approximationsordnung zu erhalten. Wiederum bleibt die Ordnung erhalten, falls I_J so gewählt ist, daß (3.9) und folglich (3.10) gelten.
Diese Überlegungen zeigen, daß es sinnvoll ist die minimale Indexmenge zu betrachten, für die die Beziehung (3.10) gilt. Fixiert man $(J, 1, \cdots, 1)$ als denjenigen Index der in die Indexmenge aufgenommen wird, aber unter allen Indizes die maximale $|.|_\infty$-Norm besitzt, so erhält man $c = n - 1$ und damit die Indexmenge

$$I_J^{\frac{s}{t}} := \{\mathbf{j} : -|\mathbf{j}|_1 + \frac{s}{t}|\mathbf{j}|_\infty \geq -(n + J - 1) + \frac{s}{t}J\}. \tag{3.11}$$

Diese hängt von den Parametern J and dem Quotienten s/t ab.

3.2 Die Approximationsräume V_J^T

Nach den einleitenden Bemerkungen des letzten Abschnitts definieren wir nun unsere Approximationsräume.

3.2.1 Definition

Um den Ergebnissen mehr Flexibilität zu verleihen, parametrisieren wir die Indexmenge in (3.11) mit einem neuen Parameter T und erhalten damit die folgende Definition.

Definition 2 *Sei $J \in \mathbb{N}$, $T \in (-\infty, 1]$. Dann sei die parametrisierte Indexmenge I_J^T gegeben durch*

$$I_J^T := \{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n : -|\mathbf{j}|_1 + T|\mathbf{j}|_\infty \geq -(n + J - 1) + TJ\}. \tag{3.12}$$

Die zugehörigen Approximationsräume definieren wir als

$$V_J^T \ := \ \bigoplus_{\mathbf{j} \in I_J^T} W_{\mathbf{j}},$$

beziehungsweise mit den die $W_{\mathbf{j}}$ aufspannenden Basisfunktionen

$$V_J^T = \operatorname{span}\{\psi_{\mathbf{ji}} : \mathbf{j} \in I_J^T, \mathbf{i} \in \tau_{\mathbf{j}}\}.$$

Als natürliche Erweiterung auf den Fall $T = -\infty$ definieren wir

$$I_J^{-\infty} := \{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n : |\mathbf{j}|_\infty \leq J\}$$

und analog $V_J^{-\infty}$.

Der neue Parameter T erlaubt die Entkopplung der Definition der Indexmengen und der resultierenden Gitter von den Glattheitsparametern s und t und ermöglicht damit eine genauere Untersuchung der Beziehungen zwischen Glattheitsannahmen, Wahl des Approximationsraumes und der Approximationsordnung.
Mit T zwischen $-\infty$ und 1 variierend, ergibt sich damit eine Skala von geschachtelten Gittern und Approximationsräumen

$$V_J^{T_1} \subset V_J^{T_2} \text{ für } T_1 > T_2,\ T_i \in [-\infty, 1],\ i = 1, 2,$$

die eine natürliche Hierarchie definiert. Für $T = 0$ erhält man den Dünngitterraum V_J^0 und für $T \to -\infty$ hat man $V_J^T \to V_J^{-\infty}$, das heißt man erhält den Vollgitterraum. Das Verhalten der Indexmengen I_J^T ist schematisch dargestellt in Abbildung 3.2 für unterschiedliche T im zweidimensionalen Fall, vgl. auch Abbildung 3.1. Die Abbildungen 3.3 und 3.4 zeigen einige Beispiele, ebenfalls im zweidimensionalen Fall.
Zur Interpolation wie auch für Zwecke der Integration werden Sampling/Interpolationspunkte im physikalischen Raum benötigt. Unsere Approximationsräume implizieren solche Gitterfolgen, die wir mit S_J^T bezeichnen. Wir definieren die anisotropen Gitter

$$S_{\mathbf{j}} := \left\{(a_1 2^{-j_1}, \ldots, a_n 2^{-j_n}), a_i = 0, \ldots, 2^{j_i} - 1, 1 \leq i \leq n\right\}.$$

Abbildung 3.2: Indexmengen I_J^T für $T < 0$, $T = 0$ und $T > 0$ im 2D-Fall

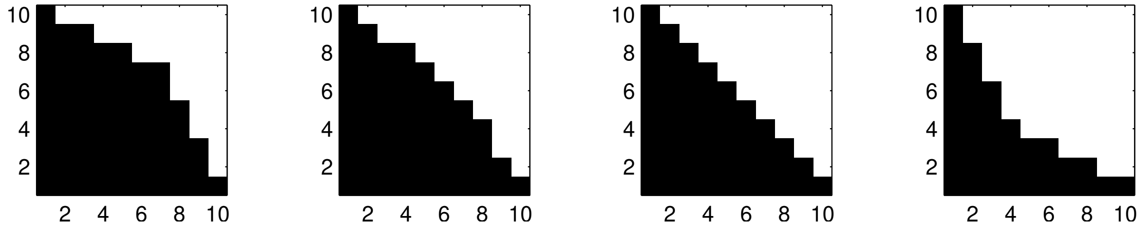


Abbildung 3.3: Indexmengen $I_{10}^{-1}, I_{10}^{-1/2}, I_{10}^{0}$ und $I_{10}^{1/2}$, von links nach rechts, in 2D.

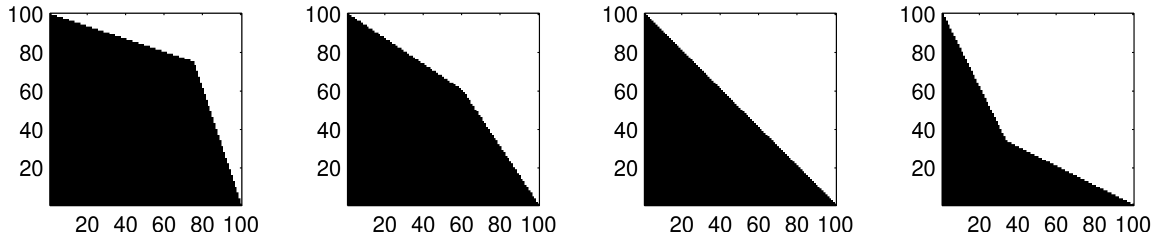


Abbildung 3.4: Indexmengen $I_{100}^{-1}, I_{100}^{-1/2}, I_{100}^{0}$ und $I_{100}^{1/2}$, von links nach rechts, in 2D.

Dies sind volle Gitter mit unterschiedlicher Maschenweite in verschiedene Koordinatenrichtungen. Dann ist die Folge von Gittern S_J^T, die mit dem Approximationsraum V_J^T assoziiert ist, gegeben durch

$$S_J^T := \cup_{(j_1,\ldots,j_n)\in I_J^T} S_{\mathbf{j}}. \tag{3.13}$$

Abbildung 3.5 zeigt einige Beispiele im zweidimensionalen Fall. Diese Gitterpunktfolgen sind geschachtelt und sie beinhalten als Spezialfälle für $T = -\infty$ das volle Gitter und für $T = 0$ die hyperbolischen Kreuzungspunkte [Bas89]. Die Anzahl der Gitterpunkte in S_J^T ist gegeben durch $|S_J^T| = dim(V_J^T)$, vergleiche Lemma 1.

3.2.2 Approximationsfehler

Die grundlegende Frage ist nun, wie gut diese Approximationsräume (abhängig von den gewählten eindimensionalen Multiskalenbasen) Funktionen aus den Räumen $\mathcal{H}_{mix}^{t,l}$ approximieren. Es gilt das folgende Theorem.

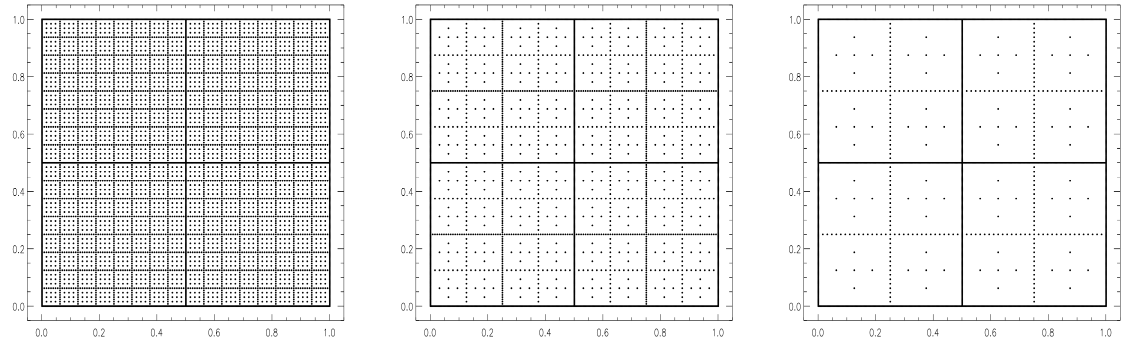


Abbildung 3.5: Gitterpunkte $S_8^{-2}, S_8^0, S_8^{0.5}$ im zweidimensionalen Fall. Diese gehören zu den Approximationsräumen $V_8^{-2}, V_8^0, V_8^{0.5}$

Theorem 3 *Es sei eine eindimensionale Multiskalenbasis gegeben, so daß die Normäquivalenzen (2.26) und (2.29) bezüglich der Tensorprodukt-Basen erfüllt seien. Hierbei seien die Parameter $\tilde{r}, r, s, t, l$ aus (2.26) und (2.29) so, daß die Beziehungen $-\tilde{r} < s < t + l < r$ und $0 \le t < r$ gelten. Dann gilt für $u \in \mathcal{H}^{t,l}_{mix}$*

$$\inf_{v \in V_J^T} \|u - v\|^2_{\mathcal{H}^s} \quad \le \quad \begin{cases} C \cdot 2^{2\left(s-l-t+(Tt-s+l)\frac{n-1}{n-T}\right)J} \|u\|^2_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \text{für } T \ge \frac{s-l}{t} \\ C \cdot 2^{2(s-l-t)J} \|u\|^2_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \text{für } T \le \frac{s-l}{t}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Insbesondere gilt für $u \in \mathcal{H}^t = \mathcal{H}^{0,t}_{mix}$

$$\inf_{v \in V_J^T} \|u - v\|^2_{\mathcal{H}^s} \le C \cdot 2^{2(s-t)\frac{1-T}{n-T}J} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t} \tag{3.15}$$

und für $u \in \mathcal{H}^t_{mix} = \mathcal{H}^{t,0}_{mix}$

$$\inf_{v \in V_J^T} \|u - v\|^2_{\mathcal{H}^s} \quad \le \quad \begin{cases} C \cdot 2^{2\left(s-t+(Tt-s)\frac{n-1}{n-T}\right)J} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t_{mix}} & \text{für } T \ge \frac{s}{t} \\ C \cdot 2^{2(s-t)J} \|u\|^2_{\mathcal{H}^t_{mix}} & \text{für } T \le \frac{s}{t}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Beweis: Sei $u \in \mathcal{H}^{t,l}_{mix}$. Um (3.14) zu zeigen, verwenden wir die obere Abschätzung aus der Normäquivalenz (2.26) und die untere Abschätzung aus (2.29). Dann haben wir

$$\begin{aligned} \inf_{v \in V_J^T} \|u - v\|^2_{\mathcal{H}^s} \quad &\le \quad \|u - \sum_{\mathbf{j} \in I_J^T} w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{H}^s} \stackrel{(2.26)}{\simeq} \sum_{\mathbf{j} \notin I_J^T} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\ &\le \quad \max_{\mathbf{j} \notin I_J^T} 2^{2(s-l)|\mathbf{j}|_\infty - 2t|\mathbf{j}|_1} \cdot \sum_{\mathbf{j} \notin I_J^T} 2^{2l|\mathbf{j}|_\infty + 2t|\mathbf{j}|_1} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \\ &\stackrel{(2.29)}{\le} \quad C \cdot \max_{\mathbf{j} \notin I_J^T} 2^{2(s-l)|\mathbf{j}|_\infty - 2t|\mathbf{j}|_1} \|u\|^2_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Wertet man das Maximum bezüglich I_J^T aus, so erhält man (3.14). Die Ungleichungen (3.15) und (3.16) sind Spezialfälle von (3.14), mit $t = 0$ beziehungsweise $l = 0$.
□

Man beachte, daß der Fehler auf der linken Seite der Ungleichung (3.14) in der Standard Sobolevnorm $\|.\|_{\mathcal{H}^s}$ gemessen wird, wohingegen auf der rechten Seite eine stärkere Norm verwendet wird.
Theorem 3 zeigt, daß für die Approximation von Funktionen aus $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ die Konvergenzordnung des Vollgitter-Approximationsraumes $V_J^{-\infty}$ auch für die Approximationsräume V_J^T mit $T \leq (s-l)/t$ gilt. Die Verwendung von Approximationsräumen mit $T > (s-l)/t$ führt hingegen zu einer Verschlechterung der Konvergenzordnung. Folglich bieten sich die Räume $V_J^{(s-l)/t}$ zu Diskretisierungszwecken beziehungsweise zur Approximation an, insbesondere in höheren Dimensionen, in denen der Unterschied in der Dimension zwischen den unterschiedlichen Räumen V_J^T im Vergleich zum Vollgitterraum voll zum Tragen kommt, vgl. Abschnitt 3.2.3.
Es ist wichtig zu bemerken, daß die Abschätzungen in (3.14) scharf sind. Denn für jede Funktion $w_{\mathbf{j}} \in W_{\mathbf{j}}$ mit $\|w_{\mathbf{j}}\|_{\mathcal{L}^2} = 1$ und $\mathbf{j} \notin I_J^T$ so, daß das Maximum in (3.17) angenommen wird, herrscht Gleichheit in (3.14).

Bisher hatten wir der Einfachheit halber die Stabilität der zugrundeliegenden Zerlegungen angenommen. Dies hat uns die Anwendung der entsprechenden Normäquivalenzen bei der Abschätzung der Approximationsfehler erlaubt. Offensichtlich hat dieser Zugang aber mehrere Schwächen. Erstens kann er für nicht stabile Zerlegungen nicht angewandt werden und zweitens ist in vielen Fällen der Gültigkeitsbereich der resultierenden Abschätzungen durch den Gültigkeitsbereich der Normäquivalenzen beschränkt. Konkret kann jedoch der maximale Bereich $t + l \leq m$ anstelle von $t + l < r$ (mit r aus (2.26), (2.29)) erreicht werden, wobei m hier die Approximationsordnung der zugrundeliegenden eindimensionalen Basis bezeichne, vgl. (2.23).
Wir werden deswegen nun ein weiteres Theorem zur Abschätzung des Approximationsfehlers anführen. Im Gegensatz zu Theorem 3 ist für dieses jedoch die Gültigkeit der Normäquivalenzen (2.26) bzw. (2.29) nicht notwendig. Stattdessen benötigen wir nur Abschätzungen der Art

$$\|w_{\mathbf{j}}\|_{\mathcal{H}^s} \quad \leq \quad \bar{C} 2^{(s-l)|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} \; \forall \mathbf{j} \in \mathbb{N}^n, \tag{3.18}$$

für $u = \sum_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}} \in \mathcal{H}^{t,l}_{mix}, w_{\mathbf{j}} \in W_{\mathbf{j}}$. Solche Abschätzungen ergeben sich direkt mittels Tensorprodukt-Argumenten aus eindimensionalen Abschätzungen, siehe zum Beispiel [Gri98c] und vergleiche (2.20) in Abschnitt 2.2 für entsprechende Abschätzungen für multilineare Splines.
Der Beweis des Theorems verwendet die Dreiecksungleichung zusammen mit den Voraussetzungen der Gültigkeit von Abschätzungen des Typs (3.18).

Theorem 4 *Seien $s, l \in \mathbb{R}$, $t, m \in \mathbb{R}_0^+$ mit m der Approximationsordnung der zugrundeliegenden eindimensionalen Multiskalenzerlegung, vgl. (2.23), $s < t + l \leq m$, und sei $u = \sum_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}} \in \mathcal{H}^{t,l}_{mix}$, mit $w_{\mathbf{j}} \in W_{\mathbf{j}}$. Wir nehmen an, daß es eine von $\mathbf{j}$ unabhängige Konstante $\bar{C}$ gibt, so daß (3.18) gilt. Dann gilt*

$$\inf_{v \in V_J^T} \|u - v\|_{\mathcal{H}^s} \leq C \cdot \begin{cases} C \cdot 2^{(s-l-t+(Tt-s+l)\frac{n-1}{n-T})J} J^{n-1} \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \textit{für } T \geq \frac{s-l}{t}, \\ C \cdot 2^{(s-l-t)J} \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \textit{für } T < \frac{s-l}{t}. \end{cases} \tag{3.19}$$

Beweis: Wir wenden die Dreiecksungleichung zusammen mit der Annahme der Gültigkeit von (3.18) an. Dies ergibt

$$\inf_{v\in V_J^T} \|u-v\|_{\mathcal{H}^s} \;\leq\; \|\sum_{\mathbf{j}\notin I_J^T} w_{\mathbf{j}}\|_{\mathcal{H}^s} \leq \sum_{\mathbf{j}\notin I_J^T} \|w_{\mathbf{j}}\|_{\mathcal{H}^s} \overset{(3.18)}{\leq} \bar{C}\cdot\left(\sum_{\mathbf{j}\notin I_J^T} 2^{(s-l)|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1}\right)\|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}}.$$

Abzuschätzen bleibt damit $\sum_{\mathbf{j}\notin I_J^T} 2^{(s-l)|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1}$. Wir zeigen

$$\sum_{\mathbf{j}\notin I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} \leq \begin{cases} O(2^{(s-t)J}) & \text{für } T < s/t,\\ O(J^{n-1}2^{(s-t+(Tt-s)\frac{n-1}{n-T})J}) & \text{für } T \geq s/t,\end{cases} \tag{3.20}$$

für $s<t, t\geq 0$. Daraus folgt dann offensichtlich (3.19).
Wir schätzen zuerst

$$\sum_{r=0}^{q} x^r \binom{n-2+r}{n-2}$$

ab. Für $x\neq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{q} x^r\binom{n-2+r}{n-2} &= \frac{1}{(n-2)!}\sum_{r=0}^{q}(x^{n-2}x^r)^{(n-2)}\\
&= \frac{1}{(n-2)!}\left(x^{n-2}\sum_{r=0}^{q} x^r\right)^{(n-2)}\\
&= \frac{1}{(n-2)!}\left(x^{n-2}\frac{1-x^{q+1}}{1-x}\right)^{(n-2)}\\
&= \frac{1}{(n-2)!}\left[\left(x^{n-2}\frac{1}{1-x}\right)^{(n-2)} - \left(x^{n+q-1}\frac{1}{1-x}\right)^{(n-2)}\right].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n-2)!}\left(x^{k-1}\frac{1}{1-x}\right)^{(n-2)} &= \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}(x^{k-1})^{(i)}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-i-2)}\\
&= \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}\frac{(k-1)!}{(k-i-1)!}x^{k-i-1}(n-2-i)!\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-i-1}\\
&= x^{k-n}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{k-1}{i}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{n-i-1}
\end{aligned}$$

für $k\geq n-2$ und

$$\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{n-i-1} = \frac{x}{1-x}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{i} = x\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1}$$

erhalten wir aus (3.21) für $0 < x < 1$ die Beziehung

$$\sum_{r=0}^{q} x^r \binom{n-2+r}{n-2} \leq \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1}. \tag{3.22}$$

1) *Die Fälle* $s > 0, T \leq 0$ *und* $s = 0, T = 0$:

a) Um (3.20) für $s > 0, T \leq 0$ zu beweisen, verwenden wir die Definition (3.12) der Indexmenge I_J^0. Dies ergibt

$$\sum_{\mathbf{j} \notin I_J^0} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} = \sum_{|\mathbf{j}|_1 > n+J-1} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} = \sum_{k=n+J}^{\infty} 2^{-tk} \sum_{|\mathbf{j}|_1 = k} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty}. \tag{3.23}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{|\mathbf{j}|_1 = k} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty} &\leq n \sum_{|\mathbf{j}|_1 = k} 2^{sj_1} \\
&= n \sum_{j_1=1}^{k-(n-1)} 2^{sj_1} \sum_{|(j_2,\ldots,j_n)|_1 = k-j_1} 1 \\
&= n \sum_{j_1=1}^{k-n+1} 2^{sj_1} \binom{k-j_1-1}{n-2} \\
&= n 2^{s(k-n+1)} \sum_{r=0}^{k-n} 2^{-sr} \binom{n-2+r}{n-2} \qquad (3.24) \\
&\overset{(3.22)}{\leq} C \cdot 2^{sk},
\end{aligned}$$

da es $\binom{k-j_1-1}{n-2}$ Möglichkeiten gibt, die Summe $k - j_1$ mit $n-1$ natürlichen Zahlen zu bilden. Kombiniert man dies mit (3.23) so erhält man

$$\sum_{\mathbf{j} \notin I_J^0} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} \leq C \cdot \sum_{k=n+J}^{\infty} 2^{(s-t)k} \leq O(2^{(s-t)J}). \tag{3.25}$$

Zusammen mit $I_J^0 \subseteq I_J^T$ für $T \leq 0$ zeigt dies (3.20) für $s > 0, T \leq 0$.

b) Im Fall $s = 0, T = 0$ zeigt

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{j} \notin I_J^0} 2^{-t|\mathbf{j}|_1} &\leq \sum_{k=n+J}^{\infty} 2^{-tk} \sum_{|\mathbf{j}|_1 = k} 1 \\
&= \sum_{k=n+J}^{\infty} 2^{-tk} \binom{k-1}{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= C \cdot 2^{-tJ} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-ti} \binom{n-1+J+i}{n-1} \\ &\overset{(3.22)}{\leq} O(J^{n-1} 2^{-tJ}) \end{aligned} \tag{3.26}$$

die Behauptung.

2) *Der Fall* $\frac{s}{t} \geq T > 0$:

Sei $|\mathbf{j}|_1 = n + J - 1 - i$ und sei $T > 0$. Dann gilt $\mathbf{j} \in I_J^T \Leftrightarrow |\mathbf{j}|_\infty \geq J - \frac{1}{T} i$. Im folgenden bezeichnet N mit $0 \leq N \leq J - 1$ den maximalen Wert von i, für den die Menge der $\mathbf{j}$ mit $|\mathbf{j}|_1 = n + J - 1 - i$ und $|\mathbf{j}|_\infty < J - \frac{1}{T} i$ nicht leer ist.

Wir zerlegen die Summe $\sum_{\mathbf{j} \notin I_J^T}$ in zwei Teile entsprechend

$$\sum_{\mathbf{j} \notin I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} = \sum_{\mathbf{j} \notin I_J^0} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} + \sum_{\mathbf{j} \in I_J^0 \setminus I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1}. \tag{3.27}$$

Die erste Summe wurde bereits in (3.25) abgeschätzt. Es verbleibt die zweite Summe abzuschätzen. Wir haben

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{j} \in I_J^0 \setminus I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} &\leq \sum_{i=0}^{N} \sum_{\substack{|\mathbf{j}|_1 = n+J-1-i, \\ |\mathbf{j}|_\infty < J - i/T}} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty} \, 2^{-t|\mathbf{j}|_1} \\ &= 2^{-t(n+J-1)} \sum_{i=0}^{N} 2^{ti} \sum_{\substack{|\mathbf{j}|_1 = n+J-1-i, \\ |\mathbf{j}|_\infty < J - i/T}} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|\mathbf{j}|_1 = n+J-1-i, \\ |\mathbf{j}|_\infty < J - i/T}} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty} &\leq C \cdot \sum_{\substack{|\mathbf{j}|_1 = n+J-1-i, \\ |\mathbf{j}|_\infty < J - i/T}} 2^{sj_1} \\ &= C \cdot \sum_{k=1}^{\lceil J-1-i/T \rceil} 2^{sk} \sum_{|(j_2,\ldots,j_n)|_1 = n+J-1-i-k} 1 \\ &= C \cdot \sum_{k=1}^{\lceil J-1-i/T \rceil} 2^{sk} \binom{n+J-2-i-k}{n-2} \\ &\leq C \cdot \sum_{r=0}^{\lceil J-1-i/T \rceil} 2^{s(J-i/T-r)} \binom{n-2+\lfloor (\frac{1}{T}-1)i \rfloor + r}{n-2} \\ &\leq C \cdot 2^{s(J-i/T)} \binom{n-2+\lfloor (\frac{1}{T}-1)i \rfloor}{n-2} \sum_{r=0}^{\lceil J-1-i/T \rceil} 2^{-sr} \binom{n-2+r}{n-2} \\ &\overset{(3.22)}{\leq} C \cdot 2^{s(J-i/T)} \binom{n-2+\lfloor (\frac{1}{T}-1)i \rfloor}{n-2} \end{aligned}$$

erhalten wir zusammen mit (3.28) die Abschätzung

$$\sum_{\mathbf{j}\in I_J^0\setminus I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} \le C\cdot 2^{(s-t)J}\sum_{i=0}^{N} 2^{(t-s/T)i}\binom{n-2+\lfloor(\frac{1}{T}-1)i\rfloor}{n-2}. \tag{3.29}$$

a) Der Fall $T < s/t$:
Wir verwenden wieder (3.22) um (3.29) fortzusetzen. Dies ergibt

$$\sum_{\mathbf{j}\in I_J^0\setminus I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} \overset{(3.22)}{\le} O(2^{(s-t)J}).$$

Zusammen mit (3.25) und (3.27) zeigt dies (3.20) für $0 < T < s/t$.

b) Der Fall $T = s/t$:
Wir erhalten aus (3.29)

$$\sum_{\mathbf{j}\in I_J^0\setminus I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} \le 2^{(s-t)J}O(N^{n-1}) \le O(2^{(s-t)J}J^{n-1}).$$

Kombiniert man dies mit (3.25) und (3.27) so erhält man (3.20) für $0 < T = s/t$.

3) *Die Fälle $T < \frac{s}{t} \le 0$ und $T = \frac{s}{t} < 0$:*

Sei $|\mathbf{j}|_1 = n + J - 1 + i$ mit $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbf{j} \notin I_J^T \Leftrightarrow |\mathbf{j}|_\infty > J + \frac{1}{T}i$.
Wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{j}\notin I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{|\mathbf{j}|_1 = n+J-1+i,\\ |\mathbf{j}|_\infty > J+i/T}} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty}\, 2^{-t|\mathbf{j}|_1} \\
&= 2^{-t(n+J-1)}\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-ti} \sum_{\substack{|\mathbf{j}|_1 = n+J-1+i,\\ |\mathbf{j}|_\infty > J+i/T}} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty} \\
&\le C\cdot 2^{-tJ}\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-ti} \sum_{k=\lceil J+\frac{i}{T}\rceil}^{J+i} 2^{sk} \sum_{|(j_2,\ldots,j_n)|_1 = n+J-1+i-k} 1 \\
&= C\cdot 2^{-tJ}\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-ti} \sum_{k=\lceil J+\frac{i}{T}\rceil}^{J+i} 2^{sk}\binom{n+J-2+i-k}{n-2} \\
&\le C\cdot 2^{-tJ}\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-ti}2^{s(J+i)} \sum_{r=0}^{\lceil(1-1/T)i\rceil} 2^{-sr}\binom{n-2+r}{n-2}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

a) Für $s = 0$ erhalten wir aus (3.30) zusammen mit (3.22)

$$\sum_{\mathbf{j}\notin I_J^T} 2^{-t|\mathbf{j}|_1} \overset{(3.22)}{\le} O(2^{-tJ}). \tag{3.31}$$

b) Für $T < s/t < 0$ erhalten wir aus (3.30) zusammen mit (3.22)

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{j}\notin I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} &\leq C \cdot 2^{(s-t)J} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{(s/T-t)i} \sum_{r=0}^{\lceil (1-1/T)i \rceil} \binom{n-2+r}{n-2} && (3.32)\\ &\overset{(3.22)}{\leq} O(2^{(s-t)J}). && (3.33)\end{aligned}$$

Zusammen mit (3.31) zeigt dies (3.20) für $T < s/t \leq 0$.

c) Für den Fall $T = s/t < 0$ zerlegen wir die Summe $\sum_{\mathbf{j}\notin I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1}$ in zwei Teile entsprechend

$$\sum_{\mathbf{j}\notin I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} = \sum_{\mathbf{j}\notin I^0_{J+\bar N+1}} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} + \sum_{\mathbf{j}\in I^0_{J+\bar N+1}\setminus I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} \qquad (3.34)$$

und untersuchen die einzelnen Teile getrennt. Hier bezeichnet $\bar N$ den maximalen Wert von i für den die Menge der $\mathbf{j} \in I_J^T$ mit $|\mathbf{j}|_1 = n + J - 1 + i$ nicht leer ist. Die erste Summe in (3.34) kann mittels (3.26) abgeschätzt werden,

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{j}\notin I^0_{J+\bar N+1}} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} &\leq \sum_{\mathbf{j}\notin I^0_{J+\bar N+1}} 2^{(s/n-t)|\mathbf{j}|_1}\\ &\overset{(3.26)}{\leq} O\left((J+\bar N)^{n-1} 2^{(s/n-t)(J+\bar N)}\right)\\ &= O(J^{n-1} 2^{(s/n-t)n\frac{1-s/t}{n-s/t}J})\\ &= O(J^{n-1}2^{(s-t)J}). && (3.35)\end{aligned}$$

Für die zweite Summe erhalten wir wie in (3.30), (3.32)

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{j}\in I^0_{J+\bar N+1}\setminus I_J^T} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1} &= \sum_{i=1}^{\bar N} \sum_{\substack{|\mathbf{j}|_1 = n+J-1+i,\\ |\mathbf{j}|_\infty > J+i/T}} 2^{s|\mathbf{j}|_\infty}\, 2^{-t|\mathbf{j}|_1}\\ &\leq C \cdot 2^{-tJ} \sum_{i=1}^{\bar N} 2^{-ti} 2^{s(J+i)} \sum_{r=0}^{\lceil (1-1/T)i \rceil} 2^{-sr} \binom{n-2+r}{n-2}\\ &\leq O(2^{(s-t)J} \bar N^{n-1})\\ &= O(J^{n-1} 2^{(s-t)J}).\end{aligned}$$

Kombiniert man dies mit (3.34), (3.35) so erhält man (3.20) für $T = s/t < 0$.

4) Alle noch für den Beweis von (3.20) fehlenden Abschätzungen für den Fall $T > s/t$ ergeben sich aus der Inklusion $I_N^{s/t} \subset I_J^T$ mit

$$N = \left\lfloor \left(\frac{T-1}{T-n} J - \frac{n-1}{T-n} + \frac{n-1}{s/t-n}\right) \frac{s/t-n}{s/t-1} \right\rfloor$$

und den obigen Abschätzungen in 2b und 3c für die Indexmenge $I_N^{s/t}$. Dies zeigt die noch fehlenden Ungleichungen in (3.20) und beendet den Beweis.
□

Theorem 4 besagt wiederum, daß die Approximationskraft der Räume V_J^T mit $T < (s-l)/t$ die gleiche ist wie die des Vollgitterraumes $V_J^{-\infty}$. Für Approximationsräume mit $T \geq (s-l)/t$ verschlechtert sich hingegen die Approximationsordnung. Man beachte jedoch den zusätzlichen logarithmischen Faktor in Theorem 4 in den Fällen $T \geq (s-l)/t$ im Vergleich zu Theorem 3. Eine genauere Analyse zeigt, daß im Fall $T > \frac{s-l}{t}$ die logarithmischen Terme (zumindest teilweise) wieder entfernt werden können. Wir werden dies hier nicht weiter untersuchen.
Für Approximationsräume aus Tensorprodukten linearer Splines gilt (3.18) zum Beispiel für $s < 3/2$ und $t + l \leq 2$. Damit gelten die Aussagen von Theorem 4 für diese Approximationsräume innerhalb des dadurch gegebenen Parameterbereichs.
Zusammengefaßt zeigen Theorem 3 beziehungsweise Theorem 4, daß die mit unseren neuen Approximationsräumen erreichbare Approximationsordnung nur von dem Verhältnis von isotroper zu dominierender gemischter Glattheit $\frac{s-l}{t}$ bestimmt ist. Weiterhin haben wir gesehen, daß es in Abhängigkeit von der Glattheit der beteiligten Funktionen möglich ist, aus unserer Sequenz von Approximationsräumen solche Räume auszuwählend die die gleiche Approximationsgüte wie der Vollgitter-Approximationsraum besitzen. Eine Abschätzung der Dimension der Räume V_J^T ist der Inhalt des nächsten Abschnitts.

3.2.3 Dimension der Approximationsräume

Das folgende Lemma diskutiert die Dimension der Räume V_J^T. Wir geben die Koeffizienten in den asymptotischen Abschätzungen nur für den Fall $1/J < T \leq 1$ an, da in allen anderen Fällen die Dimension des Raumes exponentiell von n abhängt.

Lemma 1 *Es gilt*

$$dim\left(V_J^T\right) \leq \begin{cases} n \cdot 2^J & \textit{für } T = 1, \\ \frac{n}{2}\left(\frac{1}{1-2^{-\frac{1}{1/T-1}}}\right)^n \cdot 2^J = O(2^J) & \textit{für } 1/J < T < 1, \\ O(2^{\frac{T-1}{T/n-1}J}) & \textit{für } T < 0, \\ O(2^{nJ}) & \textit{für } T = -\infty. \end{cases} \tag{3.36}$$

Außerdem gilt die Abschätzung

$$dim\left(V_J^T\right) \leq \left(\frac{J^{n-1}}{(n-1)!} + O(J^{n-2})\right) \cdot 2^J = O(2^J J^{n-1}) \textit{ für } 0 \leq T \leq 1/J. \tag{3.37}$$

Beweis: Wir müssen die Summe $\sum_{\mathbf{j}\in I_J^T} |W_\mathbf{j}| \simeq \sum_{\mathbf{j}\in I_J^T} 2^{|\mathbf{j}|_1}$ abschätzen. Sei $K(J,T) = \sup\{|\mathbf{j}|_1 : \mathbf{j} \in I_J^T\}$. Dann wissen wir aus [Di83], Theorem 6, daß $\sum_{\mathbf{j}\in I_J^T} 2^{|\mathbf{j}|_1} \simeq 2^K J^r$ mit $r(0) = n-1$ und $r(T) = 0$ für $T \neq 0$ gilt. Wertet man $K(J,T)$ aus, so ergeben sich die asymptotischen Abschätzungen in (3.36) und (3.37). Für festes J ist T wie ein diskreter Parameter und das Resultat $dim(V_J^0) = O(2^J J^{n-1})$ für $T = 0$ gilt auch für $T \in [0, 1/J]$. Damit verbleibt die Abschätzung der Koeffizienten im Fall $1/J < T \leq 1$. Es seien $|\mathbf{j}|_1 = n + J - 1 - i$ und $1/J < T \leq 1$. Dann gilt $W_\mathbf{j} \subset V_J^T \Leftrightarrow -|\mathbf{j}|_1 + T|\mathbf{j}|_\infty \geq -(n+J-1) + TJ \Leftrightarrow |\mathbf{j}|_\infty \geq J - \frac{1}{T}i$. Wegen $\sum_{|\mathbf{j}|_1 = n+J-1-i} 1 = \binom{|\mathbf{j}|_1 - 1}{n-1}$ und

$$\sum_{\substack{|\mathbf{j}|_1 = n+J-1-i, \\ |\mathbf{j}|_\infty = \ell_1 \geq J - i/T}} 1 \leq \binom{\lceil |\mathbf{j}|_1 - (J - i/T) \rceil}{n-1} = \binom{\lceil n - 1 + (1/T - 1)i \rceil}{n-1},$$

ist die Zahl der Unterräume $W_\mathbf{j}$ mit $|\mathbf{j}|_1 = n + J - 1 - i$ die zu V_J^T gehören beschränkt durch $n\binom{\lceil n-1+(\frac{1}{T}-1)i \rceil}{n-1}$. Folglich gilt

$$|V_J^T| = \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{\substack{|\mathbf{j}|_1 = n+J-1-i, \\ |\mathbf{j}|_\infty = \ell_1 \geq J - i/T}} |W_\mathbf{j}| \leq 2^{J-1} n \sum_{i=0}^{J-1} 2^{-i} \binom{\lceil n - 1 + (1/T - 1)i \rceil}{n-1}.$$

Im Fall $T - 1 = 0$ erhalten wir $|V_J^T| \leq 2^{J-1} n \sum_{i=0}^{J-1} 2^{-i} \leq 2^J n$. Für $T < 1$ erhalten wir

$$|V_J^T| \leq 2^{J-1} n \sum_{i=0}^{\lceil (1/T-1)(J-1) \rceil} 2^{-\frac{i}{1/T-1}} \binom{n-1+i}{i}.$$

Wegen (3.22) gilt dann

$$|V_J^T| \leq 2^{J-1} n \left. \left(\frac{1}{1-x}\right)^n \right|_{x = 2^{-\frac{1}{1/T-1}}} = 2^{J-1} n \left(\frac{1}{1 - 2^{-\frac{1}{1/T-1}}}\right)^n.$$

Dies ist die gesuchte Abschätzung für die Koeffizienten und beendet den Beweis.
□

Die interessante Konsequenz von Lemma 1 ist, daß für $T \in (0, 1]$ die Dimensionen unserer Approximationsräume asymptotisch von der Raumdimension n unabhängig sind. Allerdings hängen die Koeffizienten im Falle $T \in (0, 1)$ exponentiell von der Raumdimension ab. Für $T = 0$ erhalten wir den wohlbekannten zusätzlichen logarithmischen Faktor in der asymptotischen Abschätzung [Bun92, Bun99] und für $T < 0$ ist die Dimension von V_J^T selbst exponentiell abhängig von n.
Tabelle 3.1 listet die Dimension von Approximationsräumen V_J^T für einige Werte von T, Level J und Raumdimension n auf. Offensichtlich wird der Vollgitterraum $V_J^{-\infty}$ für größere Werte von n oder J unpraktikabel. Abbildung 3.6 zeigt Graphen von $dim(V_J^T)/dim(V_J^1)$ gegen die Zahl der Level J für die Werte $T \in \{-\infty, -2, -0.5, 0, 0.25\}$. Abbildung 3.7 zeigt einen Graphen der Dimension der Approximationsräume $V_7^T, T \in \{-\infty, -0.5, 0, 0.25\}$ gegen die Raumdimension n. Für größere Werte von J oder n werden die Vorteile der Approximationsräume V_J^T mit größerem T offensichtlich.

Zusammengefaßt deuten Theorem 3 beziehungsweise Theorem 4 und Lemma 1 an, daß für Approximationsprobleme mit $u \in \mathcal{H}_{mix}^{t,l}$ die richtige Wahl der Approximationsräume

Tabelle 3.1: Anzahl der inneren Gitterpunkte für verschiedene Approximationsräume V_J^T in $n = 2, 3$ und 4 Raumdimensionen

	$n=2$		$n=3$		$n=4$	
	$J=10$	$J=20$	$J=10$	$J=20$	$J=10$	$J=20$
$V_J^{-\infty}$	$1.046 \cdot 10^6$	$1.099 \cdot 10^{12}$	$1.071 \cdot 10^9$	$1.153 \cdot 10^{18}$	$1.09 \cdot 10^{12}$	$1.209 \cdot 10^{24}$
V_J^{-1}	$2.867 \cdot 10^4$	$3.313 \cdot 10^8$	$3.676 \cdot 10^5$	$1.981 \cdot 10^{10}$	$2.998 \cdot 10^6$	$5.404 \cdot 10^{11}$
$V_J^{-\frac{1}{2}}$	$1.434 \cdot 10^4$	$7.759 \cdot 10^7$	$1.270 \cdot 10^5$	$2.135 \cdot 10^9$	$7.209 \cdot 10^5$	$3.111 \cdot 10^{10}$
V_J^0	$9.217 \cdot 10^3$	$1.992 \cdot 10^7$	$4.710 \cdot 10^4$	$2.003 \cdot 10^8$	$1.782 \cdot 10^5$	$1.414 \cdot 10^9$
$V_J^{\frac{1}{4}}$	$4.865 \cdot 10^3$	$7.078 \cdot 10^6$	$1.664 \cdot 10^4$	$3.801 \cdot 10^7$	$4.582 \cdot 10^4$	$1.664 \cdot 10^8$
$V_J^{\frac{1}{2}}$	$3.585 \cdot 10^3$	$4.145 \cdot 10^6$	$8.895 \cdot 10^3$	$1.209 \cdot 10^7$	$1.856 \cdot 10^4$	$3.072 \cdot 10^7$

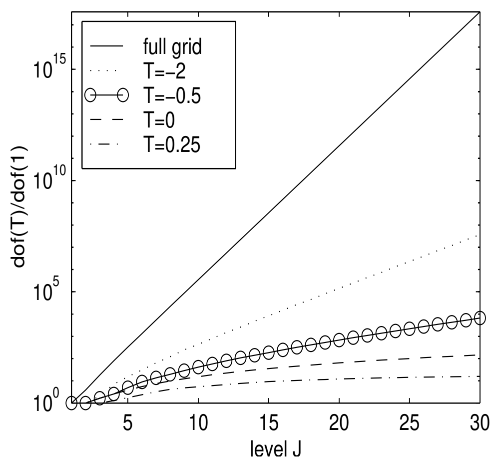


Abbildung 3.6: Semi-logarithmische Darstellung der Dimension des Approximationsraumes V_J^T skaliert mit der Dimension von V_J^1 für $T \in \{-\infty, -2, -0.5, 0, 0.25\}$ gegen die Anzahl der Level J in drei Raumdimensionen

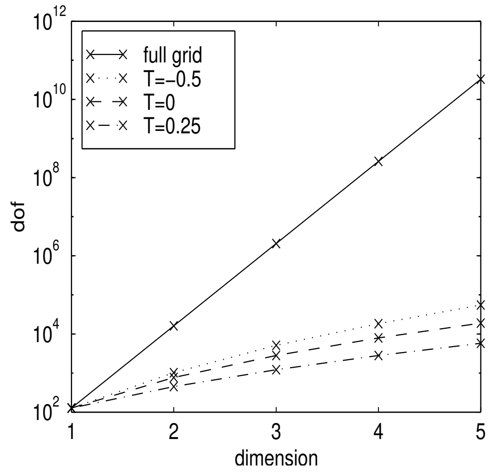


Abbildung 3.7: Semi-logarithmische Darstellung der Dimension des Approximationsraumes $V_7^T, T \in \{-\infty, -0.5, 0, 0.25\}$ gegen die Raumdimension n

V_J^T zu einer signifikanten Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade verglichen mit dem vollen Gitter führen kann, ohne daß ein Verlust an Approximationsgüte auftritt. Insbesondere erlauben unsere Konstruktionen nun eine vollständig an die Glattheiten und die verwendeten Normen angepaßte Auswahl von Approximationsräumen.
Bevor wir darauf näher eingehen, geben wir im nächsten Abschnitt einige zusätzliche Informationen über unsere neuen Approximationsräume.

3.3 Einige Bemerkungen zu den Approximationsräumen V_J^T

In diesem Abschnitt geben wir einige weitere Informationen über unsere neuen Approximationsräume. Speziell zeigen wir anhand trigonometrischer Basen, daß dyadische Verfeinerung nicht notwendig ist für die Konstruktion solcher Approximationsräume. Außerdem zeigen wir, daß unsere Approximationsräume algorithmisch durch die Verwendung sogenannter Blending-Schemata einfach handhabbar sind und wie sie aus einem Optimierungsprozeß gewonnen werden können.

3.3.1 Trigonometrische Approximationsräume FV_d^T

Bisher hatten wir uns auf Approximationsräume konzentriert die aus Räumen $W_{\mathbf{j}}$ zusammengesetzt sind, die selbst durch dyadische Verfeinerung enstehen. Für die Konstruktion von Approximationsräumen die an die Glattheitsparameter des jeweiligen Problems angepaßt sind, ist diese Art der Verfeinerung aber natürlich nicht zwingend notwendig. Sie vereinfacht jedoch die Konstruktion effizienter Algorithmen, wie wir in Abschnitt 3.3.2 noch sehen werden. Als wichtiges Beispiel dafür, daß analoge Konstruktionen auch für "andere Verfeinerungen" möglich sind, betrachten wir trigonometrische Basen. Diese lassen sich natürlich zusammen mit den Indexmengen I_J^T verwenden. Genausogut kann man aber in diesem Fall direkt die Beziehung (2.3) verwenden und erhält damit Approximationsräume FV_d^T wie folgt.
Sei $d \in \mathbb{N}$, $T \in (-\infty, 1]$. Dann sei die Indexmenge FI_d^T gegeben durch

$$FI_d^T := \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n : \prod_{i=1}^{n} (1 + |k_i|) \cdot (1 + |\mathbf{k}|_\infty)^{-T} \leq (1 + d)^{1-T} \right\}. \tag{3.38}$$

Damit definieren wir

$$FV_d^T := \mathrm{span}\{e^{-i\mathbf{k}\cdot} : \mathbf{k} \in FI_d^T\} = \{f(x) = \sum_{\mathbf{k} \in FI_d^T} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}x}\}. \tag{3.39}$$

Als natürliche Erweiterung auf den Fall $T = -\infty$ definieren wir

$$FI_d^{-\infty} := \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n : |\mathbf{k}|_\infty \leq d\}$$

und analog $FV_d^{-\infty}$. Dieser letzte Raum entspricht dem Standard Approximationsraum mit Frequenzen aus dem Würfel $[-d, d]^n$. Die Definitionen (3.38) und (3.39) sind motiviert durch den Abfall der Fourierkoeffizienten von Funktionen in $\mathcal{H}_{mix}^{t,l}$. Die zwei Parameter d und T bestimmen die Anzahl der Elemente im Approximationsraum, wie auch die Wahl der Frequenzen die aus dem Gesamtspektrum ausgewählt werden. Die obere Grenze $(1 + d)^{1-T}$ beschränkt die maximale Frequenz in unserem Approximationsraum auf d (in jeder Richtung). Abbildungen 3.8 und 3.9 zeigen einige Indexmengen FI_d^T für verschiedene Parameter d und T im zweidimensionalen Fall. Dort werden die Frequenzen derjenigen trigonometrischen Funktionen gezeigt, die im Approximationsraum FV_d^T enthalten sind. Das wohlbekannte hyperbolische Kreuz [Sm63] tritt als Spezialfall für $T = 0$ auf. Ein positiver Wert des Parameters T führt zu einem kleineren

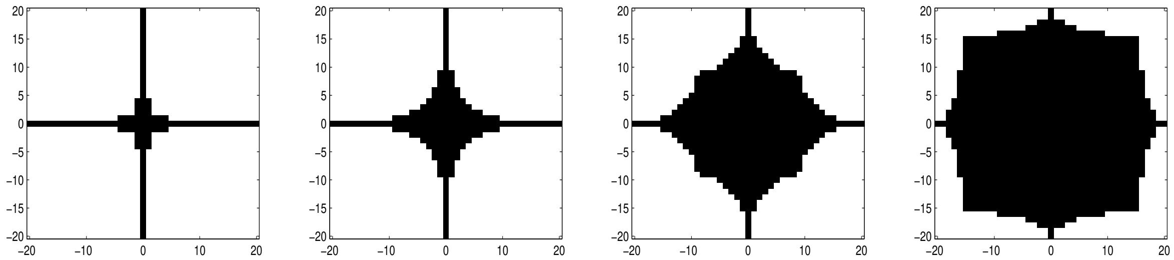


Abbildung 3.8: Indexmengen FI_{20}^T für $T = 0.5, 0, -2, -10$ (von links nach rechts) im zweidimensionalen Fall; das hyperbolische Kreuz entspricht $T = 0$

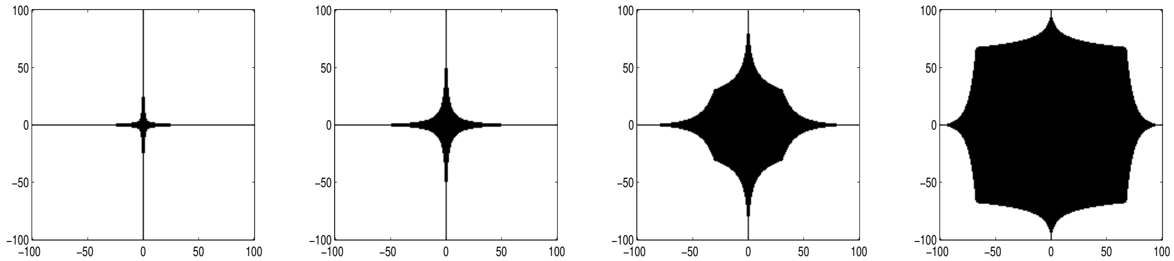


Abbildung 3.9: Indexmengen FI_{100}^T für $T = 0.5, 0, -2, -10$ (von links nach rechts) im zweidimensionalen Fall; das hyperbolische Kreuz entspricht $T = 0$

Approximationsraum im Vergleich zum "hyperbolisches Kreuz"-Raum, wohingegen ein negativer Wert von T zu einem größeren Approximationsraum führt. Folglich bilden die Räume FV_d^T aus (3.39) eine geschachtelte Skala von Approximationsräumen, die die "hyperbolisches Kreuz"-Räume beeinhaltet,

$$FV_d^{T_1} \subset FV_d^{T_2} \subset FV_d^{-\infty}, \text{ für } -\infty < T_2 < T_1 \leq 1.$$

Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 3.2.2, Theorem 3, ergeben sich die Approximationseigenschaften dieser Räume, die wir hier der Vollständigkeit halber noch einmal in der entsprechenden Version aufführen. Man beachte jedoch, daß in diesem Fall keine aus den Ansatzfunktionen resultierenden Einschränkungen für die Parameterwerte t, s und l bestehen. Folglich ergeben sich in diesem Fall auch keine logarithmischen Terme wie in Theorem 4.

Theorem 5 *Sei* $s < l + t$, $t \geq 0$, $u \in \mathcal{H}^{t,l}_{mix}, u(x) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}x}$ *und* $u_d^T(x) = \sum_{\mathbf{k}\in FI_d^T} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}x} \in FV_d^T$. *Dann gilt*

$$\|u - u_d^T\|_{\mathcal{H}^s} \leq \begin{cases} (1+d)^{s-l-t+(Tt-s+l)\frac{n-1}{n-T}} \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \text{für } T \geq \frac{s-l}{t}, \\ (1+d)^{s-l-t} \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \text{für } T \leq \frac{s-l}{t}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Beweis: Setzt man $u(x) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}x}$ und $u_d^T(x) = \sum_{\mathbf{k}\in FI_d^T} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}x}$ in $\|u - u_d^T\|_{\mathcal{H}^s}$ ein, so erhält man direkt

$$
\begin{aligned}
\|u-u_d^T\|_{\mathcal{H}^s}^2 &= \|\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot} - \sum_{\mathbf{k}\in FI_d^T} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot}\|_{\mathcal{H}^s}^2 = \|\sum_{\mathbf{k}\notin FI_d^T} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot}\|_{\mathcal{H}^s}^2 \\
&\overset{(2.4)}{=} \sum_{\mathbf{k}\notin FI_d^T} (1+|\mathbf{k}|_\infty)^{2s}|c_{\mathbf{k}}|^2 \\
&= \sum_{\mathbf{k}\notin FI_d^T} \frac{(1+|\mathbf{k}|_\infty)^{2s}}{\prod_{i=1}^n (1+|k_i|)^{2t}(1+|\mathbf{k}|_\infty)^{2l}} \cdot \prod_{i=1}^n (1+|k_i|)^{2t}(1+|\mathbf{k}|_\infty)^{2l}\cdot|c_{\mathbf{k}}|^2 \\
&\leq \max_{\mathbf{k}\notin FI_d^T}\left(\frac{(1+|\mathbf{k}|_\infty)^{2s}}{\prod_{i=1}^n (1+|k_i|)^{2t}(1+|\mathbf{k}|_\infty)^{2l}}\right)\cdot \\
&\qquad \cdot \sum_{\mathbf{k}\notin FI_d^T}\prod_{i=1}^n (1+|k_i|)^{2t}(1+|\mathbf{k}|_\infty)^{2l}\cdot|c_{\mathbf{k}}|^2 \\
&\overset{(2.3)}{\leq} \max_{\mathbf{k}\notin FI_d^T}\left(\frac{(1+|\mathbf{k}|_\infty)^{2(s-l)}}{\prod_{i=1}^n (1+|k_i|)^{2t}}\right)\cdot\|u\|_{\mathcal{H}_{mix}^{t,l}}^2 . \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

Benutzt man die Definition der Indexmenge FI_d^T in (3.38) und wertet man das Maximum in (3.41) aus, so erhält man die Behauptung (3.40).
□

Theorem 5 besagt wiederum, daß für die Approximation von Funktionen aus $\mathcal{H}_{mix}^{t,l}$ die Konvergenzordnung des Vollgitter-Approximationsraumes $FV_d^{-\infty}$ auch für die Approximationsräume FV_d^T mit $T \leq (s-l)/t$ gilt. Die Verwendung von Approximationsräumen mit $T > (s-l)/t$ führt hingegen zu einer Verschlechterung der Konvergenzordnung. Für die Dimensionen der Räume FV_d^T gelten zu Lemma 1 analoge Abschätzungen. Nur der Term 2^J ist wiederum durch $1+d$ zu ersetzen. Wir geben die Abschätzungen der Vollständigkeit halber hier an.

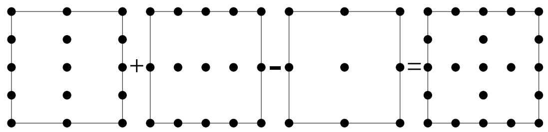
Lemma 2 *Es gilt*

$$
dim\left(FV_d^T\right) \leq \begin{cases} O(1+d) & \textit{für } 0 < T \leq 1, \\ O\left((1+d)\cdot\log(1+d)^{n-1}\right) & \textit{für } T = 0, \\ O\left((1+d)^{\frac{T-1}{T/n-1}}\right) & \textit{für } T < 0, \\ O\left((1+d)^n\right) & \textit{für } T = -\infty. \end{cases} \qquad (3.42)
$$

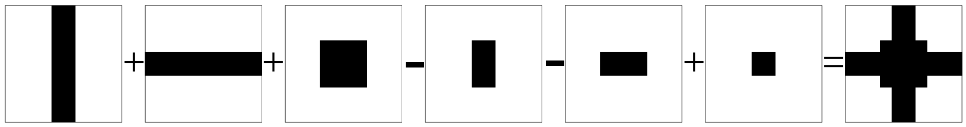
Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, daß es aus algorithmischen Gründen im allgemeinen günstiger ist die Approximationsräume V_J^T anstelle von FV_d^T zu benutzen. Dies ermöglicht dann die Anwendung von schnellen Fouriertransformationsmethoden auf den Approximationsräumen und damit zum Beispiel die einfache Verwendung unserer Approximationsräume zur Interpolation.

3.3.2 Blending-Schemata

Die Definition der zu den Approximationsräumen V_J^T gehörenden Gitterpunktmengen S_J^T in (3.13) deutet eine Möglichkeit an, die Approximationsräume V_J^T (beziehungsweise Approximanden/Interpolanten aus V_J^T) als Summe und Differenz einfacherer Räume aufzubauen, wie dies in der Abbildung



für die Gitterpunktmenge S_2^0 angedeutet ist. Für trigonometrische Ansatzfunktionen zeigt die folgende Abbildung schematisch die Kombination von Approximationen bzgl. unterschiedlicher Ansatzräume, deren Frequenzen als Rechtecke aus dem Frequenzraum gewählt sind.



Hierbei wird das auf der rechten Seite abgebildete Kreuz im Fourierraum erzeugt durch "Addition und Subtraktion" von rechteckigen Gebieten im Fourierraum.
Solche Konstruktionen sind daher von besonderem Interesse, weil unsere Approximationsräume im allgemeinen algorithmisch nicht so einfach zu handhaben sind wie die zu vollen Gittern gehörigen Räume. Tatsächlich ist es so, daß Funktionen aus diesen neuen Approximationsräumen als Summe von Elementen aus Vollgitterräumen mit unterschiedlicher Maschenweite in verschiedenen Koordinatenrichtungen zusammengesetzt werden können. Dies ist in Analogie zu den bekannten Boolschen Blending-Schemata für die "hyperbolisches Kreuz"-Räume [Bas85, Bas89, De89, Gon89, Gord71, Gri92]. Auf diese Weise lassen sich kompliziertere Datenstrukturen vermeiden. Darüberhinaus ermöglicht und vereinfacht dieser Zugang die direkte Anwendbarkeit hierarchischer Methoden wie zum Beispiel Multilevel Methoden und der schnellen Fouriertransformation. Damit können zum Beispiel Algorithmen für die trigonometrische Interpolation von Funktionen auf den hier beschriebenen Gitterpunktmengen analog zu den Verfahren in [Bas89, Hal92] aufgebaut werden.
Die Algorithmen basieren auf dem folgenden Blending-Theorem.

Theorem 6 *Die Indexmenge $I \subset \mathbb{N}^N, N > 1$ habe die folgende Eigenschaft: Ist $\mathbf{j} \in I$, dann ist jedes $\mathbf{k}$ mit $\mathbf{k} \leq \mathbf{j}$ in I.*
Sei $W_\mathbf{j} = span\{\psi_\mathbf{kl} : \mathbf{k} \leq \mathbf{j}, \mathbf{l} \in \tau_\mathbf{k}\}$, $V = \sum_{\mathbf{j}\in I} W_\mathbf{j}$ und $u = \sum_{\mathbf{j}\in I} w_\mathbf{j}$, $w_\mathbf{j} \in W_\mathbf{j}$. Außerdem bezeichne

$$V_\mathbf{j} = \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{j}} W_\mathbf{k} \qquad (3.43)$$

anisotrope Vollgitterräume, und es sei

$$u_{\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{j}} w_{\mathbf{k}} \textit{ für } \mathbf{j} \in I. \tag{3.44}$$

Dann gilt

$$u = \sum_{\mathbf{j}\in I: r_{\mathbf{j}}\neq 0} r_{\mathbf{j}} u_{\mathbf{j}} \tag{3.45}$$

mit den Koeffizienten

$$r_{\mathbf{j}} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \left(\sum_{\substack{\{\mathbf{l}:\mathbf{l}=\mathbf{j}+\sum_{i\in M}\mathbf{e}_i \in I,\\ M\subseteq\{1,\ldots,N\},|M|=k\}}} 1 \right). \tag{3.46}$$

Beweis: Das Element $w_{\mathbf{j}}$ aus $W_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in I$, kann als Summe und Differenz von Elementen $u_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}}$ aus den Räumen $V_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \le \mathbf{j}$, geschrieben werden,

$$w_{\mathbf{j}} \quad = \quad \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \sum_{\substack{\{\mathbf{l}:\mathbf{l}=\mathbf{j}-\sum_{i\in M}\mathbf{e}_i \in I,\\ M\subseteq\{1,\ldots,N\},|M|=k\}}} u_{\mathbf{l}}.$$

Setzt man dies in $u = \sum_{\mathbf{j}\in I} w_{\mathbf{j}}$ ein, sammelt gleiche Terme und nutzt aus, daß $r_{\mathbf{j}} = 0$ gilt, falls $\mathbf{j} + \mathbf{1} \in I$ ist, so erhält man (3.45).
□

Damit läßt sich also jedes Element

$$u_J^T = \sum_{\mathbf{j}\in I_J^T} w_{\mathbf{j}}, w_{\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{l}\in\tau_{\mathbf{m}}} c_{\mathbf{ml}}\psi_{\mathbf{ml}} \in W_{\mathbf{j}}, \tag{3.47}$$

aus V_J^T als gewichtete Summe und Differenz aus Approximationen

$$u_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{m}\le\mathbf{k}} w_{\mathbf{m}} \tag{3.48}$$

auf anisotropen Vollgitter-Approximationsräumen $V_{\mathbf{j}}$ schreiben und die Koeffizienten der Multiskalendarstellung von u_J^T erhält man direkt aus den Koeffizienten der Multiskalendarstellungen der $u_{\mathbf{j}} \in V_{\mathbf{j}}$, und diese lassen sich einfach berechnen, da die Räume $V_{\mathbf{j}}$ anisotrope Vollgitterräume sind.
Abbildung 3.10 zeigt einige Beispiele für beim Blending benötigte Vollgitterräume für den zweidimensionalen Fall. Dort sind die Koeffizienten $r_{\mathbf{j}}$ aus der Summe (3.45) – mit der die jeweilige Funktion $u_{\mathbf{j}} \in V_{\mathbf{j}}$ in der Darstellung von u_J^T gewichtet wird – an die jeweilige Stelle im Unterraumschema eingetragen.
Um den Aufwand von Algorithmen berechnen zu können, die mithilfe dieser Blending-Schemata arbeiten, muß die Anzahl der Freiheitsgrade bestimmt werden die beim Blending in den anisotropen Vollgitterräumen $V_{\mathbf{j}}$ verwendet werden. Es gilt, daß die Anzahl der Elemente beim Blending für den Raum V_J^T von der gleichen Ordnung ist wie $dim(V_J^T)$.

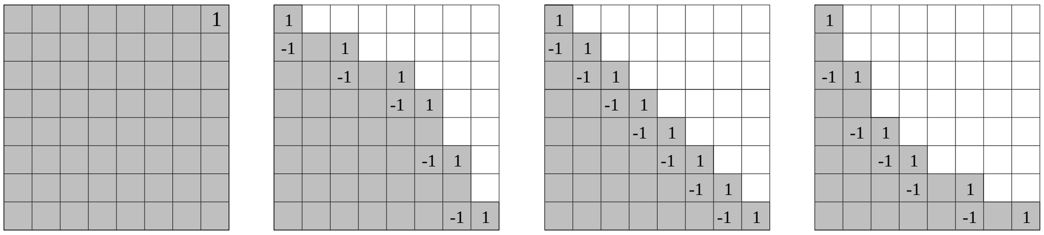


Abbildung 3.10: Indexmengen $I_8^{-\infty}, I_8^{-1}, I_8^0$ und $I_8^{0.5}$ (von links nach rechts) und zu den Teilräumen gehörige Koeffizienten $r_{\mathbf{j}}$ aus der Summe in (3.45), vergleiche (3.46). Die $\mathbf{j} \in I_J^T$ sind jeweils grau schattiert. Es sind nur die Koeffizienten $r_{\mathbf{j}}$ ungleich Null eingetragen.

Beispiel: Interpolation Soll eine (hinreichend glatte) Funktion f an den Punkten des Gitters S_J^T interpoliert werden, so kann nach obigem wie folgt vorgegangen werden.

Algorithmus 1

1. *Berechne* $r_{\mathbf{j}}$ *für* $\mathbf{j} \in I_J^T$ *nach (3.46). Man beachte dabei, daß* $r_{\mathbf{j}} = 0$ *gilt, falls* $\mathbf{j} + \mathbf{1}$ *ein Element von* I_J^T *ist.*
2. *Sampeln der Funktionswerte an den Gitterpunkten der anisotropen Gitter* $S_{\mathbf{j}}$ *für* $\mathbf{j} \in I_J^T$ *mit* $r_{\mathbf{j}} \neq 0$ *ergibt die zu interpolierenden Werte auf diesen anisotropen Gittern.*
3. *Berechne die Multiskalenkoeffizienten (bzw. Fourierkoeffizienten) der Interpolierenden* $u_{\mathbf{j}} \in V_{\mathbf{j}}$ *für* $\mathbf{j} \in I_J^T$ *mit* $r_{\mathbf{j}} \neq 0$ *auf diesen Gittern.*
4. *Kombination der* $u_{\mathbf{j}}$ *nach (3.45) ergibt die interpolierende Funktion* u_J^T*.*

Weil die Multiskalentransformation nur auf regulären anisotropen Vollgittern durchgeführt werden muß, kann Schritt 3 durch schnelle Multiskalentransformationsverfahren ausgeführt werden. Damit ergibt sich der Aufwand zur Bestimmung der Koeffizienten der Interpolierenden aus dem Aufwand der jeweiligen Multiskalentransformation. Ist dieser Aufwand linear in der Dimension des jeweiligen Raumes, dann ist der Gesamtaufwand proportional zur Anzahl der Gitterpunkte in S_J^T. Bei der Interpolation mit trigonometrischen Basen erhält man einen zusätzlichen logarithmischen Faktor durch den suboptimalen Aufwand bei der schnellen Fouriertransformation.
Liegen nur Approximationen $\bar{u}_{\mathbf{j}}$ der $u_{\mathbf{j}}$ aus (3.48) vor, so hat man die Approximation $u_J^T \approx \sum_{\mathbf{j} \in I_J^T : r_{\mathbf{j}} \neq 0} r_{\mathbf{j}} \bar{u}_{\mathbf{j}}$ mit den $r_{\mathbf{j}}$ aus (3.46). Damit können diese Blendingverfahren auch zur approximativen Lösung von Operatorgleichungen verwendet werden, indem die Gleichung approximativ auf den anisotropen Gittern gelöst wird und diese Lösungen dann zur Gesamtlösung kombiniert werden. Beispiele für die Verwendung von Blendingverfahren zur approximativen Lösung der Poisson-Gleichung in den Räumen V_J^0 finden sich z.B. in [Gri95b]. In [Bun94] und [Pf99] sind zugehörige Fehlerabschätzungen für den Approximationsraum V_J^0 zusammen mit multilinearen Ansatzfunktionen zu finden. Man beachte, daß die so entstehenden Algorithmen in natürlicher Weise dimensionsrekursiv aufgebaut werden können.

3.3.3 Optimierungsverfahren und Unterraumauswahl

Angeregt durch die Arbeit [Bun99] präsentieren wir in diesem Abschnitt einen anderen Weg die Approximationsräume V_J^T zu erhalten. Die Idee ist, explizit eine Optimierung zu verwenden um Unterräume für den Approximationsraum auszuwählen.
Wie wir schon mehrfach bemerkt haben, ergibt sich z.B. für biorthogonale Wavelets aus der Gültigkeit der Normäquivalenz (2.26) und der Elliptizitätsbedingung (1.2) zusammen mit der lokalen Stabilität (2.12) die zweiseitige Abschätzung

$$a(u,u) \overset{(1.2)}{\simeq} \|u\|^2_{\mathcal{H}^s} \overset{(2.26)}{\simeq} \sum_{\mathbf{j}} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \overset{(2.12)}{\simeq} \sum_{\mathbf{j}} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \left(\sum_{m\in\tau_{\mathbf{j}}} \langle u, \tilde{\psi}_{\mathbf{jm}}\rangle^2 \right)$$

für $u = \sum_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}} \in \mathcal{H}^s, w_{\mathbf{j}} \in W_{\mathbf{j}}$. Dann ist der Beitrag des Unterraums $W_{\mathbf{j}}$ zu $a(u,u)$ beschränkt durch $M_{\mathbf{j}} \cdot C$, mit

$$M_{\mathbf{j}} \;:=\; 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \simeq 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \sum_{\mathbf{m}\in\tau_{\mathbf{j}}} \langle u, \tilde{\psi}_{\mathbf{jm}}\rangle^2.$$

Zusammen mit einer oberen Abschätzung für $\|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2}$ oder für die Koeffizienten $\langle u, \tilde{\psi}_{\mathbf{jm}}\rangle$, vgl. Abschnitt 2.2 und (3.18), kann die resultierende obere Abschätzung für $M_{\mathbf{j}}$ als ein Maß für den Profit an Approximationskraft angesehen werden der gewonnen wird wenn $W_{\mathbf{j}}$ in den Approximationsraum aufgenommen wird. Andererseits erhöht die Aufnahme des Unterraums $W_{\mathbf{j}}$ in den Approximationsraum den Aufwand. Das einfachste Maß für diese Kosten ist die Dimension des Unterraums $W_{\mathbf{j}}$. Die Aufgabe ist es nun, diejenigen Unterräume $W_{\mathbf{j}}$ auszuwählen, für die bei vorgegebener Dimension b des Approximationsraumes der Approximationsfehler minimal wird (oder umgekehrt). Mittels zum Beispiel eines Optimierungsverfahrens [Bun99] ergibt sich nun, daß die beste Auswahl der Unterräume dadurch getroffen werden kann, daß man die Abschätzungen von $\gamma_{\mathbf{j}} := \frac{M_{\mathbf{j}}}{|W_{\mathbf{j}}|}$ der Größe nach ordnet und die jeweils Größten auswählt.
Man sieht dies, indem man das Problem umformuliert in ein klassisches Knapsackproblem. Beschränkt man den Bereich der Unterräume $W_{\mathbf{j}}$ auf $|\mathbf{j}|_\infty \leq J$ für eine ganze Zahl J und ordnet man die möglichen Indizes $\mathbf{j}$ in irgendeiner linearen Ordnung, dann lautet das Optimierungsproblem wie folgt:

Finde einen binären Vektor $y \in \{0,1\}^{n\times J}$ so daß

$$\sum_{|\mathbf{j}|_\infty \leq J} M_{\mathbf{j}} \cdot y_{\mathbf{j}} \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \sum_{|\mathbf{j}|_\infty \leq J} |W_{\mathbf{j}}| \cdot y_{\mathbf{j}} \leq b$$

maximal ist.

Der binäre Array y zeigt an, welche Unterräume in den Approximationsraum aufgenommen werden. Unglücklicherweise ist so ein Knapsackproblem NP-vollständig. Dies ändert sich jedoch, wenn man stattdessen erlaubt, daß der Array y rationale Einträge in $([0,1] \cap \mathbb{Q})^{n\times J}$ annehmen kann. Die Lösung des Problems erhält man dann durch folgenden Algorithmus [Mar90]:

1. Ordne die Menge der möglichen Indizes in einer linearen Ordnung, so daß die Werte von $\{M_{\mathbf{j}}/|W_{\mathbf{j}}|\}_{\mathbf{j}}$ abnehmen,
$$\frac{M_{\mathbf{i}_1}}{|W_{\mathbf{i}_1}|} \geq \frac{M_{\mathbf{i}_2}}{|W_{\mathbf{i}_2}|} \geq \cdots .$$

2. Sei $M := \max\{i : \sum_{k=1}^{i} |W_{\mathbf{j}_k}| \leq b\}$.

3. Die Lösung des rationalen Knapsackproblems ist gegeben durch
$$\begin{aligned} y_1 &= \cdots = y_M = 1; \\ y_{M+1} &= \frac{b - \sum_{i=1}^{M} |W_{\mathbf{j}_i}|}{|W_{\mathbf{j}_{M+1}}|}; \\ y_{M+2} &= y_{M+3} = \cdots = 0; \end{aligned}$$

Der Wert von y_{M+1} liegt in $[0,1]$ und kann also rational sein. Die Lösung des rationalen Knapsackproblems ist damit im allgemeinen keine Lösung des binären Knapsackproblems. Wir besitzen jedoch noch die Freiheit, die Kosten b leicht zu verändern. Man kann dies so tun, daß y_{M+1} ein Element von $\{0,1\}$ ist. Dann ist y auch eine Lösung des zugehörigen binären Knapsackproblems. Wir verweisen auf [Bun99, Gri98a] für mehr Details und auf [Bun98] für eine kontinuierliches Analogon zu dieser diskreten Optimierung.
Zusammenfassend müssen also für ein optimales Gitter in diesem Sinne diejenigen Unterräume $W_{\mathbf{j}}$ in den Approximationsraum aufgenommen werden, deren $\gamma_{\mathbf{j}}$ größer als eine vorgegebene Schranke ist. Dieses Vorgehen entspricht dann der sogenannten N-Term Approximation [DeV98b]. Man beachte, daß die Optimierung mit oberen Schranken für die Größen $M_{\mathbf{j}}$ und nicht mit den exakten (aber unbekannten) Werten durchgeführt werden muß. Folglich sind die resultierenden Gitter und Räume nur in diesem eingeschränkten Sinne optimal. Man erhält (unter den gleichen Annahmen an die Glattheiten) die gleichen Approximationsräume V_J^T wie in Abschnitt 3.2.1. Analog lassen sich die Approximationsräume FV_d^T für die trigonometrischen Basen herleiten.

3.4 Anwendung: Approximation von Funktionen aus $\mathcal{H}_{mix}^{t,l}$

In den letzten Abschnitten haben wir Sequenzen von Approximationsräumen definiert, die sowohl das volle Gitter als auch das Dünne Gitter enthalten. Aus diesen Sequenzen lassen sich in Abhängigkeit der Problemstellung (insbesondere der Glattheitsannahmen) geeignete Approximationsräume auswählen. In diesem Abschnitt verwenden wir diese Approximationsräume zur Approximation von Funktionen.
Offensichtlich hängt die mit den Approximationsräumen V_J^T beziehungsweise FV_d^T erreichbare Approximationsordnung stark von den Glattheitsannahmen und der Wahl des Parameters T ab. Ein fairer Vergleich der Approximationseigenschaften dieser Räume muß sowohl die Approximationskraft (Theorem 3 und 4 beziehungsweise Theorem 5)

wie auch die Anzahl der Unbekannten (Lemma 1 beziehungsweise Lemma 2) berücksichtigen. Theorem 4 beziehungsweise 5 zeigen uns um welchen Faktor der Approximationsfehler reduziert wird, wenn vom Level J zum feineren Level $J+1$ gewechselt wird. Dieser Faktor ist jedoch unterschiedlich für verschiedene Räume V_J^T und zwar in Abhängigkeit des Parameters T. Zum Beispiel gilt für Vollgitter-Approximationsräume $dim(V_{J+1}^{-\infty})/dim(V_J^{-\infty}) = O(2^n)$, das heißt die Anzahl der Unbekannten verdoppelt sich, vgl. (3.36). Im Gegensatz dazu hat man für $T > 0$ die Beziehung $dim(V_{J+1}^T)/dim(V_J^T) = O(2)$. Das heißt, die Anzahl der Unbekannten erhöht sich nur um einen Faktor 2. Um also einen fairen Vergleich der Approximationseigenschaften von Approximationsräumen mit unterschiedlichem Parameter T zu erhalten, müssen sowohl die Fehlerabschätzungen wie auch die Anzahl der Unbekannten berücksichtigt werden.

Wir beginnen mit einer Diskussion für den Fall trigonometrischer Approximation – dies erspart uns die Beschränkungen bezüglich der Glattheitsparameter. Das folgende Korollar dient dazu herauszufinden wie viele Freiheitsgrade verwendet werden müssen um in Abhängigkeit der Glattheitsannahmen eine bestimmte vorgegebene Genauigkeit bei der Approximation mit den Räumen FV_d^T zu erreichen. Man beachte insbesondere den Fall $T = -\infty$ des Vollgitterraumes, bei dem die Anzahl der nötigen Gitterpunkte exponentiell von der Raumdimension abhängt, was diese Räume in höheren Raumdimensionen für numerische Zwecke unbrauchbar macht. Die Wahl $T = 0$ des "hyperbolisches Kreuz"-Approximationsraumes ist bis auf logarithmische Terme in allen Fällen optimal. Diese logarithmischen Terme können jedoch in den meisten Fällen durch eine geschickte Wahl des Approximationsraumes V_J^T entfernt werden. Als weitere wichtige Aussage zeigt das folgende Korollar in welchen Fällen die nötige Anzahl von Freiheitsgraden unabhängig ist von der Raumdimension n.

Korollar 1 *Seien $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $s < l + t$, $t \geq 0$, $u(x) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}x}, u \in \mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ und $u_d^T(x) = \sum_{\mathbf{k}\in FI_d^T} c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}x}$ dessen Approximation in FV_d^T, siehe (3.39). Falls $T \leq \frac{s-l}{t}$ gilt, dann ist die Anzahl der Elemente $\mathcal{N} = dim(FV_d^T)$ die nötig ist um $\|u - u_d^T\|_{\mathcal{H}^s} \leq \epsilon$ zu erhalten, beschränkt durch*

$$\mathcal{N} \leq \begin{cases} O\left(\epsilon^{\frac{1}{s-l-t}}\right) & \text{für } 0 < T, \\ O\left(\epsilon^{\frac{1}{s-l-t}} \cdot \ln(\epsilon^{-1})^{n-1}\right) & \text{für } T = 0, \\ O\left(\epsilon^{\frac{1}{s-l-t}\frac{T-1}{T-n}n}\right) & \text{für } -\infty < T < 0, \\ O\left(\epsilon^{\frac{n}{s-l-t}}\right) & \text{für } T = -\infty. \end{cases} \tag{3.49}$$

Falls $1 > T \geq \frac{s-l}{t}$ gilt, dann ist die Anzahl der Elemente $\mathcal{N} = dim(FV_d^T)$ die nötig ist um $\|u - u_d^T\|_{\mathcal{H}^s} \leq \epsilon$ zu erhalten, beschränkt durch

$$\mathcal{N} \leq \begin{cases} O\left(\epsilon^{\frac{1}{s-l-nt}\frac{n-T}{1-T}}\right) & \text{für } 0 < T, \\ O\left(\epsilon^{\frac{1}{s-l-nt}n} \cdot \ln(\epsilon^{-1})^{n-1}\right) & \text{für } T = 0, \\ O\left(\epsilon^{\frac{1}{s-l-nt}n}\right) & \text{für } -\infty < T < 0. \end{cases} \tag{3.50}$$

Beweis: Es bezeichne $\mathcal{N}$ die Anzahl der Freiheitsgrade im Approximationsraum FV_d^T. Dann folgt aus (3.42) zusammen mit (3.40)

$$\inf_{v \in FV_d^T} \|u - v\|_{\mathcal{H}^s}$$

$$\leq \begin{cases} O\left(\mathcal{N}^{s-l-t}\right) \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \text{für } 0 < T, T < \frac{s-l}{t}, \\ O\left(\mathcal{N}^{(s-l-nt)\frac{1-T}{n-T}}\right) \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \text{für } 0 < T, T \geq \frac{s-l}{t}, \\ O\left(\left(\frac{\mathcal{N}}{\ln(\mathcal{N})^{n-1}}\right)^{s-l-t}\right) \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \text{für } T = 0, T < \frac{s-l}{t}, \\ O\left(\left(\frac{\mathcal{N}}{\ln(\mathcal{N})^{n-1}}\right)^{\frac{s-l}{n}-t}\right) \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \text{für } T = 0, T \geq \frac{s-l}{t}, \\ O\left(\mathcal{N}^{\frac{s-l-t}{n}\cdot\frac{T-n}{T-1}}\right) \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \text{für } T < 0, T < \frac{s-l}{t}, \\ O\left(\mathcal{N}^{\frac{s-l}{n}-t}\right) \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \text{für } T < 0, T \geq \frac{s-l}{t}, \\ O\left(\mathcal{N}^{\frac{s-l-t}{n}}\right) \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} & \text{für } T = -\infty. \end{cases} \tag{3.51}$$

Beschränkt man die rechte Seite von (3.51) jeweils durch ϵ und löst nach $\mathcal{N}$ auf, so erhält man (3.49) und (3.50).
□

Man beachte, daß nur die Differenz $s - l$ (und nicht s oder l alleine) in diese Abschätzungen eingeht. Für andere stabile Zerlegungen gelten gemäß Theorem 3 die gleichen Abschätzungen, solange die Parameter sich innerhalb des Stabilitätsbereiches befinden. Gemäß Theorem 4 erhält man bei nicht stabilen Zerlegungen beziehungsweise falls $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ außerhalb des Stabilitätsbereiches der zugrundeliegenden Zerlegung liegt, in den Fällen $T \geq \frac{s-l}{t}$ jeweils einen zusätzlichen logarithmischen Term $\ln(\mathcal{N})^{n-1}$ im Vergleich zu (3.51) und damit auch zusätzliche logarithmische Terme in (3.49) und (3.50).
Wie bereits bemerkt, ersehen wir aus diesem Korollar, daß die Wahl $T = 0$ bis auf logarithmische Terme optimal ist. In den meisten Fällen können diese logarithmischen Terme jedoch durch eine andere Wahl von T entfernt werden. Außerdem zeigt das Korollar, daß im Fall $0 < T < \frac{s-l}{t}$ die Anzahl der Freiheitsgrade die benötigt wird um eine Approximation mit einem Fehler kleiner als ϵ zu erhalten, asymptotisch unabhängig ist von der Dimension n.
Wichtig ist an dieser Stelle noch die Bemerkung, daß der Aufwand für die Approximationsaufgaben für Funktionen aus $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ wie er sich aus dem Korollar ergibt, bis auf evenuelle logarithmische Terme optimal ist. Weitere Verbesserungen durch h- oder p-adaptive Methoden sind nur möglich, falls weitere Informationen über die zu approximierenden Funktionen vorliegen.
Visualisieren lassen sich die Implikationen von Korollar 1 indem man die negativen Exponenten in (3.51) – die ja unter Vernachlässigung eventueller logarithmischer Terme den jeweiligen Approximationsordnungen entsprechen – gegen den Parameter T für verschiedene Werte von n und unterschiedliche Glattheitsklassen $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ und Fehlernormen $\|.\|_{\mathcal{H}^s}$ aufzeichnet. Wir bezeichnen die negativen Exponenten mit order$_1$ =

$\mathrm{order}_1(s,l,t,T)$. Sie lauten

$$\mathrm{order}_1(s,l,t,T) \;=\; \begin{cases} t+l-s & \text{für } 0 \le T, T < \frac{s-l}{t}, \\ t+l-s-(Tt-s+l)\frac{n-1}{n-T} & \text{für } 0 \le T, T \ge \frac{s-l}{t}, \\ \frac{t+l-s}{n}\cdot\frac{T-n}{T-1} & \text{für } T \le 0, T < \frac{s-l}{t}, \\ t-\frac{s-l}{n} & \text{für } T \le 0, T \ge \frac{s-l}{t}, \\ \frac{t+l-s}{n} & \text{für } T = -\infty. \end{cases} \tag{3.52}$$

Die Größe order_1 entspricht dann – wie gesagt bis auf eventuelle logarithmische Terme – der Approximationsordnung bezüglich der Verfeinerungsrate 2. Bezüglich der Verfeinerungsrate 2^k sind die entsprechenden Größen gegeben durch $\mathrm{order}_k = k\cdot\mathrm{order}_1$. Eine Vergrößerung der Anzahl der Unbekannten um den Faktor 2^k führt dann in etwa zu einer Reduktion des Approximationsfehlers um einen Faktor $2^{-\mathrm{order}_k} = 2^{-k\cdot\mathrm{order}_1}$.
Die Abbildungen 3.11-3.16 zeigen einige Beispiele. Dort sind für verschiedene Werte der Glattheitsparameter t,l,s und verschiedene Raumdimensionen n jeweils order_1 beziehungsweise $\mathrm{order}_\mathrm{n}$ gegen T aufgetragen. Die Abbildungen zeigen die Abhängigkeit der Approximationsordnungen von den Parametern. Insbesondere ist zu erkennen, wann und in welchen Bereichen der Parameter die Approximationsordnungen unabhängig sind von der Raumdimension.
Wir diskutieren die in den Abbildungen dargestellten Beispiele etwas genauer. Es werden die Fälle $s \in \{-1/2, 0, 1\}$ zusammen mit den Glattheitsklassen $\mathcal{H}^{0,2}_{mix}, \mathcal{H}^{1,1}_{mix}$ und $\mathcal{H}^{2,0}_{mix}$ untersucht. Man beachte, daß $\mathcal{H}^{2,0}_{mix} \subset \mathcal{H}^{1,1}_{mix} \subset \mathcal{H}^{0,2}_{mix}$ gilt.
Als erstes betrachten wir die Glattheitsklasse $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^{0,2}_{mix}$ und $s = 1$, das heißt der Fehler der Approximation einer Funktion aus dem isotropen Sobolevraum $\mathcal{H}^2$ in FV_d^T wird in der $\mathcal{H}^1$-Norm gemessen. Wir erhalten aus (3.52)

$$\mathrm{order}_1(1,2,0,T) = \begin{cases} \frac{1-T}{n-T} & \text{für } 0 < T, \\ \frac{1}{n} & \text{für } T \le 0. \end{cases}$$

Abbildung 3.11 (links) zeigt order_1 gegen T für unterschiedliche Werte von n. Wir sehen, daß die Ordnung für $T \le 0$ unabhängig von T aber abhängig von der Dimension n ist. Dies zeigt den “Fluch der Dimension” für Probleme in isotropen Sobolevräumen in höheren Dimensionen. Für $0 < T$ verschlechtert sich die Ordnung mit zunehmendem T. Ähnliche Situationen ergeben sich bei diesen Glattheitsvoraussetzungen für andere Parameter von s, vergleiche die Abbildungen 3.12-3.13 (links).
Schränken wir die Klasse der betrachteten Funktionen ein auf die Glattheitsklasse $\mathcal{H}^{1,1}_{mix}$ (das heißt, $t = 1, l = 1$) dann erhalten wir die Resultate wie sie in den Abbildungen 3.11-3.13 (Mitte) dargestellt sind. Aus (3.52) ergibt sich dann für $s = 1$

$$\mathrm{order}_1(1,1,1,T) = \begin{cases} \frac{1-T}{n-T}n & \text{für } 0 < T, \\ \frac{T/n-1}{T-1} & \text{für } -\infty < T \le 0, \\ \frac{1}{n} & \text{für } T = -\infty. \end{cases}$$

Abbildung 3.11 (Mitte) zeigt, daß für $s = 1$ order_1 für alle Werte von T bis auf $T = 0$ von der Dimension n abhängig ist. Nach (3.51) ist für $T = 0$ die Abhängigkeit der

Konvergenzgeschwindigkeit von der Raumdimension logarithmisch (man beachte, daß eventuelle logarithmische Terme in order_1 nicht berücksichtigt werden.)
Für die Glattheitsklasse $\mathcal{H}^{2,0}_{mix}$ $(t = 2, l = 0)$, das heißt für Funktionen mit dominierender gemischter Ableitung, ändert sich die Situation wiederum. Wir erhalten

$$\mathrm{order}_1(1,0,2,T) = \begin{cases} 1 - (2T-1)\frac{n-1}{n-T} & \text{für } T \geq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{für } 0 \leq T \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{T/n-1}{T-1} & \text{für } T \leq 0, \\ \frac{1}{n} & \text{für } T - \infty. \end{cases}$$

Für $T < 0$ ist damit für $s = 1$ order_1 wieder von n abhängig, aber im Bereich $0 < T \leq 1/2$ ist die Ordnung von T und n unabhängig, vergleiche Abbildung 3.11 (rechts). Für $T > 1/2$ verschlechtert sich die Approximation wieder.
Die Abbildungen 3.12 und 3.13 zeigen die entsprechenden Graphen für die Fälle $s = 0$ und $s = -1/2$, respektive. Wiederum reduziert sich die Abhängigkeit der Ordnung von der Dimension n mit höherer Glattheit. Im Gegensatz zum Fall $s > 0$ verbleibt im Fall $s < 0$ eine leichte n-Abhängigkeit auch für den Fall dominierender gemischter Glattheit.
In Bezug auf den Verfeinerungsfaktor 2^n ist order_n als Approximation an die Approximationsordnung entscheidend. In den Abbildungen 3.14 und 3.15 ist jeweils order_n gegen T aufgetragen, für $s = 1$ bzw. $s = 0$, d.h. im Fall der $\mathcal{H}^1$-Norm und der $\mathcal{L}^2$-Norm. Die Approximationen mit FV_d^T-Räumen deren order_n höher ist als dasjenige der Vollgitterapproximation lassen sich dann als Verfahren höherer Ordnung ansehen. Zum Beispiel ergibt die Approximation von Funktionen aus $\mathcal{H}^2_{mix}$ mit $FV_d^T, T \in (0, 1/2)$ im Fall $s = 1$ die Approximationsordnung n, wohingegen das volle Gitter nur die Approximationsordnung 1 erreicht, vgl. Abbildung 3.14 rechts.
Abbildung 3.16 zeigt noch order_1 gegen T für verschiedene s im Fall $n = 10$. Sie verdeutlicht die Abhängigkeit der Approximationsordnung vom Parameter s.

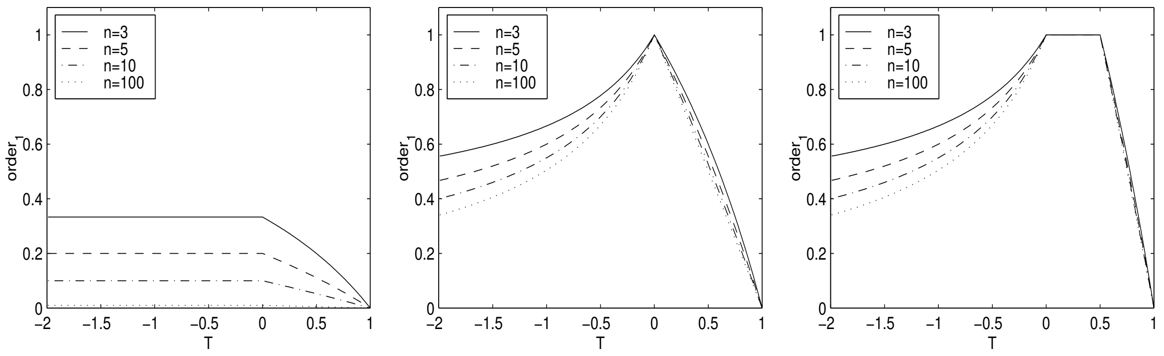


Abbildung 3.11: order_1 für $s = 1$ und die Räume $\mathcal{H}^{0,2}_{mix}$, $\mathcal{H}^{1,1}_{mix}$ und $\mathcal{H}^{2,0}_{mix}$ (von links nach rechts); Für den isotropen Sobolevraum $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^{0,2}_{mix}$ verschlechtert sich die Approximationsordnung mit zunehmender Dimension; Im Fall $\mathcal{H}^{2,0}_{mix}$ gibt es hingegen einen Bereich, in dem die Approximationsordnung unabhängig ist von der Dimension n.

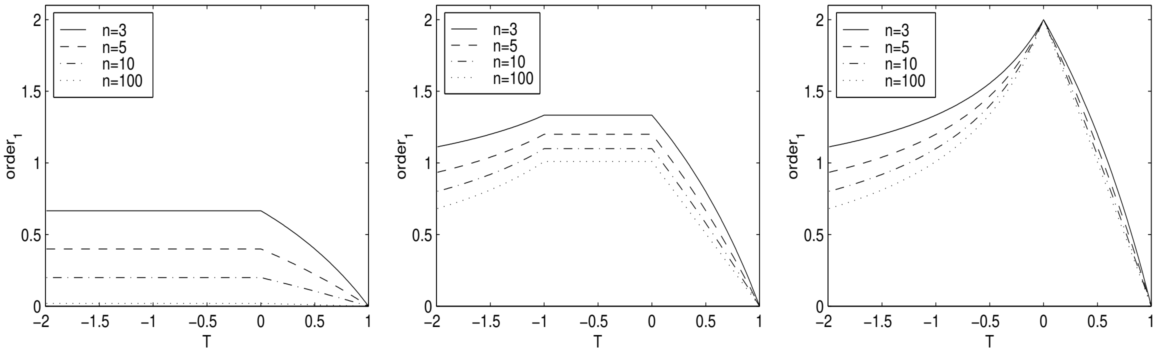


Abbildung 3.12: order$_1$ für $s = 0$ und die Räume $\mathcal{H}_{mix}^{0,2}$, $\mathcal{H}_{mix}^{1,1}$ und $\mathcal{H}_{mix}^{2,0}$ (von links nach rechts); für den Raum $\mathcal{H}_{mix}^{0,2}$ verschlechtert sich die Approximationsordnung mit zunehmender Dimension; Im Fall $\mathcal{H}_{mix}^{2,0}$ und $T = 0$ verbleibt nur eine logarithmische Abhängigkeit von n.

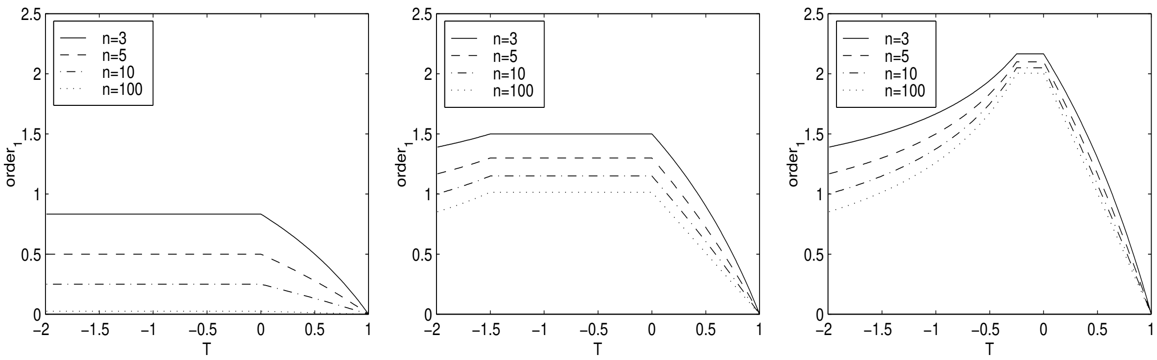


Abbildung 3.13: order$_1$ für $s = -\frac{1}{2}$ und die Räume $\mathcal{H}_{mix}^{0,2}$, $\mathcal{H}_{mix}^{1,1}$ und $\mathcal{H}_{mix}^{2,0}$ (von links nach rechts); In allen drei Fällen ist die Ordnung von der Dimension n abhängig. Für den Raum $\mathcal{H}_{mix}^{2,0}$ ist die Abhängigkeit jedoch im Vergleich zu dem Raum $\mathcal{H}_{mix}^{0,2}$ innerhalb eines bestimmten Bereiches von T drastisch verringert.

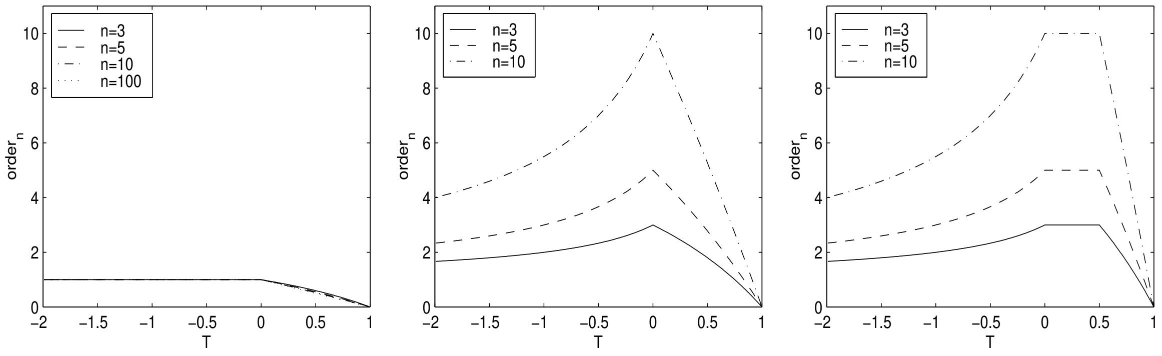


Abbildung 3.14: order$_n$ für $s = 1$ und die Räume $\mathcal{H}^{0,2}_{mix}$, $\mathcal{H}^{1,1}_{mix}$ und $\mathcal{H}^{2,0}_{mix}$ (von links nach rechts); Für die Räume $\mathcal{H}^{0,2}_{mix}$ gilt order$_n$ $= 1$ für $T \leq 0$. Für $\mathcal{H}^{1,1}_{mix}$ wird die höchste Ordnung n im Fall $T = 0$ erreicht. Für $\mathcal{H}^{2,0}_{mix}$ gibt es hingegen ein Intervall $[0, s/2] = [0, 1/2]$ in dem order$_n$ $= n$ ist. Folglich können die resultierenden Approximationsmethoden (innerhalb dieses Bereiches von T) als Verfahren höherer Ordnung angesehen werden.

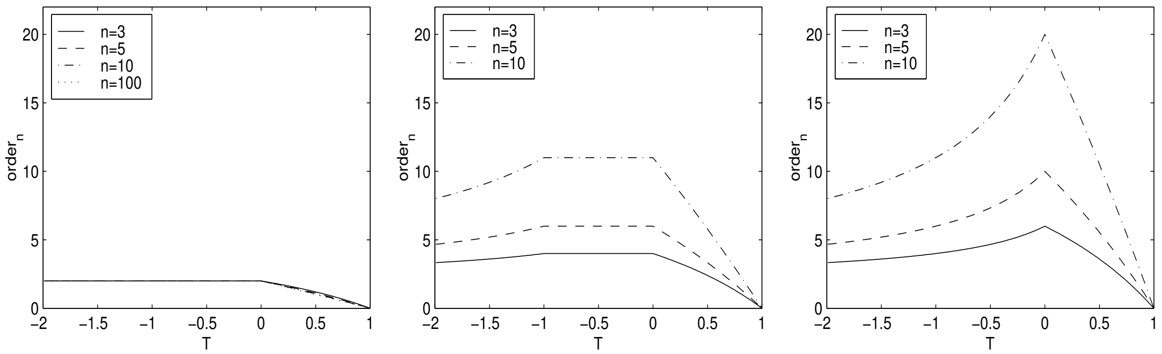


Abbildung 3.15: order$_n$ für $s = 0$ und die Räume $\mathcal{H}^{0,2}_{mix}$, $\mathcal{H}^{1,1}_{mix}$ und $\mathcal{H}^{2,0}_{mix}$ (von links nach rechts); Für $\mathcal{H}^{0,2}_{mix}$ und $T \leq 0$ ist order$_n$ unabhängig von T und der Dimension n. Für den Raum $\mathcal{H}^{2,0}_{mix}$ wird die höchste Approximationsordnung $(2n)$ bei $T = 0$ erreicht.

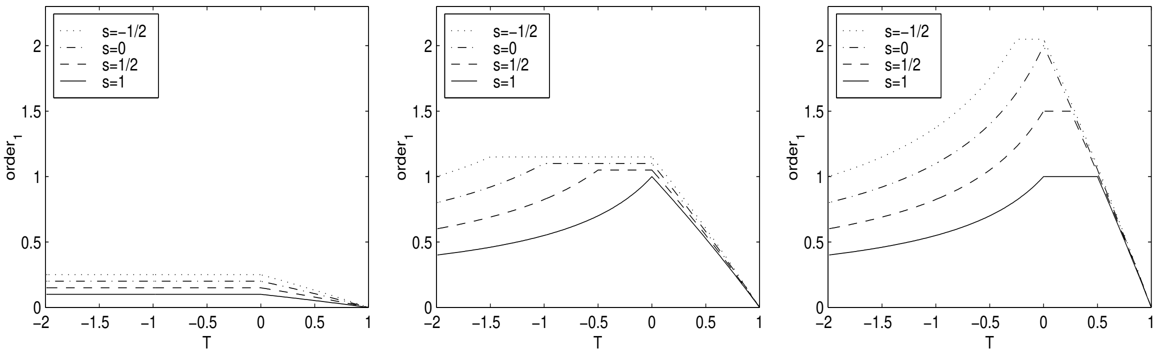


Abbildung 3.16: order$_1$ für verschiedene Werte von s und die Räume $\mathcal{H}^{0,2}_{mix}$, $\mathcal{H}^{1,1}_{mix}$ und $\mathcal{H}^{2,0}_{mix}$ (von links nach rechts) in $n = 10$ Dimensionen.

3.5 Anwendung: Lösen von Differential- und Integralgleichungen

In diesem Abschnitt verwenden wir unsere Approximationsräume zur Lösung von elliptischen Differential- und Integralgleichungen. Die Verwendung von Tensorprodukt-Approximationsräumen als Ansatz- und Testfunktionen für Galerkindiskretierungen bietet sich an bei variationellen Problemen in höheren Raumdimensionen. Beginnend bei den Blending Konstruktionen zur Lösung partieller Differentialgleichungen 2ter Ordnung in [Ca76] wurden in [Ze91, Bun92, Bal94, Gri95a, Do97, Ac97] umfangreiche numerische Untersuchungen zur Lösung der Laplace-Gleichung unter Verwendung der Räume V_J^0 als Finite Elemente Approximationsräume durchgeführt. Dabei wurden lineare Splines als Ansatzfunktionen verwendet. In [Gri95a] wurden Prewavelets benutzt und in [Bun98] findet man Beispielrechnungen für Finite Elemente mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung. Die Ergebnisse entsprechen jeweils den theoretischen Vorhersagen wie sie sich aus unseren Approximationsaussagen ergeben. Wir verzichten deswegen auf eine Wiederholung dieser Ergebnisse und verweisen stattdessen auf diese Arbeiten und Abschnitt 3.4. Bezüglich der Lösung der Poisson- bzw. der Konvektions-Diffusions-Gleichung wurden in [Bun92, Bal94, Zu00] adaptive Verfahren untersucht. Auch in der Fluiddynamik und der Quantenmechanik wurden die Räume V_J^0 zusammen mit multilinearen Splines zur numerischen Simulation eingesetzt. So findet man in [Gri95b] und [Kre97] Berechnungen von Strömungen und in [Hi94, Gar98] wird die stationäre Schrödingergleichung approximativ in höheren Dimensionen gelöst. Weiterhin finden sich in [Bal92] numerische Beispiele für die Helmholtz-Gleichung und in [Bal94, Ku97, Bal94] wurden Ergebnisse für parabolische und in [Gri98d] für hyperbolische Differentialgleichungen beschrieben. Berechnungen für die biharmonische Gleichung finden sich in [Sto95]. Bezüglich der Lösung von Integralgleichungen wird in [Gri98c] die Einfachschicht-Potentialgleichung betrachtet und mit Haar- beziehungsweise linearen Prewavelets und der Indexmenge I_J^0 diskretisiert und approximativ gelöst.
Wir widmen uns in diesem Abschnitt einigen weiteren theoretischen Aspekten der Lösung von Differential- und Integralgleichungen unter Verwendung unserer neuen Ap-

proximationsräume. So benötigt man zur Approximation der Lösungen variationeller Probleme nicht nur geeignete Approximationsräume, sondern auch schnelle Löser beziehungsweise ensprechende Vorkonditionierer für die entstehenden linearen Gleichungssysteme. Für eine Einführung in dieses Gebiet siehe zum Beispiel [Hac93, Hac85]. Deswegen werden wir uns kurz mit Vorkonditionierern für die sich aus der Diskretisierung von variationellen Problemen mittels des Galerkinansatzes und der Approximationsräume V_J^T ergebenden linearen Gleichungssysteme beschäftigen. Insbesondere betrachten wir einen Vorkonditionierer für das mit den Räumen V_J^T und multilinearen Tensorprodukt-Splines als Ansatzfunktionen diskretisierte Poisson-Problem. Damit erreicht man eine Kondition der Ordnung $O(J^{n-2})$. Wir untersuchen außerdem, ob sich mit Hilfe der Hierarchie der Approximationsräume V_J^T ein effizientes Mehrgitterverfahren für das Poisson-Problem bauen läßt und zeigen für welche Glattheitsklassen das Poisson-Problem sich mit einem Aufwand lösen läßt, der (asymptotisch) unabhängig von n ist.

3.5.1 Bemerkungen zu Vorkonditionierern und Mehrgitterverfahren

In diesem Abschnitt besprechen wir kurz die Konstruktion von Vorkonditionierern für variationelle Probleme des Typs (1.1) bei Galerkindiskretisierung mit den Räumen V_J^T. Außerdem zeigen wir, daß ein naiv aus einer Sequenz von Räumen V_J^T als Grobgitter-Approximationen für das volle Gitter aufgebautes Mehrgitterverfahren keine Konvergenzrate erzielen kann, die von der Maschenweite unabhängig ist.

Bemerkungen zu Vorkonditionierern Die Konvergenzgeschwindigkeit von gradientenorientierten iterativen Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $\mathcal{A}x = b$ mit symmetrischer Steifigkeitsmatrix $\mathcal{A}$ hängt von der Kondition der Matrix $\mathcal{A}$ ab. Entsteht das lineare Gleichungssystem aus der Finite Elemente Diskretisierung einer Variationsgleichung so ist die Kondition der Matrix im allgemeinen von der Feinheit der Diskretisierung, das heißt von der Anzahl der Elemente im Finite Elemente Approximationsraum abhängig. Die Idee bei der Vorkonditionierung eines linearen Gleichungssystems $\mathcal{A}x = b$ besteht nun darin, nicht direkt das ursprüngliche lineare Gleichungssystem zu lösen, sondern zum Beispiel $\mathcal{C}\mathcal{A}u = \mathcal{C}b$ mit einer invertierbaren Matrix $\mathcal{C}$ zu lösen. Die Matrix $\mathcal{C}$ sollte dabei so gebaut sein, daß für die Konditionen gilt $\kappa(\mathcal{C}\mathcal{A}) << \kappa(\mathcal{A})$. Außerdem sollte die Anwendung von $\mathcal{C}$ auf einen Vektor möglichst billig sein. Idealerweise sollte gelten, daß die Kondition der vorkonditionierten Matrix von der Feinheit der Diskretisierung unabhängig ist. Als Motivation für die Untersuchung von Vorkonditionierern soll dies an dieser Stelle genügen. Zu umfangreicheren Informationen zur Vorkonditionierung siehe zum Beispiel [Dah92, Os94].
Ist die Normäquivalenz (2.26) für die gewählte Multiskalenzerlegung erfüllt mit s aus (1.1) innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Normäquivalenz, so ergeben sich direkt optimale Vorkonditionier durch einfache Diagonalskalierung der Steifigkeitsmatrix, beziehungsweise äquivalent dazu, indem man das skalierte System $\{2^{-s|\mathbf{l}|_\infty}\psi_{\mathbf{lk}} : |\mathbf{l}|_\infty \leq J, \mathbf{k} \in \tau_\mathbf{l}\}$ als Basis im Finite Elemente Approximationsraum $V_J^{-\infty}$ verwendet. Dann ist die spektrale Kondition der Steifigkeitsmatrix $\mathcal{A}_J^{-\infty} = \{2^{-s(|\mathbf{l}|_\infty + |\mathbf{l}'|_\infty)} a(\psi_{\mathbf{lk}}, \psi_{\mathbf{l}'\mathbf{k}'})\}_{\mathbf{l},\mathbf{l}',\mathbf{k},\mathbf{k}'}$

uniform beschränkt in J, das heißt es gilt $\kappa(\mathcal{A}_J^{-\infty}) = O(1)$, siehe [Dah92, Ja92]. Dies führt dann zum Beispiel bei gradientenorientierten iterativen Verfahren zu Konvergenzraten die unabhängig sind von der Levelzahl J. Man beachte, daß dieses Resultat wegen $V_J^T \subset V_J^{-\infty}, T \in (-\infty, 1]$, trivial erweitert werden kann auf beliebige Approximationsräume V_J^T, da die Steifigkeitsmatrizen bzgl. dieser Approximationsräume Teilmatrizen von $\mathcal{A}_J^{-\infty}$ sind. Das heißt, für die diagonalskalierten Steifigkeitsmatrizen $\mathcal{A}_J^T = \{2^{-s(|\mathbf{l}|_\infty + |\mathbf{l}'|_\infty)} a(\psi_{\mathbf{lk}}, \psi_{\mathbf{l}'\mathbf{k}'})\}_{\mathbf{l}\in I_J^T, \mathbf{l}'\in I_J^T, \mathbf{k}\in\tau_\mathbf{l}, \mathbf{k}'\in\tau_{\mathbf{l}'}}$ gilt dann ebenfalls

$$\kappa(\mathcal{A}_J^T) = O(1).$$

Sind jedoch diese Normäquivalenzen nicht erfüllt, so müssen andere Konstruktionen verwendet werden um zumindest suboptimale Vorkonditionierung zu erreichen. Als Beispiel betrachten wir den Fall stückweise multilinearer Splines für $\mathcal{H}^1$-elliptische Probleme zusammen mit einer BPX-artigen Zerlegung, vergleiche [Bram90, Gri94a, Gri94b].

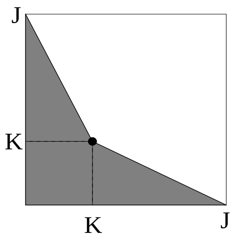
Im Fall der Diskretisierung der Poisson-Gleichung mit stückweise multilinearen Splines genügt eine einfache Diagonalskalierung der Steifigkeitsmatrix nicht, um eine von der Levelzahl unabhängige Kondition zu erhalten. So ergibt sich zum Beispiel im zweidimensionalen Fall nach Diagonalskalierung eine Kondition von $O(J2^{J/2})$ im Vollgitterfall, sie ist also exponentiell von der Anzahl der Level J abhängig [Gri94b]. Aber auch der BPX-artig vorkonditionierte Operator P_{BPX} entsprechend der Formel

$$P_{BPX}u = \sum_{\mathbf{j}\in I_J^T} \sum_{\mathbf{i}} \frac{a(u, \psi_{\mathbf{ji}})}{2^{2|\mathbf{j}|_\infty}(\psi_{\mathbf{ji}}, \psi_{\mathbf{ji}})_{\mathcal{L}^2}} \; \psi_{\mathbf{ji}}, \;\; u \in V_J^T,$$

mit $a(.,.)$ der Bilinearform aus der variationellen Formulierung des Poisson-Problems, besitzt keine von der Anzahl der Level unabhängige spektrale Kondition, wie dies für die Nicht-Tensorprodukt-Basis der Fall ist [Bram90]. So erhält man zum Beispiel in zwei Dimensionen eine Kondition von der Ordnung $O(J^2)$ für das volle Gitter [Gri94b]. Die Kondition läßt sich jedoch durch Ausblenden von Unterräumen noch etwas verbessern. Und zwar gilt, daß der Operator $\hat{P}_{BPX}$ gemäß

$$\begin{aligned} \hat{P}_{BPX}u &= \sum_{l=0}^{\lfloor K \rfloor} \sum_{\mathbf{i}} \frac{a(u, \psi_{(l,\ldots,l),\mathbf{i}})}{2^{2l}(\psi_{(l,\ldots,l),\mathbf{i}}, \psi_{(l,\ldots,l),\mathbf{i}})_{\mathcal{L}^2}} \; \psi_{(l,\ldots,l),\mathbf{i}} \\ &+ \sum_{l=\lceil K \rceil}^{J} \quad \sum_{\{\mathbf{j}\in I_J^T : \mathbf{j}+\mathbf{e}_i \notin I_J^T, 1\le i\le n \;\&\; |\mathbf{j}|_\infty = l\}} \quad \sum_{\mathbf{i}} \frac{a(u, \psi_{\mathbf{ji}})}{2^{2l}(\psi_{\mathbf{ji}}, \psi_{\mathbf{ji}})_{\mathcal{L}^2}} \; \psi_{\mathbf{ji}}, \;\; u \in V_J^T \end{aligned}$$

eine spektrale Kondition von $\kappa \le O(J^{n-2})$ besitzt für $T \in (-\infty, 1)$. Hierbei ist $K = \frac{J(1-T)+(n-1)}{n-T}$, vergleiche die folgende Abbildung.



Der Beweis ist eine einfache Verallgemeinerung des Beweises für den Fall V_J^0 in zwei Dimensionen aus [Gri94b] auf allgemeinere Approximationsräume und beliebige Raumdimensionen. Wir verzichten deswegen auf eine Darstellung.
Optimale Vorkonditionierung für Probleme mit $n > 2$ läßt sich mit Hilfe von Waveletvorkonditionierern (wie oben beschrieben) oder auch mit Mehrgitterverfahren erzielen. Dies wurde in [Gri94a, Pf98] für den Approximationsraum V_J^0 beschrieben und läßt sich analog für andere Parameter von T durchführen.

Eine Bemerkung zu multiplikativen Verfahren Für eine Einführung in das Gebiet der Mehrgitterverfahren siehe [Hac93]. Weiterführende Informationen finden sich zum Beispiel in [Hac85, Xu92, Ys92, Gri94a].
Die Sequenz von Räumen V_J^T beziehungsweise Gittern S_J^T (vgl. Abbildung 3.5) legt es nahe über ein Mehrgitterverfahren nachzudenken, bei dem eine Folge von Gittern $S_J^{T_1} \supset S_J^{T_2} \supset \dots$ aus dieser Sequenz als Grobgitter-Approximationen für das volle Gitter $S_J^{-\infty}$ gewählt wird. Folgende einfache Überlegungen machen jedoch deutlich, daß ein so aufgebautes Mehrgitterverfahren keine Konvergenzrate erzielen kann, die von der Maschenweite unabhängig ist.
Wir betrachten ein Zweilevel-Verfahren bestehend aus Glätten auf dem vollen Gitter $S_J^{-\infty}$ und Grobgitterkorrektur auf dem Dünnen Gitter S_J^0. Sei $\mathcal{A}$ die Matrix des mit zentralen Finiten Differenzensternen auf dem vollen Gitter diskretisierten Dirichlet Poisson-Problems auf dem Einheitsquadrat. Die Maschenweite der Diskretisierung sei $h := 1/2^J$ und es sei $N := 1/h$. Die Menge der inneren Gitterpunkte bezeichnen wir mit $\Omega_h := \{h \cdot \mathbf{i} : \mathbf{i} \in [1, N-1]^n\}$. Die Eigenfunktionen von $\mathcal{A}$ sind die Sinusfunktionen

$$e^{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = 2h \cdot \prod_{i=1}^{n} \sin(v_i \pi x_i), \ \ \mathbf{x} \in \Omega_h, \mathbf{v} \in [1, N-1]^n \tag{3.53}$$

und die Eigenwerte sind

$$\lambda_{\mathbf{v}} = \frac{4}{h^2} \sum_{i=1}^{n} \sin^2(v_i \pi h/2), \ \ \mathbf{v} \in [1, N-1]^n.$$

Hohe Frequenzwerte $\mathbf{v}$ entsprechen schnell oszillierenden Funktionen. Jede Gitterfunktion $\mathbf{u}$ auf dem vollen Gitter läßt sich in der Eigenvektorbasis (3.53) schreiben als $\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{v} \in [1,N-1]^n} \langle \mathbf{u}, e^{\mathbf{v}} \rangle e^{\mathbf{v}}$.
Wählt man als Iteration zur Lösung des diskreten Problems $\mathcal{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ die Richardson-Iteration $\mathbf{u^{m+1}} = \mathbf{u^m} - \theta(\mathcal{A}\mathbf{u^m} - \mathbf{b})$ mit $\theta = \frac{1}{4n} h^2 \simeq 1/\lambda_{max}(\mathcal{A})$, so ist die resultierende Konvergenzrate

$$\rho = 1 - \theta \lambda_{min}(\mathcal{A}) \simeq 1 - O(h^2).$$

Diese wird genau dann angenommen, wenn der Fehler $\mathbf{err^m} = \mathbf{u^m} - \mathbf{u}$ ein Vielfaches der Eigenfunktion $e^{\mathbf{1}}(\mathbf{x}) = 2h \cdot \prod_{i=1}^{n} \sin(\pi x_i)$ zur niedrigsten Frequenz ist. Für den Fall, daß der Fehler $\mathbf{err^m}$ nur aus hochoszillierenden Funktionen zusammengesetzt ist, also

$$\mathbf{err^m} \in X^{osz} := \operatorname{span}\{e^{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in [1, N-1]^n, \max_{1 \le i \le n}\{v_i\} > \frac{N}{k}\} \text{ mit } k \in \mathbb{N},$$

(mit k unabhängig von h) gilt, hat man hingegen, daß die Konvergenzrate des Richardson-Verfahrens von der Maschenweite h unabhängig ist, da für die Frequenzen $\lambda_{\mathbf{v}}$ der Funktionen in X^{osz} die Beziehung

$$\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2k}\right) < \lambda_{\mathbf{v}} \leq \lambda_{\mathbf{N-1}} < \frac{4n}{h^2}$$

gilt. Damit folgt die Beziehung

$$|1-\theta\lambda_{\mathbf{v}}| < 1 - C\sin^2\left(\frac{\pi}{2k}\right),$$

vergleiche [Hac93]. Die Konvergenzrate ist also nur von der Wahl des Parameters k, aber nicht von der Maschenweite h abhängig.
Diese Beobachtung führte zur Entwicklung der Mehrgittermethode, bei der die glatten Anteile des Fehlers durch die Grobgitterkorrektur und die hochfrequenten Anteile durch den Glätter ausgelöscht werden [Hac85]. Die Wahl des Grobgitters kann dabei allerdings nicht beliebig erfolgen, wie wir im folgenden sehen werden. Dazu betrachten wir ein Zweilevel-Verfahren bestehend aus Glättung auf dem feinsten Level und Grobgitterkorrektur auf dem Gitter S_J^0.
Aus (3.38) erkennt man, daß für die Frequenzen der Gitterfunktionen auf S_J^0 die Beziehung $\prod_{i=1}^n v_i < N$ gilt. Die Gitterfunktionen auf $S_J^{-\infty}$ die auf S_J^0 nicht dargestellt werden können, sind also in dem Raum

$$\bar{X}^{osz} := \mathrm{span}\{e^{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in [1, N-1]^n, \prod_{i=1}^n v_i \geq N\} \text{ mit } k \in \mathbb{N}.$$

Für Funktionen aus $\bar{X}^{osz}$ gilt die Abschätzung

$$\frac{4n}{h^2}\sin^2(\frac{\pi}{2}N^{1/n-1}) < \lambda_{\mathbf{v}} \leq \lambda_{\mathbf{N-1}} < \frac{4n}{h^2}$$

und folglich die Abschätzung der Konvergenzrate des Richardson-Verfahrens

$$|1-\theta\lambda_{\mathbf{v}}| < 1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}N^{1/n-1}) = 1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}h^{1-1/n}).$$

Diese wird genau dann angenommen, wenn der Fehler $\mathbf{err^m} = \mathbf{u^m} - \mathbf{u}$ ein Vielfaches der Eigenfunktion $e^{\mathbf{N}^{1/n}}(\mathbf{x}) = 2h\prod_{i=1}^n \sin(N^{1/n}\pi x_i)$ zur Frequenz $(N^{1/n}, \ldots, N^{1/n})$ ist. Für $h \to 0$ folgt dann

$$|1-\theta\lambda_{\mathbf{v}}| < 1 - O\left(h^{2(1-1/n)}\right).$$

Das heißt die Konvergenzrate des Richardson-Verfahrens auf dem Raum $\bar{X}^{osz}$ ist von der Maschenweite h und der Raumdimension n abhängig. Der Fehler der nach der Grobgitterkorrektur verbleibt, wird also vom Glätter nicht mit einer von der Maschenweite unabhängigen Konvergenzrate reduziert. Damit kann das Zweilevel-Verfahren das aus den Komponenten Glättung auf dem vollen Gitter und Grobgitterkorrektur auf dem Gitter S_J^0 besteht, ebenfalls zu keiner von der Maschenweite unabhängigen Konvergenz führen.

Eine analoge Überlegung für ein beliebiges Gitter $S_J^T, T \neq -\infty$, als Grobgitter zeigt, daß sich für keine feste Wahl von T eine maschenweitenunabhängige Konvergenz ergibt. Das heißt, im Gegensatz zur Hierarchie von Gittern der Art $S_{J_1}^{-\infty} \supset S_{J_2}^{-\infty} \supset \ldots$ die zum "normalen" Mehrgitterzyklus führt, ist eine Hierarchie von Gittern der Art $S_J^{-\infty} \supset S_J^{T_1} \supset S_J^{T_2} \supset \ldots$ zumindest auf diese Weise nicht zum Aufbau eines Mehrgitterverfahrens geeignet.

3.5.2 Kosten von Algorithmen zur approximativen Lösung

Jetzt betrachten wir die Kosten beim Lösen von elliptischen variationellen Problemen (1.1) bis zu einer vorgegebenen Genauigkeit, wobei der Fehler in der Energienorm gemessen wird. Abschätzungen in der Energienorm erhält man direkt aus Theorem 4 mittels der Bestapproximation der Finite Elemente Lösung, vgl. (1.5). Das heißt, die Abschätzungen von Theorem 4 lassen sich direkt in Fehlerabschätzungen in der Energienorm übertragen. Wir verwenden die Approximationsräume V_J^T zusammen mit optimalen Vorkonditionierern, wie sie sich aus den Normäquivalenzen von Abschnitt 2.3 ergeben.

Bei der Abschätzung der Kosten von Algorithmen zur Lösung solcher variationeller Probleme müssen zwei Fälle, nämlich Integral- und Differentialgleichungen, unterschieden werden. Im Fall von Integraloperatoren ist die resultierende Steifigkeitsmatrix $\mathcal{A}_J$ voll besetzt und hat daher $O(dim(V_{FE})^2)$ Einträge. Im Fall von Differentialoperatoren hingegen hat die Steifigkeitsmatrix

$$O\left(dim(V_{FE}) \ln \left(dim(V_{FE})\right)^n\right) \tag{3.54}$$

Einträge. Diese ist also viel dünner besiedelt als die Steifigkeitsmatrix von Integraloperatoren, aber trotzdem viel dichter besetzt als die gewöhnliche Finite Elemente Steifigkeitsmatrix aus der Diskretisierung mit nicht hierarchischen Basen. Dies beruht auf den größeren Trägern der hierarchischen Tensorprodukt-Funktionen auf gröberen Skalen. Jede effiziente Implementierung für Differentialoperatoren muß also das explizite Aufstellen der Steifigkeitsmatrix vermeiden. Stattdessen kann zumindest für Differentialoperatoren mit konstanten oder separablen Koeffizientenfunktionen, insbesondere für den Laplace-Operator, – wegen der Tensorproduktstruktur unserer Basen – die Anwendung der Steifigkeitsmatrix auf einen Vektor durch die Anwendung bestimmter dünnbesiedelter Matrizen ausgeführt werden. Dies wurde im Detail in [Bun92, Gri95a] für die Räume V_J^0 und die Vollgitterräume $V_J^{-\infty}$ beschrieben und kann leicht auf die hier vorliegende allgemeinere Situation mit variablem T erweitert werden. Dann ist die Matrix-Vektor-Multiplikation in $O(dim(V_{FE}))$ Operationen ausführbar. Das gleiche gilt für den Fall allgemeiner Koeffizientenfunktionen für den Approximationsraum $V_J^{-\infty}$. Die Implementierung des Matrix-Vektor-Produkts mit linearer Komplexität ist jedoch ziemlich kompliziert und im Falle adaptiv verfeinerter Gitter und Differentialoperatoren mit allgemeineren Koeffizientenfunktionen zusammen mit den Approximationsräumen $V_J^T \neq V_J^{-\infty}$ ist es unklar, ob das Matrix-Vektor-Produkt mit linearer Komplexität ausgeführt werden kann.

Wir nehmen an, daß der Vergleich von reellen Zahlen wie auch Standard arithmetische Operationen mit Einheitskosten ausgeführt werden können und daß die Einträge der

Steifigkeitsmatrix wie auch des Lastvektors mit ausreichender Genauigkeit berechnet worden sind.
Ist das vorgegebene lineare Gleichungssystem mit einem Aufwand lösbar, der linear ist in der Anzahl der Unbekannten, dann sind die Kosten um eine Approximation an die Lösung des variationellen Gleichungssystems bis auf die Genauigkeit ϵ zu berechnen von der Ordnung $O(J \cdot dim(V_{FE})^2)$ falls die Steifigkeitsmatrix dicht besetzt ist und $O(J \cdot dim(V_{FE}))$ falls das Matrix-Vektor-Produkt in $O(dim(V_{FE}))$ Operationen ausgeführt werden kann. Es ist möglich den J-Term in diesen Abschätzungen zu entfernen, wenn man ein geschachteltes Iterationsschema verwendet [Kro71]. Falls das Matrix-Vektor-Produkt in $O(dim(V_{FE}))$ Operationen ausgeführt werden kann und die Lösung in $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ liegt und die Voraussetzungen von Theorem 3 zutreffen, dann sind die Kosten zur Lösung eines $\mathcal{H}^s$-elliptischen variationellen Problems gegeben durch

$$\begin{array}{c|c|c} s > l & s = l & s < l \\ \hline O(\epsilon^{\frac{1}{s-l-t}}) & O\left(\epsilon^{-\frac{1}{t}} \left(\ln(\epsilon^{-1})\right)^{n-1}\right) & O(\epsilon^{\frac{1}{(s-l)/n-t}}) \end{array} \tag{3.55}$$

Diese Resultate sollten verglichen werden mit den $O(\epsilon^{\frac{n}{s-l-t}})$ Kosten für den Vollgitterfall. Falls die Steifigkeitsmatrix voll besetzt ist, das heißt sie hat $O(dim(V_{FE})^2)$ Einträge (wie im Fall von Integraloperatoren), dann müssen diese Resultate quadriert werden. In diesem Fall kann der Aufwand durch zusätzliche Kompression noch gesenkt werden [Dah93, DeV92], vgl. Kapitel 4. Falls statt Theorem 3 nur Theorem 4 angewendet werden kann (weil die Voraussetzungen von Theorem 3 nicht zutreffen, wie zum Beispiel im Fall einer nicht stabilen Zerlegung), dann treten im Fall $s \leq l$ zusätzliche logarithmische Terme auf.

3.5.3 Beispiel: Die Poisson-Gleichung

Als Beispiel zur Erläuterung der Ergebnisse des letzten Abschnitts betrachten wir nun die Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f \tag{3.56}$$

mit homogenen Dirichlet Randbedingungen in seiner variationellen Form auf $\mathcal{H}^1_0(I^n)$ mit $I^n = I \times \cdots \times I$ und $I = [0,1]$. Dann gilt $s = 1$ in (1.1). Die Glattheit der Lösung wird im vorliegenden Fall bestimmt durch die Glattheit der Daten (hier der rechten Seite).
Für dieses Beispiel müssen wir die Definition unserer (periodischen) Sobolevräume erweitern auf Sobolevräume auf Gebieten und wir müssen sie an die homogenen Randbedingungen anpassen. Wie bereits erwähnt, lassen sich Tensorprodukte von Sobolevräumen auf Gebieten analog zu den Sobolevräumen mit periodischen Randbedingungen als Schnitte von Tensorprodukten eindimensionaler Sobolevräume darstellen. Für homogene Randbedingungen genügt es zum Beispiel, für $t, l \geq 0$ die Räume $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}(I^n)$ wie in (2.7) als Schnitte von Tensorprodukten eindimensionaler Sobolevräume zu definieren, also $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}(I^n) := \mathcal{H}^{\mathbf{t1}+l\mathbf{e_1}}_{mix}(I^n) \cap \cdots \cap \mathcal{H}^{\mathbf{t1}+l\mathbf{e_n}}_{mix}(I^n)$ mit $\mathcal{H}^{\mathbf{k}}_{mix}(I^n) := \mathcal{H}^{k_1}(I) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}^{k_n}(I)$. Für eine breitere Darstellung siehe [Ho00].

Abbildung 3.17: Nodale Basisfunktion $\psi_{1,0}$ für das gröbste Level W_1 (links) und Randwavelet für den linken Rand für homogene Dirichlet Randbedingungen (rechts)

Es gilt das folgende Theorem, das die Glattheit der Lösung mit der Glattheit der rechten Seite verbindet.

Theorem 7 *Es sei $s = 1$, $t, l \in \mathbb{R}_0^n$, $f \in \mathcal{H}_{mix}^{t,l}(I^n)$, und es sei $u \in \mathcal{H}_0^1(I^n)$ die eindeutige Lösung des variationellen Problems (3.56). Dann ist $u \in \mathcal{H}_{mix}^{t,l+2}(I^n) \cap \mathcal{H}_0^1(I^n)$ und es gilt*

$$\|u\|_{\mathcal{H}_{mix}^{t,l+2}} \leq C \|f\|_{\mathcal{H}_{mix}^{t,l}}.$$

Zum Beweis verwendet man die Konvexität von I^n um aus $f \in \mathcal{L}^2(I^n)$ zu erhalten, daß $u \in \mathcal{H}_{mix}^{0,2}(I^n) = \mathcal{H}^2(I^n)$ und $\|u\|_{\mathcal{H}_{mix}^{0,2}} \leq C \cdot \|f\|_{\mathcal{L}^2}$ gelten. Partielle Integration zusammen mit der Tatsache, daß $C_0^\infty(I^n)$ dicht in $\mathcal{H}_{mix}^{t,l}(I^n) \cap \mathcal{H}_0^1(I^n)$ liegt, zeigt dann die Behauptung.

Aufwand zur Lösung der Poisson-Gleichung Optimale Löser für (3.56) lassen sich mittels Mehrgitterverfahren oder direkt via die Wahl geeigneter Vorkonditionierer konstruieren. Geeignete Kandidaten von Basen für dieses Problem, die insbesondere die Randbedingungen erfüllen, ergeben sich wegen des Tensorprodukt-Ansatzes aus dem eindimensionalen Fall. Ein Beispiel sind semi-orthogonale lineare Spline Wavelets (Prewavelets) auf uniformen dyadischen Gittern, wie sie in [Cu92] eingeführt wurden. Abbildung 2.1 zeigt ein Prewavelet im Inneren des Gebietes. Geeignete Randwavelets sind zu finden in [Au92, Coh93b, Gri95a], vgl. Abbildung 3.17. Die Basisfunktion für das gröbste Level ist die gewöhnliche nodale Basisfunktion. Das resultierende Multilevelsystem ist eine semi-orthogonale Riesz-Basis in $\mathcal{H}_0^1(I)$ und eine einfache Diagonalskalierung genügt um eine Kondition von $O(1)$ zu erhalten, vgl. [Gri95a].
Anstelle der Prewaveletbasis könnte man genauso stückweise lineare Splines zur Diskretisierung und die in [Bun99] vorgeschlagene Multilevelmethode als Löser für das entstehende lineare Gleichungssystem verwenden.
Eine Abschätzung des Aufwands zur Lösung von (3.56) für $u \in \mathcal{H}_{mix}^{2,0}(I^n) \cap \mathcal{H}_0^1(I^n)$ liegt vor in [Bun99]. Die Autoren konstruieren eine Finite Elemente Methode unter Verwendung von Tensorprodukten stückweise linearer Splines und Indexmengen die asymptotisch äquivalent sind zu $I_J^{2/5}$. Sie schlagen die Verwendung einer Multilevel

Methode zur Lösung des diskreten Systems vor. Die Gesamtkosten zur Lösung sind dann von der Ordnung

$$O(\epsilon^{-1}). \tag{3.57}$$

Dies beruht auf der Optimalität der vorgeschlagenen Multilevelmethode und der Tatsache daß gilt $T = \frac{2}{5} < \frac{s}{t} = \frac{1}{2}$. Dann ergibt sich direkt (3.57), da in diesem Fall das Produkt aus Steifigkeitsmatrix und Vektor mit einem Aufwand von $dim(I_J^{2/5}) = O(2^J)$ ausgeführt werden kann, vgl. (3.55).
Dieses Ergebnis kann, was die Glattheitsvoraussetzungen angeht, noch weiter verschärft werden. Es gilt folgendes Korollar aus dem wir das Resultat von [Bun99] als Spezialfall für $u \in \mathcal{H}^{2,0}_{mix}(I^n) \cap \mathcal{H}^1_0(I^n)$ erhalten.

Korollar 2 *Für die Lösung $u \in \mathcal{H}^1_0(I^n)$ der Poisson-Gleichung (3.56) mit homogenen Dirichlet Randbedingungen gelte $u \in \mathcal{H}^{1+\delta,1-\delta}_{mix}(I^n) \cap \mathcal{H}^1_0(I^n)$ mit $0 < \delta \leq 1$. Dann läßt sich die Lösung in der Energienorm bis auf eine Genauigkeit ϵ mit den Kosten $cost(\epsilon) = O(\epsilon^{-1})$ berechnen.*

Die Behauptung aus Korollar 2 folgt direkt aus (3.55) zusammen mit den darauffolgenden Bemerkungen. Denn die Beziehung $s = 1 > l = 1 - \delta$ ergibt nach (3.55) die Kosten $O(\epsilon^{\overline{s-l-t}}) = O(\epsilon^{\overline{1-(1-\delta)-(1+\delta)}}) = O(\epsilon^{-1})$.

Eine einfache $\mathcal{L}^2$-Norm Fehlerabschätzung für das Poisson-Problem Abschätzungen des Finite Elemente Fehlers in der Energienorm ergeben sich direkt aus der Bestapproximations-Eigenschaft der Finite Elemente Lösung und den Abschätzungen für den Approximationsfehler aus Abschnitt 3.2.2. Bezüglich der $\mathcal{L}^2$-Norm übertragen sich die Ergebnisse jedoch nicht mehr so einfach. Wir geben deswegen eine einfache $\mathcal{L}^2$-Norm Fehlerabschätzung für das Poisson-Problem auf dem Einheitsquadrat I^n zusammen mit homogenen Dirichlet Randbedingungen und Tensorprodukten stückweise linearer Splines als Basisfunktionen an, wie sie direkt aus Theorem 4 folgt. Insbesondere erhalten wir für den Fall V_J^0 eine Abschätzung aus [Pf95] zurück.

Korollar 3 *Für die Lösung u des Poisson-Problems (3.56) gelte $u \in \mathcal{H}^{t,l}_{mix}(I^n) \cap \mathcal{H}^1_0(I^n)$ mit $l + t = 2$. Es sei $u_J^T \in V_J^T$ die Finite Elemente Approximation von u, wobei V_J^T aus Tensorprodukten stückweise linearer Splines gebildet ist. Dann gilt*

$$\|u - u_J^T\|_{\mathcal{L}^2} \leq C \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} \cdot \begin{cases} O(2^{(-2+(Tt+l)\frac{n-1}{n-T})J} J^{n-1}) & \text{für } T \geq \frac{1-l}{t}, \\ O(2^{(-2+\frac{n-1}{n-T})J}) & \text{für } T < \frac{1-l}{t}. \end{cases} \tag{3.58}$$

Insbesondere gilt für $T = 0$ und $t > 1$

$$\|u - u_J^0\|_{\mathcal{L}^2} \leq C \cdot 2^{-(1+\frac{1}{n})J} \|u\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}}. \tag{3.59}$$

Beweis: Es sei w die Lösung des adjungierten Problems $a(w, v) = (u - u_J^T, v)\ \forall v \in H_0^1$ und w_J^T seine Finite Elemente Approximation im Raum V_J^T. Dann können wir folgern

$$\|u - u_J^T\|^2_{\mathcal{L}^2} = a(w, u - u_J^T) = a(w - w_J^T, u - u_J^T) \leq C\|u - u_J^T\|_{\mathcal{H}^1} \cdot \|w - w_J^T\|_{\mathcal{H}^1}. \tag{3.60}$$

Wegen der Konvexität des Einheitsaquadrats haben wir die Abschätzung $\|w\|_{\mathcal{H}^2} \leq C \cdot \|u - u_J^T\|_{\mathcal{L}^2}$. Wegen $V_K^{-\infty} \subset V_J^T$ für $K = \lfloor (1 - \frac{n-1}{n-T})J - \frac{n-1}{n-T} \rfloor$ gilt dann nach (3.19) $\|w - w_J^T\|_{\mathcal{H}^1} \leq O(2^{-K}) \cdot \|w\|_{\mathcal{H}^2} \leq O(2^{(-1+\frac{n-1}{n-T})J}) \cdot \|u - u_J^T\|_{\mathcal{L}^2}$. Setzt man nun diese Abschätzung und die Abschätzungen von $\|u - u_J^T\|_{\mathcal{H}^1}$ aus Theorem 4 in (3.60) ein, so erhält man (3.58) und als Spezialfall (3.59).
□

In [Bun92, Bun98] wurde numerisch beobachtet, daß sich der $\mathcal{L}^2$-Fehler der Finite Elemente Lösung in V_J^0 für $\mathcal{C}^\infty(I^n)$-Lösungen wie $O(2^{-2J}J^{n-1})$ verhält. Dies muß mit der schwächeren Abschätzung $O(2^{-(1+1/n)J})$ aus (3.59) verglichen werden. Aus der in obigem Beweis verwendeten Methode lassen sich wohl nicht direkt schärfe Abschätzungen herleiten. Dazu müßte die zusätzliche Glattheit in der Lösung w des adjungierten Problems verwendet werden. Man würde dann jedoch Abschätzungen des Typs $\|w\|_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}} \leq C \cdot \|u - u_J^T\|_{\mathcal{L}^2}$ (mit p, q entsprechend der Glattheit von w) benötigen. Solche Abschätzungen gelten jedoch im allgemeinen nur für $p = 0$.

Insgesamt haben wir in diesem Kapitel die Grundlagen für eine von der Glattheit der beteiligten Funktionen und den Normen abhängige Auswahl an Approximationsräumen gelegt. Unsere speziellen Konstruktionen von Indexmengen erlauben nun eine vollständig dem Problem angepaßte Wahl von Approximationsräumen für die Approximation von Funktionen wie auch die Diskretisierung von elliptischen Differential- und Integralgleichungen auf einfachen Geometrien. Insbesondere liegen nun Fehlerabschätzungen für beliebige $\mathcal{H}^s$-Normen, $s \in \mathbb{R}$, vor und wir konnten Abschätzungen für den Aufwand zur Lösung von Integral- und Differentialgleichungen angeben. In Extremfällen sind dann Approximationen möglich, bei denen der Einfluß der Dimension n asymptotisch vollständig verschwindet. Weiterhin konnten wir zeigen, daß die bei Verwendung der Approximationsräume V_J^0 auftretenden logarithmischen Terme in den Komplexitätsabschätzungen durch eine geschickte Wahl des Approximationsraumes entfernt werden können. Außerdem haben wir gesehen, daß sich die Funktionen aus den Räumen V_J^T mittels Blending-Schemata darstellen lassen. Dies erlaubt dann zum Beispiel die einfache Verwendung von Multilevel-Methoden zur Interpolation auf den Gitterpunktmengen S_J^T. Numerische Beispiele finden sich in Abschnitt 5.1 und in Abschnitt 5.2.

4 Approximation und Kompression von Integraloperatoren

Im letzten Kapitel haben wir uns mit der Auswahl von Tensorprodukt-Approximationsräumen zur Approximation von Funktionen beschäftigt. Abhängig von der Glattheit dieser Funktionen konnten wir Räume wählen und diese dann zum Beispiel zur Interpolation oder als Ansatz- und Testräume in einem Galerkinverfahren zur Diskretisierung von Differential- und Integralgleichungen verwenden. Wie bereits in Kapitel 1 angemerkt, tritt bei Problemen mit Integraloperatoren jedoch die zusätzliche Schwierigkeit auf, daß die resultierenden Steifigkeitsmatrizen im allgemeinen vollbesetzt sind und sich damit der Aufwand zur Lösung des zugehörigen Operatorproblems signifikant erhöht. Führen wir uns noch einmal die Problematik vor Augen. Diskretisiert man einen Integraloperator auf einem regulären vollen Gitter mit $O(2^{Jn})$ Unbekannten, so hat die resultierende Steifigkeitsmatrix im allgemeinen $O(2^{2Jn})$ Nicht-Null-Einträge und ist damit voll besetzt, vergleiche [Hac89a]. Dies steht im Gegensatz zu den nur schwach besetzten Steifigkeitsmatrizen bei der Diskretisierung von Differentialoperatoren und macht Matrix-Vektor-Multiplikationen – wie sie in iterativen Methoden ausgeführt werden müssen – schon für kleine Dimensionen ($n = 2$ oder 3) sehr teuer, vgl. auch Abschnitt 3.5. Mit unseren an die Glattheit der Lösung des betrachteten Problems angepaßten und im Vergleich zu den entsprechenden Vollgitter-Approximationsräumen verkleinerten Ansatzräumen sind diese Probleme zwar abgeschwächt, trotzdem sind die entstehenden Diskretisierungsmatrizen voll besetzt und der Aufwand ist entsprechend erhöht.
In diesem Kapitel beschäftigen wir uns deswegen mit weiteren Approximations- und Kompressionsstrategien für Integraloperatoren A der Form

$$h(x) = Au(x) = \int K(x,y)u(y)dy. \tag{4.1}$$

Als Beispiele betrachte man die in Kapitel 1 als Modellbeispiele angeführten Integralgleichungen.
Bisher haben wir, wie gesagt, bei der Diskretisierung von Problemen mit Integraloperatoren nur die Glattheit der Lösung des Problems ausgenutzt. Die Eigenschaften des Kerns gingen nur indirekt über die Abbildungseigenschaften des Integraloperators in unsere Überlegungen ein. Nun werden wir (zusätzlich) Eigenschaften des Kerns ausnutzen um die approximative Auswertung von (4.1) zu beschleunigen.
Die zwei von uns hier nun betrachteten Ansätze nutzen die folgenden (potentiellen) Eigenschaften des Kerns aus:

1. das Abklingverhalten des Kerns im physikalischen Raum

2. die Glattheit des Kerns, das heißt das Abklingverhalten in geeigneten Multiskalenräumen

Unter Kernen die "im physikalischen Raum abklingen" verstehen wir solche, für die ein Abklingverhalten für $x \neq y$ der folgenden Art gilt:

$$\exists\ C = C_{\alpha\beta} < \infty : \left|\partial_x^{\boldsymbol{\alpha}} \partial_y^{\boldsymbol{\beta}} K(x,y)\right| \leq C \cdot \left|x-y\right|^{-f(\alpha,\beta)}, f(\alpha,\beta) > 0. \qquad (4.2)$$

Dieser Fall tritt meist im Zusammenhang mit singulären Kernen auf [Hac89a], wobei sich die Singularität des Kerns auf der Diagonale, d.h. bei $x = y$ befindet, vgl. wiederum die Modellbeispiele in Kapitel 1. Abfallgesetze wie (4.2) gelten zum Beispiel für den Einfach- als auch den Doppelschicht-Potentialoperator, wie auch für klassische Differentialoperatoren [Schn98, Dah93]. In dieser Situation besteht die Möglichkeit solche Ansatz- und Testfunktionen zur Diskretisierung des Integraloperators A aus (4.1) zu verwenden, die dazu führen, daß viele Einträge in der Diskretisierungsmatrix des Operators nahe bei Null sind und deswegen durch Null ersetzt werden können ohne die Konsistenzordnung zu verschlechtern. Ein Beispiel für solche Basen sind biorthogonale Waveletbasen mit einer hinreichend hohen Zahl von verschwindenden Momenten. Um den Aufwand bei der Auswertung des Integrals (4.1) damit jedoch wirklich zu senken, dürfen diejenige Elemente der Steifigkeitsmatrix die zu Null gesetzt werden, nicht berechnet werden. Dies erfordert, daß diese Elemente a-priori identifiziert werden können. Dies gelingt indem man den Abfall des Kerns ausnutzt. Man erhält dann Abschätzungen über die absolute Größe der Einträge $\langle A\psi_{\mathbf{jk}}, \psi_{\mathbf{lm}}\rangle$ der Galerkin-Steifigkeitsmatrix durch Darstellung des Kerns in einer polynomialen Basis und Verwendung der Auslöschungseigenschaften der primalen Wavelets $\psi_{\mathbf{jk}}$.
Wie wir bereits angemerkt haben, wurde in [Bey92, Dah93, Dah94, Schn98] für Nicht-Tensorprodukt Wavelets auf einem vollen Gitter des Levels J gezeigt, daß diese Art von Kompression bei bestimmten Kernen so durchgeführt werden kann, daß die Anzahl der Einträge der Steifigkeitsmatrix nach Kompression nur noch von der Ordnung $O(J^k 2^{Jn})$ mit einem $k \in \mathbb{R}_0^+$ ist, im Gegensatz zu $O(2^{2Jn})$ Elementen für die unkomprimierte Steifigkeitsmatrix.
Wir werden hier diese Kompressionsstrategie in Bezug auf Tensorprodukt-Diskretisierungen untersuchen, und zwar nicht nur für Galerkin-Diskretisierungen bezüglich Vollgitter-Approximationsräumen, sondern auch bezüglich der von uns in Abschnitt 3.2 entwickelten Dünngitter-Approximationsräume und auch für die Glattheitsklassen $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$.

Die zweite von uns in diesem Kapitel betrachtete Strategie zur approximativen Auswertung von Integraloperatoren der Form (4.1) beruht darauf, den Kern in einer Tensorprodukt-Basis zu entwickeln und die Produktstruktur des Integranden in (4.1) zusammen mit den Glattheiten des Kerns K und der Funktion u dazu auszunutzen, geeignete Tensorprodukt-Approximationsräume zur Approximation des Kerns zu bestimmen. Dies geschieht in Analogie zur Herleitung der Räume V_J^T in Abschnitt 3.2. Bereits in [Pe89] wurden trigonometrische hyperbolische Kreuzapproximationsräume zur Approximation des Kerns von Fredholm-Integraloperatoren zusammen mit trigonometrischen Vollgitter-Approximationsräumen zur Approximation der Lösungen in Standard-Sobolevräumen $\mathcal{H}^t$ verwendet. In [Fr96] wurde dieses Verfahren durch eine Abänderung der hyperbolischen Kreuzapproximationsräume zur Approximation des Kerns noch verfeinert und es wurde eine Komplexität von $O(2^{Jn}J)$ für Fredholmsche Integralgleichungen 2ter Art mit Kernen und Inhomogenitäten in isotropen Sobolevräumen gezeigt. In [Fr95] wurden zur Approximation von Lösungen in $\mathcal{H}^t_{mix}$-Räumen

trigonometrische hyperbolische Kreuzapproximationsräume auch zur Approximation der Lösung verwendet. Wir verallgemeinern diese Techniken auf andere Sobolevnormen und auf unsere allgemeineren Glattheitsannahmen.
Es sei darauf hingewiesen, daß diese Art der Kernapproximation nur für Kerne mit hinreichend großer Regularität durchführbar ist, also im allgemeinen nicht für singuläre Kerne. Wir werden als Glattheitsmaße wieder die in Kapitel 2 eingeführten Räume $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ verwenden.
In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf Tensorprodukt-Approximationsräume. Daher stellt sich die Frage, inwieweit der Einsatz von Tensorprodukt-Basen die Wirksamkeit dieser beiden Vorgehensweisen beeinflußt. Bei der Kompression der Steifigkeitsmatrix nach der ersten Strategie, d.h. bei der Kompression die das Abklingens des Kerns nach (4.2) ausnutzt, treten Unterschiede zum Nicht-Tensorprodukt-Ansatz an zwei Punkten auf: bei den verschwindenden Momenten, da Tensorprodukt-Wavelets verschwindende Momente in jede Koordinatenrichtung besitzen; bei der Interaktion zwischen verschiedenen Skalen, die bei Tensorprodukt-Ansatzfunktionen bedeutend zahlreicher sind, da die Träger der Basisfunktionen im allgemeinen unterschiedlich groß sind in verschiedene Koordinatenrichtungen; Die wesentlichen Ideen sind jedoch bei diesem Ansatz unabhängig von der Tensorprodukt-Form der Basen. Bei der Approximation von (4.1) durch Kernapproximation bei glatten Kernen hingegen ist der Tensorprodukt-Ansatz fundamental. Die Entwicklung des Kerns in einer Tensorprodukt-Basis zusammen mit der Tensorprodukt-Basis für die Funktion u aus (4.1) sind notwendig, um geeignete Unterräume zur Approximation des Kerns auswählen zu können. In beiden Fällen erlaubt der Tensorprodukt-Ansatz jedoch die Verwendung von Dünngitterkonstruktionen mit ihren Vorteilen für Probleme in höheren Raumdimensionen.
Andere Techniken zur Verringerung des Aufwands bei der Lösung von Integralgleichungen finden sich in den Multipol-Verfahren und den Panel-Clustering-Verfahren [Gre87, Hac89b]. Diese Techniken beruhen ebenfalls darauf, daß Matrix-Vektor-Multiplikationen approximativ ausgeführt werden können. Dazu bedient man sich geometrischen und analytischen Überlegungen um eine Approximation des Kerns durchzuführen, und es werden schnelle Summationsverfahren eingesetzt. Ansätze die mit den Panel-Clustering-Verfahren verwandt sind, aber mehr auf der Analyse von Matrizen basieren finden sich zum Beispiel in [Hac99] und in [Gore97]. Der mit sogenannten $\mathcal{H}$-Matrizen arbeitende Ansatz aus [Hac99] erlaubt es sogar Matrix-Matrix-Multiplikationen mit fast linearem Aufwand auszuführen. Für eine mehr gitterbasierte Sichtweise auf die Lösung von Integralgleichungen zusammen mit Multilevelmethoden siehe z.B. [Bran90] für Approximation auf uniformen Gittern, bzw. [Bran98] für die Verwendung von lokal verfeinerten Gittern.
Wir gehen im folgenden davon aus, daß wieder eine biorthogonale univariate Multiskalenzerlegung gegeben ist, vgl. Abschnitt 2.2. Wir verwenden weiterhin die dort eingeführten Bezeichungen. Man beachte, daß die im folgenden dargestellten Techniken nicht auf den Fall von Problemen auf dem Torus beschränkt sind, sondern für andere Randbedingungen durchgeführt werden können, insofern diese durch Tensorprodukt-Konstruktionen ermöglicht werden können. Dies erfordert nur die Konstruktion entsprechender eindimensionaler Waveletzerlegungen.

Im folgenden seien der Kern K und u aus (4.1) Elemente von $\mathcal{L}^2$. Dann läßt sich der Kern in der dualen Tensorprodukt-Basis darstellen,

$$K(x,y) \;=\; \sum_{(\mathbf{j},\mathbf{k})\in\mathbb{N}^{2n}} \sum_{(\mathbf{l},\mathbf{m})\in\tau_{\mathbf{jk}}} a_{\mathbf{jklm}} \tilde{\psi}_{\mathbf{jl}}(x)\tilde{\psi}_{\mathbf{km}}(y) \tag{4.3}$$

und u läßt sich in der primalen Basis darstellen,

$$u(x) \;=\; \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^n} \sum_{\mathbf{l}\in\tau_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{jl}}\psi_{\mathbf{jl}}(x), \tag{4.4}$$

wobei $\psi_{\mathbf{jl}}$ bzw. $\tilde{\psi}_{\mathbf{jl}}$ wieder Tensorprodukte aus jeweils n eindimensionalen Basisfunktionen bezeichnen. Hierbei gelten nach (2.17) die Beziehungen $a_{\mathbf{jklm}} = \langle K, \psi_{\mathbf{jl}}(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{km}}(\mathbf{y})\rangle = \langle A\psi_{\mathbf{jl}}, \psi_{\mathbf{km}}\rangle$ und $b_{\mathbf{jl}} = \langle u, \tilde{\psi}_{\mathbf{jl}}\rangle$.

4.1 Integralapproximation durch Kernapproximation

Wir wenden uns nun zuerst der Approximation des Integrals durch Kernapproximation zu. Dieser Ansatz läßt sich für hinreichend glatte Kerne ausführen. Wir leiten geeignete Kernapproximationen her und geben Fehlerabschätzungen und Abschätzungen für den daraus resultierenden Aufwand bei der Integralauswertung in Abhängigkeit der Glattheitsvoraussetzungen an. Weiterhin diskutieren wir wieder den Spezialfall trigonometrischer Approximation und wir geben einen Algorithmus zur Auswertung von (4.1) an, der Blending-Schemata verwendet.
Unser Ziel ist es, Approximationen der Koeffizienten $\bar{h}_{\mathbf{jk}}$ des Ergebnisses der Integralauswertung

$$h(x) = Au(x) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^n} \sum_{\mathbf{k}\in\tau_{\mathbf{j}}} \bar{h}_{\mathbf{jk}}\tilde{\psi}_{\mathbf{jk}}(x) \tag{4.5}$$

auf möglichst effiziente Art und Weise zu berechnen. Um dies zu erreichen, definieren wir einen Kern K_J der sich aus dem ursprünglichen Kern K durch Tensorprodukt-Approximation ergibt. Für $J \in \mathbb{N}$ und eine vorgegebene Indexmenge $I_J \subset \mathbb{N}^{2n}$ mit $\max_{\mathbf{j}\in I_J}\{|\mathbf{j}|_\infty\} = J$ definieren wir

$$K_J(x,y) = \sum_{(\mathbf{j},\mathbf{k})\in I_J} \sum_{(\mathbf{l},\mathbf{m})\in\tau_{\mathbf{jk}}} a_{\mathbf{jklm}}\tilde{\psi}_{\mathbf{jl}}(x)\tilde{\psi}_{\mathbf{km}}(y). \tag{4.6}$$

Wir approximieren den Kern K also dadurch, daß wir alle Koeffizienten $a_{\mathbf{jklm}}$ mit $(\mathbf{j},\mathbf{k}) \notin I_J$ zu Null setzen. Der aus dem Kern K_J resultierende Integraloperator ist

$$A_J u(x) \;=\; \int K_J(x,y)\cdot u(y)dy. \tag{4.7}$$

Approximationen $h_{\mathbf{jl}}$ an die Koeffizienten aus (4.5) können dann berechnet werden aus

$$h_{\mathbf{jl}} = \sum_{\mathbf{k}:(\mathbf{j},\mathbf{k})\in I_J} \sum_{\mathbf{m}\in\tau_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{jklm}} b_{\mathbf{km}}. \tag{4.8}$$

Im folgenden geht es nun darum, die Indexmenge I_J geeignet zu wählen und den Fehler $\|(A-A_J)u\|_{\mathcal{H}^s}$ der Integralauswertung abzuschätzen.

4.1.1 Konstruktion optimaler Indexmengen und Fehlerabschätzung

Im folgenden Lemma wird der Fehler $\|(A-A_J)u\|_{\mathcal{H}^s}$ zwischen dem Integraloperator A aus (4.1) und seiner Approximation A_J aus (4.7) abgeschätzt.

Lemma 3 *Es sei eine eindimensionale biorthogonale Multiskalenbasis gegeben, so daß die Normäquivalenzen (2.26) und (2.29) erfüllt seien. Hierbei seien die Parameter $\tilde{r}, r$ aus (2.26) und (2.29) so, daß die Beziehungen $-\tilde{r} < s < r$, $p \in [0,r), p+q \in [0,r)$ und $t \in [0,\tilde{r}), t+l \in [0,\tilde{r})$ gelten. Weiterhin sei $(A_J - A_J^\epsilon)u \in \mathcal{H}^s, u \in \mathcal{H}^{p,q}_{mix}, K \in \mathcal{H}^{t,l}_{mix}$. Dann gilt*

$$\|(A-A_J)u\|_{\mathcal{H}^s} \le \max_{(\mathbf{j},\mathbf{k})\notin I_J} \left(2^{s|\mathbf{j}|_\infty - l|\mathbf{j},\mathbf{k}|_\infty - q|\mathbf{k}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1 - (t+p)|\mathbf{k}|_1}\right) \cdot \|K\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}}. \quad (4.9)$$

Beweis: Wir benutzen die Orthogonalitätsbeziehung zwischen den dualen und primalen Wavelets und die Gültigkeit der Normäquivalenzen (2.26) und (2.29). Es gilt

$$\begin{aligned}
\|(A-A_J)u\|^2_{\mathcal{H}^s} &= \Big\| \int \left(\sum_{(\mathbf{j},\mathbf{k})\notin I_J} \sum_{(\mathbf{l},\mathbf{m})\in\tau_{\mathbf{jk}}} a_{\mathbf{jklm}} \tilde{\psi}_{\mathbf{jl}}(x)\tilde{\psi}_{\mathbf{km}}(y) \right) \cdot \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{\mathbf{o}} \sum_{\mathbf{p}\in\tau_{\mathbf{o}}} b_{\mathbf{op}} \psi_{\mathbf{op}}(y) \right) dy \Big\|^2_{\mathcal{H}^s} \\
&= \Big\| \sum_{(\mathbf{j},\mathbf{k})\notin I_J} \sum_{(\mathbf{l},\mathbf{m})\in\tau_{\mathbf{jk}}} a_{\mathbf{jklm}} b_{\mathbf{km}} \tilde{\psi}_{\mathbf{jl}}(x) \Big\|^2_{\mathcal{H}^s} \\
&= \Big\| \sum_{\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{l}\in\tau_{\mathbf{j}}} \left(\sum_{\mathbf{k}:(\mathbf{j},\mathbf{k})\notin I_J} \sum_{\mathbf{m}\in\tau_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{jklm}} b_{\mathbf{km}} \right) \tilde{\psi}_{\mathbf{jl}}(x) \Big\|^2_{\mathcal{H}^s} \\
&\overset{(2.26)}{\simeq} \sum_{\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{l}\in\tau_{\mathbf{j}}} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \left(\sum_{\mathbf{k}:(\mathbf{j},\mathbf{k})\notin I_J} \sum_{\mathbf{m}\in\tau_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{jklm}} b_{\mathbf{km}} \right)^2 \\
&\le \max_{(\mathbf{j},\mathbf{k})\notin I_J} \left(2^{s|\mathbf{j}|_\infty - l|\mathbf{j},\mathbf{k}|_\infty - q|\mathbf{k}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1 - (t+p)|\mathbf{k}|_1}\right)^2 \\
&\qquad \cdot \sum_{\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{l}\in\tau_{\mathbf{j}}} \left(\sum_{\mathbf{k}:(\mathbf{j},\mathbf{k})\notin I_J} \sum_{\mathbf{m}\in\tau_{\mathbf{k}}} 2^{l|\mathbf{j},\mathbf{k}|_\infty + t|\mathbf{j},\mathbf{k}|_1} a_{\mathbf{jklm}} \cdot 2^{q|\mathbf{k}|_\infty + p|\mathbf{k}|_1} b_{\mathbf{km}} \right)^2 \\
&\le \max_{(\mathbf{j},\mathbf{k})\notin I_J} \left(2^{s|\mathbf{j}|_\infty - l|\mathbf{j},\mathbf{k}|_\infty - q|\mathbf{k}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1 - (t+p)|\mathbf{k}|_1}\right)^2 \\
&\qquad \cdot \sum_{\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{l}\in\tau_{\mathbf{j}}} \left(\sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{m}\in\tau_{\mathbf{k}}} 2^{2l|\mathbf{j},\mathbf{k}|_\infty + 2t|\mathbf{j},\mathbf{k}|_1} a^2_{\mathbf{jklm}} \right) \cdot \left(\sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{m}\in\tau_{\mathbf{k}}} 2^{2q|\mathbf{k}|_\infty + 2p|\mathbf{k}|_1} b^2_{\mathbf{km}} \right) \\
&\overset{(2.29)}{\simeq} \max_{(\mathbf{j},\mathbf{k})\notin I_J} \left(2^{s|\mathbf{j}|_\infty - l|\mathbf{j},\mathbf{k}|_\infty - q|\mathbf{k}|_\infty - t|\mathbf{j}|_1 - (t+p)|\mathbf{k}|_1}\right)^2 \cdot \|K\|^2_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} \cdot \|u\|^2_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.

□

Im Rest dieses Abschnitts nehmen wir an, daß die Beziehungen $l, t, p, q \geq 0$ und $l + t \geq s \geq -(p+q)$ gelten.
Verwenden wir nun in (4.9) für I_J die Indexmenge $\{(\mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \mathbb{N}^{2n} : |\mathbf{j}, \mathbf{k}|_\infty \leq J\}$ die zum Vollgitter-Approximationsraum gehört, dann erhalten wir

$$\|(A - A_J)u\|_{\mathcal{H}^s} \leq C \cdot 2^{(s-l-t)J} \cdot \|K\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}}. \tag{4.10}$$

Diese Indexmenge hat $O(2^{2nJ})$ Elemente und damit erfordert die Integralauswertung $O(2^{2nJ})$ Operationen. Die Produktstruktur des Integranden läßt sich allerdings nun ausnutzen, um geeignete (kleinere) Indexmengen für die Approximation des Kerns auszuwählen. Dies wurde zuerst in [Pe89] für den Fall $s = t = p = 0$ beobachtet und wird hier nun von uns verallgemeinert.
Analog zum Vorgehen in Kapitel 3 wählen wir nun wieder solche Indexmengen aus, für die im Vergleich zur Approximation des Kerns auf einem vollen Gitter kein Verlust an Approximationsgüte auftritt. So zeigt ein genauer Blick auf (4.9) beziehungsweise (4.10), daß man wieder Indizes aus der Vollgitterindexmenge entfernen kann, ohne daß sich die Approximationsordnung verschlechtert. Minimalen Aufwand bzgl. der $\mathcal{H}^s$-Norm bei der Approximation des Integrals hat man dann, wenn zu gegebenem Kern $K \in \mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ und $u \in \mathcal{H}^{p,q}_{mix}$ die Indexmenge für den Approximationsraum für K als die kleinste Indexmenge in $\mathbb{N}^{2n}$ gewählt wird, so daß die Approximationsordnung wie in (4.10) erhalten bleibt. Dies motiviert die folgende Definition von Indexmengen und Approximationsräumen.

Definition 3 *In Abhängigkeit von den Glattheitsparametern s, t, l, p, q definieren wir die Indexmengen*

$$\begin{aligned} G_J(s,t,l,p,q) \quad &= \{(\mathbf{j},\mathbf{k}) \in \mathbb{N}^{2n} : \\ &-s|\mathbf{j}|_\infty + l|\mathbf{j},\mathbf{k}|_\infty + t|\mathbf{j},\mathbf{k}|_1 + q|\mathbf{k}|_\infty + p|\mathbf{k}|_1 \leq (l+t-s)J\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

und die zugehörigen Approximationsräume

$$VG_J(s,t,l,p,q) := \operatorname{span}\{\tilde{\psi}_{\mathbf{jl}} \cdot \tilde{\psi}_{\mathbf{km}} : (\mathbf{j},\mathbf{k}) \in G_J(s,t,l,p,q) \;\&\; (\mathbf{l},\mathbf{m}) \in \tau_{\mathbf{jk}}\}. \tag{4.12}$$

Als Spezialfälle ergeben sich die Indexmengen zum vollen Gitter $\{(\mathbf{j},\mathbf{k}) : |\mathbf{j},\mathbf{k}|_\infty \leq J\}$ und zum hyperbolischen Kreuz $\{(\mathbf{j},\mathbf{k}) : |\mathbf{j},\mathbf{k}|_1 \leq J\}$, und zwar für $s = t = q = p = 0$, $l > 0$ beziehungsweise $s = l = q = p = 0$, $t > 0$ in (4.11). Das volle Gitter ist also in diesem Sinne optimal falls der Fehler bei der Integralauswertung in der $\mathcal{L}^2$-Norm gemessen wird und $K \in \mathcal{L}^2$ und $u \in \mathcal{H}^l$, $l > 0$, gilt. Das hyperbolische Kreuz hingegen ist optimal falls der Fehler in der $\mathcal{L}^2$-Norm gemessen wird und $K \in \mathcal{H}^t_{mix}$, $t > 0$, und $u \in \mathcal{L}^2$ gilt.
Man beachte, daß die Indexmenge für den Kern K auch direkt Indexmengen für die Approximation von u und h in (4.1) beziehungsweise deren Koeffizienten $b_{\mathbf{kl}}$ beziehungsweise $h_{\mathbf{jl}}$ bereitstellt, wie man aus (4.8) erkennen kann. Für h impliziert die Definition von G_J die optimale Indexmenge

$$\{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n : (\mathbf{j}, \mathbf{0}) \in G_J(s,t,l,p,q)\} = \{(l-s)|\mathbf{j}|_\infty + t|\mathbf{j}|_1 \leq (l+t-s)J\} \tag{4.13}$$

und für die Approximation von u erhalten wir die Indexmenge

$$\{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n : (\mathbf{0}, \mathbf{k}) \in G_J(s,t,l,p,q)\} = \{(l+q)|\mathbf{k}|_\infty + (t+p)|\mathbf{k}|_1 \leq (l+t-s)J\}. \quad (4.14)$$

Ein Vergleich von (4.13) mit (3.12) aus Abschnitt 3.2.1 zeigt, daß wir als Nebenprodukt der Kernapproximation die optimalen Indexmengen $I_J^{\frac{s-l}{t}}$ für die Approximation von Funktionen aus $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ wiedergewonnen haben.
Das folgende Theorem beschreibt die Approximationseigenschaften dieser neuen Approximationsräume.

Theorem 8 *Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $t+l \geq s > -(p+q)$ und seien A, u, h, A_J wie oben definiert, wobei wir nun*

$$K_J(x,y) = \sum_{(\mathbf{j},\mathbf{k}) \in G_J(s,t,l,p,q)} \sum_{(\mathbf{l},\mathbf{m}) \in \tau_{\mathbf{jk}}} a_{\mathbf{jklm}} \tilde{\psi}_{\mathbf{jl}}(x) \tilde{\psi}_{\mathbf{km}}(y)$$

wählen. Außerdem sei $h_J(x) = \sum_{\mathbf{j} \in I_J^{\frac{s-l}{t}}} \sum_{\mathbf{l} \in \tau_{\mathbf{j}}} h_{\mathbf{jl}} \tilde{\psi}_{\mathbf{jl}}(x)$ mit $h_{\mathbf{jl}} = \sum_{\mathbf{k}:(\mathbf{j},\mathbf{k}) \in G_J(s,t,l,p,q)} \sum_{\mathbf{m} \in \tau_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{jklm}} b_{\mathbf{km}}$. Dann gilt unter den Voraussetzungen von Lemma 3

$$\|h - h_J\|_{\mathcal{H}^s} \leq C \cdot 2^{(s-l-t)J} \cdot \|K\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}}. \quad (4.15)$$

Im Fall $t > 0$, d.h. für Kerne mit dominierender gemischter Glattheit, ist die Anzahl der Elemente $\mathcal{N}$ die nötig ist, um eine Approximation mit $\|h - h_J\|_{\mathcal{H}^s} \leq \epsilon$ zu erhalten, beschränkt durch

$$\mathcal{N} \leq \begin{cases} O(\epsilon^{\frac{1}{s-l-t}}) & \text{für } s-l > 0, \\ O(\epsilon^{\frac{1}{-t}} \ln(\epsilon^{-1})^{n-1}) & \text{für } s-l = 0, \\ O\left(\epsilon^{\frac{1}{\frac{s-l}{n}-t}}\right) & \text{für } s-l < 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

vergleiche (3.49). Im Fall isotroper Glattheit, d.h. $t = p = 0$, ist die Anzahl der Elemente $\mathcal{N}$ die nötig ist, um eine Approximation mit $\|h - h_J\|_{\mathcal{H}^s} \leq \epsilon$ zu erhalten, beschränkt durch

$$\mathcal{N} \leq \begin{cases} O(\epsilon^{\frac{n}{s-l}}) & \text{für } s-l+q > 0, \\ O(\epsilon^{\frac{n}{s-l}} \ln(\epsilon^{-1})) & \text{für } s-l+q = 0, \\ O\left(\epsilon^{\frac{2n}{s-l-q}}\right) & \text{für } s-l+q < 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Ungleichung (4.15) folgt direkt aus (4.9) und der Definition von G_J in (4.11). Zum Beweis von (4.16) und (4.17) berechnet man die Anzahl der Elemente in $VG_J(s,t,l,p,q)$. Diese erhält man wie schon im Beweis von Lemma 1 direkt aus allgemeineren Ergebnissen über Dimensionsabschätzungen in [Di83]. Dann nehme man an, daß die rechte Seite von (4.15) durch ϵ beschränkt ist, und kombiniere dies mit den Abschätzungen für die Anzahl der Elemente in $VG_J(s,t,l,p,q)$.

Ungleichung (4.15) zeigt, daß die Verwendung der Indexmenge $G_J(s,t,l,p,q)$ bei der Integralauswertung zum selben Fehler führt wie die Verwendung der Vollgitterindexmenge, vergleiche (4.10), obwohl in den meisten Fällen die Dimension von $G_J(s,t,l,p,q)$ bedeutend kleiner ist als die der Vollgitterindexmenge.
Ein Vergleich von (4.16) mit (3.49) zeigt, daß wir im Fall dominierender gemischter Glattheit für den Kern die bestmögliche Kompression erzielt haben. Im Fall isotroper Glattheit ($t = 0$) ist interessant, daß Dünngitterkonstruktionen besser zur Approximation geeignet sind als Volle Gitter, vergleiche auch [Pe88, Pe89] und [Fr96] für den Spezialfall $K \in \mathcal{H}^r(T^{2n})$, $u \in \mathcal{H}^r(T^n)$ und $s = 0$.

4.1.2 Blending-Schemata

Nachdem wir nun geeignete Indexmengen beziehungsweise Approximationsräume hergeleitet haben, kehren wir zu der Frage zurück wie der Ausdruck (4.8) zur Approximation des Integrals schnell ausgewertet werden kann. Gesucht sind also wiederum Datenstrukturen in denen sowohl die Indexmengen für die Koeffizientenvektoren $b_{\mathbf{jl}}$ und $h_{\mathbf{jl}}$ als auch die Koeffizienten $a_{\mathbf{jklm}}$ zur Approximation des Kerns effizient dargestellt werden können. An dieser Stelle erinnern wir uns an die Blending-Schemata aus Abschnitt 3.3.2 die wir dort zur Darstellung von Funktionen aus den Approximationsräumen V_J^T verwendet haben. Dort hatten wir bereits bemerkt, daß die Anwendung dieser Blending-Schemata nicht auf diese Indexmengen beschränkt ist. Wir können sowohl die $b_{\mathbf{jl}}$ wie auch die Koeffizienten $a_{\mathbf{jklm}}$ des Kerns via Blending-Schemata darstellen, das heißt die Koeffizienten lassen sich wieder aus Approximationen auf anisotropen Vollgitterräumen berechnen. Die Vorgehensweise für die Kernapproximation ist analog zu der in Abschnitt 3.3.2, nur daß nun die neuen Indexmengen eingesetzt werden müssen. Zusammen mit der Blending Darstellung von u wie in (3.45), kann dann (4.8) ausgewertet werden. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß auch diese Approximation von h mittels Blending-Schemata dargestellt werden kann.
Der folgende Algorithmus kann damit zur approximativen Auswertung von Integralausdrücken der Form (4.1) mit (hinreichend) glattem Kern K und (hinreichend) glatter Funktion u verwendet werden. Wir verwenden dabei Algorithmus 1 aus Abschnitt 3.3.2 um Approximationen von K und u zu bestimmen. Wir geben den Algorithmus unter Verwendung der Indexmengen $G_J(s,t,p,q)$ aus (4.11) an. Für andere Indexmengen als die durch G_J erzeugten läuft der Algorithmus analog ab.

Algorithmus 2 *(Integralauswertung unter Verwendung der Indexmengen G_J)*

1. *Berechne die Blending Darstellung der Interpolanten von K und u entsprechend Algorithmus 1. Für K verwende dazu die Indexmenge $G_J(s,t,l,p,q)$ aus (4.11) und für u verwende die Indexmenge $\{\mathbf{l} : (\mathbf{0},\mathbf{l}) \in G_J(s,t,l,p,q)\}$, vergleiche (4.14). Daraus ergeben sich die Koeffizienten $a_{\mathbf{jklm}}$ für die Approximation von K und $b_{\mathbf{jl}}$ für die Approximation von u.*

2. *Berechne die Koeffizienten $h_{\mathbf{jl}}, \mathbf{j} \in I_J^{\frac{s-l}{t}}, \mathbf{l} \in \tau_{\mathbf{j}}$ (vgl. (4.13)) der Approximation von h gemäß (4.8) unter Verwendung der Blending Darstellungen von K, u, h.*

Die Anzahl der Gitterpunkte die in diesem Algorithmus verwendet werden, ist von der Ordnung $O(dim(GV_J(s,t,l,p,q)))$. Dieser Algorithmus ist wieder in natürlicherweise dimensionrekursiv und kann daher direkt in beliebigen Dimensionen verwendet werden.

Insgesamt haben wir damit durch eine an die Glattheit von K und u angepaßte Wahl der Approximationsräume für den Kern den Aufwand bei der Integralauswertung im Vergleich zur Vollgitter-Approximation drastisch senken können. Insbesondere ist im Fall $s > l, t > 0$ der Aufwand zur Auswertung des Integrals damit asymptotisch von der Dimension n unabhängig.

4.1.3 Trigonometrische Approximation mit optimalen Indexmengen

Obiges Verfahren zur Approximation des Integrals (4.1) läßt sich natürlich in analoger Weise bei doppelt periodischen Kernen, periodischem u und dem Torus T^n als Integrationsgebiet auch mit trigonometrischen Funktionen und ohne dyadische Verfeinerung durchführen. Analog zu Lemma 3 gilt das folgende Lemma, das den Fehler zwischen dem Integraloperator A und seiner Approximation A_d abschätzt. Mit $\psi_{\mathbf{j}}$ bezeichnen wir dabei bezüglich $\mathcal{L}^2$ normierte trigonometrische Funktionen.

Lemma 4 *Es sei $u = \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}$, $K(x,y) = \sum_{\mathbf{jk}} a_{\mathbf{jk}}\psi_{\mathbf{j}}(x)\psi_{\mathbf{k}}(y)$ und es sei eine Kernapproximation $K_d(x,y) = \sum_{(\mathbf{j},\mathbf{k})\in FKI_d} a_{\mathbf{jk}}\psi_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})$ mit einer Indexmenge $FKI_d \subset \mathbb{Z}^{2n}$ gegeben. Der Operator A_d sei definiert durch $A_d u(x) = \int_{T^n} K_d(x,y)u(y)dy$. Es gelte $(A - A_d)u \in \mathcal{H}^s, s \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\|(A - A_d)u\|^2_{\mathcal{H}^s} \simeq \sum_{\mathbf{j}} (1 + |\mathbf{j}|_\infty)^{2s} \left(\sum_{\mathbf{k}:(\mathbf{j},\mathbf{k})\notin FKI_d} a_{\mathbf{jk}} b_{\mathbf{k}} \right)^2 . \tag{4.18}$$

Sind außerdem $u \in \mathcal{H}^{p,q}_{mix}(T^n)$ und $k \in \mathcal{H}^{t,l}_{mix}(T^{2n})$, mit $p,q,t,l \geq 0$, so gilt

$$\|(A - A_d)u\|_{\mathcal{H}^s} \leq C \cdot \left(\max_{FKI_d} \right) \cdot \|K\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}}, \tag{4.19}$$

mit

$$\begin{aligned} \max_{FKI_d} \; := \; \max_{(\mathbf{j},\mathbf{k})\notin FKI_d} \Bigg(& \frac{(1 + |\mathbf{j}|_\infty)^s}{(1 + |\mathbf{j},\mathbf{k}|_\infty)^l \left(\prod_{i=1}^n (1 + |j_i|)^t (1 + |k_i|)^t\right)} \\ & \frac{}{(1 + |\mathbf{k}|_\infty)^q \left(\prod_{i=1}^n (1 + |k_i|)^p\right)} \Bigg) . \end{aligned} \tag{4.20}$$

Der Beweis verläuft vollständig analog zum Beweis von Lemma 3, nur daß nun statt (2.26) und (2.29) die Beziehungen (2.4) und (2.3) verwendet werden.
Damit lassen sich wieder optimale Indexmengen zur Approximation des Kerns bestimmen. Unter der Voraussetzung $l,t,p,q \geq 0$ und $l + t \geq s \geq -(p+q)$ ergibt sich die optimale Indexmenge zu

$$\begin{aligned} FKI_d(s,t,l,p,q) \;=\; & \{(\mathbf{j},\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}^{2n} : (1 + |\mathbf{j}|_\infty)^{-s}(1 + |\mathbf{k}|_\infty)^q (1 + |\mathbf{j},\mathbf{k}|_\infty)^l \cdot \\ & \cdot \left(\prod_{i=1}^n (1 + |j_i|)^t (1 + |k_i|)^{t+p} \right) \leq (1+d)^{l+t-s} \}. \end{aligned}$$

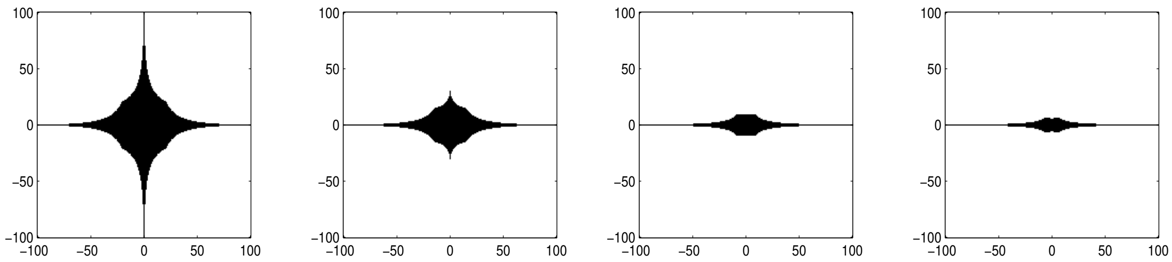


Abbildung 4.1: Indexmengen $FKI_{100}(s,0,t,0,t)$ für $s/t = -1, -0.5, 0, 0.2$ (von links nach rechts) im eindimensionalen Fall;

Der zugehörige trigonometrische Approximationsraum lautet $FKV_d(s,t,l,p,q) :=$ span $\{e^{-i\mathbf{jx}} \cdot e^{-i\mathbf{ky}} : (\mathbf{j},\mathbf{k}) \in FKI_d(s,t,l,p,q)\}$.
Die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen einige Indexmengen $FKI_d(s,0,t,0,t)$ bzw. $FKI_d(s,t,0,t,0)$ im eindimensionalen Fall für unterschiedliche Wahl von s und t. Man beachte, daß die resultierenden Indexmengen in diesem Fall nur von dem jeweiligen Quotienten s/t abhängen.
Die durch $FKI_d(s,t,l,p,q)$ implizit gegebenen Indexmengen für die Approximation von u bzw. h sind $\{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n : (\mathbf{0},\mathbf{k}) \in FKI_d(s,t,l,p,q)\}$ für u und $FI_d^{\frac{s-l}{t}} = \{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n : (\mathbf{j},\mathbf{0}) \in FKI_d(s,t,l,p,q)\}$ für h, vgl. (3.12).
Mit der Kernapproximation

$$K_d(x,y) = \sum_{(\mathbf{j},\mathbf{k}) \in FKI_d(s,t,l,p,q)} a_{\mathbf{jk}} \psi_{\mathbf{j}}(x) \psi_{\mathbf{k}}(y)$$

und $h_d(x) = \sum_{\mathbf{j} \in FI_d^{\frac{s-l}{t}}} h_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{j}}(x)$ mit $h_{\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{k}:(\mathbf{j},\mathbf{k}) \in FKI_d} a_{\mathbf{jk}} b_{\mathbf{k}}$ gilt dann

$$\|h - h_d\|_{\mathcal{H}^s} \leq C \cdot (1+d)^{s-l-t} \cdot \|K\|_{\mathcal{H}^{t,l}_{mix}} \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}},$$

d.h. es tritt kein Verlust an Approximationsgenauigkeit gegenüber der entsprechenden Vollgitter-Approximation auf. Die Anzahl der Elemente die nötig sind um eine bestimmte vorgegebene Genauigkeit der Approximation zu erreichen, ist wieder gegeben durch (4.16) und (4.17). Man zeigt dies wie in Theorem 8.

Unsere speziellen Konstruktionen von Indexmengen erlauben nun eine vollständig dem Problem angepaßte Wahl von Approximationsräumen für die Auswertung von Integralausdrücken beziehungsweise die Lösung von Integralproblemen mit hinreichend glatten Kernen auf einfachen Geometrien. Außerdem erlauben unsere Blending-Konstruktionen dimensionsrekursive Algorithmen mit einfachen Datenstrukturen, die ihrerseits wieder für die Verwendung von Multilevelmethoden wie der schnellen Fourier- beziehungsweise Wavelettransformation geeignet sind. Numerische Beispiele finden sich in Abschnitt 5.3.

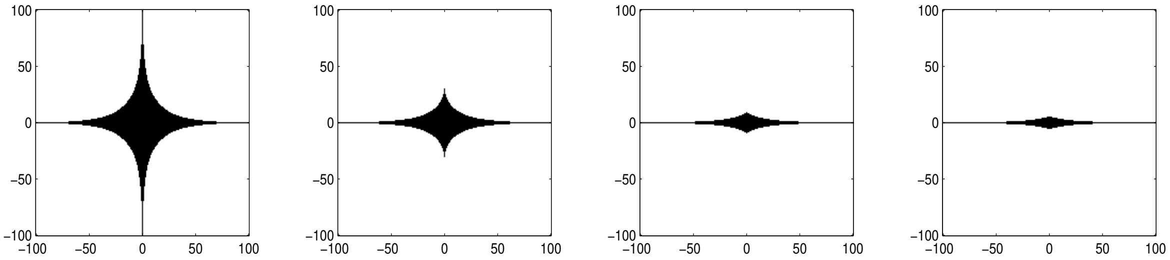


Abbildung 4.2: Indexmengen $FKI_{100}(s,t,0,t,0)$ für $s/t = -1, -0.5, 0, 0.2$ (von links nach rechts) im eindimensionalen Fall;

4.2 Kompression bei singulären Kernen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns nun mit der Kompression von Galerkindiskretisierungen des Integraloperators A aus (4.1), wobei wir nun für den Kern ein Abklingverhalten der Art (4.2) annehmen. Damit ist die folgende Diskussion insbesondere bei singulären Kernen anwendbar.
Für das Lösen von Integralgleichungen hatten wir bereits in Abschnitt 3.2.1 geeignete Ansatz- und Testräume aus Tensorproduktbasen hergeleitet. Die nun von uns in diesem Abschnitt betrachtete Kompressionstechnik besteht darin Einträge der Steifigkeitsmatrix $\mathcal{A}_J^T := \{\langle A\psi_{\mathbf{jl}}, \psi_{\mathbf{j'l'}}\rangle\}_{\mathbf{j}\in I_J^T, \mathbf{j'}\in I_J^T, \mathbf{l}\in\tau_{\mathbf{j}}, \mathbf{l'}\in\tau_{\mathbf{j'}}}$ (mit I_J^T wie in (3.12)) durch Null zu ersetzen ohne die Konsistenzordnung zu zerstören. Eine Verminderung des Aufwands bei der Anwendung des Integraloperators ergibt sich dann dadurch, daß diese Null-Einträge nicht berechnet werden und auch bei der Matrix-Vektor-Multiplikation nicht berücksichtigt werden. Das heißt, die Steifigkeitsmatrix $\mathcal{A}_J^T$ wird durch die Matrix $\mathcal{A}_J^{T,\epsilon}$, mit

$$(\mathcal{A}_J^{T,\epsilon})_{\mathbf{jklm}} = \begin{cases} (\mathcal{A}_J^T)_{\mathbf{jklm}} & \text{für } (\mathbf{j},\mathbf{k}) \in I_J^T \times I_J^T \text{ und } (\mathbf{l},\mathbf{m}) \in \tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon \\ 0 & \text{für } (\mathbf{j},\mathbf{k}) \in I_J^T \times I_J^T \text{ und } (\mathbf{l},\mathbf{m}) \notin \tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon \end{cases}$$

ersetzt, wobei $\tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon$ nun eine Teilmenge der Indexmenge $\tau_{\mathbf{jk}} = \tau_{\mathbf{j}} \times \tau_{\mathbf{k}}$ sei. Dabei setzen wir voraus, daß gilt: $(\mathbf{l},\mathbf{l}) \in \tau_{\mathbf{jj}}^\epsilon$ falls $(\mathbf{l},\mathbf{l}) \in \tau_{\mathbf{jj}}$. Das heißt, alle Einträge mit $\mathbf{j} \in I_J^T, \mathbf{k} \in I_J^T$ und $(\mathbf{l},\mathbf{m}) \notin \tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon$ werden zu Null gesetzt. Den aus dieser Kompression resultierenden eindlich dimensionalen Operator bezeichnen wir mit $A_J^{T,\epsilon}$.
Die entscheidene Frage ist nun, wie die Indexmengen $\tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon$ in Abhängigkeit der Indexmengen I_J^T und des Kerns K idealerweise gewählt werden sollten. Dabei werden wir uns von dem Gedanken leiten lassen, daß die Konsistenzordnung durch die Kompression nicht verschlechtert wird. Da sich der Gesamtfehler $\|(A - A_J^{T,\epsilon})u\|_{\mathcal{H}^s}$ der Approximation des Integraloperators gemäß

$$\|(A - A_J^{T,\epsilon})u\|_{\mathcal{H}^s} \leq \|(A - A_J^T)u\|_{\mathcal{H}^s} + \|(A_J^T - A_J^{T,\epsilon})u\|_{\mathcal{H}^s} \tag{4.21}$$

aufspalten läßt, suchen wir im folgenden Indexmengen $\tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon$ so daß $\|(A_J^T - A_J^{T,\epsilon})u\|_{\mathcal{H}^s}$ von der gleichen Größenordnung wie $\|(A - A_J^T)u\|_{\mathcal{H}^s}$ ist.

4.2.1 Grundlegende Abschätzungen

Threshholding der Steifigkeitsmatrix (d.h. einfaches Abschneiden kleiner Einträge in der Steifigkeitsmatrix deren Betrag kleiner als eine vorgegebene Schwelle ist) ist im allgemeinen nicht geeignet um die Ordnung des Aufwands zu senken, da dazu alle Matrixeinträge berechnet werden müßten. Um das explizite Berechnen von kleinen/irrelevanten Einträgen zu vermeiden, müssen Abschätzungen angegeben werden, die eine a-priori Identifizierung dieser Einträge ermöglichen. Solche Abschätzungen sind die Grundvoraussetzung für jeden effizienten Kompressionsalgorithmus der den Abfall des Kerns im physikalischen Raum ausnutzt, da sie die Bestimmung der relevanten Bänder in der Steifigkeitsmatrix ermöglichen, auf denen dann die Berechnungen stattfinden können.
Wir nehmen wiederum an, daß die eindimensionalen biorthogonalen Basisfunktionen ψ_{jk} skalierte und verschobene Versionen einer einzigen Skalierungsfunktion ψ_0 sind, vgl. (2.15). Außerdem sei ψ_0 lokal, das heißt $diam(supp(\psi_0)) \leq c$, und es gelte $\|\psi_0\|_{\mathcal{L}^2} = 1$ und damit

$$\|\psi_{jk}\|_{\mathcal{L}^2} = 1 \text{ und } diam(supp(\psi_{jk})) \leq c \cdot 2^{-j}. \tag{4.22}$$

Das folgende Theorem beinhaltet eine obere Abschätzung für die absolute Größe der $\langle A\psi_{\mathbf{lk}}, \psi_{\mathbf{l'k'}}\rangle$ im Fall von nichtüberlappenden Trägern der Funktionen $\psi_{\mathbf{lk}}, \psi_{\mathbf{l'k'}}$. Es zeigt, daß die Einträge umso kleiner sind je größer der Abstand der Träger von $\psi_{\mathbf{lk}}$ bzw. $\psi_{\mathbf{l'k'}}$ ist, und je höher die Skalen $\mathbf{l}, \mathbf{l'}$ der Funktionen sind. Die Rate des Abfalls mit zunehmendem Level hängt dabei von der Anzahl der verschwindenden Momente ab, vgl. (2.14).
Für entsprechende Abschätzungen für Nicht-Tensorprodukt-Basen siehe z.B. [Dah93, Schn98].
Mit $dist(supp(\psi_{\mathbf{lk}}), supp(\psi_{\mathbf{l'k'}})$ bezeichnen wir im folgenden den Abstand zwischen den Trägern von $\psi_{\mathbf{lk}}$ und $\psi_{\mathbf{l'k'}}$ im n-dimensionalen euklidischen Raum.

Theorem 9 *Wir nehmen an, daß die Tensorprodukt-Funktionen $\psi_{\mathbf{jk}}$ N verschwindende Momente besitzen (d.h. $\mathbf{N} = (N, \ldots, N)$ in (2.14)) und daß das Abklingverhalten des Kerns aus (4.2) gilt. Außerdem sei $dist(supp(\psi_{\mathbf{lk}}), supp(\psi_{\mathbf{l'k'}})) > 0$. Dann gilt*

$$\langle A\psi_{\mathbf{lk}}, \psi_{\mathbf{l'k'}}\rangle \quad \leq \quad C \cdot \frac{2^{-|\mathbf{l},\mathbf{l'}|_1 (N+\frac{3}{2})}}{dist(supp(\psi_{\mathbf{lk}}), supp(\psi_{\mathbf{l'k'}}))^{f(N+1,N+1)}}. \tag{4.23}$$

Beweis: Der Beweis verwendet den Abfall des Kerns K nach (4.2), Taylorentwicklung des Kerns und die verschwindenden Momente der Basisfunktionen. Um die Darstellung einfach zu halten, betrachten wir den zweidimensionalen Fall.
Für $y \in supp(\psi_{\mathbf{lk}})$ entwickeln wir $x = (x_1, x_2) \mapsto K(x, y)$ in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}) \in supp(\psi_{\mathbf{l'k'}})$ (zuerst in x_1, dann in x_2). Wir

erhalten

$$\begin{aligned}K(x,y) &= \sum_{\alpha_1<N+1} c_{\alpha_1}(x_{0_1},x_2,y)(x_1-x_{0_1})^{\alpha_1} + R_{N+1}(x,x_{0_1},y) \\ &= \sum_{\alpha_1<N+1} \Big[\sum_{\alpha_2<N+1} c_\alpha(x_0,y)\cdot(x_2-x_{0_2})^{\alpha_2} + R^{\alpha_1}_{N+1}(x_2,x_0,y)\Big] \\ &\quad \cdot(x_1-x_{0_1})^{\alpha_1} + \sum_{\alpha_2<N+1} R^{\alpha_2}_{(N+1,N+1)}(x_1,x_0,y)\cdot(x_2-x_{0_2})^{\alpha_2} \\ &\quad + R_{(N+1,N+1)}(x,x_0,y), \end{aligned} \tag{4.24}$$

mit

$$R_{N+1}(x,x_{0_1},y) = \sum_{\alpha_2<N+1} R^{\alpha_2}_{(N+1,N+1)}(x_1,x_0,y)\cdot(x_2-x_{0_2})^{\alpha_2} + R_{(N+1,N+1)}(x,x_0,y)$$

der Taylorreihe von R_{N+1} um x_{0_2} und

$$\begin{aligned}R_{(N+1,N+1)}(x,x_0,y) &= \frac{1}{N!}\frac{1}{N!}\cdot(x_1-x_{0_1})^{N+1}\cdot(x_2-x_{0_2})^{N+1} \\ &\cdot \int_0^1\int_0^1 (1-t_1)^N(1-t_2)^N \partial_x^{\mathbf{N+1}} K(\begin{pmatrix} x_{0_1} \\ x_{0_2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1(x_1-x_{0_1}) \\ t_2(x_2-x_{0_2})\end{pmatrix}, y)dt_1dt_2.\end{aligned}$$

Verwendet man (4.24) zusammen mit der Momentenbedingung (2.14), so erhält man

$$\langle A\psi_{\mathbf{lk}},\psi_{\mathbf{l'k'}}\rangle = \int R_{(N+1,N+1)}(x,x_0,y)\psi_{\mathbf{lk}}(y)\cdot\overline{\psi_{\mathbf{l'k'}}(x)}dxdy,$$

da alle polynomialen Terme verschwinden, deren Grad kleiner ist als $N+1$. Entwickelt man nun $R_{(N+1,N+1)}$ in eine Taylorreihe um $y_0=(y_{0_1},y_{0_2})$ und verwendet wiederum die Momentenbedingung (2.14), so ergibt sich

$$\begin{aligned}|\langle A\psi_{\mathbf{lk}},\psi_{\mathbf{l'k'}}\rangle| &= \Big|\int R_{(N+1,N+1)}(x,x_0,y)\psi_{\mathbf{lk}}(y)\overline{\psi_{\mathbf{l'k'}}(x)}dxdy\Big| \\ &\le C \sup_{\{x\in supp(\psi_{\mathbf{lk}}),y\in supp(\psi_{\mathbf{l'k'}})\}} \left|\partial_x^{\mathbf{N+1}}\partial_y^{\mathbf{N+1}}K(x,y)\right| \\ &\quad \cdot\int \left|x_1-x_{0_1}\right|^{N+1}\cdot\left|x_2-x_{0_2}\right|^{N+1}\cdot\left|y_1-y_{0_1}\right|^{N+1}\cdot\left|y_2-y_{0_2}\right|^{N+1} \\ &\quad \cdot\left|\psi_{\mathbf{lk}}(y)\cdot\overline{\psi_{\mathbf{l'k'}}(x)}\right|dxdy. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zusammen mit $\int_{supp(\psi_{\mathbf{lk}})} dx \le 2^{-|\mathbf{l}|_1}$ und der Tatsache, daß wegen (4.22) die Beziehung $|x_1-x_{0_1}| \le c\cdot 2^{-l_1}$ für x und x_0 in $supp(\psi_{\mathbf{l'k'}})$ gilt (und analog für die Beziehungen für die anderen Abstände), so erhalten wir für das letzte Integral

$$\begin{aligned}
\int \left|x_1 - x_{0_1}\right|^{N+1} &\cdot \left|x_2 - x_{0_2}\right|^{N+1} \cdot \left|y_1 - y_{0_1}\right|^{N+1} \cdot \left|y_2 - y_{0_2}\right|^{N+1} \cdot \left|\psi_{\mathbf{l'k'}}(x) \cdot \overline{\psi_{\mathbf{lk}}(y)}\right| dxdy \\
&\leq \Big(\int\limits_{supp(\psi_{\mathbf{l'k'}})} (\left|x_1 - x_{0_1}\right|^{N+1} \cdot \left|x_2 - x_{0_2}\right|^{N+1})^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\|\psi_{\mathbf{l'k'}}\|_{L^2}}_{=1} \\
&\cdot \Big(\int\limits_{supp(\psi_{\mathbf{lk}})} \left(\left|y_1 - y_{0_1}\right|^{N+1} \cdot \left|y_2 - y_{0_2}\right|^{N+1}\right)^2 dy \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\|\psi_{\mathbf{lk}}\|_{L^2}}_{=1} \\
&\leq c \cdot \max_{\{x \in supp(\psi_{\mathbf{l'k'}})\}} \left(\left|x_1 - x_{0_1}\right|^{N+1} \cdot \left|x_2 - x_{0_2}\right|^{N+1}\right) \cdot 2^{-\frac{|\mathbf{l'}|_1}{2}} \\
&\cdot \max_{\{y \in supp(\psi_{\mathbf{lk}})\}} \left(\left|y_1 - y_{0_1}\right|^{N+1} \cdot \left|y_2 - y_{0_2}\right|^{N+1}\right) \cdot 2^{-\frac{|\mathbf{l}|_1}{2}} \\
&\overset{(4.22)}{\leq} c \cdot 2^{-|\mathbf{l}|_1(N+1)} \cdot 2^{-\frac{|\mathbf{l}|_1}{2}} \cdot 2^{-|\mathbf{l'}|_1(N+1)} \cdot 2^{-\frac{|\mathbf{l'}|_1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Der Abfall des Kerns in (4.2) zeigt dann für $x \in supp(\psi_{\mathbf{l'k'}}), y \in supp(\psi_{\mathbf{lk}})$

$$|\partial_x^{\mathbf{N+1}} \partial_y^{\mathbf{N+1}} K(x,y)| \leq c \cdot dist(supp(\psi_{\mathbf{lk}}), supp(\psi_{\mathbf{l'k'}}))^{-f(N+1,N+1)}. \tag{4.27}$$

Kombiniert man nun (4.26), (4.27) und (4.25), so ist die Behauptung im zweidimensionalen Fall gezeigt. Der höherdimensionale Fall läßt sich analog beweisen.
□

Mit Hilfe dieses Theorems lassen sich nun kleine Einträge identifizieren, ohne daß sie explizit berechnet werden müßten.
Bevor wir eine geeignete Kompressionsvorschrift angeben können, benötigen wir noch folgendes Lemma, daß den Fehler der Kompression abschätzt.

Lemma 5 *Es sei eine eindimensionale biorthogonale Multiskalenbasis gegeben, so daß die Normäquivalenzen (2.26) und (2.29) erfüllt seien. Hierbei seien die Parameter $\tilde{r}, r$ aus (2.26) und (2.29) so, daß die Beziehungen $-\tilde{r} < s < r$ und $0 \leq p < r, 0 \leq p+q < r$ gelten. Weiterhin sei $(A_J^T - A_J^{T,\epsilon})u \in \mathcal{H}^s$ und $u \in \mathcal{H}^{p,q}_{mix}$. Dann gilt*

$$\|(A_J^T - A_J^{T,\epsilon})u\|^2_{\mathcal{H}^s} \leq C \cdot \left(\sum_{\mathbf{j} \in I_J^T} \sum_{\mathbf{k} \in I_J^T} \sum_{(\mathbf{l},\mathbf{m}) \notin \tau^\epsilon_{\mathbf{jk}}} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2q|\mathbf{k}|_\infty - 2p|\mathbf{k}|_1} a^2_{\mathbf{jklm}} \right) \cdot \|u\|^2_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}}. \tag{4.28}$$

Beweis: Es wird die Orthogonalitätsrelation zwischen den primalen und dualen Wavelets sowie die Stabilität der dualen Wavelets in $\mathcal{H}^s$ und der primalen Wavelets in $\mathcal{H}^{p,q}_{mix}$

benutzt. Man erhält wie im Beweis von Lemma 3

$$
\begin{aligned}
\|(A_J^T - A_J^{T,\epsilon})u\|_{\mathcal{H}^s}^2 &\overset{(2.26)}{\simeq} \sum_{\mathbf{j}\in I_J^T} \sum_{\mathbf{l}\in\tau_{\mathbf{j}}} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \left(\sum_{\mathbf{k}\in I_J^T} \sum_{\mathbf{m}:(\mathbf{l},\mathbf{m})\notin\tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon} a_{\mathbf{jklm}} b_{\mathbf{km}} \right)^2 \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in I_J^T} \sum_{\mathbf{l}\in\tau_{\mathbf{j}}} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \left(\sum_{\mathbf{k}\in I_J^T} \sum_{\mathbf{m}:(\mathbf{l},\mathbf{m})\notin\tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon} 2^{-q|\mathbf{k}|_\infty - p|\mathbf{k}|_1} a_{\mathbf{jklm}} 2^{q|\mathbf{k}|_\infty + p|\mathbf{k}|_1} b_{\mathbf{km}} \right)^2 \\
&\leq \sum_{\mathbf{j}\in I_J^T} \sum_{\mathbf{l}\in\tau_{\mathbf{j}}} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty} \left(\sum_{\mathbf{k}\in I_J^T} \sum_{\mathbf{m}:(\mathbf{l},\mathbf{m})\notin\tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon} 2^{-2q|\mathbf{k}|_\infty - 2p|\mathbf{k}|_1} a_{\mathbf{jklm}}^2 \right) \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n} \sum_{\mathbf{m}\in\tau_{\mathbf{k}}} 2^{2q|\mathbf{k}|_\infty + 2p|\mathbf{k}|_1} b_{\mathbf{km}}^2 \right) \\
&\overset{(2.29)}{\leq} C \cdot \left(\sum_{\mathbf{j}\in I_J^T} \sum_{\mathbf{k}\in I_J^T} \sum_{(\mathbf{l},\mathbf{m})\notin\tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2q|\mathbf{k}|_\infty - 2p|\mathbf{k}|_1} a_{\mathbf{jklm}}^2 \right) \cdot \|u\|_{\mathcal{H}_{mix}^{p,q}}^2 .
\end{aligned}
$$

Dies zeigt die Behauptung.
□

4.2.2 Konstruktion optimaler Indexmengen und Fehlerabschätzung

Die offene Frage ist nun, wie die Indexmengen $\tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon$ definiert werden sollten. Dies sollte so geschehen, daß die Konsistenzordnung durch diese Kompression nicht verändert wird. Gilt $\|(A - A_J^T)u\|_{\mathcal{H}^s} \simeq O(2^{-RJ})$ mit $R \in \mathbb{R}^+$, so verlangen wir deswegen, daß ebenso $\|(A_J^T - A_J^{T,\epsilon})u\|_{\mathcal{H}^s} \simeq O(2^{-RJ})$ gelten soll. Nach Lemma 5 erreicht man dies, indem man

$$
\sum_{\mathbf{j}\in I_J^T,\mathbf{k}\in I_J^T} \sum_{(\mathbf{l},\mathbf{m})\notin\tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2q|\mathbf{k}|_\infty - 2p|\mathbf{k}|_1} a_{\mathbf{jklm}}^2 \leq O\left(2^{-2RJ}\right),
$$

fordert.
Wir definieren nun $\tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon$ wie folgt.

Definition 4 *Es sei eine Matrix $\{B_{\mathbf{lk}}\}_{\mathbf{l}\in I_J^T,\mathbf{k}\in I_J^T}$ gegeben. Dann definieren wir*

$$
\tau_{\mathbf{jk}}^\epsilon := \{(\mathbf{l},\mathbf{m}) \in \tau_{\mathbf{jk}} : dist(supp(\psi_{\mathbf{jl}}), supp(\psi_{\mathbf{km}})) \leq B_{\mathbf{jk}}\}. \qquad (4.29)
$$

Die $B_{\mathbf{lk}}$ müssen nun so klein wie möglich gewählt werden (damit möglichst viele Einträge zu Null gesetzt werden können) und zwar unter der Nebenbedingung, daß die Ordnung erhalten bleibt.
Es gilt das folgende Theorem.

Theorem 10 *Es sei*

$$B_{\mathbf{jk}} \simeq J^{\frac{n}{f(N+1,N+1)}} \cdot 2^{\frac{RJ+s|\mathbf{j}|_\infty - q|\mathbf{k}|_\infty - p|\mathbf{k}|_1 - (N+1)|\mathbf{j},\mathbf{k}|_1}{f(N+1,N+1)}} \quad \textit{für } \mathbf{j} \in I_J^T, \mathbf{k} \in I_J^T. \tag{4.30}$$

Unter den Voraussetzungen von Theorem 9 und Lemma 5 gilt dann

$$\|(A_J^T - A_J^{T,\epsilon})u\|_{\mathcal{H}^s} \quad \leq \quad C \cdot 2^{-RJ} \cdot \|u\|_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}}. \tag{4.31}$$

Beweis: Wir verwenden die Abkürzung $f = f(N+1, N+1)$.
Kombiniert man Theorem 9, Lemma 5 und die Definition von $\tau^\epsilon_{\mathbf{jk}}$, so erhält man

$$\|(A_J^T - A_J^{T,\epsilon})u\|^2_{\mathcal{H}^s} \leq C \cdot \left(\sum_{\mathbf{j}\in I_J^T, \mathbf{k}\in I_J^T} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2q|\mathbf{k}|_\infty - 2p|\mathbf{k}|_1} 2^{-2|\mathbf{j},\mathbf{k}|_1 (N+\frac{3}{2})} \right.$$
$$\left. \cdot \sum_{\substack{(\mathbf{l},\mathbf{m})\in\tau_{\mathbf{jk}},\\ dist(supp(\psi_{\mathbf{jl}}),supp(\psi_{\mathbf{km}}))>B_{\mathbf{jk}}}} dist(supp(\psi_{\mathbf{jl}}), supp(\psi_{\mathbf{km}}))^{-2f} \right) \cdot \|u\|^2_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}}$$

Eine einfache Abschätzung für die zweite Summe erhält man dadurch, daß man die Beziehung $\sum_{(\mathbf{l},\mathbf{m})\in\tau_{\mathbf{jk}}} 1 = |\tau_{\mathbf{jk}}| \leq C \cdot 2^{|\mathbf{j},\mathbf{k}|_1}$ ausnutzt. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\|(A_J^T - A_J^{T,\epsilon})u\|^2_{\mathcal{H}^s} &\leq C \cdot \left(\sum_{\mathbf{j}\in I_J^T, \mathbf{k}\in I_J^T} 2^{2s|\mathbf{j}|_\infty - 2q|\mathbf{k}|_\infty - 2p|\mathbf{k}|_1} 2^{-2|\mathbf{j},\mathbf{k}|_1 (N+1)} B_{\mathbf{jk}}^{-2f} \right) \cdot \|u\|^2_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}} \\
&\overset{(4.30)}{\leq} C \cdot 2^{-2RJ} J^{-2n} \left(\sum_{\mathbf{j}\in I_J^T, \mathbf{k}\in I_J^T} 1 \right) \cdot \|u\|^2_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}} \\
&\leq C \cdot 2^{-2RJ} \cdot \|u\|^2_{\mathcal{H}^{p,q}_{mix}}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.
□

Indem man nun R in (4.30) angepaßt an die Konsistenzordnung von A_J^T wählt, können diejenigen Koeffizienten bzw. Einträge der Steifigkeitsmatrix die nicht berechnet werden müssen, via (4.29) und (4.30) identifiziert werden. Theorem 10 garantiert dann, daß kein relevanter zusätzlicher Fehler durch die Kompression eingeführt wird.
Man beachte, daß der durch (4.29) mit (4.30) enstehende komprimierte Operator $A_J^{T,\epsilon}$ im allgemeinen unsymmetrisch ist. Dieser Effekt entsteht durch die unterschiedlichen in (4.31) verwendeten Normen. Inwieweit die Unsymmetrie zum Beispiel das Konvergenzverhalten von iterativen Methoden negativ beeinflußt (man beachte, daß die Unsymmetrie i.a. sehr "schwach" ist, da die zu Null gesetzten Einträge alle sehr klein sind), wäre noch zu untersuchen. Ein symmetrischer komprimierter Operator entsteht, indem man $\max(B_{\mathbf{jk}}, B_{\mathbf{kj}})$ statt $B_{\mathbf{jk}}$ in (4.29) verwendet. Theorem 10 gilt dann offensichtlich auch für diesen komprimierten Operator.

Insgesamt haben wir in diesem Kapitel gesehen, daß Tensorprodukt-Approximationsräume sehr gut geeignet sind für die Kernapproximation bei Integraloperatoren, insoweit die Geometrie des jeweiligen Problems Tensorprodukt-Konstruktionen zuläßt. Wir konnten spezielle Approximationsräume aus Tensorprodukten biorthogonaler eindimensionaler Basen herleiten, die sowohl die Glattheit der beteiligten Funktionen als auch die Fehlernorm berücksichtigen und zu signifikanten Reduktionen des Aufwands bei der Integralauswertung führen. Zusammen mit den von uns vorgeschlagenen Blending-Schemata konnten wir schnelle Algorithmen zur Integralauswertung konstruieren, die nun auch für die Lösung von Integralgleichungen angewandt werden können. Außerdem haben wir eine Technik zur Kompression von Galerkin-Steifigkeitsmatrizen für singuläre Kerne kennengelernt.
Numerische Beispiele zur Approximation und Kompression von Problemen mit Integraloperatoren, bei denen diese Techniken eingesetzt werden können finden sich in den Abschnitten 5.2 und 5.3.

5 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel führen wir einige numerische Beispiele an, die die theoretischen Ergebnisse der vorhergehenden Kapitel ergänzen. Wir beschäftigen uns dabei mit der Interpolation von Funktionen mittels der in Kapitel 3 definierten Approximationsräume V_J^T bzw. FV_d^T (vgl. (3.12) bzw. (3.39)) zusammen mit stückweise multilinearen bzw. trigonometrischen Basisfunktionen. Außerdem verwenden wir diese Approximationsräume als Test- und Ansatzräume zur Lösung der Einfachschicht-Potentialgleichung und untersuchen, wie sich zusätzliche Kompression durch einfaches Treshholding auf die Approximationsgüte auswirkt. Das letzte Beispiel das wir betrachten, vergleicht verschiedene Kernapproximationen für die Integralauswertung mit den von uns in Kapitel 4 entwickelten Kernapproximationen mittels der Approximationsräume VG_J aus (4.12).

5.1 Interpolation von Funktionen

Nachfolgend wollen wir die theoretischen Resultate für die Approximationskraft der Räume V_J^T mit den Ergebnissen numerischer Berechnungen vergleichen. Es geht uns dabei nicht darum die Überlegenheit von Dünngitterkonstruktionen für hohe Dimensionen zu demonstrieren, sondern wir legen besonderes Augenmerk auf den Zusammenhang zwischen der Konvergenzgeschwindigkeit, der Glattheit der zu approximierenden Funktion, der Wahl des Parameters T und der Norm in der der Approximationsfehler gemessen wird. Deswegen beschränken wir uns auf Beispiele in zwei Raumdimensionen.
Das Problem mit dem wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen wollen, ist die Interpolation von Funktionen mit stückweise multilinearen Tensorprodukt-Basen und mit trigonometrischen Basen. Im Fall der Verwendung stückweise multilinearer Basen ist die maximal erreichbare Konvergenzordnung oft nicht durch die Glattheit der zu approximierenden Funktion, sondern durch die Ansatzfunktionen selbst beschränkt, wohingegen im Fall der trigonometrischen Approximation nur die Glattheit der zu approximierenden Funktion die Konvergenzordnung beschränkt. Insbesondere ergibt sich bei der trigonometrischen Approximation von periodischen C^∞-Funktionen exponentielle Konvergenz. Dies führt zu entscheidenden Unterschieden bzgl. des Konvergenzverhaltens für die beiden betrachteten Basen.
Wir starten mit vorgegebenen Daten $p_{S_J^T}$ an Punkten S_J^T, vgl. (3.13). Die Daten sind jeweils durch eine Funktion spezifiziert. Das Problem besteht darin, eine Folge $d = \{d_{\mathbf{jk}}\}_{\mathbf{jk}}$ zu finden, so daß

$$s(x) = \sum_{\mathbf{j}\in I_J^T} \sum_{\mathbf{k}\in\tau_{\mathbf{j}}} d_{\mathbf{jk}}\psi_{\mathbf{jk}}(x)$$

die Daten interpoliert.
Wir verwenden Blending-Schemata, so daß sich die Berechnungen jeweils auf vollen Gittern mit unterschiedlicher Maschenweite in verschiedene Koordinatenrichtungen ausführen lassen, vergleiche Algorithmus 1 in Abschnitt 3.3.2. Dies erlaubt dann die Verwendung der schnellen Fouriertransformation im Fall der trigonometrischen Interpolation.

5.1.1 Interpolation mit stückweise multi-linearen Splines

Wir beginnen mit der Interpolation mit Tensorprodukt-Basen aus stückweise multilinearen Splines, vgl. Beispiel 2 in Abschnitt 2.2. Der Fehler der Interpolation wird gemessen mit zwei diskreten Normen, die zur $\mathcal{L}^2$- beziehungsweise $\mathcal{H}^1$-Norm gehören. Als Samplingpunkte für die Berechnung der Normen werden die Gitterpunkte des vollen Gitters auf Level 12 verwendet. Die diskrete $\mathcal{L}^2$-Norm wird aus der Summe der quadrierten Werte an den Gitterpunkten berechnet und die $\mathcal{H}^1$-Norm wird analog mit Hilfe von 9-Punkte Finite Elemente Sternen (wir befinden uns in zwei Dimensionen) bestimmt, die ebenfalls an den Gitterpunkten ausgewertet werden. In allen Diagrammen sind die Fehler bezüglich der Gesamtzahl der Gitterpunkte in dem jeweiligen Blending-Schema aufgetragen (inklusive der Randpunkte).
Als Bezeichnungen in den Tabellen und Abbildungen verwenden wir die folgenden Größen: Es bezeichnet $dofs$ die Anzahl der Freiheitsgrade, $\mathcal{H}^1$ und $\mathcal{L}^2$ sind die Fehler in den diskreten Approximationen an die $\mathcal{H}^1$- beziehungsweise $\mathcal{L}^2$-Norm, $q_{\mathcal{L}^2}$ ist der Quotient zweier bezüglich der Level aufeinanderfolgender Fehler in der $\mathcal{L}^2$-Norm und $q_{\mathcal{H}^1}$ ist das entsprechende Analogon für die $\mathcal{H}^1$-Norm. Zum Beispiel haben wir

$$q_{\mathcal{L}^2} := \frac{\|u - u_l\|_{\mathcal{L}^2}}{\|u - u_{l+1}\|_{\mathcal{L}^2}},$$

wobei die Normen hier als diskrete Normen im obigen Sinne zu verstehen sind und u die interpolierte Funktion und u_l den Interpolanten auf Level l darstellt. Mit q_{dofs} bezeichnen wir den Quotienten aus der Anzahl der Freiheitsgrade zweier aufeinanderfolgender Approximationsräume, also

$$q_{dofs} := \frac{\#\text{Elemente auf Level } l+1}{\#\text{Elemente auf Level } l}.$$

Damit sind $q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$ und $q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$ die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Fehler skaliert mit dem Quotienten der Anzahl zweier aufeinanderfolgender Freiheitsgrade für die jeweiligen Normen. Diese Größen sind ein Maß für das Verhältnis von Aufwand zu Genauigkeit und sie sind die entscheidenden Größen für Vergleiche der Approximationskraft der verschiedenen Räume. Je größer dieser Wert ist, desto höher ist die erreichte Approximationsordnung. Mit der Maschenweite h (dies ist die Maschenweite des vollen Gitters des entsprechenden Levels) verhält sich der Fehler in der $\mathcal{L}^2$-Norm dann wie

$$O(h^{n+\ln_2(q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs})}) \tag{5.1}$$

und entsprechend für die $\mathcal{H}^1$-Norm. So würde zum Beispiel ein Wert von 1 für $q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$ beziehungsweise $q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$ bedeuten, daß sich der Fehler beim Übergang von Level l auf Level $l+1$ um genau den Faktor verringert um den die Anzahl der Punkte zunimmt, was im Zweidimensionalen also einem $O(h^{2+\ln_2(1)}) = O(h^2)$-Verhalten (mit h der Maschenweite) entsprechen würde. Analog würde im Zweidimensionalen der Faktor 1/2 ein $O(h)$-Verhalten widerspiegeln.
Der Fehler in der $\mathcal{L}^\infty$-Norm verhielt sich für alle untersuchten Parameterwerte T qualitativ durchweg wie der $\mathcal{L}^2$-Fehler. Wir verzichten daher im folgenden auf eine gesonderte Darstellung.

Beispiel 1: Die zu interpolierende Funktion ist

$$f(x_1, x_2) = -\sin(2\pi x_1)\sinh(\pi x_1)\sinh(\pi x_2), \text{ auf } [0,1]^2,$$

vergleiche Abbildung 5.1. Sie ist offensichtlich unendlich oft differenzierbar. Damit ist

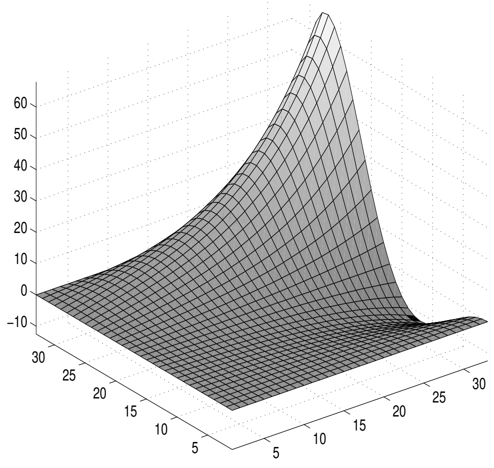


Abbildung 5.1: f aus Beispiel 1

die Konvergenz des Interpolanten aus stückweise multilinearen Splines durch die Ansatzfunktionen beschränkt und die Konvergenz der Interpolanten sollte sich wie bei einer Funktion aus $\mathcal{H}^2_{mix} = \mathcal{H}^{2,0}_{mix}$ verhalten. Für die Approximationsräume $V_J^T, T \in \{-\infty, -1, 0, 0.25\}$ erhalten wir die in den Tabellen 5.1-5.4 dargestellten Ergebnisse. $T = -\infty$ bezeichnet dabei wieder den Vollgitter-Approximationsraum und $T = 0$ den Dünngitter-Approximationsraum. Vergleicht man die Ergebnisse in den mit $\mathcal{H}^1$ bzw. $\mathcal{L}^2$ gekennzeichneten Spalten aus Tabelle 5.1 für den Vollgitterfall mit den anderen Tabellen, so sollte der Vergleich auf der Dimension der Räume und nicht auf dem Level J basieren, da die Anzahl der Freiheitsgrade für verschiedene Räume unterschiedlich ist. Abbildung 5.2 zeigt graphische Darstellungen der Resultate aus den Tabellen und noch einige Resultate für zusätzliche Werte von T. Dort sind auf der linken Seite die Fehler gegen die Zahl der Gitterpunkte und auf der rechten Seite die jeweils zugehörigen Quotienten $q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$ und $q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$ gegen die Level aufgetragen. Die Legenden in den linken Abbildungen gelten jeweils auch für die rechten Abbildungen, auch wenn dort der Übersichtlichkeit halber nur einige ausgewählte Fälle dargestellt sind.
Die Graphen beziehungsweise Tabellen zeigen das nach der Theorie zu erwartende Verhalten der Approximationsordnungen. So lesen wir für das volle Gitter einen Wert von etwa 0.5 im $\mathcal{H}^1$-Fall und 1 im $\mathcal{L}^2$-Fall für die Quotienten $q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$ beziehungsweise $q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$ ab (vgl. Abbildung 5.2 rechts und Tabelle 5.1), was dem bekannten $O(h^1)$ beziehungsweise $O(h^2)$-Verhalten des Interpolationsfehlers entspricht, vgl. (5.1). Das heißt es ergibt sich lineare beziehungsweise quadratische Konvergenz. Für größer werdendes T verbessern sich (wie von der Theorie vorhergesagt) die Approximationsordnungen

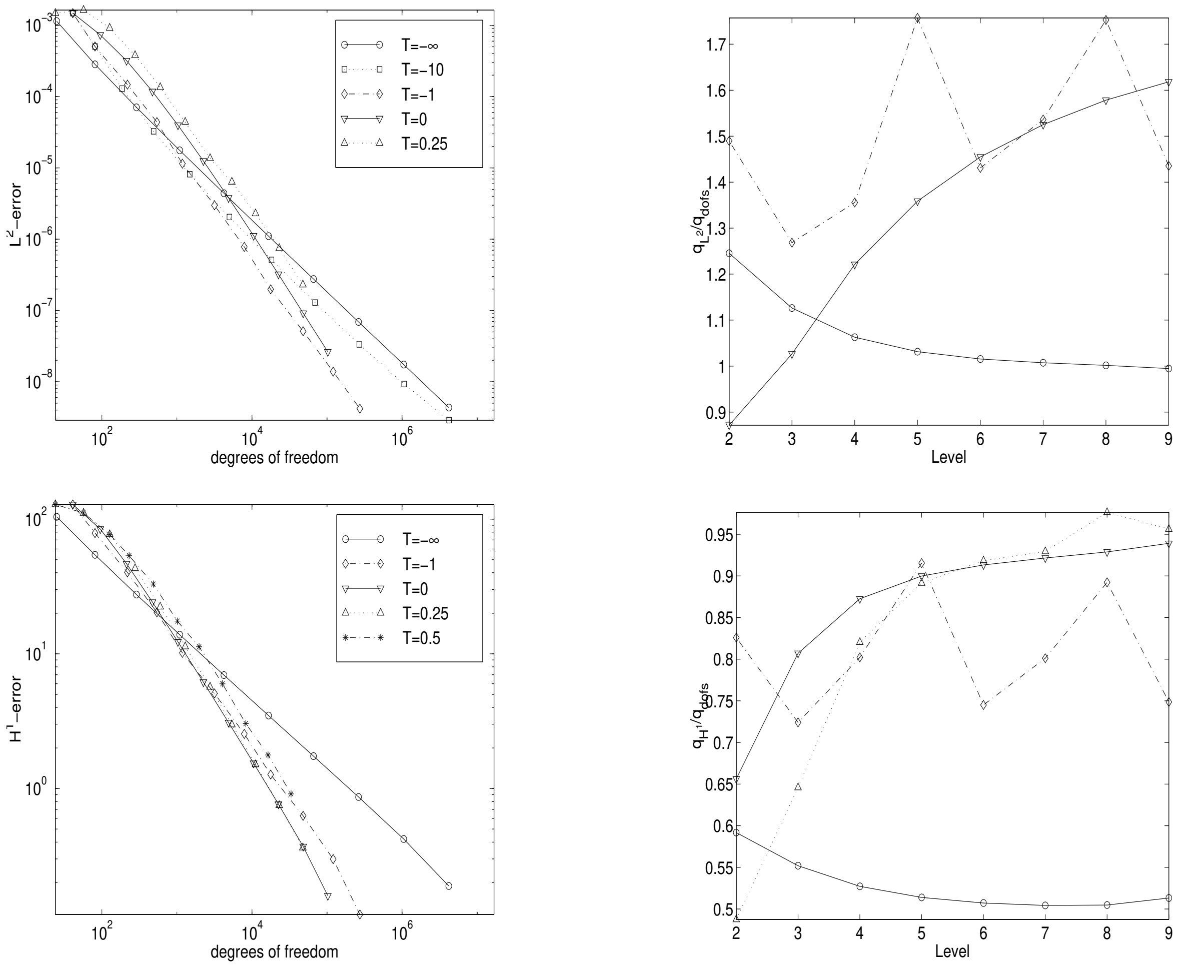


Abbildung 5.2: Beispiel 1: Fehler in der $\mathcal{L}^2$ und $\mathcal{H}^1$-Norm (links) und zugehöriges Verhalten der Größen $q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$ beziehungsweise $q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$ gegen die Anzahl der Level (rechts).

zunächst bis hin zu einem $O(h^2)$-Verhalten (entsprechend einem Wert von 1 für den Quotienten $q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$) bzgl. der $\mathcal{H}^1$-Norm bei $T = 0.25$, vgl. Abbildung 5.2 rechts und Tabelle 5.4. Für die $\mathcal{L}^2$-Norm sagt die Theorie als optimalen T-Wert $T = 0$ voraus, was in unseren Rechnungen bestätigt wird. Für die $\mathcal{H}^1$-Norm hingegen liefert $T = 0.25$ noch bessere Resultate, da dann der logarithmische Faktor im Fall $T = 0$ noch entfernt wird, vgl. Korollar 1 und die Bemerkung nach Korollar 1. Für die $\mathcal{L}^2$-Norm hingegen fällt die Approximationsordnung gegenüber dem Fall $T = 0$ bereits wieder ab. Den logarithmischen Faktor im Fall $T = 0$ und der $\mathcal{L}^2$-Norm kann man in Abbildung 5.2 (rechts oben) und Tabelle 5.3 erkennen.

Tabelle 5.1: Beispiel 1: $T = -\infty$

dofs	$\mathcal{H}^1$	$q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$	$\mathcal{L}^2$	$q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$
81	5.43e+1	5.92e-1	2.84e-4	1.25
289	2.76e+1	5.52e-1	7.06e-5	1.13
1089	1.39e+1	5.27e-1	1.76e-5	1.06
4225	6.95	5.14e-1	4.41e-6	1.03
16641	3.48	5.07e-1	1.10e-6	1.02
66049	1.74	5.04e-1	2.76e-7	1.01
263169	8.65e-1	5.05e-1	6.91e-8	1.00
1050625	4.22e-1	5.13e-1	1.74e-8	9.95e-1
4198401	1.89e-1	5.60e-1	4.34e-9	1.00
16785409	0.00	–	0.00	–

Tabelle 5.2: Beispiel 1: $T = -1$

dofs	$\mathcal{H}^1$	$q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$	$\mathcal{L}^2$	$q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$
81	7.87e+1	8.26e-1	5.05e-4	1.49
219	4.02e+1	7.24e-1	1.47e-4	1.27
541	2.03e+1	8.02e-1	4.40e-5	1.36
1181	1.02e+1	9.15e-1	1.15e-5	1.76
3167	5.08	7.45e-1	2.99e-6	1.43
7905	2.54	8.01e-1	7.79e-7	1.54
17761	1.27	8.92e-1	1.98e-7	1.75
47971	6.27e-1	7.49e-1	5.10e-8	1.44
120677	2.99e-1	8.34e-1	1.39e-8	1.46
273765	1.16e-1	1.14	4.19e-9	1.46

Tabelle 5.3: Beispiel 1: $T = 0$

dofs	$\mathcal{H}^1$	$q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$	$\mathcal{L}^2$	$q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$
95	8.45e+1	6.56e-1	7.36e-4	8.72e-1
213	4.67e+1	8.07e-1	3.20e-4	1.03
471	2.42e+1	8.73e-1	1.18e-4	1.22
1033	1.23e+1	9.00e-1	3.97e-5	1.36
2251	6.16	9.13e-1	1.25e-5	1.45
4877	3.09	9.22e-1	3.79e-6	1.53
10511	1.54	9.29e-1	1.12e-6	1.58
22545	7.66e-1	9.39e-1	3.21e-7	1.62
48147	3.71e-1	9.66e-1	9.16e-8	1.64
102421	1.60e-1	1.09	2.62e-8	1.64

Tabelle 5.4: Beispiel 1: $T = 0.25$

dofs	$\mathcal{H}^1$	$q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$	$\mathcal{L}^2$	$q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$
57	1.11e+2	4.87e-1	1.64e-3	3.82e-1
127	7.71e+1	6.46e-1	9.20e-4	7.99e-1
277	4.31e+1	8.20e-1	3.80e-4	1.11
599	2.24e+1	8.91e-1	1.35e-4	1.30
1289	1.13e+1	9.18e-1	4.40e-5	1.42
2763	5.68	9.29e-1	1.36e-5	1.51
5387	2.98	9.76e-1	6.36e-6	1.10
11149	1.51	9.56e-1	2.29e-6	1.34
23055	7.50e-1	9.72e-1	7.46e-7	1.49
47633	3.63e-1	9.99e-1	2.30e-7	1.57

Unsere Experimente zeigten außerdem, daß im Falle der $\mathcal{H}^1$-Norm $T = 1/3$ die besten Resultate liefert. Bei $T = 0.5$ ergeben sich in diesem Fall ebenfalls noch gute Resultate, wohingegen für die $\mathcal{L}^2$-Norm der Abfall in der Approximationsordnung bereits sehr deutlich ist.
Aus Abbildung 5.2 geht überdies hervor, daß Approximationen mit Räumen V_J^T mit T um 0 als Verfahren höherer Ordnung angesehen werden können, wie dies bereits in Abschnitt 3.4 erläutert wurde. Man kann dies direkt aus den – verglichen mit den Vollgitterresultaten – größeren Werten für $q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$ bzw. $q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$ ablesen.

Beispiel 2: Als zweites Beispiel für die Interpolation mit stückweise bilinearen Funktionen betrachten wir die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - 2\|\mathbf{x} - \binom{1/2}{1/2}\|_{l^2} & \text{für } \|\mathbf{x} - \binom{1/2}{1/2}\|_{l^2} \leq 1/2 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{auf } [0,1]^2,$$

vergleiche Abbildung 5.3. Diese Funktion ist in $\mathcal{H}^{3/2-\epsilon}$ $\forall \epsilon > 0$, aber sie ist nicht in $\mathcal{H}^{3/2-\epsilon}_{mix}$. Wegen dieser geringen Glattheit sind die erreichbaren Konvergenzordnungen durch diese Glattheit beschränkt. Insbesondere Approximationsräume mit $T \geq 0$ sind nach Korollar 1 für die Approximation nicht geeignet. Die Ergebnisse für das volle Gitter sind in Tabelle 5.5 dargestellt. Aus der Tabelle lassen sich die erreichten Konvergenzordnungen für das volle Gitter ablesen. Das Verhalten entspricht etwa den theoretischen Vorhersagen eines $O(h^{1/2})$ beziehungsweise $O(h^{3/2})$-Verhaltens für die $\mathcal{H}^1$ beziehungsweise $\mathcal{L}^2$-Norm. In Abbildung 5.4 sind die Resultate für eine größere Menge von Approximationsräumen visualisiert. Diese Abbildung zeigt, daß in diesem Fall Dünngitterkonstruktionen nicht zur Approximation geeignet sind. Asymptotisch werden zwar für alle Approximationsräume mit $T \leq 0$ (bis auf eventuelle logarithmische Terme) die gleichen Konvergenzordnungen wie mit dem vollen Gitter erreicht, aber die Konstanten vor den asymptotisch relevanten Termen sind bedeutend größer als im Vollgitterfall und machen daher eine Verwendung dieser Approxiationsräume in

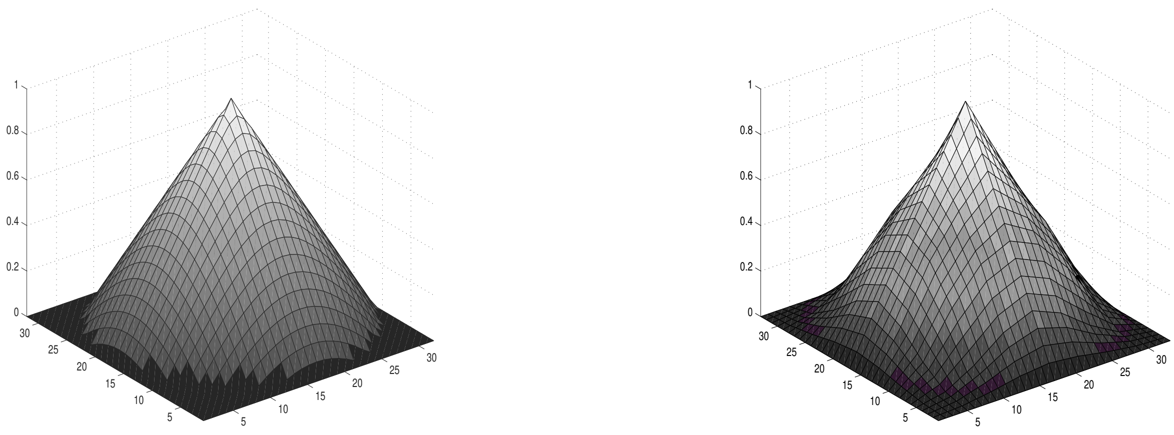


Abbildung 5.3: Zu interpolierende Funktion Beispiel 2 (Darstellung auf Level 5) (links) und Interpolant in V_5^0 (rechts)

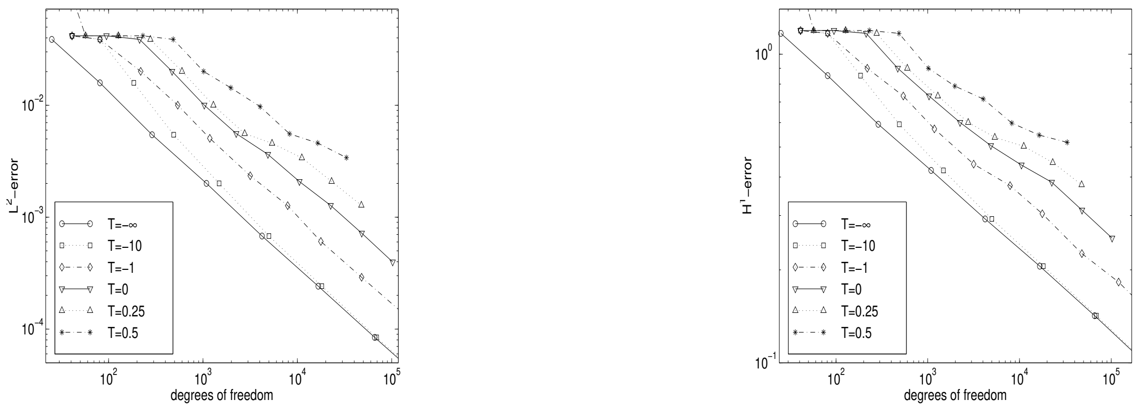


Abbildung 5.4: Beispiel 2: Fehler in der $\mathcal{L}^2$ (links) und $\mathcal{H}^1$-Norm (rechts) gegen die Anzahl der Freiheitsgrade

diesem Fall nicht ratsam. Man erkennt außerdem, daß die Approximationsordnung sich für Räume mit $T > 0$ verschlechtert.

Insgesamt bestätigen diese beiden numerischen Beispielen unsere theoretischen Vorhersagen bezüglich der Tatsache, daß die geeignete Wahl der Approximationsräume beziehungsweise der Parameter T in Abhängigkeit der Glattheitsvoraussetzungen zu Verfahren mit höherer Ordnung führen kann. Insbesondere können durch geschickte Wahl von T eventuelle logarithmische Terme in den Approximationsordnungen vermieden werden, wie sich sich bei der Wahl $T = 0$ ergeben.

Tabelle 5.5: Beispiel 2: $T = -\infty$

dofs	$\mathcal{H}^1$	$q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$	$\mathcal{L}^2$	$q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$
81	8.52e-01	4.23e-01	1.59e-02	7.54e-01
289	5.93e-01	4.03e-01	5.45e-03	8.16e-01
1089	4.20e-01	3.74e-01	2.01e-03	7.21e-01
4225	2.92e-01	3.70e-01	6.78e-04	7.62e-01
16641	2.06e-01	3.61e-01	2.42e-04	7.12e-01
66049	1.42e-01	3.65e-01	8.42e-05	7.23e-01
263169	9.66e-02	3.69e-01	2.99e-05	7.08e-01
1050625	6.27e-02	3.86e-01	1.05e-05	7.13e-01
4198401	3.57e-02	4.40e-01	3.56e-06	7.37e-01

5.1.2 Trigonometrische Interpolation

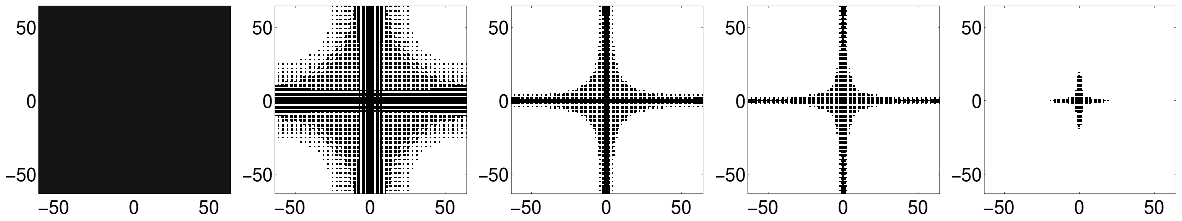
Wir wenden uns nun der trigonometrischen Interpolation zu. Im Gegensatz zur Interpolation mit stückweise multilinearen Basisfunktionen wird die Konvergenzgeschwindigkeit hier alleine durch die Glattheit der zu interpolierenden Funktion bestimmt. Bei periodischen C^∞-Funktionen tritt dann exponentielle Konvergenz auf. Wir verwenden auch hier wieder die in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Boolschen Blending-Schemata und den dort beschriebenen Algorithmus zur Interpolation auf den Gittern S_J^T, nun zusammen mit der schnellen Fouriertransformation auf anisotropen Vollgittern.
Die Fehler der Interpolation werden auf dem vollen Gitter des Levels 11 gemessen und zwar durch den Ausdruck

$$e_s = \left(\sum_{k_1=-N/2-1}^{N/2} \sum_{k_2=-N/2-1}^{N/2} (1 + |\mathbf{k}|_\infty)^{2s} \cdot |c_{\mathbf{k}}|^2 \right)^{1/2},$$

wobei die $c_{\mathbf{k}}$ diskrete Fourierkoeffizienten des Fehlers bzgl. dieses Gitters bezeichnen. Die Größen e_s approximieren die jeweiligen kontinuierlichen Normen $\mathcal{H}^s$. Insbesondere entsprechen die Parameterwerte $s = -1, 0, 1$ den Normen $\mathcal{H}^{-1}, \mathcal{L}^2, \mathcal{H}^1$. Wir beschränken uns im folgenden auf diese Größen.
Einen ersten Eindruck im Hinblick auf die Eignung verschiedener Approximationsräume V_J^T erhält man jeweils aus dem Abfall der diskreten Fourierkoeffizienten der betrachteten Funktion. Als Beispiel verwenden wir die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |\binom{x_1}{x_2} - \binom{1/2}{1/2}|_\infty < 1/4, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{auf } T^2.$$

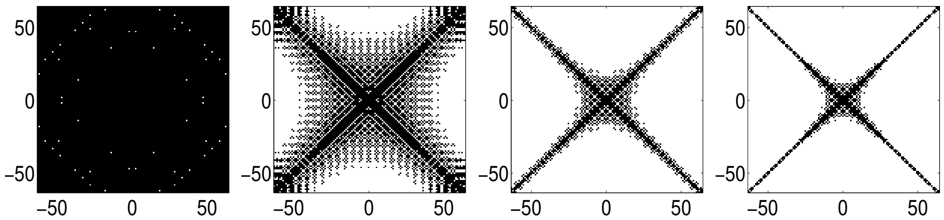
Diese ist ein Element von $\mathcal{H}_{mix}^{1/2-\epsilon}$ $\forall \epsilon > 0$. Nach Weglassen aller Fourierkoeffizienten des trigonometrischen Interpolanten von f auf dem vollen Gitter des Levels 7 deren Betrag kleiner ist als $0,1e-4, 5e-4, 1e-3$ bzw. $5e-3$, ergeben sich die folgenden Bilder (von links nach rechts)



Mit stärkerer Kompression, das heißt bei Weglassen von dem Betrag nach immer größeren Koeffizienten, zeigt sich die für Funktionen mit dominierender gemischter Glattheit typische Tensorproduktstruktur. Entsprechend sind Dünngitterkonstruktionen zur Interpolation besonders geeignet, vgl. auch die Abbildungen 3.8 und 3.9.
Für den um 45 Grad gegenüber den Koordinatenachsen gedrehten Würfel

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1/2 < x+y < 3/2 \text{ und } -1/2 < y-x < 1/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

auf T^2 hingegen, der ein Element von $\mathcal{H}^{1/2-\epsilon}\ \forall\epsilon > 0$ ist, ergeben Dünne Gitter keinen Vorteil gegenüber dem vollen Gitter. Einige Kompressionsstufen der diskreten Fouriertransformierten bezüglich des vollen Gitters sind in den folgenden Abbildungen dargestellt:



Hier sind wieder alle Frequenzen dunkel eingefärbt deren zugehörige Koeffizienten einen Betrag größer als $0,1e-4, 5e-4$ bzw. $1e-3$ (von links nach rechts) besitzen. Eine Approximation mit Frequenzen aus dem hyperbolischen Kreuz wird offensichtlich der tatsächlichen Situation nicht gerecht und führt deswegen nicht zu einer Verbesserung der Approximationsordnung gegenüber dem vollen Gitter.
Wir betrachten im folgenden weitere Beispiele in zwei Dimensionen, die die Abhängigkeit der Approximationskraft der einzelnen Räume von den Glattheiten der betrachteten Funktionen verdeutlichen sollen. Es handelt sich dabei um ein Beispiel das zu exponentieller Konvergenz führt und bei dem Dünngitterkonstruktionen nicht geeignet sind, ein Beispiel mit anfänglich exponentieller und dann polynomialer Konvergenz, bei dem bei Erreichen der polynomialen Konvergenz Dünngitterkonstruktionen zu sehr guten Interpolationsergebnissen führen und der Vollgitterinterpolation überlegen sind, und um die Interpolation einer Funktion mit dominierender gemischter Glattheit. Bei dieser sind folglich Dünngitterkonstruktionen zur Interpolation zu bevorzugen.
Die Bezeichnungen in den Tabellen und Abbildungen sind wie im vorhergehenden Abschnitt.

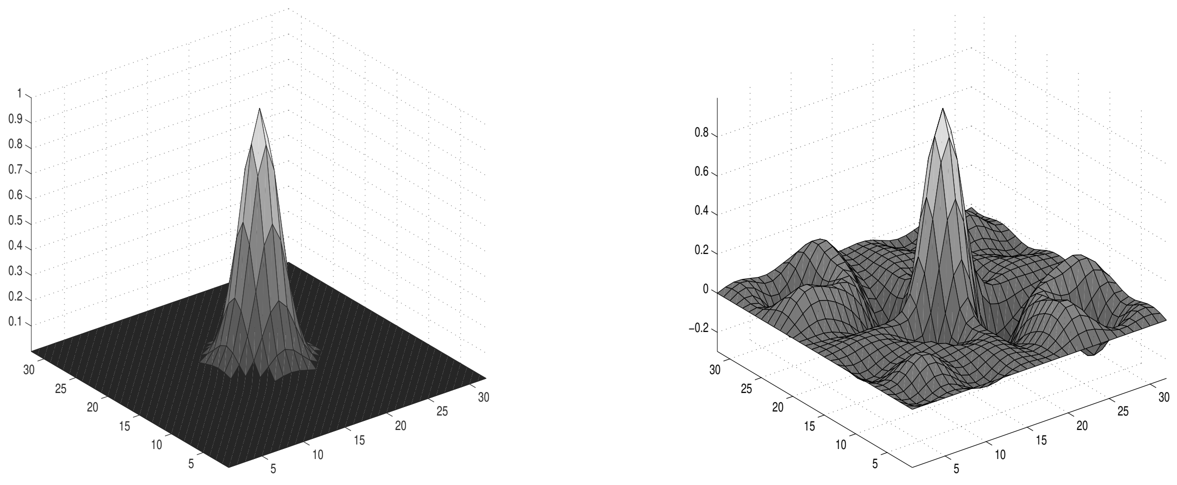
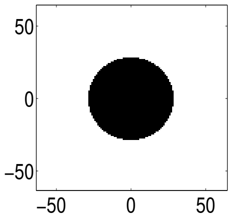


Abbildung 5.5: Interpolant zu Beispiel 1 in $V_5^{-\infty}$ (links) und Interpolant in V_5^0 (rechts)

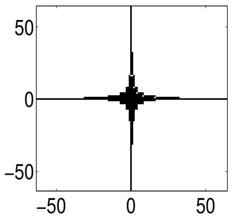
Beispiel 1: Wir beginnen mit der Interpolation der Exponentialfunktion

$$f(x_1, x_2) = e^{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle / G^2} \text{ auf } [0,1)^2,$$

mit $G = 0.007^{1/2}$, vergleiche Abbildung 5.5. Nach Weglassen aller Fourierkoeffizienten kleiner $1e-6$ ergeben die Nicht-Null-Einträge der Fouriertransformierten des Interpolanten auf dem vollen Gitter des Levels 7 folgendes Bild



Hier sind wieder alle Frequenzen dunkel eingefärbt deren zugehörige Koeffizienten einen Betrag kleiner als $1e-6$ besitzen. Die Fourierkoeffizienten $c_{\mathbf{k}}$ von f fallen exponentiell ab. Bezüglich des Interpolanten in V_7^0 ergibt sich hingegen (ohne Kompression) das Bild



vergleiche auch Abbildung 3.9. Dies ist offensichtlich dem Abfall der Fourierkoeffizienten der Funktion f nicht angepaßt.

Einige Ergebnisse der Interpolation sind in den Tabellen 5.6-5.8 aufgeführt und in Abbildung 5.6 visualisiert. Wegen der Glattheit der Funktion f ergibt sich in allen betrachteten Normen und für alle Approximationsräume exponentielle Konvergenz. Das volle Gitter erweist sich für alle Normen als die beste Wahl.
Man beachte hier den Unterschied zur Interpolation mit multilinearen Splines, vgl. Abschnitt 5.1.1. Bei Interpolation der Exponentialfunktion mit multilinearen Splines ist das Dünne Gitter in seinen Approximationseigenschaften – im Gegensatz zum hier vorliegenden Fall – dem vollen Gitter überlegen. Dies liegt daran, daß dann die maximal erreichbare Konvergenzordnung durch die Ansatzfunktionen und nicht durch die zu interpolierende Funktion bestimmt wird.

Tabelle 5.6: Beispiel 1: $T = -\infty$

dofs	$\mathcal{H}^1$	$q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$	$\mathcal{L}^2$	$q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$	$\mathcal{H}^{-1}$	$q_{\mathcal{H}^{-1}}/q_{dofs}$
64	2.31e-01	5.86e-01	4.66e-02	1.04e+00	1.02e-02	2.11e+00
256	1.14e-02	5.06e+00	1.27e-03	9.20e+00	1.41e-04	1.81e+01
1024	3.44e-08	8.30e+04	2.02e-09	1.57e+05	1.19e-10	2.97e+05
4096	2.17e-14	3.96e+05	3.89e-17	1.30e+07	4.51e-18	6.60e+06

Tabelle 5.7: Beispiel 1: $T = -1$

dofs	$\mathcal{H}^1$	$q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$	$\mathcal{L}^2$	$q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$	$\mathcal{H}^{-1}$	$q_{\mathcal{H}^{-1}}/q_{dofs}$
40	5.42e-01	6.62e-01	1.93e-01	9.70e-01	8.62e-02	1.41e+00
128	4.44e-01	3.81e-01	1.09e-01	5.53e-01	3.18e-02	8.47e-01
352	1.99e-01	8.10e-01	3.92e-02	1.01e+00	8.28e-03	1.40e+00
832	1.03e-02	8.15e+00	1.15e-03	1.44e+01	1.28e-04	2.74e+01
2432	7.03e-05	5.04e+01	7.65e-06	5.13e+01	8.37e-07	5.23e+01
6400	2.94e-10	9.09e+04	1.73e-11	1.68e+05	1.02e-12	3.13e+05

Tabelle 5.8: Beispiel 1: $T = 0$

dofs	$\mathcal{H}^1$	$q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$	$\mathcal{L}^2$	$q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$	$\mathcal{H}^{-1}$	$q_{\mathcal{H}^{-1}}/q_{dofs}$
44	8.43e-01	3.87e-01	3.16e-01	5.39e-01	1.33e-01	8.33e-01
112	8.17e-01	4.05e-01	2.40e-01	5.17e-01	9.95e-02	5.25e-01
272	4.49e-01	7.48e-01	1.08e-01	9.16e-01	3.39e-02	1.21e+00
640	1.99e-01	9.61e-01	3.91e-02	1.17e+00	8.28e-03	1.74e+00
1472	4.73e-02	1.83e+00	8.46e-03	2.01e+00	1.59e-03	2.26e+00
3328	3.23e-03	6.47e+00	3.58e-04	1.04e+01	4.00e-05	1.76e+01
7424	7.03e-05	2.06e+01	7.65e-06	2.10e+01	8.37e-07	2.14e+01
16384	2.94e-10	1.08e+05	1.73e-11	2.01e+05	1.02e-12	3.73e+05

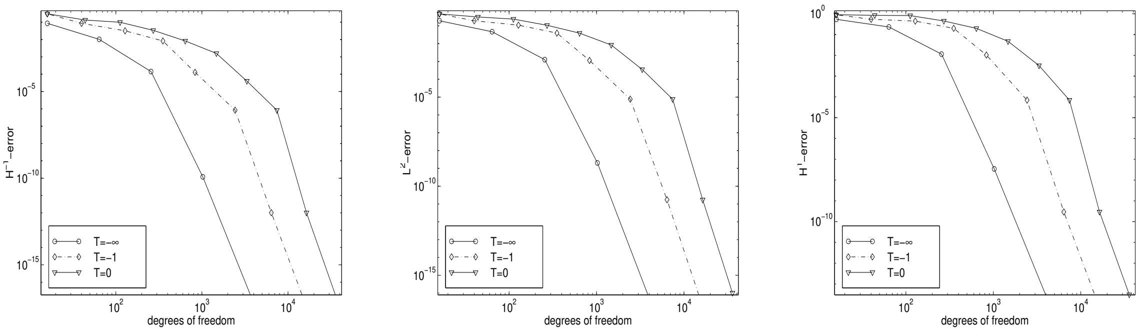
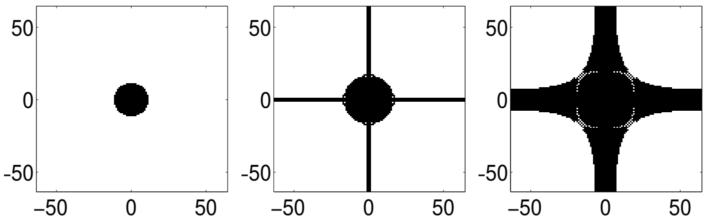


Abbildung 5.6: Beispiel 1: Fehler in der $\mathcal{H}^{-1}$, $\mathcal{L}^2$ und $\mathcal{H}^1$-Norm gegen die Anzahl der Freiheitsgrade

Beispiel 2: Als nächstes Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\left(1 + 50\left((x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2\right)\right)^2} \text{ auf } T^2,$$

vergleiche Abbildung 5.7. Diese Funktion ist periodisch und im Innern des Gebietes unendlich oft differenzierbar. Am Rand ist sie jedoch (wegen der Periodizität) nicht differenzierbar. Dies spiegelt sich in der Konvergenz der Approximanden wieder, vergleiche Abbildung 5.8. Nach anfänglicher exponentieller Konvergenz tritt ab einer bestimmten Approximationsgenauigkeit (bei der sozusagen die Unstetigkeit in der Ableitung von der diskreten Approximation "entdeckt" wird) polynomiale Konvergenz ein, die durch die Glattheit der Funktion f bestimmt wird. Im Bereich der exponentiellen Konvergenz erweist sich wiederum das volle Gitter als geeignete Wahl, wohingegen im Bereich der polynomialen Konvergenz zum Beispiel der Raum V_J^0 eine bessere Wahl darstellt. In diesem Fall ist also die mangelnde Glattheit der Funktion f dafür verantwortlich, daß Dünngitterkonstruktionen bessere Konvergenzresultate liefern als die Interpolation bezüglich des vollen Gitters.
Die Koeffizienten ungleich Null des Interpolanten in $V_7^{-\infty}$ komprimiert mit $1e-5$, $1e-7$ und $1e-9$ sind von links nach rechts in der nächsten Abbildung zu sehen.



Der Abfall der Koeffizienten größer als $1e-5$ ist wieder nur von der l^2-Norm der Frequenz abhängig und diese Koeffizienten fallen exponentiell ab. Kleinere Koeffizienten hingegen bilden das für Funktionen aus Räumen mit dominierender gemischter Glattheit typische Kreuzmuster aus. Entsprechend dieser Entwicklung erklärt sich dann auch die anfänglich exponentielle und dann polynomiale Konvergenz.

Folglich ist das Dünne Gitter zur Interpolation gut geeignet. Insbesondere läßt sich die Interpolation mit zum Beispiel V_J^0 wieder als Verfahren höherer Ordnung interpretieren.

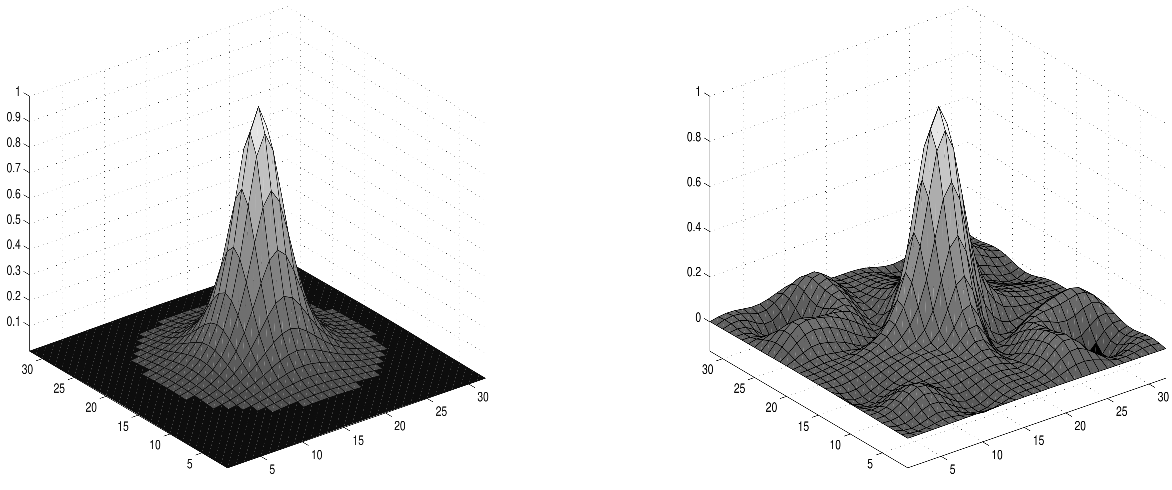


Abbildung 5.7: Interpolant zu Beispiel 2 in $V_5^{-\infty}$ (links) und in V_5^0 (rechts)

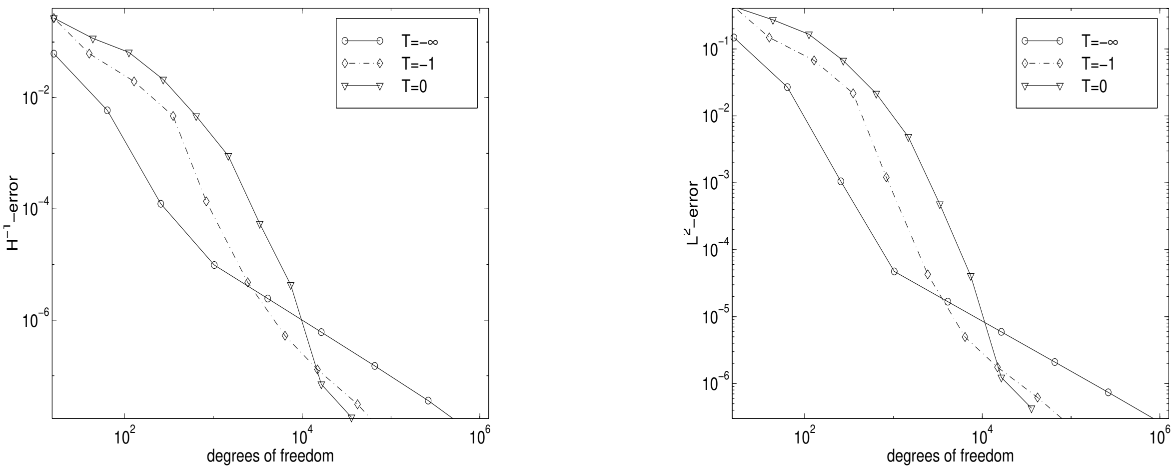
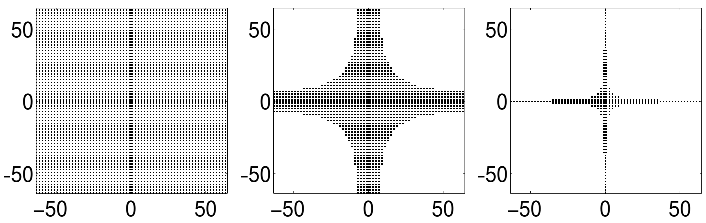


Abbildung 5.8: Beispiel 2: Fehler in der $\mathcal{H}^{-1}$ und $\mathcal{L}^2$-Norm gegen die Anzahl der Freiheitsgrade für verschiedene Approximationsräume V_J^T

Beispiel 3: Als letztes Beispiel für die Interpolation betrachten wir den Tensorprodukt Spline

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{für } x < 1/2, y < 1/2, \\ x(1-y) & \text{für } x < 1/2, y \geq 1/2, \\ (1-x)y & \text{für } x \geq 1/2, y < 1/2, \\ (1-x)(1-y) & \text{für } x \geq 1/2, y \geq 1/2, \end{cases} \quad \text{auf } [0,1)^2.$$

Abbildung 5.9 (links) zeigt eine Darstellung auf einem vollen Gitter auf Level 5. Rechts ist der Interpolant bezüglich des zur Indexmenge I_5^0 gehörenden Gitters abgebildet. Die Funktion f ist aus $\mathcal{H}_{mix}^{3/2-\epsilon}$ $\forall \epsilon > 0$. Es handelt sich hier also um eine Funktion mit dominierender gemischter Glattheit, das heißt Dünngitter-Konstruktionen sind zur Interpolation besonders geeignet. Die Eignung der unterschiedlichen Räume V_J^T zur Approximation dieser Funktion läßt sich auch wieder direkt aus der Fourierdarstellung von f ablesen. Beispielsweise ergeben sich für die diskreten Fourierkoeffizienten bezüglich des vollen Gitters auf Level 7 nach Kompression mit $1e-10, 1e-7$ beziehungsweise $1e-5$ die folgenden Muster



Deutlich ist die Ausprägung einer Kreuzstruktur zu erkennen.
Abbildung 5.11 zeigt Graphen der Fehler gegen die Anzahl der Freiheitsgrade, sowie Graphen der Quotienten $q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$, $q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$ und $q_{\mathcal{H}^{-1}}/q_{dofs}$. Aus diesen Abbildungen läßt sich wieder die Abhängigkeit der Konvergenzordnungen von der gewählten Norm (das heißt vom Exponenten s in der $\mathcal{H}^s$-Norm, hier $s \in \{-1, 0, 1\}$) und von dem gewählten Parameter T ablesen. Beispielsweise erkennt man, daß für $s = -1$ von den beiden Werten $T = -1$ und $T = 0$, die Wahl $T = -1$ die besseren Ergebnisse liefert, wohingegen für $s = 0$ sich $T = 0$ und für $s = 1$ sich $T = 0.25$ als die vorteilhaftere Wahl erweist. Dies ist in Übereinstimmung mit der Theorie, die vorhersagt, daß eine optimale Wahl von T von dem Quotienten $s/t \approx \frac{s}{3/2}$ bestimmt sein sollte. Aus den in Abbildung 5.11 (rechts) dargestellten Ergebnissen erkennen wir wieder die höhere Ordnung der Methoden mit $T \approx 0$. Eine Darstellung des $\mathcal{H}^1$-Fehlers mit einer größeren Auswahl an Parametern T ist in Abbildung 5.10 zu sehen.
Für das volle Gitter lesen wir ein $O(h^{1/2})$, $O(h^{3/2})$ bzw. $O(h^2)$-Verhalten aus den Werten für $q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$, $q_{\mathcal{L}^2}/q_{dofs}$ und $q_{\mathcal{H}^{-1}}/q_{dofs}$ ab, was relativ gut mit den von der Theorie vorhergesagten Werten $O(h^{1/2})$, $O(h^{3/2})$ bzw. $O(h^{5/2})$ übereinstimmt. Für an die Glattheiten angepaßte Interpolationsräume erhalten wir hingegen durchgehend bessere Konvergenzresultate.

Insgesamt haben diese Experimente unsere theoretischen Vorhersagen in Bezug auf die Auswahl von Interpolations-/Approximationsräumen bestätigt. Insbesondere haben

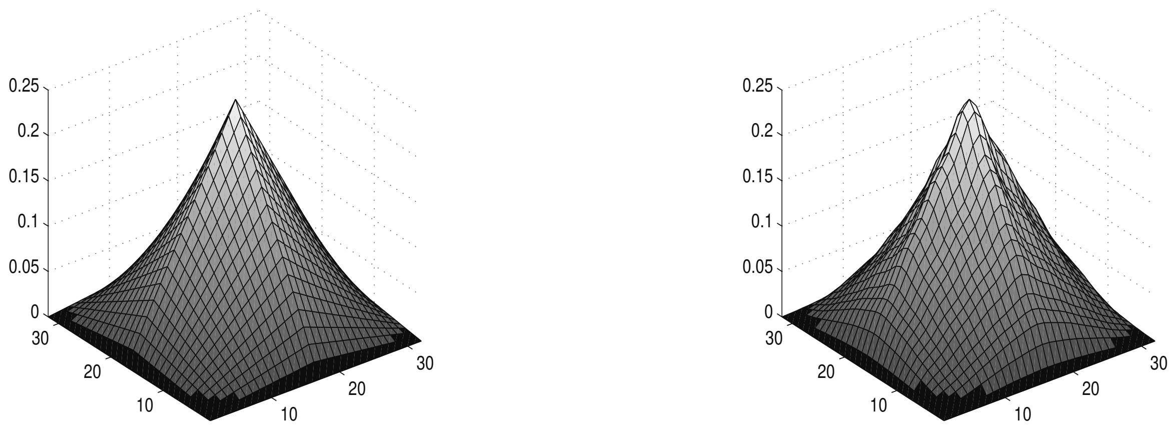


Abbildung 5.9: Beispiel 3: Hutfunktion auf $V_5^{-\infty}$ (links) und Interpolant aus V_5^0 (rechts)

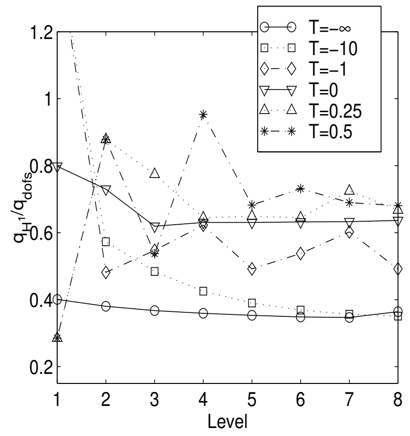


Abbildung 5.10: Beispiel 3: $q_{\mathcal{H}^1}/q_{dofs}$ gegen die Level

wir gesehen, daß die problemangepaßte Wahl von Approximationsräumen zu Verfahren höherer Ordnung führen kann und daß die richtige Wahl des Approximationsraumes nur von dem Verhältnis von isotroper zu dominierender gemischter Glattheit abhängt. Damit kann die Wahl V_J^0 noch weiter verbessert werden. Im Fall reiner isotroper Glattheit konnten wir sehen, daß das volle Gitter aufgrund der kleineren Konstanten im allgemeinen die beste Wahl darstellt. Unterschiede zwischen trigonometrischer Interpolation und Interpolation mit stückweise multilinearen Splines ergeben sich aus der exponentiellen Konvergenz bei der trigonometrischen Interpolation von periodischen C^∞-Funktionen und der Beschränkung der maximal erreichbaren Konvergenzordnung durch die Basisfunktionen im Fall stückweise multilinearer Splines.

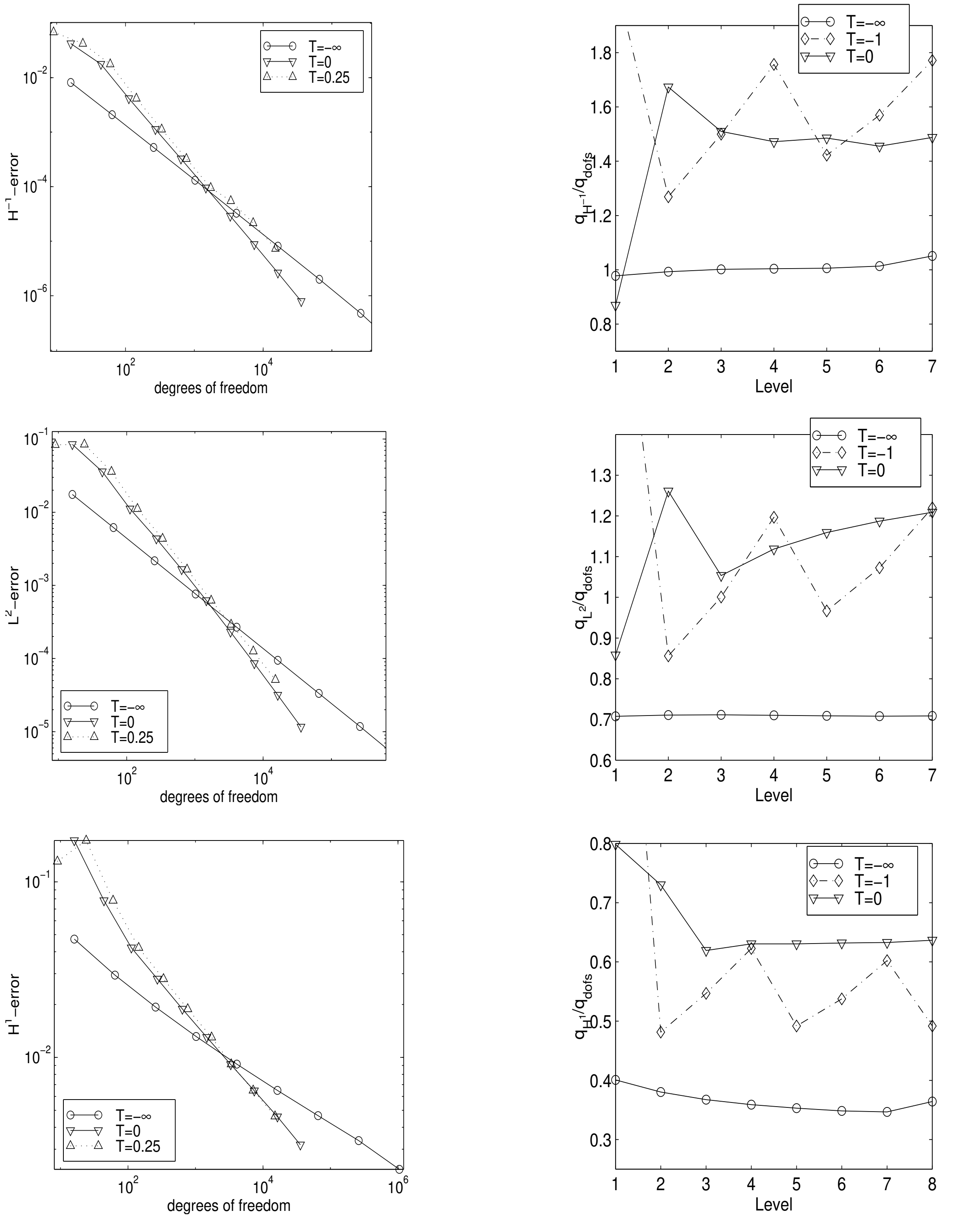


Abbildung 5.11: Beispiel 3: Fehler in der $\mathcal{H}^{-1}, \mathcal{L}^2$ und $\mathcal{H}^1$-Norm gegen die Anzahl der Freiheitsgrade (links) und Quotienten $q_{\mathcal{H}^s}/q_{dofs}$ für $s \in \{-1, 0, 1\}$ gegen die Level (rechts)

5.2 Lösung von Integralgleichungen: Die Einfachschicht-Potentialgleichung

Die Räume V_J^T lassen sich auch als Test- und Ansatzräume in Galerkindiskretisierungen von variationellen Problemen verwenden. Für eine Übersicht über numerische Beispiele unter Verwendung der Räume V_J^0 in anderen Arbeiten siehe den Beginn des Abschnitts 3.5. In diesen Arbeiten wurden die Vorteile des Dünngitterraumes V_J^0 für höherdimensionale Probleme in den Vordergrund gestellt. Wir diskutieren hier hingegen nun ein numerisches Beispiel, daß die Eignung von Dünngitterkonstruktionen zur Approximation von bestimmten Typen von Singularitäten betont.
Wir betrachten als numerisches Beispiel die Einfachschicht-Potentialgleichung, die gegeben ist durch

$$\frac{1}{c} \int\limits_{I^n} \frac{g(y)}{|x-y|} \, dy = f(x), \tag{5.2}$$

vgl. (1.3), wobei wir $f \equiv 1$ wählen. Wir verwenden die variationelle Form von (5.2) auf $\tilde{\mathcal{H}}^{-1/2}(I^n) = \{u = g|_{I^n} : g \in \mathcal{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^n) \text{ und } \operatorname{supp}(g) \subset I^n\}$, ausgestattet mit der Norm $\|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^{-1/2}(I^n)} = \|g\|_{\mathcal{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^n)}$, siehe zum Beispiel [Tri78, Li72]. Die zugehörige Bilinearform lautet

$$a(u,v) = \Big(\frac{1}{c} \int\limits_{I^n} \frac{g(y)}{|x-y|} \, dy, v\Big)_{\mathcal{H}^{1/2} \times \tilde{\mathcal{H}}^{-1/2}}, \;\; g, v \in \tilde{\mathcal{H}}^{-1/2}(I^n).$$

Sie ist symmetrisch und $\tilde{\mathcal{H}}^{-1/2}$-elliptisch. Wir wollen die Kapazität

$$C = \frac{1}{4\pi} \int_{I^n} g(y) dy$$

für $n = 2$ berechnen. Der Vergleichswert 0.366789... ist aus der Literatur bekannt [Ab90]. Zur Berechnung des Kapazitätsfehlers $|C - C_{FE}|$ zwischen dem exakten Wert C und der Finite Elemente Approximation C_{FE} verwenden wir die Tatsache, daß der Kapazitätsfehler äquivalent ist zum Fehler der Finite Elemente Approximation u_{FE} zur exakten Lösung in der Energienorm, das heißt

$$|C - C_{FE}| \simeq \inf_{v \in V_{FE}} \|g - v\|_{\tilde{\mathcal{H}}^{-1/2}},$$

vgl. [Gri98c]. Dieses Beispiel wurde bereits in [Gri98c] hinsichtlich des Approximationsraumes V_J^0 untersucht. Es zeigte sich, daß der Approximationsraum für dieses spezielle Problem sehr gut geeignet ist. Dies läßt sich darauf zurückführen, daß sich die Lösung des Einfachschichtproblems (5.2) in einen regulären und einen singulären Anteil (durch Eck- und Randsingularitäten) zerlegen läßt [Heue94]. Im Inneren des Gebietes sind deswegen nur wenige Gitterpunkte zur Approximation nötig. An den Rändern approximieren die Räume V_J^0 die vorhandenen singulären Anteile aufgrund der besonderen Struktur dieser Räume besonders gut.

5.2.1 Galerkindiskretisierung mit den Räumen V_J^T

Wir zeigen nun hier numerisch, daß die Räume V_J^T mit $T \in (0,1)$ für dieses Problem ebenfalls sehr gut geeignet sind.
Wir assemblieren die Steifigkeitsmatrix vollständig, das heißt wir stellen sie explizit auf. Sie ist in diesem Fall dicht besiedelt, obwohl viele Einträge nahe bei Null sind und sogar zu Null gesetzt werden könnten ohne die Approximation zu verschlechtern [Gri98c], vgl. die Abschnitte 4.2 und 5.2.2. Im Augenblick beschränken wir uns jedoch darauf ohne Kompression zu arbeiten. Wir verwenden Approximationsräume die aus Tensorprodukten von Haar-Wavelets beziehungsweise Prewavelets entstehen, vergleiche Abschnitt 2.2 und [Gri98c]. Die Berechnung der Matrixeinträge kann in diesem Fall sehr effizient geschehen, wie es im Detail in [Gri98c] für diese beiden Fälle beschrieben ist.

Haar Basis

Wir beginnen mit den Haar Funktionen als Test- und Ansatzfunktionen. Abbildung 5.12 zeigt Graphen der Kapazitätsfehler gegen die Anzahl der Freiheitsgrade und die Konditionszahlen gegen die Anzahl der Freiheitsgrade für unterschiedliche Indexmengen I_J^T. Man beachte, daß in diesem Fall die zugehörige Normäquivalenz (2.26) nur für $-1/2 < s < 1/2$ gilt, wir hier aber $s = -1/2$ haben. Folglich führt einfache Diagonalskalierung in diesem Fall nicht zu optimaler Vorkonditionierung. In der Tat ist das asymptotische Verhalten der Konditionszahlen gegeben durch $\kappa(\mathcal{A}_J) = O(J^2)$, siehe [Os98a] und vergleiche Abbildung 5.12 (rechts).
Man erkennt, daß die Räume V_J^T mit $T > 0$ in diesem Fall ebenfalls gut zur Approximation geeignet sind, ja zum Beispiel mit $V_J^{0.5}$ eine noch bessere Approximation als mit V_J^0 erzielt werden kann, da dann die logarithmischen Terme die in der Dimension des Approximationsraumes V_J^0 vorhanden sind, noch unterdrückt werden. Der Grund für dieses Verhalten ist wie gesagt in den Rand- und Eckensingularitäten der Lösung die durch die Räume V_J^T mit großem T (das heißt nahe bei 1) gut approximiert werden, und dem glatten Lösungsverlauf im Inneren des Gebietes zu finden. Es sei in diesem Zusammehang auf die Arbeit [Os98b] verwiesen, in der erste theoretische Untersuchungen bezüglich der Approximation von Randsingularitäten mittels Dünngitterkonstruktionen durchgeführt werden.

Prewavelet Basis

Im Fall der Prewavelet Basis entnehmen wir [Gri98c] die Stabilität der resultierenden Zerlegung in $\mathcal{H}^{-1/2}$. Damit besitzen die diagonalskalierten Steifigkeitsmatrizen die zu den Räumen V_J^T gehören, ebenfalls beschränkte Kondition.
Abbildung 5.13 zeigt die Ergebnisse. Die Notation ist die gleiche wie oben beschrieben. Die Abhängigkeit der Konditionszahl von der Anzahl der Freiheitsgrade zeigt das vorhergesagte $O(1)$ Verhalten. Wiederum erweisen sich die Räume mit $T \geq 0$ als gut geeignet für dieses Problem. Im Vergleich zu den Ergebnissen mit der Haar-Basis stellt sich jedoch keine starke Verbesserung in der Approximationsordnung ein. Der Grund ist auch hier in den Ecken-Kanten-Singularitäten der Lösung des Problems zu finden.

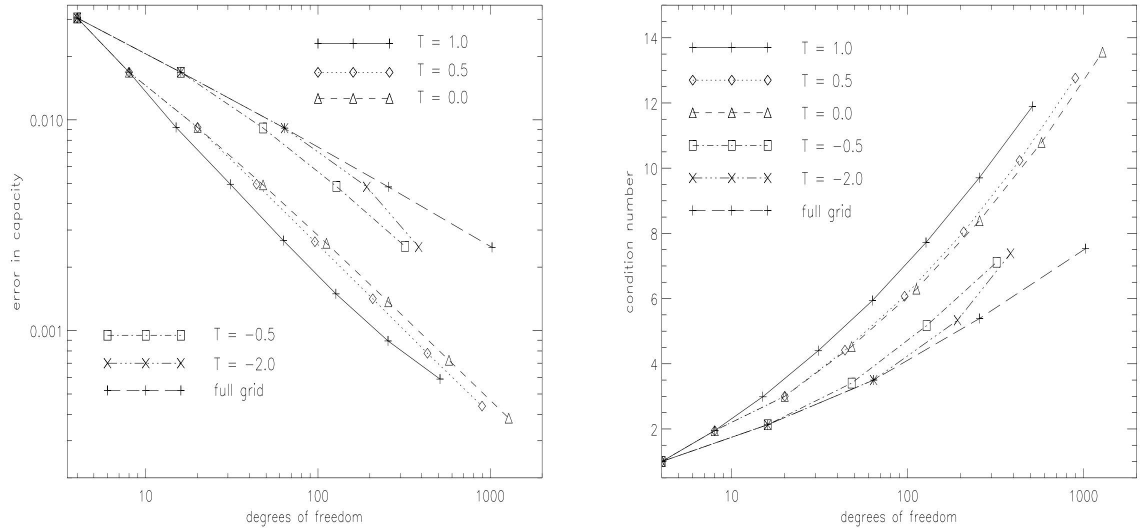


Abbildung 5.12: Kapazitätsfehler gegen die Anzahl der Freiheitsgrade (links) und Konditionszahl gegen die Anzahl der Freiheitsgrade (rechts), Haar basis

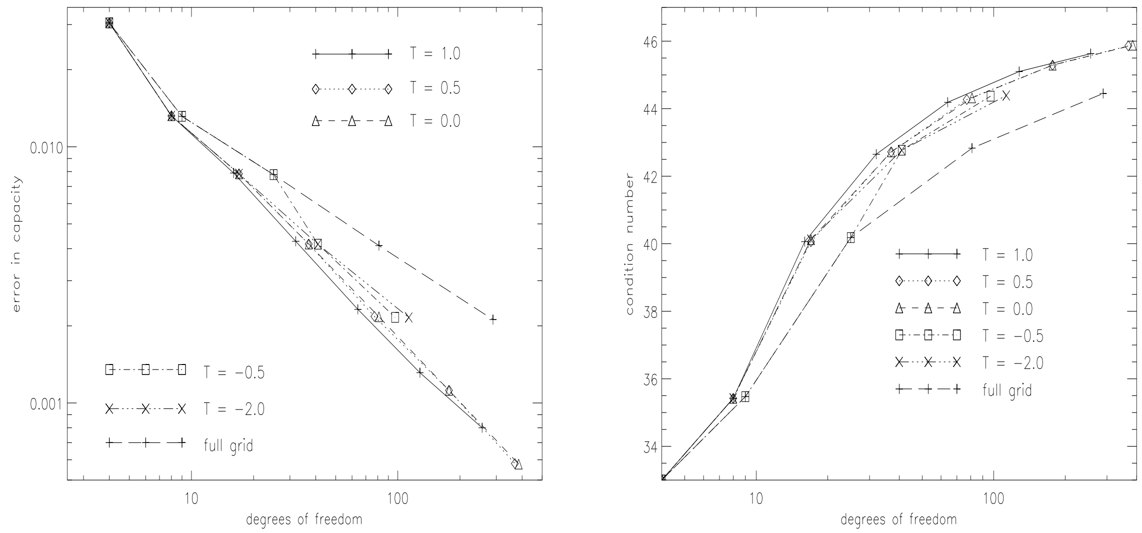


Abbildung 5.13: Kapazitätsfehler gegen die Anzahl der Freiheitsgrade (links) und Konditionszahl gegen die Anzahl der Freiheitsgrade (rechts), Prewavelets

5.2.2 Zusätzliche Kompression durch Treshholding

Numerische Beispiele für das Einfachschichtproblem in [Gri98c] deuten an, daß im Falle der Diskretisierung auf hyperbolischen Kreuzen zusätzliche Kompression der Steifigkeitsmatrix auf etwa ein Fünftel der ursprünglichen Matrixeinträge möglich ist. Im folgenden untersuchen wir etwas genauer, welcher zusätzliche Kompressionseffekt bei der Einfachschicht-Potentialgleichung durch einfaches Threshholding, das heißt durch

a-posteriori Abschneiden der Einträge der Steifigkeitsmatrix erreicht werden kann.
Wir betrachten dazu wieder die Einfachschicht-Potentialgleichung (5.2) mit $f \equiv 1$. Neben Diskretisierungen mit den Approximationsräumen $V_J^{-\infty}$ (Vollgitter-Approximationsraum) und V_J^0 (Dünngitter-Approximationsraum) untersuchen wir dazu auch adaptive, auf V_J^0 aufbauende Approximationsräume, wie sie in [Gri98c] ausführlich beschrieben wurden. Da die führenden Komponenten der Singularität der Lösung bekannt sind, können regularisierte Funktionen angegeben werden die diese führenden Terme gut beschreiben. Diese Funktionen können dann verwendet werden um adaptive Dünngitterräume zu konstruieren. Wir belassen es an dieser Stelle bei dieser Motivation, da die hier verwendete Konstruktion genau der in [Gri98c] beschriebenen enspricht. Für Details sei auf diese Arbeit verwiesen.
Die jeweiligen Finite Elemente Steifigkeitsmatrizen wurden wieder exakt berechnet und dann wurden nach Diagonalskalierung alle Einträge kleiner als ein Abschneideparameter ϵ aus den jeweiligen Matrizen entfernt (das heißt zu Null gesetzt).
Die folgenden Tabellen beinhalten die Ergebnisse der Berechnungen. Aufgetragen sind jeweils die Levelzahl und in Klammern die Anzahl der Gitterpunkte, der Abschneideparameter ϵ, die Kompressionsrate

$$C_\epsilon = \frac{\text{Anzahl der Nicht} - \text{Null} - \text{Elemente in der Steifigkeitsmatrix}}{\text{Gesamtzahl der Elemente in der Steifigkeitsmatrix}},$$

die Kondition κ_ϵ der diagonalskalierten komprimierten Steifigkeitsmatrix und der Kapazitätsfehler δ_ϵ.
Interessant ist nun die unterschiedlich gute Kompression die mit den verschiedenen Approximationsräumen erzielt werden kann. In den Spalten der Tabellen mit den Kompressionsraten C_ϵ sind diejenigen Werte hervorgehoben, bei denen der Kapazitätsfehler noch nicht größer ist als der Fehler für das nichtkomprimierte System. Im Fall der Vollgitter-Approximationsräume $V_J^{-\infty}$ ergeben sich nach den Tabellen 5.9 (für die Haarbasis) und 5.10 (für die Prewaveletbasis) mit größer werdender Levelzahl immer bessere Kompressionsraten. Im Fall der Approximationsräume V_J^0 hingegen scheinen die Kompressionsraten zu stagnieren, vergleiche die Tabellen 5.11 und 5.12. Noch deutlicher fällt dieser Effekt beim adaptiven Dünnen Gitter aus. Scheinbar ist in diesen Fällen kein asymptotisch relevanter Kompressionseffekt erzielbar. Auf die Konditionszahlen hat die Kompression nur einen geringen Einfluß.
In den Abbildungen 5.14-5.16 sind die Ergebnisse visualisiert. Die x-Achse bezeichnet die Prozentzahl der Nullelemente in der komprimierten Steifigkeitsmatrix und die y-Achse bezeichnet den Kapazitätsfehler. Abbildung 5.17 zeigt das Verhalten der Kondition beim threshholding exemplarisch am Beispiel der Haar-Basis auf einem adaptiven Dünnen Gitter. Hier bezeichnet die x-Achse die Prozentzahl der Nullelemente in der komprimierten Steifigkeitsmatrix und die y-Achse bezeichnet die Kondition.
Es scheint also (zumindest in diesem Beispiel) so zu sein, daß einfaches Abschneiden von Einträgen kleiner als ein bestimmter Schwellwert zu keiner optimalen Kompression führt, zumindest nicht bei Dünngitter-Approximationsräumen beziehungsweise adaptierten Dünngitter-Approximationsräumen. Dies spiegelt die Tatsache wider, daß die entscheidenden Effekte bei der Kompression sich auf den feinen Skalen und deren Wech-

selwirkungen abspielen. Die "Anzahl" der feinen Skalen und folglich auch deren Wechselwirkungen ist beim Dünnen Gitter im Vergleich zum vollen Gitter jedoch erheblich reduziert.
Inwieweit dieses Phänomen auf dieses spezielle Beispiel beschränkt ist oder etwa die in Abschnitt 4.2 entwickelte verfeinerte Kompressionstechnik für Tensorprodukt-Diskretisierungen mit den Räumen V_J^T zu besseren Ergebnissen führt, wäre noch zu untersuchen.

Tabelle 5.9: Haar-Basis, Vollgitter-Approximationsraum

J (N)	ε	C_ε	κ_ε	δ_ε
2(16)	0	100.00%	2.13702	−0.0168120
	0.1	**18.75%**	1.91753	−0.0163921
	0.12	12.50%	1.76048	−0.0304521
3(64)	0	100.00%	3.49613	−0.00913272
	0.092	**7.81%**	3.41423	−0.00716458
	0.1	6.64%	3.16566	−0.01421072
4(256)	0	100.00%	5.38979	−0.00480636
	0.08	**2.78%**	5.99098	−0.00325562
	0.1	2.05%	5.76325	−0.01175018
5(1024)	0	100.00%	7.52754	−0.00248256
	0.095	**0.57%**	9.87876	−0.00085536
	0.1	0.56%	9.95966	−0.00855363

Tabelle 5.10: Prewavelets, Vollgitter-Approximationsraum

J (N)	ε	C_ε	κ_ε	δ_ε
3(25)	0	100.00%	40.1798	−0.00778527
	0.06	**30.88%**	39.5475	−0.00630571
	0.07	24.48%	101.2260	−0.00982006
4(81)	0	100.00%	42.8374	−0.00411310
	0.05	**11.05%**	58.0457	−0.00138730
	0.06	9.16%	40.9729	−0.00497964
5(289)	0	100.00%	44.4487	−0.00211549
	0.02	**5.83%**	49.8508	−0.00181065
	0.03	3.94%	43.1590	−0.00297954

Tabelle 5.11: Haar-Basis, Approximationsraum V_J^0

J (N)	ε	C_ε	κ_ε	δ_ε
3(20)	0	100.00%	3.00361	−0.00920882
	0.09	**28.00**%	2.91314	−0.00716458
	0.1	24.00%	2.79733	−0.01421071
4(48)	0	100.00%	4.53131	−0.00491450
	0.09	**13.37**%	4.78251	−0.00325562
	0.1	12.33%	4.67763	−0.01175018
5(112)	0	100.00%	6.29447	−0.00259633
	0.02	**14.13**%	6.79108	−0.00163031
	0.03	11.26%	7.16616	−0.00319772
6(256)	0	100.00%	8.38780	−0.00136873
	0.01	**14.15**%	8.65900	−0.00137816
	0.015	10.42%	9.18279	−0.00308826
	0.15	1.48%	5.27054	−0.03045213
7(576)	0	100.00%	10.7946	−0.00072313
	0.005	**10.89**%	10.8683	−0.00053417
	0.006	9.72%	11.1276	−0.00109859

Tabelle 5.12: Prewavelets, Approximationsraum V_J^0

J (N)	ε	C_ε	κ_ε	δ_ε
3(37)	0	100.00%	42.72	−0.00417309
	0.05	**22.57**%	54.92	−0.00213302
	0.06	20.23%	40.35	−0.00549778
4(81)	0	100.00%	44.32	−0.00216894
	0.05	**9.71**%	62.60	−0.00107065
	0.06	8.31%	41.26	−0.00495676
5(177)	0	100.00%	45.29	−0.00112003
	0.01	**13.21**%	49.04	−0.00089060
	0.02	9.90%	49.06	−0.00197806
6(385)	0	100.00%	45.88	−0.000577038
	0.0055	**8.02**%	47.98	−0.000066028
	0.01	6.44%	50.47	−0.001561924

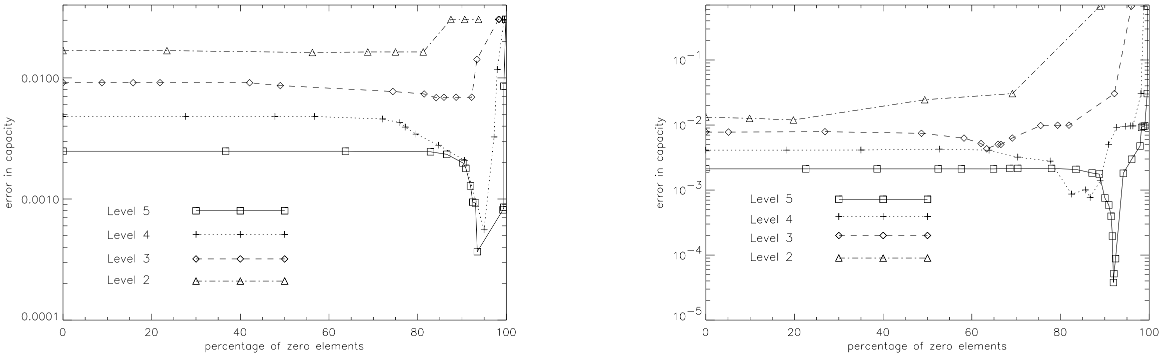


Abbildung 5.14: Kapazitätsfehler gegen Kompressionsrate für die Haar-Basis (links) und die Prewavelet-Basis (rechts) im Falle des vollen Gitters, $T = -\infty$

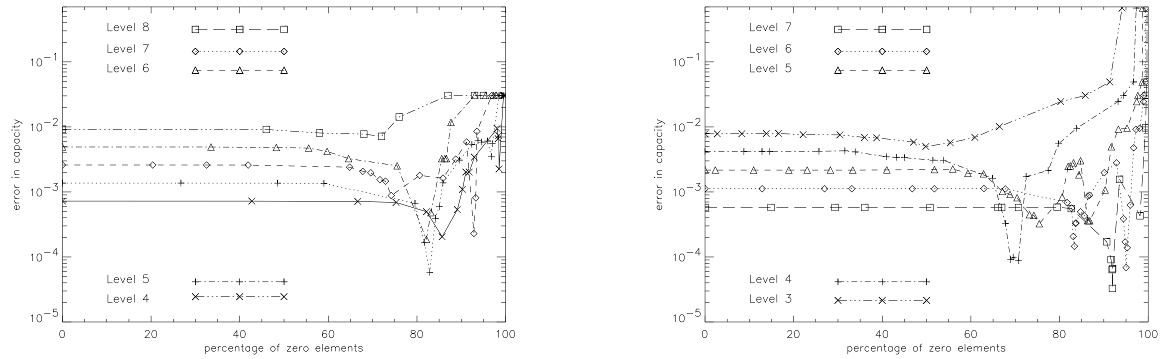


Abbildung 5.15: Kapazitätsfehler gegen Kompressionsrate für die Haar-Basis (links) und die Prewavelet-Basis (rechts) auf Dünnem Gitter, $T = 0$

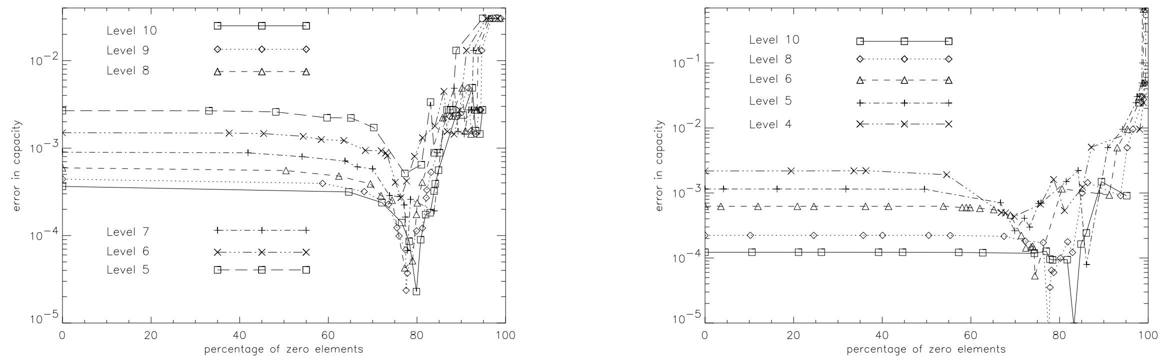


Abbildung 5.16: Kapazitätsfehler gegen Kompressionsrate für die Haar-Basis (links) und die Prewavelet-Basis (rechts), adaptives Dünnes Gitter

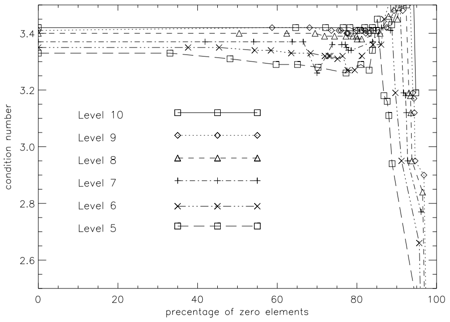


Abbildung 5.17: Konditionszahlen gegen Kompressionsrate für die Haar-Basis, adaptives Dünnes Gitter

5.3 Beispiele zur Kernapproximation bei der Integralauswertung

Wir führen numerische Beispiele an, die die theoretischen Ergebnisse des Abschnitts 4.1 konkretisieren. Es geht uns dabei wieder darum, den Einfluß der richtigen Wahl der Approximationsräume zu verdeutlichen.
Wir betrachten das Integral

$$h(x) = \int_{T^n} K(x,y)u(y)dy \tag{5.3}$$

und wählen in Anlehnung an [Fr96]

$$\begin{aligned} K(x_1,\ldots,x_{2n}) &= \frac{1}{2\zeta(6)^n\pi^n} \sum_{j_1,\ldots,j_{2n}>0} \prod_{i=1}^{2n} \frac{\sin(j_i x_i)}{j_i^3}, \\ u(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{j_1,\ldots,j_n>0} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin(j_i x_i)}{j_i^3} \end{aligned}$$

mit $\zeta(6) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^6} = \frac{\pi^6}{945}$ der Riemannschen ζ-Funktion. Wie man leicht nachrechnet, ist das Ergebnis der Integralauswertung dann gegeben durch $h = u/2$. Die Funktionen K, u und h sind Elemente aus $\mathcal{H}_{mix}^{5/2-\epsilon}$ auf T^{2n} beziehungsweise T^n, für alle $\epsilon > 0$. Entsprechend dieser Glattheiten ist bei Messen des Fehlers in der $\mathcal{H}^s$-Norm, $s < 5/2$, nach (4.11) die Indexmenge

$$SGA(s) := \{(\mathbf{j},\mathbf{k}) \in \mathbb{N}^{2n} : \frac{5}{2}|\mathbf{j},\mathbf{k}|_1 + \frac{5}{2}|\mathbf{k}|_1 - s|\mathbf{j}|_\infty \le (\frac{5}{2} - s)J\} \tag{5.4}$$

für die Approximation des Kerns bei der Integralauswertung besonders geeignet. Zum Vergleich verwenden wir als Indexmengen für die Approximation des Kerns neben (5.4) auch noch die Indexmengen des vollen Gitters

$$VG := \{(\mathbf{j},\mathbf{k}) \in \mathbb{N}^{2n} : |\mathbf{j},\mathbf{k}|_\infty \le J\} \tag{5.5}$$

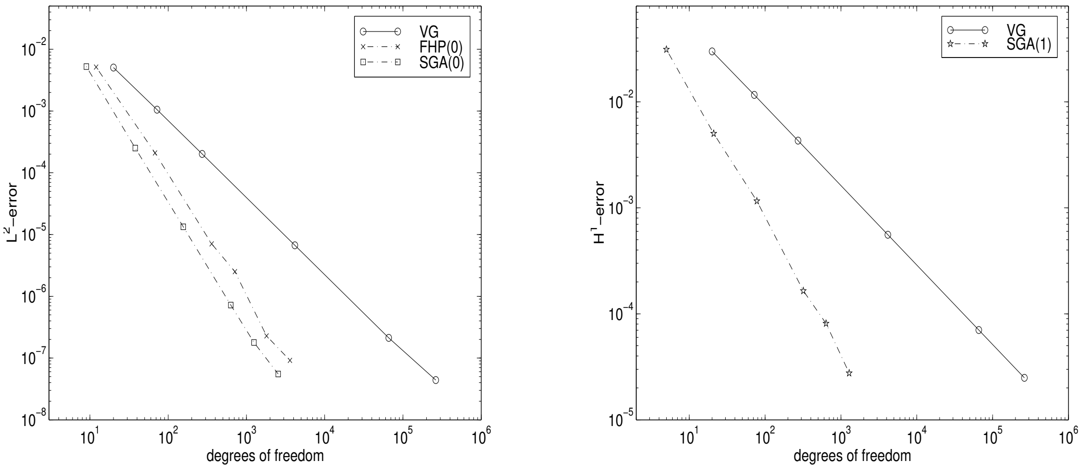


Abbildung 5.18: Fehler in der $\mathcal{L}^2$- beziehungsweise $\mathcal{H}^1$-Norm gegen Anzahl der im Algorithmus verwendeten Koeffizienten für unterschiedliche Kern-Approximationen

und eine an die Glattheiten $\mathcal{H}^{5/2}$ (für den Kern und für u) angepaßte Indexmenge

$$FHP(s) \quad := \quad \{(\mathbf{j},\mathbf{k}) \in \mathbb{N}^{2n} : \frac{5}{2}|\mathbf{j},\mathbf{k}|_\infty + \frac{5}{2}|\mathbf{k}|_\infty - s|\mathbf{j}|_\infty \leq (\frac{5}{2} - s)J\}, \qquad (5.6)$$

vgl. ebenfalls (4.11). Die resultierenden Indexmengen für die Approximationen von u und h sind dann jeweils über (4.13) gegeben.
In den von uns verwendeten Algorithmen werden Blending-Schemata für die Approximation des Kerns K als auch für die Approximation von u und des Ergebnisses h entsprechend Abschnitt 4.1.2 eingesetzt. Man beachte, daß die Algorithmen in natürlicher Weise dimensionsrekursiv aufgebaut sind und somit direkt für beliebige Dimensionen arbeiten.

Integralauswertung in 1D Wir beginnen mit dem Fall $n = 1$, das heißt der Kern K ist zweidimensional. Abbildung 5.18 zeigt die Genauigkeit der Methoden die mit den unterschiedlichen Kern- und Funktionenapproximationen arbeiten, wie sie aus den Indexmengen (5.4)-(5.6) resultieren. Es sind Ergebnisse für $s = 0$ ($\mathcal{L}^2$-Norm) beziehungsweise $s = 1$ ($\mathcal{H}^1$-Norm) zu sehen. Die Abszisse bezeichnet die Gesamtzahl der Fourierkoeffizienten die im Algorithmus verwendet werden und auf der Ordinate sind jeweils die Fehler der approximativen Lösungen in der $\mathcal{L}^2$- beziehungsweise $\mathcal{H}^1$-Norm aufgetragen. Die Ergebnisse bestätigen die theoretischen Vorhersagen für die Konvergenzordnungen. Wie von der Theorie vorhergesagt, ergibt die angepaßte Indexmenge $SGA(0)$ für die $\mathcal{L}^2$-Norm und $SGA(1)$ für die $\mathcal{H}^1$-Norm jeweils die besten Ergebnisse. Annehmbare Ergebnisse lieferen auch die an die isotrope Glattheit angepaßten Indexmengen $FHP(s)$, wohingegen die Indexmenge zum vollen Gitter offensichtlich nicht geeignet ist.

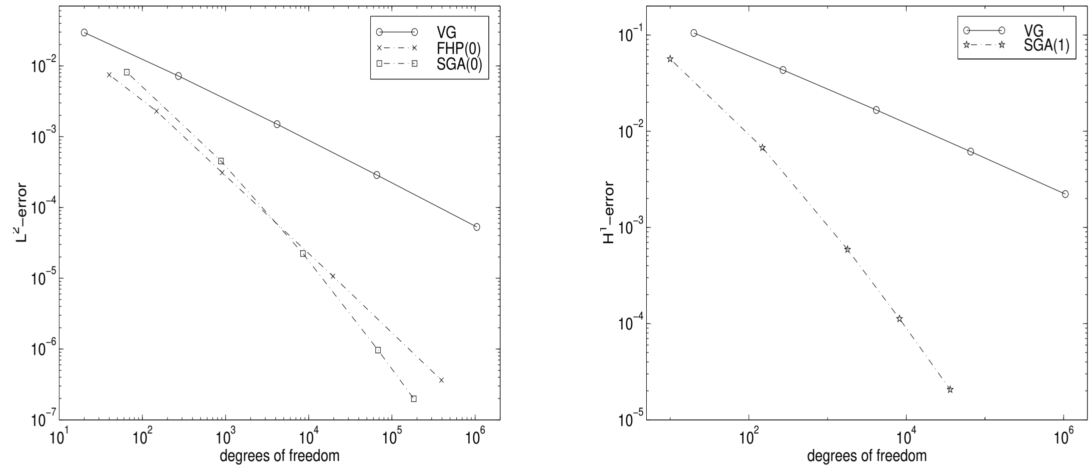


Abbildung 5.19: Fehler in der $\mathcal{L}^2$- beziehungsweise $\mathcal{H}^1$-Norm gegen Anzahl der im Algorithmus verwendeten Koeffizienten für unterschiedliche Kern- und Funktionen-Approximationen

Integralauswertung in 2D Nun betrachten wir den Fall $n = 2$. Man beachte, daß der Kern K somit vierdimensional ist. Im Mehrdimensionalen können zusätzlich neben dem Kern auch noch die Funktionen u und h aus (5.3) auf speziell angepaßten Dünngitter-Konstruktionen approximiert werden.
Zu Vergleichszwecken verwenden wir neben den an die Glattheiten angepaßten Indexmengen $SGA(s)$ aus (5.4) zusätzlich wieder die in (5.5) und (5.6) angegebenen Indexmengen des vollen Gitters VG und die an die Glattheiten $\mathcal{H}^{5/2}$ angepaßten Indexmengen $FHP(s)$. Man beachte, daß im Fall des vollen Gitters VG die Anzahl der bei der Integralauswertung verwendeten Koeffizienten nun von der Ordnung $O(2^{2nJ}) = O(2^{4J})$ ist, wohingegen für die Indexmenge $SGA(1)$ nur $O(2^J)$ und für $SGA(0)$ $O(2^J J)$ Koeffizienten beteiligt sind.
Abbildung 5.19 zeigt die Genauigkeit der Methoden die mit diesen unterschiedlichen Kern- und Funktionenapproximationen arbeiten. Die Ergebnisse bestätigen wiederum die theoretischen Vorhersagen für die Konvergenzordnungen. Insbesondere erkennen wir aus der linken Abbildung in der der Fehler bezüglich der $\mathcal{L}^2$-Norm dargestellt ist, daß die an die gemischten Ableitungen angepaßte Indexmenge $SGA(0)$ bessere Ergebnisse liefert als die an die isotrope Glattheit angepaßte Indexmenge $FHP(0)$. Der Unterschied tritt jetzt im Vergleich zum eindimensionalen Fall aufgrund der höheren Dimension deutlich hervor.

Die Beispiele zeigen, daß die richtige Wahl der Approximationsräume für die Kernapproximation entscheidend ist für die resultierenden Konvergenzordnungen. Insbesondere haben wir gesehen, daß sowohl die Glattheit des Kerns als auch die Glattheit der Funktion u, wie auch die Norm in der der Fehler gemessen wird, bei der Wahl der Approximationsräume berücksichtigt werden sollte. In Extremfällen sind dann Approximationen möglich, bei denen der Einfluß der Dimension n asymptotisch verschwindet.

6 Zusammenfassung und Schlußbemerkungen

In dieser Arbeit führten wir Untersuchungen bezüglich Tensorprodukt-Approximationsräumen durch. Dazu wurden spezielle Glattheitsklassen eingeführt, die eine Mischung aus isotroper Glattheit und dominierender gemischter Glattheit erlauben. Es wurden Approximationsräume definiert, die bekannte Dünngitter-Konstruktionen zu einer Skala von Dünnen Gittern verallgemeinern. Diese lassen sich zur Lösung von Operatorproblemen beliebiger Ordnung verwenden, insbesondere auch für Probleme mit Integraloperatoren. Es wurden Fehlerabschätzungen in Sobolevnormen angegeben, die – zusammen mit Abschätzungen für die Anzahl der Freiheitsgrade in diesen Approximationsräumen – zu Abschätzungen für die Kosten der entstehenden Approximations- und Interpolationsalgorithmen führen. Insbesondere wurde gezeigt unter welchen Bedingungen an die Glattheit der Lösung von variationellen Problemen und an die Fehlernorm, Algorithmen zur Lösung von variationellen Problemen konstruiert werden können deren Kosten asymptotisch von der Raumdimension unabhängig sind. Die Wahl des optimalen Approximationsraumes hängt dabei nur vom Verhältnis zwischen isotroper Glattheit und dominierender gemischter Glattheit ab. Insbesondere identifizierten wir diejenigen Fälle, in denen die bei der Verwendung der "hyperbolisches Kreuz"-Approximationsräume auftretenden logarithmischen Terme durch eine geschickte Wahl der Approximationsräume entfernt werden können. Als Anwendung und zur Veranschaulichung der Theorie betrachteten wir verschiedene Interpolationsprobleme und diskutierten Anwendungen auf Integral- und Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Als Spezialfall bei der Anwendung auf die Poisson-Gleichung konnten wir ein Ergebnis von [Bun99] bezüglich der Komplexität der Poisson-Gleichung im Hinblick auf die geforderte Glattheit der Lösung verschärfen.

Da unsere neuen Approximationsräume algorithmisch nicht so einfach zu handhaben sind wie die zu vollen Gittern gehörigen Räume, konstruierten wir Blending-Schemata die die Verwendung von komplizierteren Datenstrukturen vermeiden helfen und die direkte Anwendbarkeit hierarchischer Methoden – wie zum Beispiel Multilevel Methoden und der schnellen Fouriertransformation – möglich machen.

Im Hinblick auf die Approximation von Integraloperatoren wurden – neben der speziellen Auswahl von Ansatz- und Testfunktionen für die Galerkinmethode – zwei verschiedene Verfahren untersucht. Einerseits eine Technik bei der die Glattheit der Kernfunktion ausgenutzt wird und spezielle Dünngitter-Konstruktionen zur Approximation des Kerns verwendet werden. In diesem Zusammenhang verallgemeinerten wir Ergebnisse aus den Arbeiten von [Pe89, Fr96] auf allgemeinere Normen und auf allgemeinere Glattheitsannahmen. Unsere Untersuchungen zeigten, daß die richtige Wahl der Approximationsräume für die Kernapproximation entscheidend ist für die resultierenden Konvergenzordnungen. Insbesondere haben wir gesehen, daß sowohl die Glattheiten der beteiligten Funktionen, wie auch die Norm in der der Fehler gemessen wird, bei der Wahl der Approximationsräume berücksichtigt werden sollte. Unsere speziellen Konstruktionen von Indexmengen erlauben eine vollständig dem Problem angepaßte Wahl von Approximationsräumen für die Lösung von Integralproblemen mit glatten Kernen auf einfachen Geometrien. Weiterhin gaben wir auch hierfür Blending-Schemata an,

die wieder dimensionsrekursive Algorithmen mit einfachen Datenstrukturen erlauben. Außerdem führten wir Betrachtungen bezüglich einer Kompressionstechnik durch, die auf dem Abfall des Kerns im physikalischen Raum beruht. Eine Abschätzung der Größe der Einträge der Steifigkeitsmatrix zusammen mit einer Fehlerabschätzung für die komprimierte Matrix erlaubten dann die Angabe von geeigneten Kriterien für die Kompression der Steifigkeitsmatrix. Diese Technik ist für Nicht-Tensorprodukt-Basen bereits vielfach untersucht worden, siehe z.B. die Zitate in [Schn98]. Um Aussagen über den Erfolg dieser Art von Kompression für den Tensorprodukt-Fall machen zu können, werden noch Abschätzungen über die Anzahl der nach der Kompression in der Steifigkeitsmatrix verbleibenden Nicht-Null-Einträge benötigt. Wir vermuten, daß bei Tensorprodukt-Diskretisierungen durch diese Kompressionstechnik alleine keine optimale Kompression erzielt werden kann. Vielmehr scheint nur eine Kombination dieser Kompression und einer Kompression die die Glattheit des Kerns bzw. der Lösung ausnutzt, wie wir sie in den Abschnitten 3.2 bzw. 4.1 untersucht haben, erfolgversprechend zu sein. An dieser Stelle sind weitere Untersuchungen nötig, um die verschiedenen Arten der Kompression bzw. Approximation die wir hier betrachtet haben, in idealer Weise miteinander zu verschmelzen.
Neben Arbeit auf diesem Gebiet bietet sich folgender Bereich für weitere Forschung an: Bei Algorithmen die Dünngitterkonstruktionen zur Approximation verwenden, müssen eventuell auftretende singuläre Anteile der Lösung des variationellen Problems im allgemeinen durch adaptive Verfeinerungstechniken unter Verwendung lokaler a-posteriori Fehlerschätzer oder Fehlerindikatoren oder (falls möglich) durch ein a-priori Anpassen des Approximationsraumes an die Lösung (wie zum Beispiel im Falle von Eck- oder Kantensingularitäten) behandelt werden. Adaptive Verfeinerungstechniken unter Verwendung von Fehlerschätzern oder Fehlerindikatoren wurden insbesondere im Hinblick auf Finite Elemente Diskretisierungen partieller Differentialgleichung [Babu78, Ban85, Ve94, Babu94] oder Integralgleichungen [Step95, Mai96] entwickelt. Wir verweisen auch auf die kürzlich erschienenen Arbeiten [Dah97, Da97a, DeV98b] in denen exzellente Resultate mit N-Term Approximation erzielt wurden. Insgesamt erscheint eine Kombination aus Adaptivität – um die nicht-glatten Anteile der Lösung zu erfassen – und einem dünnen Gitter – für die Approximation des glatten Anteils – ein Ansatz zu sein, der weitere Untersuchungen als lohnend erscheinen läßt.
Es sei an dieser Stelle noch erwähnt, daß speziell für anisotrope elliptische Probleme

$$-\sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} u = f, d_i > 0,$$

leichte Abänderungen unserer Approximationsräume zu weiteren Verbesserungen der Approximationseigenschaften führen. Dazu geht man bei der Konstruktion von Approximationsräumen und Vorkonditionieren nicht den Umweg über die $\mathcal{H}^1$-Norm, sondern verwendet direkt Normäquivalenzen bezüglich der zugehörigen Bilinearform $a(.,.)$, da sonst die Konstanten in den Abschätzungen aufgrund der großen Elliptizitätskonstanten (die von $\max_{1\le i\le n}(d_i)/\min_{1\le i\le n}(d_i)$ abhängen) groß werden und das Verhalten der Approximanden für praktikable Problemgrößen dominieren.

Eine Überlegung analog zu der im Beweis von Theorem 1 zeigt unter den gleichen Voraussetzungen wie dort

$$a(u,u) \simeq \sum_{\mathbf{j}} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \, 2^{2j_i} \right) \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \simeq \sum_{\mathbf{j}} \max_{1\le i\le n} (d_i 2^{2j_i}) \|w_{\mathbf{j}}\|^2_{\mathcal{L}^2} \tag{6.1}$$

für $u \in \mathcal{H}^1, u = \sum_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}}, w_{\mathbf{j}} \in W_{\mathbf{j}}$. Verglichen mit der Normäquivalenz (2.26) ist das Gewicht $2^{2|\mathbf{j}|_\infty}$ ersetzt worden durch das Gewicht $\max_{1\le i\le n}(d_i 2^{2j_i})$, das Information von der Anisotropie enthält. O.B.d.A. nehmen wir an, daß $d_1 = \operatorname{argmax}_{1\le i\le n}\{d_i\}$ und $d_n = \operatorname{argmin}_{1\le i\le n}\{d_i\}$ gelten. In Analogie zu (3.11) erhält man dann für Lösungen aus $\mathcal{H}^{t,l}_{mix}$ aus (6.1) die an das Problem angepaßten Indexmengen

$$I_J^{t,l,d} \;:=\; \{\mathbf{j} : -|\mathbf{j}|_1 - \frac{l}{t}|\mathbf{j}|_\infty + \frac{1}{2t}\ln_2(\max_{1\le i\le n}(\frac{d_i}{d_n}2^{2(j_i-2J)})) \ge -(n+J-1) - \frac{l}{t}J\},$$

wobei der Index d die Abhängigkeit von den Parametern $d_i, 1 \le i \le n$, anzeigt. Im Fall extremer Anisotropie enthalten die entstehenden Gitter extrem in die Richtung der Anisotropie gestreckte Gitter. Abschätzungen über die Dimension und die Ordnung der Approximation der zugehörigen Räume erhält man wie in Abschnitt 3.2.2.

Verallgemeinerungen unserer Dünngitterkonstruktionen auf allgemeinere Gebiete sind über Gebietstransformationstechniken [Gord73, Ca76, Do97, Schi98] oder mittels Gebietszerlegung und Transformationstechniken [Dah98a] möglich, siehe auch [Ci83a, Ci83b] für die theoretischen Grundlagen der Charakterisierung von Funktionenräumen über Zerlegungen von Gebieten. Man beachte jedoch, daß $[0,1]^n$ in vielen höherdimensionalen physikalischen Problemen als Rechengebiet verwendet wird.

Zusammenfassend erweisen sich Tensorprodukt-Basen und Sobolevräume aus einer Mischung aus isotropen und dominierenden gemischten Glattheiten als geeignete Werkzeuge um Differential- und Integralgleichungen in höheren Dimensionen zu untersuchen und approximativ mittels zum Beispiel Finite Elemente Methoden zu lösen. Insbesondere bei der Approximation von Lösungen von Integralgleichungen ist das bestehende Potential von Tensorprodukt-Approximationen noch lange nicht ausgeschöpft. Wir versprechen uns, daß unsere hier vorgestellten Resultate diesbezüglich zu weiteren Fortschritten in Theorie und Praxis führen.

Literatur

[Ab90] S. Abou El-Soud, V. J. Ervin, E. P. Stephan, *An improved boundary element method for the charge density of a thin electrified plate in* $\mathbb{R}^3$, Math. Meth. Appl. Sci. 13 (1990), 291-303.

[Ac97] S. Achatz, *Numerische Lösung der Poissongleichung für das Potential einer Punktladung*, Diplomarbeit, Inst. für Informatik, TU München, 1997.

[Ad75] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[Al88] Allen M.B., Behie G.A., Trangenstein J.A., *Multiphase flow in porous media – Mechanics, Mathematics and Numerics*, Lecture Notes in Engineering 34, Brebbia C.A. and Orszag S.A. (eds.), Springer-Verlag, 1988.

[An94] L. Andersson, N. Hall, B. Jawerth, G. Peters, *Wavelets on closed subsets of the real line*, Topics in the Theory and Applications of Wavelets, L. L. Schumaker and G. Webb (eds.), Academic Press, Boston, 1994, 1-61.

[Ar61] N. Aronszajn, K. T. Smith, *Theory of Bessel potentials I*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 11 (1961), 385-475.

[Au92] P. Auscher, *Wavelets with boundary conditions on the interval*, Wavelets: A tutorial in theory and applications, C.K. Chui (ed.), Acad. Press, Boston, 1992, 217-236.

[Babe60] K. I. Babenko, *Approximation by trigonometric polynomials in a certain class of periodic functions of several variables*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 132 (1960), 672–675.

[Babu78] I. Babuška, W.C. Rheinboldt, *Error estimates for adaptive finite element computations*, SIAM J. Numer. Anal. 15 (1978), 736-754.

[Babu94] I. Babuška, M. Suri, *The p and h-p-Versions of the Finite Element Method, Basic Principles and Properties*, SIAM Review 36(4) (1994), 578-632.

[Bal94] R. Balder, *Adaptive Verfahren für elliptische und parabolische Differentialgleichungen auf dünnen Gittern*, Dissertation, Inst. für Informatik, TU München, 1994.

[Bal92] R. Balder, C. Zenger, *The d-dimensional Helmholtz equation on sparse grids*, SFB-Report 342/21/92 A, Inst. für Informatik, TU München, 1992.

[Ban85] R. E. Bank, A. Weiser, *Some a-posteriori error estimates for elliptic partial differential equations*, Math. Comp. 44 (1985), 283-301.

[Bas85] G. Baszenski, *N-th order polynomial spline blending*, in Multivariate approximation theory III, W. Schemp, K. Zeller (eds.), Birkhäuser, Basel, 1985, 35-46.

[Bas89] G. Baszenski, F.-J. Delvos, *A discrete Fourier transform scheme for boolean sums of trigonometric operators*, Int. Series of Numerical Mathematics 90, Birkhäuser, Basel, 1989, 15-23.

[Bas92] G. Baszenski, F.-J. Delvos, S. Jester, *Blending approximation with sine functions*, Numerical Methods of Approximation 9, D. Braess and L. L. Schumaker (eds.), Int. Series of Numerical Mathematics 105, Birkhäuser, Basel, 1992, 1-19.

[Bas93] G. Baszenski, F.-J. Delvos, *Multivariate boolean midpoint rules*, Int. Series of Numerical Mathematics 112, Birkhäuser, Basel, 1993, 1-11.

[Bey91] G. Beylkin, R. R. Coifman, V. Rohklin, *Fast wavelet transforms and numerical algorithms I*, Comm. Pure and Appl. Math. 44 (1991), 141-183.

[Bey92] G. Beylkin, *On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets*, SIAM J. Numer. Anal. 29 (1992), 1716-1740.

[Bi99] K. Bittner, *Fast algorithms for periodic spline wavelets on sparse grids*, SIAM J. Sci. Comput. 20(4) (1999), 1192-1213.

[Brae92] D. Braess, *Finite Elemente*, Springer Lehrbuch, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.

[Bram90] J. Bramble, J. Pasciak, J. Xu, *Parallel multilevel preconditioners*, Math. Comp. 31 (1990), 333-390.

[Bran90] A. Brandt, A. A. Lubrecht, *Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations*, J. of Comput. Physics 90 (1990), 348-370.

[Bran98] A. Brandt, C. H. Venner, *Multilevel Evaluation of Integral Transforms with Asymptotically Smooth Kernel*, SIAM J. on Sci. Comp. 19(2) (1998), 468-492.

[Bun92] H.-J. Bungartz, *Dünne Gitter und deren Anwendung bei der adaptiven Lösung der dreidimensionalen Poisson-Gleichung*, Dissertation, Inst. für Informatik, TU München, 1992.

[Bun94] H.-J. Bungartz, M. Griebel, D. Röschke, C. Zenger, *Pointwise convergence of the combination technique for Laplace's equation*, East-West J. of Numerical Mathematics 1(2) (1994), 21-45.

[Bun98] H.-J. Bungartz, *Finite Elements of Higher order on Sparse Grids*, Habilitation, Inst. für Informatik, TU München, 1998.

[Bun99] H.-J. Bungartz, M. Griebel, *A note on the complexity of solving Poisson's equation for spaces of bounded mixed derivatives*, J. Complexity 15 (1999), 167-199.

[But68] P. L. Butzer, K. Scherer, *Approximationsprozesse und Interpolationsmethoden*, Bibliographisches Institut Mannheim, Mannheim, 1968.

[Ca76] J. C. Cavendish, W. J. Gordon, C. H. Hall, *Ritz-Galerkin Approximations in Blending Function Spaces*, Numer. Math. 26 (1976), 155-178.

[Ci83a] Z. Ciesielski, T. Figiel, *Spline bases in classical function spaces on compact C^∞ manifolds I*, Studia Math. 76 (1983), 1-58.

[Ci83b] Z. Ciesielski, T. Figiel, *Spline bases in classical function spaces on compact C^∞ manifolds II*, Studia Math. 76 (1983), 95-136.

[Coh93a] A. Cohen, I. Daubechies, P. Vial, *Wavelets on the interval and fast wavelet transforms*, Appl. Comput. Harm. Anal. 1 (1993), 54-81.

[Coh93b] A. Cohen, I. Daubechies, B. Jawerth, P. Vial, *Multiresolution analysis, wavelets and fast algorithms on the interval*, C.R. Acad. Sci. Paris 316 (1993), 417-421.

[Coo65] J. W. Cooley, J. W. Tukey, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comp. 19 (1965), 297-301.

[Cu92] C. K. Chui, J. Z. Wang, *On compactly supported spline wavelets*, Trans. Amer. Math. Soc. 330 (1992), 903-915.

[Da97a] S. Dahlke, W. Dahmen, R. A. DeVore, *Nonlinear approximation and adaptive techniques for solving elliptic operator equations*, Multiscale Wavelet Methods for PDEs, W. Dahmen, A. Kurdila, P. Oswald, (eds.), Academic Press, 1997, 237-284.

[Dah92] W. Dahmen, A. Kunoth, *Multilevel preconditioning*, Numer. Math. 63 (1992), 315–344.

[Dah93] W. Dahmen, S. Prößdorf, R. Schneider, *Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations II: Matrix compression and fast solution*, Advances in computational Mathematics 1 (1993), 259-335.

[Dah94] W. Dahmen, S. Prößdorf, R. Schneider, *Multiscale Methods for Pseudo-Differential Equations on Smooth Closed Manifolds*, Wavelets: Theory, Algorithms and Applications, C.K. Chiu, L. Montefusco, L. Puccio (eds.), Academic Press, San Diego, California, 1994, 385-424.

[Dah96] W. Dahmen, *Stability of Multiscale Transformations*, Journal of Fourier Analysis and Applications 2 (1996), 341-361.

[Dah97] W. Dahmen, *Wavelet and Multiscale Methods for Operator equations*, Acta Numerica (1997), 55-228.

[Dah98a] W. Dahmen, R. Schneider, *Wavelets on manifolds I: Construction and Domain Decomposition*, IGPM-Bericht 149, Inst. für Geometrie und Praktische Mathematik, RWTH Aachen, Januar 1998.

[Dah98b] W. Dahmen, A. Kunoth, *Appending Boundary Conditions by Lagrange Multipliers: Analysis of the LBB Condition*, IGPM-Bericht 164, Inst. für Geometrie und Praktische Mathematik, RWTH Aachen, Oktober 1998.

[Dah99] W. Dahmen, A. Kunoth, K. Urban, *Biorthogonal Spline-Wavelets on the Interval – Stability and Moment Conditions*, Appl. Comp. Harm. Anal. 6 (1999), 132-196.

[Dau92] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 61, SIAM, Philadelphia, 1992.

[De82] F.-J. Delvos, *d-Variate Boolean interpolation*, J. Approx. Theory 34 (1982), 99–114.

[De89] F.-J. Delvos, *r-th order blending rectangle rules*, Int. Series of Numerical Mathematics 90, Birkhäuser, Basel, 1989, 107-114.

[DeV92] R. A. DeVore, B. Jawerth, V. Popov, *Compression of Wavelet decompositions*, Amer. J. Math. 114 (1992), 737-785.

[DeV93] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 303, Springer, 1993.

[DeV98a] R. A. DeVore, S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, *Hyperbolic Wavelet Approximation*, Constructive Approximation 14 (1998), 1-26.

[DeV98b] R. A. DeVore, *Nonlinear Approximation*, Acta Numerica (1998), 51-150.

[Di83] Din' Zung, *The approximation of classes of periodic functions of many variables.* Russian Math. Surveys 38 (1983), 117-118.

[Di84] Din' Zung, *Number of integral points in a certain set and the approximation of functions of several variables*, Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR 36(4) (1984), 736-744.

[Di88] Din' Zung, *Approximation by trigonometric polynomials of functions of several variables on the torus*, Math. USSR Sbornik 59 (1988), 247-267.

[Do97] T. Dornseifer, *Diskretisierung allgemeiner elliptischer Differentialgleichungen in krummlinigen Koordinatensystemen auf dünnen Gittern*, Dissertation, Inst. für Informatik, TU München, 1997.

[Fr95] K. Frank, *Complexity of local solution of multivariate integral equations*, J. Complexity 11 (1995), 416-434.

[Fr96] K. Frank, S. Heinrich, S. Pereverzev, *Information complexity of multivariate Fredholm equations in sobolev classes*, J. Complexity 12 (1996), 17-34.

[Gal78] E. M. Galeev, *Approximation by fourier sums of functions with several bounded derivatives*, Math. Notes 23 (1978), 109-117.

[Gar98] J. Garcke, *Berechnung von Eigenwerten der stationären Schrödingergleichung mit der Kombinationstechnik*, Diplomarbeit, Inst. für angewandte Mathematik, Universität Bonn, 1998.

[Ge99] T. Gerstner, M. Griebel, *Numerical Integration using Sparse Grids*, Numerical Algorithms 18 (1999), 209-232.

[Gon89] H. H. Gonska, *Simultaneous approximation by generalized n-th order blending operators*, Int. Series of Numerical Mathematics 90, Birkhäuser, Basel, 1989, 173-180.

[Gord69] W. J. Gordon, *Distributive lattices and the approximation of multivariate functions*, Approximation with Special Emphasis on Spline Functions, I. J. Schoenberg (ed.), Academic Press, New York, 1969, 223–277.

[Gord71] W. J. Gordon, *Blending-function methods for bivariate and multivariate interpolation and approximation*, SIAM J. Numerical Analysis 8 (1971), 158-177.

[Gord73] W. J. Gordon, C. A. Hall, *Transfinite element methods: blending-function interpolation over arbitrary curved domains*, Numer. Math. 21 (1973), 109-129.

[Gore97] S. A. Goreinov, E. E. Tyrtyshnikov, N. L. Zamarashkin, *A Theory of Pseudoskeleton Approximations*, Linear Algebra and its Applications 261 (1997), 1-21.

[Gre87] L. Greengard, V. Rohklin, *A fast algorithm for particle simulations*, J. of Comp. Physics 73(2) (1987), 325-348.

[Gri92] M. Griebel, M. Schneider, C. Zenger, *A combination technique for the solution of sparse grid problems*, Iterative Methods in Linear Algebra, P. de Groen and R. Beauwens (eds.), Elsevier, Amsterdam, 1992, 263-281.

[Gri94a] M. Griebel, *Multilevelmethoden als Iterationsverfahren über Erzeugendensystemen*, Teubner Skripten zur Numerik, Teubner, Stuttgart, 1994.

[Gri94b] M. Griebel, P. Oswald, *On additive Schwarz preconditioners for sparse grid discretizations*, Numer. Math. 66(4) (1994), 449-464.

[Gri95a] M. Griebel, P. Oswald, *Tensor product type subspace splittings and multilevel iterative methods for anisotropic problems*, Advances in Computational Mathematics 4 (1995), 171-206.

[Gri95b] M. Griebel, V. Thurner, *The efficient solution of fluid dynamics problems by the combination technique*, Int. J. Num. Meth. for Heat and Fluid Flow 5(3) (1995), 251-269.

[Gri98a] M. Griebel, S. Knapek, *Optimized approximation spaces for operator equations*, SFB-256 Bericht Nr. 568, Universität Bonn, 1998.

[Gri98b] M. Griebel, F. Koster, *Orthogonal Wavelets on the Interval*, SFB-256 Bericht Nr. 576, Universität Bonn, 1998.

[Gri98c] M. Griebel, P. Oswald, T. Schiekofer, *Sparse grids for boundary integral equations*, Numer. Math. 83(2) (1999), 279-312.

[Gri98d] M. Griebel, G. Zumbusch, *Adaptive sparse grids for hyperbolic conservation laws*, Proceedings of Seventh International Conference on hyperbolic Problems, Theory, Numerics, Applications, Birkhäuser, 1998.

[Hac85] W. Hackbusch, *Multi-Grid Methods and Applications*, Springer Series in Computational Mathematics 4, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

[Hac89a] W. Hackbusch, *Integralgleichungen, Theorie und Numerik*, Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik 68, Teubner Studienbücher Mathematik, Teubner, Stuttgart, 1989.

[Hac89b] W. Hackbusch, Z. P. Nowak, *On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering*, Numer. Math. 54 (1989), 463-491.

[Hac93] W. Hackbusch, *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*, Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik 69, Teubner Studienbücher Mathematik, Teubner, Stuttgart, 1993.

[Hac99] W. Hackbusch, *A Sparse Matrix Arithmetic Based on H-Matrices. Part I: Introduction to H-Matrices*, Computing 62 (1999), 89-108.

[Hal92] K. Hallatschek, *Fouriertransformation auf dünnen Gittern mit hierarchischen Basen*, Numer. Math. 63(1) (1992), 83-97.

[Hem95] P. W. Hemker, *Sparse-grid finite-volume multigrid for 3D-problems*, Advances in Computational Mathematics 4 (special issue on Multiscale Techniques), W. Dahmen (ed.), (1995), 85-110.

[Heue94] N. Heuer, M. Maischak, E.P. Stephan, *The hp-version of the boundary element method for screen problems*, Preprint ifam6, Inst. für angew. Mathematik, Universität Hannover, 1994.

[Heus98] N. Heußer, M. Rumpf, *Efficient Visualization of Data on Sparse Grids*, Proceedings VisMath Conference, Berlin, 1997.

[Hi94] S. Hilgenfeldt, *Numerische Lösung der stationären Schrödingergleichung mit Finite-Element-Methoden auf dünnen Gittern*, Diplomarbeit, Inst. für Informatik, TU München, 1994.

[Ho99] R. Hochmuth, *Wavelet Bases in Numerical Analysis and Restricted Nonlinear Approximation*, Habilitation, Freie Universität Berlin, 1999.

[Ho00] R. Hochmuth, S. Knapek, G. Zumbusch, *Tensor-products of Sobolevspaces and Applications*, in Vorbereitung.

[Ja92] S. Jaffard, *Wavelet methods for fast resolution of elliptic equations*, SIAM J. Numer. Anal. 29 (1992), 965-986.

[Ka96] A. Kamont, *On Hyperbolic Summation and Hyperbolic Moduli of Smoothness*, Constructive Approximation 12 (1996), 111-125.

[Kre97] M. Kreißl, *Simulation laminarer Strömungen in komplexen Geometrien mit der Kombinationsmethode*, Diplomarbeit, Inst. für Informatik, TU München, 1997.

[Kro71] L. Kronsjö, G. Dahlquist, *On the design of nested iteration for elliptic differential equations*, BIT 11 (1971), 63-71.

[Ku97] F. G. Kupka, *Sparse grid spectral methods for the numerical solution of partial differential equations with periodic boundary conditions*, Dissertation, Inst. für Mathematik, Universität Wien, 1997.

[Li72] J.-L. Lions, E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I*, Springer, Berlin, 1972.

[Lon77] A. T. Lonseth, *Sources and applications of integral equations*, SIAM Review 19(2) (1977), 241-278.

[Lor98] R. Lorentz, P. Oswald, *Multilevel finite element Riesz bases in Sobolev spaces*, Proc. 9th Int. Conf. on Domain Decomposition, P. Bjorstad, M. Espedal, D. Keyes (eds.), Bergen, 1998, 178-187.

[Lou94] A. K. Louis, P. Maas, A. Rieder, *Wavelets*, Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1994.

[Mai96] M. Maischak, *hp-Methoden für Randintegralgleichungen bei 3D-Problemen, Theorie und Implementierung*, Dissertation, Universität Hannover, 1996.

[Mal89] S. G. Mallat, *Multiresolution approximation and wavelet orthonormal basis in* $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, Trans. Am. Math. Society 315 (1989), 69-87.

[Mar90] S. Martello, P. Toth, *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*, John Wiley & Sons, Chichester, 1990.

[Ne97] M. H. Neumann, R. Sachs, *Wavelet threshholding in anisotropic function classes and application to adaptive estimation of evolutionary spectra*, Annals of Statistics 25 (1997), 38-76.

[No96] E. Novak, K. Ritter, *High dimensional integration of smooth functions over cubes*, Numer. Math. 75 (1996), 79-97.

[Os92] P. Oswald, *On discrete norm estimates related to multilevel preconditioners in the finite element method*, Constructive Theory of Functions, K. G. Ivanov, P. Petrushev, B. Sendov, (eds.), Proc. Int. Conf. Varna, 1991, Bulg. Acad. Sci., Sofia, 1992, 203-214.

[Os94] P. Oswald, *Multilevel Finite Element Approximation, Theory and Applications*, Teubner Skripten zur Numerik, Teubner, Stuttgart, 1994.

[Os98a] P. Oswald, *Multilevel-splitted norms for* $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}$, Computing 61 (1998), 235-255.

[Os98b] P. Oswald, *Best N-term approximation of singularity functions in two Haar bases*, erscheint in Proc. 11th Intern. Conf. on Domain Decomposition Methods, Greenwich, July 1998.

[Pe88] S. V. Pereverzev, *On the complexity of finding solutions of Fredholm equations of the second kind with differentiable kernels, I*, Ukrain. Mat. Zh. 40 (1988), 84-91.

[Pe89] S. V. Pereverzev, *On the complexity of finding solutions of Fredholm equations of the second kind with differentiable kernels, II*, Ukrain. Mat. Zh. 41 (1989), 169-173.

[Pf95] C. Pflaum, *Interpolations-, Approximations-, und Kombinationseigenschaften dünner Gitter*, ZAMM 75(2) (1995), 699-700.

[Pf98] C. Pflaum, *A multilevel algorithm for the solution of second order differential equations on sparse grids*, Numer. Math. 79 (1998), 141-155.

[Pf99] C. Pflaum, A. Zhou, *Error analysis of the combination technique*, Numer. Math. 84 (1999), 327-350.

[Roe91] D. Röschke, *Über eine Kombinationstechnik zur Lösung partieller Differentialgleichungen*, Diplomarbeit, Inst. für Informatik, TU München, 1991.

[Roh85] V. Rohklin, *Rapid solution of integral equations of classical potential theory*, J. of Comp. Physics 60(2) (1985), 187-207.

[Schi98] T. Schiekofer, *Die Methode der Finite Differenzen auf dünnen Gittern zur Lösung elliptischer und parabolischer partieller Differentialgleichungen*, Dissertation, Inst. für angewandte Mathematik, Universität Bonn, 1998.

[Schm87] H.-J. Schmeisser, H. Triebel, *Fourier Analysis and Functions spaces*, John Wiley, Chichester, 1987.

[Schn98] R. Schneider, *Multiskalen- und Wavelet-Kompression: Analysisbasierte Methoden zur effizienten Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme*, Advances in Numerical Analysis, Teubner, Stuttgart, 1998.

[Si99a] W. Sickel, F. Sprengel, *Interpolation on sparse grids and tensor-products of Nikol'skij-Besov spaces*, J. of Computational Analysis and Applications 1 (1999), 261-286.

[Si99b] W. Sickel, *Tensor products of periodic Besov spaces*, erscheint in J. of Computational Analysis and Applications.

[Sm63] S. A. Smolyak, *Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 4 (1963), 240–243.

[Sp98a] F. Sprengel, *Periodic interpolation and wavelets on sparse grids*, Numerical Algorithms 17 (1998), 147-169.

[Step95] E. P. Stephan, *The h-p boundary element method for solving 2- and 3-dimensional problems*, Preprint ifam8, Inst. für angew. Mathematik, Universität Hannover, 1995.

[Stev97] R. Stevenson, *Piecewiese linear (Pre-)Wavelets on non-uniform meshes*, Report 9701, Dep. of Mathematics, Universität Nijmegen, Januar 1997.

[Sto95] T. Störtkuhl, *Ein numerisches adaptives Verfahren zur Lösung der biharmonischen Gleichung auf dünnen Gittern*, Dissertation, Inst. für Informatik, TU München, 1995.

[Tei98] C. Teitzel, R. Grosso, T. Ertl, *Particle Tracing on Sparse Grids*, Visualization in Scientific Computing '98, Proceedings of the Eurographics Workshop in Blaubeuren, Germany, Springer-Verlag, Wien, New York, 1998.

[Tem89] V. N. Temlyakov, *Approximation of functions with bounded mixed derivative*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 1 (1989).

[Tem93a] V. N. Temlyakov, *On approximate recovery of functions with bounded mixed derivative*, J. Complexity 9 (1993), 41–59.

[Tem93b] V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic functions*, Nova Science, New York, 1993.

[Tra88] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Wozniakowski, *Information-Based Complexity*, Academic Press, New York, 1988.

[Tri78] H. Triebel, *Interpolation Theory, Functions Spaces, Differential Operators*, Dt. Verlag. Wiss., Berlin, 1978.

[Ve94] R. Verführt, *A posteriori error estimates and adaptive mesh refinement techniques*, J. Comput. and Appl. Math. 50 (1994), 67-83.

[Was95] G. W. Wasilkowski, H. Wozniakowski, *Explicit cost bounds of algorithms for multivariate tensor products*, J. Complexity 11 (1995), 1–56.

[Wei80] J. Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, Springer, New York, 1980.

[Xu92] J. Xu, *Iterative methods by space decompositions and subspace correction*, SIAM Review 34 (1992), 581-613.

[Ys86] H. Yserentant, *On the multi-level splitting of finite element spaces*, Numer. Math. 58 (1986), 379-412.

[Ys92] H. Yserentant, *Hierarchical bases*, in Proc. ICIAM91, Washington, R. E. O'malley et al. (eds.), SIAM, Philadelphia, 1992.

[Ys93] H. Yserentant, *Old and new convergence proofs for multigrid methods*, Acta Numerica (1993), 285-326.

[Ze91] C. Zenger, *Sparse grids*, Parallel Algorithms for Partial Differential Equations, Notes on Num. Fluid Mech. 31, W. Hackbusch (ed.), Vieweg, Braunschweig, 1991.

[Zh92] X. Zhang, *Multilevel Schwarz methods*, Numer. Math. 63 (1992), 521-539.

[Zu00] G. Zumbusch, *A Sparse Grid PDE Solver*, Advances in Software Tools for Scientific Computing, Lecture Notes in Computational Science and Engineering 10, H. P. Langtangen, A. M. Bruaset, E. Quak (eds.), Springer-Verlag, 2000, 133-178.