TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Multilevel-Lösung gemischt diskretisierter elliptischer Randwertprobleme bei Verwendung erweiterter Lagrangescher Multiplikatoren

Diplomarbeit von Thomas Schiekofer

Aufgabensteller : Prof. Dr. R.H.W. Hoppe

Betreuer : Ralf Hiptmair

Abgabedatum: 06.06.1994

Zusammenfassung

Die Diskretisierung von elliptischen Randwertproblemen zweiter Ordnung mit Hilfe gemischter Finiter Elemente führt in ihrer Grundform auf algebraische Sattelpunktprobleme. Auf deren effiziente Lösung zielt die *erweiterte Lagrange-Methode (augmented lagrangian method)* ab. Eingebettet in ein Verfahren der konjugierten Gradienten führt sie auf einen iterativen Löser, für den in jedem Schritt noch ein positiv definites Problem zu lösen ist. Dies soll – einem Vorschlag von Wassilevski/Wang [19] folgend – mit einer vorkonditionierten inneren CG-Iteration erfolgen. Die Kondition des inneren Systems ist dann unabhängig von der Wahl des Parameters der erweiterten Lagrange Methode. Die vorliegende Arbeit untersucht nun das Zusammenspiel der Vorkonditionierung des inneren linearen Gleichungssystems mit der Wahl des Lagrange-Parameters zur Vorkonditionierung des äußeren linearen Gleichungssystems.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die Diplomarbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilsmittel und Quellen angefertigt habe.

Höhenkirchen–Siegertsbrunn, den 06.06.1994

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Problemstellung

In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit der Lösung der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(a(x)\nabla u) &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Γ_D der Dirichlet-Rand und Γ_N der Neumann-Rand sowie ν die äußere Normale der Länge 1 (Einheitsnormale) des Randes $\Gamma := \Gamma_D + \Gamma_N = \partial\Omega$. ∇ bezeichnet den Gradient-Operator. $a \in L^\infty(\Omega)$ sei gleichmäßig positiv und beschränkt ,

$$\bar{\alpha} > a(x,y) > \underline{\alpha} > 0 \qquad \text{für fast alle } (x,y) \in \Omega \quad , \tag{1.2}$$

um die Elliptizität des Problems zu gewährleisten. Ferner sei $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^1(\Gamma_D)$. Führt man an dieser Stelle die Flußvariable $\mathbf{j} = a(x)\nabla u$ ein, so läßt sich obige Differentialgleichung mit der Definition $k(x,y) = a(x,y)^{-1}$ schreiben als

$$\begin{aligned} k\mathbf{j} - \nabla u &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathrm{div}\,\mathbf{j} &= -f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \Gamma_D \\ \tfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned} \tag{1.3}$$

Damit erhalten wir nun die gemischte Formulierung unseres Problems: Finde $(\mathbf{j}, u) \in H(\mathrm{div}\,,\Omega) \times L^2(\Omega)$, so daß

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega k\mathbf{j}\cdot\mathbf{q}\,dx \quad + \quad \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{q}\cdot u\;dx \quad &= \int_\Gamma g\cdot\mathbf{q}\cdot\nu\;dx \quad ,\forall\mathbf{q}\in H(\operatorname{div},\Omega)\\
\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{j}\cdot w\;dx \quad &= -\int_\Omega f\cdot w\;dx \quad ,\forall w\in L^2(\Omega)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Mit der Definition der symmetrischen Bilinearform

$$
a(\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2)=\int_\Omega \langle k\cdot\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2\rangle\;dx \tag{1.5}
$$

und der Definition der Linerform

$$
b(\boldsymbol{\psi},w)=\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{\psi}\cdot w\;dx \tag{1.6}
$$

können wir die Formeln in (1.4) der gemischten Formulierung unseres Problems in die kompaktere Schreibweise

$$
\begin{aligned}
a(\mathbf{j},\mathbf{q}) \quad + \quad b(\mathbf{q},u) \quad &= \int_{\Gamma_D} g\cdot\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\;dx \;,\;\mathbf{q}\in H(\operatorname{div},\Omega)\\
b(\mathbf{j},w) \quad &= -\int_\Omega f\cdot w\;dx \quad ,\;w\in L^2(\Omega)
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

bringen. Im Sinne einer übersichtlicheren Darstellung ist jedoch eine Operatornotation vorzuziehen. Man erhält sie, indem man der Bilinearform (1.5) und der Linearform (1.6) jeweils einen Operator $\mathrm{A} : H(\operatorname{div},\Omega)\to H'(\operatorname{div},\Omega)$ bzw. $\mathrm{B} : H(\operatorname{div},\Omega)\to L^2(\Omega)'$ wie folgt zuordnet :

$$
< \mathrm{A}\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2 >_{H'(\operatorname{div},\Omega)\times H(\operatorname{div},\Omega)} \quad = \quad a(\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2) \tag{1.8}
$$

$$
< \mathrm{B}\boldsymbol{\psi},w >_{L^2(\Omega)'\times L^2(\Omega)} \quad = \quad b(\boldsymbol{\psi},w) \tag{1.9}
$$

Der Konvention folgend bezeichnen hier und im weiteren Verlauf der Arbeit spitze Klammern Dualitätspaarungen. Hiermit erhalten wir das klassische Sattelpunktproblem

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}\mathbf{j} \quad + \quad \mathrm{B}^T u \quad &= \quad g \quad ,\quad g\in H'(\operatorname{div},\Omega)\\
\mathrm{B}\mathbf{j} \quad &= \quad -f \quad ,\quad f\in L^2(\Omega)'
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

der gemischten Formulierung unseres Problems. Die in dieser Arbeit behandelte Aufgabe (1.1) bzw. die Operatordarstellung (1.10) besitzt eine eindeutige Lösung. Wir wollen an dieser Stelle keinen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis einer Lösung der von uns betrachteten Aufgabenstellung erbringen, sondern lediglich erwähnen, daß die existierende Lösung von (1.1) eindeutig ist. Der Beweis hierzu kann in [5] gefunden werden.

Kapitel 2

Erweiterte Lagrange Methode

2.1 Lagrangesche Multiplikatoren

Möchte man eine elliptische Randwertaufgabe mit der Methode der Finiten Elemente numerisch lösen, so ordnet man dem Ausgangsproblem eine Variationsgleichung zu. Die so erhaltene schwache Formulierung wird dann mit einer geeigneten Galerkin-Methode gelöst, wobei wesentliche Nebenbedingungen wie etwa Dirichlet-Randbedingungen gesondert zu berücksichtigen sind. Im einfachsten Fall können Nebenbedingungen durch eine angemessene Konstruktion des verwendeten Ansatzraumes eliminiert werden.

Einen anderen Weg kann man gehen, indem man Optimierungsaufgaben und Variationsgleichungen in Funktionenräumen betrachtet. Hier werden Nebenbedingungen mit Hilfe Lagrangescher Multiplikatoren im Zielfunktional berücksichtigt.

Betrachten wir hierzu die Aufgabe, ein konvexes differenzierbares Funktional $J(v)$ über einer konvexen Menge $\mathcal{K}$ eines Hilbertraumes $\mathcal{V}$ ($\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$) zu minimieren, also

$$\inf_{v \in \mathcal{K}} J(v) \quad , \quad \mathcal{K} \in \mathcal{V} \ . \tag{2.1}$$

Dabei sei die Teilmenge $\mathcal{K}$ im diskreten Fall charakterisiert durch

$$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathcal{V} \mid \mathrm{B}v = f\} \quad , \quad \mathrm{B} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}' \quad \text{linear,} \tag{2.2}$$

wobei $\mathcal{W}$ zunächst ein beliebiger Hilbertraum sei. Die Einführung von Lagrange-Parametern führt das restringierte Problem durch Addition eines weiteren Termes in ein unrestringiertes Problem über:

$$\begin{aligned} J(v) &\mapsto J(v,q) \overset{\text{def}}{=} J(v) + (q, \mathrm{B}v - f) && (2.3)\\ \inf_{v\in\mathcal{K}} J(v) &\mapsto \inf_{v\in\mathcal{V}} \sup_{q\in\mathcal{W}} J(v,q) && (2.4)\end{aligned}$$

Das Funktional $J(v,q)$ bezeichnet man als *Lagrange-Funktional*. Der *Lagrange-Multiplikator* q erscheint hier als zusätzliche Unbekannte und kann als Lösung eines Sattelpunktproblems erhalten werden. Dabei ist (u,p) ein Sattelpunkt des Funktionals $J(v,q)$, falls gilt:

$$J(u,q) \leq J(u,p) \leq J(v,p) \qquad \forall v \in \mathcal{V} \;\; \forall p \in \mathcal{W} \tag{2.5}$$

Eine Aussage über die Lösung des Minimierungsproblems (2.1) liefert [vgl. [10] Kapitel 1,[11] Kapitel 2.2] der

Satz 2.1 *Die Lösung u des Minimierungsproblems (2.1) ist charakterisiert durch die Existenz eines $p \in \mathcal{W}$, so daß gilt:*

$$\begin{array}{lcccl} \mathrm{A}p & + & \mathrm{B}^T u & = & g \\ \mathrm{B}p & & & = & -f \end{array} \tag{2.6}$$

Die Gleichungen (2.6) charkterisieren auch alle Sattelpunkte des Funktionals J(v,q).

Ein großer Nachteil dieser Methode ist jedoch, daß (2.6) offensichtlich ein indefinites System darstellt und so die unmittelbare Anwendung des Standard-CG-Verfahrens auf (2.6) nicht möglich ist.

2.2 Penalty-Techniken

Wendet man auf das Problem (2.1) die Penalty-Technik an, so führen wir im wesentlichen dieselben Schritte durch wie schon bei der Lagrange-Methode im vorigen Abschnitt. Auch hier führen wir das restringierte Problem (2.1) über in ein unrestringiertes Problem, indem wir einen bestimmten "Strafterm" addieren. Unser Ausgangsproblem transformiert sich dann in das Problem

$$\inf_{v\in\mathcal{V}} J_r(v) \tag{2.7}$$

mit dem neuen parameterabhängigen Funktional $J_r(v)$, definiert durch

$$J_r(v) \stackrel{\text{def}}{=} J(v) + \frac{1}{r} d^2(v, K). \tag{2.8}$$

Dabei stellt $d^2(\bullet, \bullet)$ eine Abstandfunktion dar, $r > 0$ heißt *Strafparameter* und der im Vergleich zu (2.1) zusätzliche Term in (2.8) wird als *Strafterm* bezeichnet. Die Terminologie "Strafterm" ist offensichtlich gerechtfertigt: unser Ziel ist die Minimierung eines Funktionals über einer Menge $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$. Wählen wir ein $v \in \mathcal{V} \backslash \mathcal{K}$, so addieren wir zu $J(v)$ einen positiven Wert hinzu, der umso größer ist, je "weiter" wir uns mit unserem v von der Menge $\mathcal{K}$ wegbewegen. Man beachte, daß für $v \in \mathcal{K}$ der Strafterm identisch Null ist. Für das Verlassen der zulässigen Menge bestrafen wir uns also durch die Addition eines echt positiven Wertes.

Ist das Funktional $J(v)$ in (2.1) von der speziellen Gestalt $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - g(v)$ mit $g \in \mathcal{V}'$, so erhält man aus dem Minimierungsproblem folgendes Variationsproblem: suche ein $u_r \in \mathcal{V}$ mit

$$a(u_r, v) + \frac{1}{r} (\mathrm{B}u_r, \mathrm{B}v)_{\mathcal{W}'} \quad = \quad g(v) + \frac{1}{r} (f, \mathrm{B}v)_{\mathcal{W}'} \tag{2.9}$$

mit dem Operator B aus (2.2). Da für $r \to 0$ (d.h. für $r^{-1} \to \infty$) der Einfluß des Strafterms immer größer wird, ist zu erwarten, daß gilt:

$$u_r \to u \quad \text{mit} \quad J(u) = \inf_{v \in \mathcal{K}} J(v) \quad \text{und} \quad u \in \mathcal{K} \quad \text{für } r \to 0 \tag{2.10}$$

Durch das Einführen der neuen Variablen p_r mit

$$p_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r}(\mathrm{B}u_r - f) \in \mathcal{W}' \tag{2.11}$$

erhält man durch Einsetzen in (2.9)

$$\begin{aligned} a(u_r, v) \quad &+ \quad < \mathrm{B}^T p_r, v >_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \quad = \quad g(v) \qquad \forall v \in \mathcal{V} \\ (\mathrm{B}u_r, w) \quad &- \quad r < p_r, w >_{\mathcal{W}' \times \mathcal{W}} \quad = \quad f(v) \qquad \forall w \in \mathcal{W} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Dabei stellt die zweite Gleichung in (2.12) lediglich eine Identität dar, wie man durch das Einsetzen von (2.11) schnell nachrechnet. (2.12) stellt ein um den Strafterm erweitertes Sattelpunktproblem dar. Auch hier wollen wir der Vollständigkeit wegen die Operatorschreibweise notieren:

$$\begin{array}{rcrcl} \mathrm{A}u_r & + & \mathrm{B}^T p_r & = & g \\ \mathrm{B}u_r & - & r p_r & = & f \end{array} \tag{2.13}$$

Aussagen für die Lösung unseres Ausgangsproblems (2.1) liefert der nachfolgende Satz ([12]).

Satz 2.2 *Sei* $(\bar{u}, \bar{p}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ *die Lösung von (2.12) für* $r = 0$. *Ferner gelte:*

1. *die Bilinearform* $a(\bullet, \bullet)$ *ist elliptisch auf* $N(\mathrm{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathcal{V} \mid \mathrm{B}v = 0\}$*:*
   $\exists \gamma > 0 : \gamma \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \leq a(v, v) \quad \forall v \in N(\mathrm{B})$
2. $$\sup_{v \in \mathcal{V}} \frac{< Bv, w >_{\mathcal{W}' \times \mathcal{W}}}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \geq \beta \|w\|_{\mathcal{W}} \quad \beta > 0, \forall w \in \mathcal{W}$$

Dann hat man für die Lösung (u_r, p_r) *des Systems (2.12) :*

$$\|\bar{u} - u_r\|_{\mathcal{V}} = O(r) \tag{2.14}$$
$$\|\bar{p} - p_r\|_{\mathcal{W}} = O(r) \tag{2.15}$$

Außerdem gilt $\bar{u} = u$*, wobei* u *die Lösung des Minimierungsproblems (2.1) ist.*

Wie schon in Abschnitt 2.1 haben wir auch hier eine theoretische Möglichkeit, unser Ausgangsproblem zu lösen. Aus numerischer Hinsicht tauchen bei der Verwirklichung dieses Verfahrens jedoch Probleme auf, die im Strafparameter r zu suchen sind. Wie aus Satz 2.2 ersichtlich ist, erhalten wir die Lösung u als Grenzwert der Lösung u_r für $r \to 0$. Damit wird aber gleichzeitig die Kondition des Systems (2.12) bedeutend schlechter, was zu einer enormen Verlangsamung der Konvergenzgeschwindigkeit eines CG-artigen Lösers führt. Wenngleich schon aufgrund der Dimension des zugrundeliegenden linearen Gleichungssystems ein direkter Löser als Lösungsmethode ausscheidet, so würde er hier auch wegen der durch die schlechte Kondition bedingten Rundungsfehler als Lösungsmethode versagen.

2.3 Erweiterte Lagrange Methode

2.3.1 Prinzip der erweiterten Lagrange-Methode

Die erweiterte Lagrange-Methode *(augmented lagrangian method)* verbindet die beiden in Abschnitt 2.1 und Abschnitt 2.2 vorgestellten Methoden.

Ausgehend von dem restringierten Problem (2.1) mit der Restriktion (2.2) betrachten wir das unrestringierte Problem

$$\inf_{v\in\mathcal{V}} \sup_{q\in\mathcal{W}} J(v,q,r) \tag{2.16}$$

mit dem linearen Funktional

$$\begin{aligned} J(v,q,r) &\stackrel{\text{def}}{=} J(v) + \langle q, \mathrm{B}v - g\rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{r}d^2(v,\mathcal{K}) \\ &= J_r(v,q) + \frac{1}{r}d^2(v,\mathcal{K}). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Der Vorteil der erweiterten Lagrange-Methode ist, daß die exakte Lösung des Ausgangsproblems (2.1) bestimmt werden kann, ohne den Parameter r gegen Null gehen lassen zu müßen, was auch hier die Kondition beträchtlich verschlechtern würde. Faßt man $J(v,q,r)$ auf als Lagrange-Funktional, das um den Strafterm aus (2.8) erweitert wurde, so verbessert sich hierdurch im Vergleich zum nicht modifizierten Lagrange-Funktional (2.3) die Konvergenzgeschwindigkeit eines CG-artigen Lösers.

Durch das Verbinden der Methoden aus den beiden vorangegangenen Abschnitten eliminieren wir im wesentlichen die Schwachstellen der einzelnen Verfahren. Eine Aussage über die Lösung u von (2.1) liefert uns der Satz (vgl. [8])

Satz 2.3 *Jeder Sattelpunkt des erweiterten Lagrange-Funktionals $J(v,q,r)$ ist ein Sattelpunkt des Lagrange-Funktionals $J(v,q)$ und umgekehrt.*

Ist (u,p,r) ein Sattelpunkt des in (2.17) definierten erweiterten Lagrange Funktionals, so ist die Komponente u wegen Satz 2.1 folglich die Lösung des Minimierungsproblems (2.1).

2.3.2 Anwendung der erweiterten Lagrange-Methode

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wollen wir uns mit der erweiterten Lagrange-Methode bezogen auf die gemischte Formulierung unserer Problemstellung

$$\mathrm{A}j + \mathrm{B}^T u = g \quad , \quad g \in H'(\mathrm{div}\,,\Omega) \tag{2.18}$$

$$\mathrm{B}j = -f \quad , \quad f \in L^2(\Omega)' \tag{2.19}$$

beschäftigen, die wir bereits in (1.10) kennengelernt haben. Aus algebraischer Sicht ist die Anwendung der erweiterten Lagrange-Methode nichts anderes als ein Multiplizieren einzelner Gleichungen mit dem Lagrange-Parameter r und einem geschickten Addieren der Gleichungen. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir (2.18)–(2.19) folglich umzuformen haben. Dabei muß stets beachtet werden, welche Urbildräume in welche Bildräume abgebildet werden. Für die in (2.18)–(2.19) auftretenden Operatoren gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &: H(\mathrm{div}\,,\Omega) \to H'(\mathrm{div}\,,\Omega) \\ \mathrm{B} &: H(\mathrm{div}\,,\Omega) \to L^2(\Omega)' \\ \mathrm{B}^T &: L^2(\Omega) \to H'(\mathrm{div}\,,\Omega) \end{aligned} \tag{2.20}$$

für $g \in H'(\mathrm{div}\,,\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)'$. Zusätzlich führen wir an dieser Stelle den *Riesz-Isomorphismus*

$$\imath_{\mathcal{W}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \mathcal{W} \to \mathcal{W}' \\ w \to \begin{cases} \mathcal{W} \to \mathbb{R} \\ \phi \to (\phi, w)_{\mathcal{W}} \end{cases} \end{cases} \tag{2.21}$$

ein und setzen für unsere Problemstellung $\mathcal{W} = L^2(\Omega)$. Damit können wir folgende Abbildungen einführen, die wir später weiter benötigen werden:

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{A} + r\mathrm{B}\imath_{\mathcal{W}}^{-1}\mathrm{B}\right) &: \boldsymbol{\mathcal{V}} \to \boldsymbol{\mathcal{V}}' \\ \left(\mathrm{A} + r\mathrm{B}\imath_{\mathcal{W}}^{-1}\mathrm{B}\right)^{-1} &: \boldsymbol{\mathcal{V}}' \to \boldsymbol{\mathcal{V}} \\ \mathrm{B}\left(\mathrm{A} + r\mathrm{B}\imath_{\mathcal{W}}^{-1}\mathrm{B}\right)^{-1}\mathrm{B}^T &: \mathcal{W} \to \mathcal{W}' \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dabei sind die Räume $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ und $\mathcal{W}$ im den folgenden Kapiteln jeweils zu spezifizieren. Wir können in Zusammenhang mit Kapitel 1 an dieser Stelle $\boldsymbol{\mathcal{V}} = H(\mathrm{div}\,,\Omega)$ und $\mathcal{W} = L^2(\Omega)$ wählen und werden später, wenn wir die Operatoren in (2.20) diskretisieren, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ und $\mathcal{W}$ durch spezielle diskrete Räume ersetzen.

Wir haben nun alle notwendigen Operatoren definiert und können die Umformungen für die erweiterte Lagrange Methode vornehmen, deren einzelne Schritte wie folgt lauten:

1. Multiplikation von (2.19) mit $r\mathrm{B}^T\imath_{\mathcal{W}}^{-1}$ und Addition zu (2.18)

$$\left(\mathrm{A} + r\mathrm{B}^T\imath_{\mathcal{W}}^{-1}\mathrm{B}\right)j + \mathrm{B}^T u = g - r\mathrm{B}^T\imath_{\mathcal{W}}^{-1}f \tag{2.23}$$

$$\mathrm{B}j = -f \tag{2.24}$$

2. Elimination von j

   Dazu multiplizieren wir (2.23) mit $-\mathrm{B}\left(\mathrm{A}+r\mathrm{B}^T\imath_{\mathcal{W}}^{-1}\mathrm{B}\right)^{-1}$ und addieren das Ergebnis zu (2.24). Anschließende Multiplikation mit -1 führt uns auf

$$\mathrm{B}\left(\mathrm{A}+r\mathrm{B}^T\imath_{\mathcal{W}}^{-1}\mathrm{B}\right)^{-1}\mathrm{B}^T u=\mathrm{B}\left(\mathrm{A}+r\mathrm{B}^T\imath_{\mathcal{W}}^{-1}\mathrm{B}\right)^{-1}\left(g-r\mathrm{B}^T\imath_{\mathcal{W}}^{-1}f\right)-f \tag{2.25}$$

Die Lösung des Problems (1.10) erhalten wir also dadurch, indem wir (2.25) lösen und anschliessend über (2.18) bzw. (1.10) den Fluß ermitteln. Betrachtet man (2.25) genauer, so stellt man fest, daß bei einer Implementierung ein äußeres und ein inneres CG-Verfahren anzuwenden sind. Einen Vorkonditionierer von Vassilevski und Wang [19] für das innere CG-Verfahren lernen wir in Kapitel 5 kennen. Die Kondition des inneren Gleichungssystems hängt dann nur noch von der verwendeten Anzahl der Level in der Multilevel-Umgebung ab, jedoch nicht mehr vom Parameter r.

Kapitel 3

Finite Element Räume

3.1 Notation

Die gemischte Diskretisierung von (1.1) erhält man, indem man die Ansatzräume $\boldsymbol{\mathcal{V}} = H(\operatorname{div}, \Omega)$ und $L^2(\Omega)$ durch diskrete,endlich-dimensionale Teilräume ersetzt. Seien $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}$ und $\mathcal{W}^h \subset L^2(\Omega)$ endlich-dimensionale Teilräume, die einer Triangulation T_h des Gebiets Ω in Elemente vom Durchmesser h zugeordnet sind und deren Funktionen stückweise Polynome (eines noch zu bestimmenden Grades) sind.

Das Problem (2.25) gibt eine angemessene Approximation an den Druck p, falls die Finiten Element Räume $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ und $\mathcal{W}^h$ die *Babuška-Brezzi-Bedingung* erfüllen, die durch die Ungleichung

$$\sup_{v \in \mathcal{V}^h} \frac{(\operatorname{div} v, \theta)_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \geq \beta \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \theta \in \mathcal{W}^h \tag{3.1}$$

mit

$$\|v\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = \sqrt{\left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)} \tag{3.2}$$

beschrieben wird. Sie besitzt eine zentrale Rolle für die Konvergenz von gemischten Finiten-Element-Methoden. Im wesentlichen verlangt Gleichung (3.1), daß die Ansatzräume $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ und $\mathcal{W}^h$ aufeinander abgestimmt werden.

Die Triangulation T_h erhalten wir durch fortgesetzte Verfeinerung einer Ausgangstriangulation T_0 des Gebiets Ω mit der Schrittweite h_0. Die Triangulierungen T_j mit $1 \leq j \leq J$[1] werden durch quasiuniforme Verfeinerungen von T_0 erhalten. Dabei werden auf jedem Level $j-1$ bestimmte

[1] Im weiteren gilt für jeden Index j stets $1 \leq j \leq J$, falls es nicht ausdrücklich anders vermerkt ist

Dreiecke $K \in T_{j-1}$ problemabhängig in 4 kongruente Elemente (*rote Verfeinerung*, vgl. Abbildung 3.1)

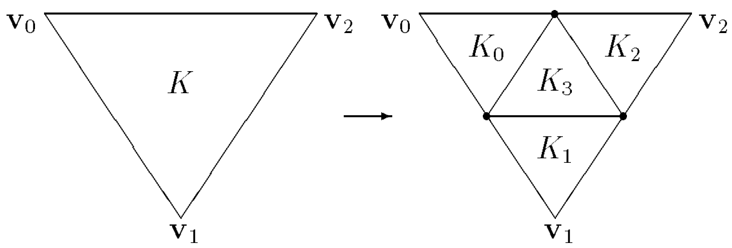

Abbildung 3.1: rote Verfeinerung in 4 kongruente Dreiecke

oder in 2 neue Dreiecke (*grüne Verfeinerung*, vgl. Abbildung 3.2)

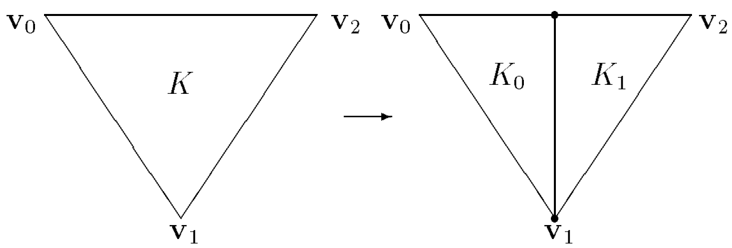

Abbildung 3.2: grüne Verfeinerung in zwei Dreiecke

verfeinert, die schließlich die nächstfeinere Triangulation aufbauen (vgl. [2]). Einmal grün verfeinerte Dreiecke werden bei feineren Zerlegungen des Ausgangsgebietes Ω nicht weiter verfeinert. Die Art und Weise der Verfeinerung impliziert lokale Quasiuniformität, d.h. es existiert eine positive Konstante τ, die nur von der Geometrie der Ausgangstriangulation T_0 abhängt, so daß

$$\frac{\operatorname{diam}(K_1)}{\operatorname{diam}(K_2)} \leq \tau$$

für alle $K_1, K_2 \in T_0$ mit $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ gilt. Die Maschenweite auf einem Gitter T_j wird bezeichnet mit h_j. Die zu der Triangulierung T_j gehörigen Ansatzräume sind bezeichnet durch $\boldsymbol{\mathcal{V}}_j \times \mathcal{W}_j$.

3.2 Raviart-Thomas-Elemente

Die Stabilitäts-Bedingung (3.1) wird (vgl. [19]) durch die *Raviart-Thomas-Elemente* vom Grade $k \geq 0$ erfüllt, die einen geeigneten Ansatzraum für unser Problem darstellen. Definiert werden sie für ein n-dimensionales Simplex K durch

$$RT_k(K) = (P_k(K))^n + \mathbf{x}P_k(K) \tag{3.3}$$

wobei $P_k(K)$ den Raum der Polynome vom Grad k über K darstellt. Die Dimension der Raviart-Thomas-Räume berechnet sich nach [16], [17] zu

$$n\begin{pmatrix} n+k-1 \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+k-2 \\ n-1 \end{pmatrix} \quad , \tag{3.4}$$

für die interessanten Dimensionen $n = 2$ und $n = 3$ also zu

$$\dim RT_k(K) = \begin{cases} (k+1)(k+3) & \text{für } n = 2 \\ \frac{1}{2}(k+1)(k+2)(k+4) & \text{für } n = 3 \end{cases} .$$

Unter $RT_k(\Omega, T_l)$ verstehen wir die Raviart-Thomas-Elemente vom Grad k über der Zerlegung T_l des Grundgebiets Ω für ein $l \in \{0, \ldots J\}$.

Obwohl wir uns in der vorliegenden Arbeit bei der Diskretisierung unseres Problems im wesentlichen auf den Raum $RT_0(\Omega, T_l)$ stützen werden, wollen wir im folgenden einige Aussagen über die Raviart-Thomas-Elemente eines beliebigen Grades k machen (vgl. dazu auch [5]). Wir beginnen mit

Satz 3.1 *Für alle n-dimensionalen Simplices K und für alle $\mathbf{q} \in RT_k(K)$ gilt*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{q} &\in P_k(K) \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\partial K} &\in R_k(\partial K) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Der Divergenzoperator $\operatorname{div}: RT_k(K) \mapsto P_k(K)$ *ist surjektiv.*

Bemerkung: Dabei ist $\mathbf{n}$ die äußere Normale auf ∂K und $R_k(\partial K) = \{\phi | \phi \in L^2(\Omega) \wedge \phi|_{e_i} \in P_k(K)\ \forall e_i\}$, wobei e_i für $n = 2$ die Kanten sowie für $n = 3$ die Flächen des n-dimensionalen Simplex K bezeichnet.

Beweis: Sei $\mathbf{q} \in RT_k(K)$. Dann gilt: $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 + \mathbf{x}p_k$ mit $\mathbf{q}^0 \in (P_k(K))^n$ und $p_k \in P_k(K)$. Damit folgt mit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{q} &= \operatorname{div} \left(\mathbf{q}^0 + \mathbf{x}p_k\right) \\ &= \operatorname{div} \mathbf{q}^0 + p_k \operatorname{div} \mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} p_k \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{q}^0}{\partial x_i}}_{\in P_{k-1}(K)} + \underbrace{p_k \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i}}_{\in P_k(K)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial p_k}{\partial x_i}}_{\in P_k(K)} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \quad \bar{q} \in P_k(K) \quad ,$$

und damit die erste Aussage des Satzes. Durch geeignete Wahl des Polynoms $p_k \in P_k(K)$ und der Komponenten des Vektors $\mathbf{q}^0 \in (P_k(K))^n$ kann offensichtlich jedes beliebige Polynom aus $P_k(K)$ konstruiert werden, womit der Divergenzoperator div: $RT_k(K) \mapsto P_k(K)$ surjektiv ist. Sei nun $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_n)$ eine äußere Normale auf $e_i \in \partial K$. Auf ∂K gilt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = c =$ konstant und wir folgern für $\mathbf{x} \in \partial K$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \underbrace{\mathbf{q}^0 \cdot \mathbf{n}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{q} \in P_k(K)} + p_k \underbrace{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})}_{=c} = \tilde{q} + c p_k \in R_k(\partial K) \quad ,$$

womit auch die zweite Behauptung und daher Satz 3.1 bewiesen ist. ■

Satz 3.2 *Für jedes $k \geq 0$ und jedes $\mathbf{q} \in RT_k(K)$ implizieren die beiden folgenden Beziehungen $\mathbf{q} = 0$:*

$$\int_{\partial K} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, p_k \, ds = 0 \qquad \forall p_k \in R_k(\partial K) \tag{3.6}$$

$$\int_{K} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_{k-1} \, dx = 0 \qquad \forall \mathbf{p}_{k-1} \in (P_{k-1}(K))^n \tag{3.7}$$

Beweis : Aus (3.6) folgt $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf ∂K. Nach der Green'schen Formel

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{q}\, p_k \, dx = -\int_K (\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} p_k) \, dx + \int_{\partial K} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, p_k \, ds$$

folgt nun

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{q}\, p_k \, dx = 0 \quad \forall p_k \in P_k(K)$$

und somit $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$. Wegen $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf ∂K und $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$ folgt aus der Green'schen Formel weiter

$$\int_K (\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} p_k) \, dx = 0$$

für alle $p_k \in H^1(K)$. Daraus folgt schließlich die Behauptung $\mathbf{q} = 0$.■

Die Definition

$$RT_k^0(K) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{q} \in RT_k(K) | \operatorname{div} \mathbf{q} = 0\} \tag{3.8}$$

führt auf das

Korollar 3.3

$$RT_k^0(K) \subset (P_k(K))^n \tag{3.9}$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich sofort aufgrund der Definition des Raumes $RT_k^0(K)$ in (3.8) und dem Ansatz der Raviart-Thomas-Elemente in (3.3). ■

Definition 3.4 *Der Raum der Lagrangen Finiten Elemente $S_k(\Omega, T_j)$ der Ordnung k zur Zerlegung T_j mit $0 \leq j \leq J$ wird (für $n = 2$) Raum der Stromfunktionen genannt. Ein Element $\psi \in S_k(\Omega, T_j)$ heißt Stromfunktion.*

Definition 3.5 *Für $n = 2$ ist die Rotation* rot φ *einer stückweise linearen Funktion $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch*

$$\text{rot } \varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial \varphi_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad .$$

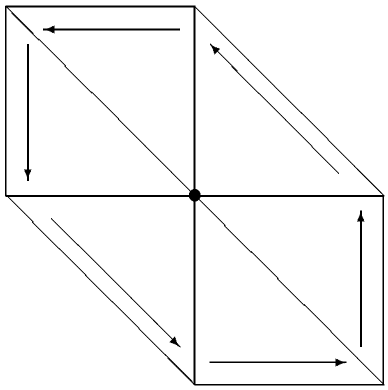

Abbildung 3.3: Support einer Stromfunktion und ihre Rotation

Mit dieser Definition formulieren wir nun das

Korollar 3.6 *Für $n = 2$ ist jedes $\mathbf{q}^0 \in RT_k^0(K)$ die Rotation einer Stromfunktion $\psi \in S_{k+1}(K)$. Die Dimension von $RT_k^0(K)$ ist $\frac{1}{2}(k+1)(k+4)$. Damit gilt:* $\dim RT_k^0(K) = \dim S_{k+1}(K) - 1$.

Beweis: Sei $\psi \in S_{k+1}(K)$ die Stromfunktion zu einem Element $\mathbf{q} \in RT_k^0(K)$. Dann ist rot ψ offensichtlich enthalten in $RT_k^0(K)$. Der Vektor rot ψ verschwindet wegen

$$\operatorname{div}\,(\operatorname{rot}\,\psi) = \operatorname{div}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad .$$

Sei umgekehrt ψ die Stromfunktion zu einer Funktion $\mathbf{q} \in RT_k^0(K)$ (vgl. Poincarésches Lemma: $\operatorname{div}\mathbf{q} = 0 \Rightarrow \mathbf{q} = \operatorname{rot}\,\psi$). Dann ist $\mathbf{q}\,|_K \in (P_k(K))^2$, da $\mathbf{q}$ divergenzfrei ist. Jedes $\mathbf{q} \in RT_k^0(K)$ läßt sich schreiben als $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 + \mathbf{x}p_k$ mit $\mathbf{q}^0 \in (P_k(K))^n$ und $p_k \in P_k(K)$. Dabei genügt es, anstatt von $P_k(K)$ den Raum $\tilde{P}_k(K)$ der homogenen Polynome vom Grad k zu betrachten (vgl [16]). Daraus erhalten wir

$$\operatorname{div}\mathbf{q} = \operatorname{div}\mathbf{q}^0 + \operatorname{div}\,(\mathbf{x}p_k) = 0 \quad .$$

Weiterhin gilt :

$$\operatorname{div}(\mathbf{x}p_k) = (xp_k)_x + (yp_k)_y = 2p_k + xp_{r,x} + yp_{r,y} \quad .$$

Da p_k ein homogenes Polynom vom Grad k ist, zeigt die Anwendung der Produktregel

$$xp_{r,x} + yp_{r,y} = kp_k \quad ,$$

womit wir

$$0 = \operatorname{div}\mathbf{q} = \operatorname{div}\mathbf{q}_0 + (k+2)p_k$$

erhalten. Da zum einen $\operatorname{div}\mathbf{q}$ Polynome in x und y von kleineren Grad als p_k enthält, andererseits der letzte Ausdruck verschwinden muß und zudem $(k+2) \neq 0$ ist, muß folglich der Anteil $\mathbf{x}p_k$ von $\mathbf{q}$ verschwinden, d.h. der divergenzfreie Vektor $\mathbf{q}$ hat die Bauart :

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \text{ mit } \mathbf{q}_0 \in (P_k(K))^2 \quad .$$

Damit ist die zu $\mathbf{q}$ gehörende Stromfunktion ψ ein Polynom vom Grad $k+1$. Damit ist $\psi \in S_{k+1}(K)$.

Nach [13] ergibt sich die Dimension des Raumes $S_{k+1}(K)$ der Stromfunktionen zu

$$\dim S_{k+1}(K) = \frac{1}{2}\,(k+2)\,(k+3) \quad .$$

Für die Dimension des Raumes $RT_k^0(K)$ erhält man nach [13] die Dimension $\dim RT_k^0(K) = \dim S_{k+1}(K) - 1$, also

$$\frac{1}{2}\,(k+2)\,(k+3) - 1 = \frac{1}{2}\left(k^2 + 5k + 6 - 2\right) = \frac{1}{2}\,(k+1)\,(k+4) \quad ,$$

womit auch die Dimensionsaussagen von Korollar 3.6 bewiesen sind. ■

Bemerkung: Bei der Definition von $S_k(\Omega, T_j)$ müssen die Randbedingungen von (1.1) berücksichtigt werden. Die genaue Definition von $S_k(\Omega, T_j)$ lautet

$$S_k(\Omega, T_j) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in P_k(\Omega) \mid v\,|_K \in S_k(K), K \in T_l, v\,|_{\Gamma_N} = 0\} \quad .$$

womit die Stromfunktionen auf Neumann-Rändern konstant sind. Die inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen $u\,|_{\Gamma_D} = g$ von (1.1) treten bei der Definition des Raumes der Stromfunktionen nicht auf, da auf dem Dirichlet-Rand Γ_D ψ nicht vorgegeben werden darf. Hingegen treten die Neumann-Randbedingungen $a\frac{du}{d\nu}\,|_{\Gamma_N} = 0$ von (1.1) explizit als Dirichlet-Randbedingungen bei der Konstruktion von $S_k(\Omega, T_j)$ auf. Folglich ist die Stromfunktion zu $\mathbf{q} \in RT_0(T_j)$ nicht eindeutig, sondern nur bis auf eine Konstante festgelegt.

Die Sätze 3.1 und 3.2 zeigen, daß man als freie Parameter (Freiheitsgrade) für die Definition der Raviart-Thomas-Elemente vom Grade k

1. die Momente bis zur Ordnung k von $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ an den Kanten oder Oberflächen von K
2. die Momente bis zur Ordnung $k - 1$ von $\mathbf{q}$ auf K

verwenden kann. Die uns interessierenden Elemente niedrigster Ordnung $(k = 0)$ haben für alle Dreiecke K im $\mathbb{R}^2$ die Form

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1(x_1, x_2) \\ q_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + cx_1 \\ b + cx_2 \end{pmatrix} . \tag{3.10}$$

Wir können die $RT_0(K)$-Elemente wie in Abbildung (3.4) angegeben durch die 3 Normalkomponenten von $\mathbf{q}$ auf ∂K festlegen.

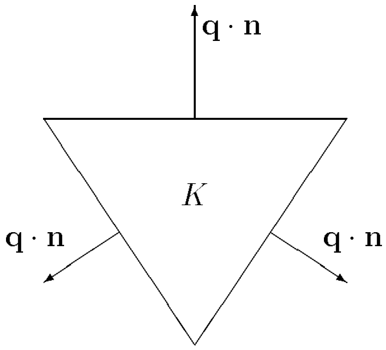

Abbildung 3.4: Freiheitsgrade der RT_0-Elemente

Für das Referenzdreieck, dem Einheitsdreieck $\hat{K} = \{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2_+ | \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \leq 1\}$ mit $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, lassen sich die drei kanonischen Basisfunktionen von $RT_0(\hat{K})$ einfach berechnen zu

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_1(\hat{\mathbf{x}}) &= \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 - 1 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{q}}_2(\hat{\mathbf{x}}) &= \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{q}}_3(\hat{\mathbf{x}}) &= \begin{pmatrix} \hat{x}_1 - 1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Man erhält sie über die sie definierenden Gleichungen (Freiheitsgrade)

$$\int\limits_{\hat{e}_i} \hat{\mathbf{q}}_j(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n}_i \, d\hat{\sigma} = \delta^i_j \qquad \text{mit } 1 \leq i, j \leq 3 \tag{3.12}$$

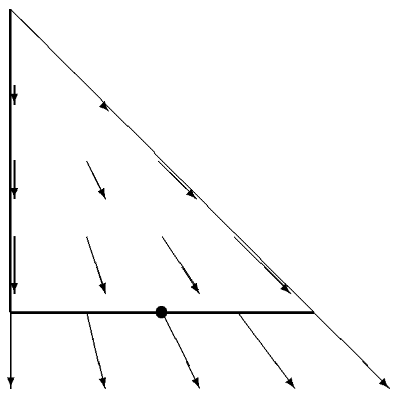

Abbildung 3.5: Vektorfeld der Basisfunktion $\hat{\mathbf{q}}_1$

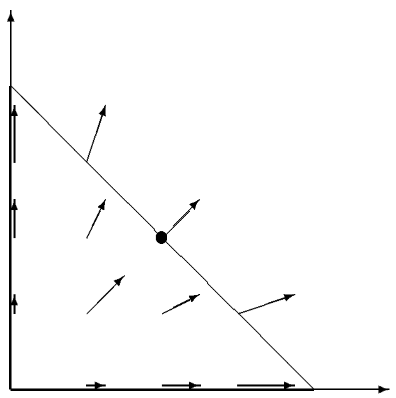

Abbildung 3.6: Vektorfeld der Basisfunktion $\hat{\mathbf{q}}_2$

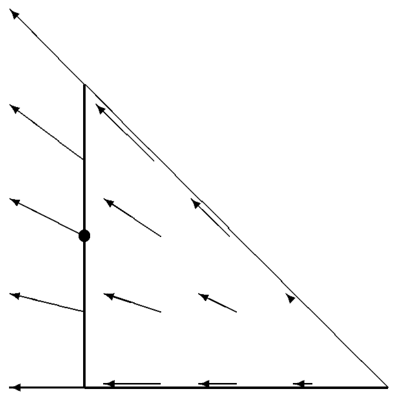

Abbildung 3.7: Vektorfeld der Basisfunktion $\hat{\mathbf{q}}_3$

3.3 Piola-Transformation

Ausgehend von den Funktionen (3.11) erhält man die Basisfunktionen zu einem beliebigen Element K einer vorgebenen Triangulation T_h über die *Piola-Transformation* (vgl. [5]).

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, so daß $K = F(\hat{K})$ ist. Ferner sei die Jacobimatrix DF von F für jedes $\hat{\mathbf{x}}$ regulär sowie F auf K invertierbar. Wird mit $P(\hat{\mathbf{q}})$ die Piola-Transformierte der Funktion $\hat{\mathbf{q}} \in (L^2(\Omega))^n$ bezeichnet, so erhalten wir

$$P(\hat{\mathbf{q}})(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{J(\hat{\mathbf{x}})} DF(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{x}}) \quad , \quad \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K} \tag{3.13}$$

mit $\mathbf{x} = F(\hat{\mathbf{x}})$ und $J(\hat{\mathbf{x}}) = |\det DF(\hat{\mathbf{x}})|$. Eine wesentliche Eigenschaft der Piola-Transformation ist, daß sie $H(\operatorname{div}, \hat{K})$ abbildet auf $H(\operatorname{div}, K)$. Die Transformierten sind also stets in unserem Ansatzraum $H(\operatorname{div}, \Omega)$ enthalten.

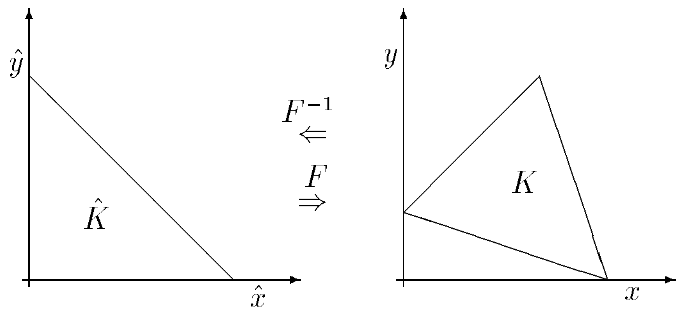

Abbildung 3.8: Dreieckstransformation

Sei $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ die Piola-Transformierte von $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2)$ und DF die Jacobi-Matrix der Funktion F. Dann gilt im Fall $n = 2$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{q}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} (DF) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_1}{\partial \hat{x}_2} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_2}{\partial \hat{x}_2} \end{pmatrix} \left(DF^{-1}\right) \tag{3.14}$$

und

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{1}{J} \operatorname{div} \hat{\mathbf{q}} \tag{3.15}$$

Der folgende Satz zeigt uns, wie sich bestimmte Integrale unter der Piola-Transformation berechnen:

Satz 3.7 *Sei* $v = \mathcal{F}(\hat{v}) \stackrel{def}{=} \hat{v} \circ F^{-1}$ *mit oben eingeführter* C^1*-Abbildung* F *sowie* $\mathbf{q} = P(\hat{\mathbf{q}})(\mathbf{x})$ *die Piola-Transformierte von* $\hat{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{x}})$*. Dann gelten folgende Beziehungen:*

$$\int_K \mathbf{q} \cdot \mathrm{grad}\; v\; dx = \int_{\hat{K}} \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathrm{grad}\; \hat{v}\; d\hat{x} \tag{3.16}$$

$$\int_K v \cdot \mathrm{div}\, \mathbf{q}\; dx = \int_{\hat{K}} \hat{v} \mathrm{div}\, \hat{\mathbf{q}}\; d\hat{x} \tag{3.17}$$

$$\int_{\partial K} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, \mu\; d\sigma = \int_{\partial \hat{K}} \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \hat{\mu}\; d\hat{\sigma} \tag{3.18}$$

Dabei ist $\hat{\mu} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial \hat{K})$ *beliebig und* $\mu = \mathcal{F}(\hat{\mu})$.

Beweis: Sei $w \in C_0^1(K)$. Partielle Integration über K liefert

$$\int_K w \mathrm{div}\, \mathbf{q}\; dx = -\int_K \mathrm{grad}\; w \cdot \mathbf{q}\; dx \quad . \tag{3.19}$$

Weiterhin gilt

$$\mathrm{grad}\; w = \left(DF^{-1}\right)^T \mathrm{grad}\; \hat{w} \circ F^{-1} = \mathcal{F}\left(\left(DF^{-1}\right)^T \mathrm{grad}\; \hat{w}\right) \quad , \tag{3.20}$$

woraus wir

$$(DF)^T \,\mathrm{grad}\; w = \mathrm{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{w} \tag{3.21}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\; w \cdot \mathbf{q} &= \frac{1}{J} \mathrm{grad}\; w \cdot (DF)\, \hat{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{J} \mathrm{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{w} \cdot \hat{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{3.22}$$

folgern können. Wegen $dx = J\, d\hat{x}$ erhalten wir damit

$$\int_K \mathrm{grad}\; w \cdot \mathbf{q}\; dx = \int_{\hat{K}} \mathrm{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{w} \cdot \hat{\mathbf{q}}\; d\hat{x} \quad , \tag{3.23}$$

womit sich die Aussage (3.16) bestätigt. Aus (3.19) leiten wir nach dem Ergebnis (3.23) die Beziehung

$$\int_K w \operatorname{div} \mathbf{q}\, dx = -\int_{\hat{K}} \operatorname{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{w} \cdot \hat{\mathbf{q}}\, d\hat{x} \tag{3.24}$$

ab. Partielle Integration auf der rechten Seite von (3.24) liefert die Behauptung (3.17). Für den Beweis zu (3.18) sei $\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial K)$ beliebig. Es gibt dann eine Funktion $w \in H^1(K)$ mit $w\,|_K = \mu$. Die Green'sche Formel liefert uns

$$\int_{\partial K} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, \mu\, d\sigma = \int_K \operatorname{grad}\, w \cdot \mathbf{q}\, dx + \int_K w \operatorname{div} \mathbf{q}\, dx \quad . \tag{3.25}$$

Wenden wir die bereits bewiesenen Aussagen (3.16) und (3.18) auf (3.25) an, so erhalten wir

$$\int_{\partial K} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, \mu\, d\sigma = \int_{\hat{K}} \operatorname{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{w} \cdot \hat{\mathbf{q}}\, d\hat{x} + \int_{\hat{K}} \hat{w} \operatorname{div} \hat{\mathbf{q}}\, d\hat{x} \quad . \tag{3.26}$$

Erneute Anwendung der Green'schen Formel auf der rechten Seite von (3.26) ergibt die letzte Behauptung von Satz 3.7 .■

Bemerkung: Eine für uns wichtige Eigenschaft ist die Erhaltung der Integrale über die Normalkomponenten (Formel (3.18)), womit sich die Freiheitsgrade (3.12) auf jedes beliebige Element K aus der Triangulation T_h übertragen lassen.

Die für die Bilinearform $a(\bullet, \bullet)$ auszuwertenden Integrale (1.5) ergeben sich mit Hilfe der Piola-Transformation zu

$$\int_K \left\langle k\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_j \right\rangle\, dx, \tag{3.27}$$

wobei $\boldsymbol{\psi}_i = P(\hat{\mathbf{q}}_i)(\mathbf{x})$ mit $\hat{\mathbf{q}}_i, 1 \le i \le 3$, aus (3.11) gilt. Damit sind die kanonischen Basisfunktionen über K die Bilder der kanonischen Basisfunktionen über $\hat{K}$ unter der Piola-Transformation.

In unserem Fall ist die am Anfang des Abschnitts 3.2 eingeführte Funktion F eine affine Abbildung. $F(\hat{\mathbf{x}})$ läßt sich schreiben als

$$F(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}_0 + \mathrm{M}\hat{\mathbf{x}} \quad . \tag{3.28}$$

Damit erhalten wir Normbeziehungen zwischen den Funktionen über dem Referenzdreieck und ihren Piola-Transformierten auf einem beliebigen Element der Triangulation vermöge

Satz 3.8 *Sei* $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = P(\hat{\mathbf{q}})(\mathbf{x})$ *die Piola-Transformierte von* $\hat{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{x}})$ *und seien die Triangulationen* T_j *für* $1 \leq j \leq J$ *wie in Abschnitt 3.1 eingeführt durch quasiuniforme Verfeinerungen einer Ausgangstriangulation* T_0 *erhalten worden. Dann gelten für alle Triangulationen folgende Beziehungen:*

$$\|\mathbf{q}\|^2_{L^2(K)} \leq \frac{C_1}{vol(K)} h^2 \|\hat{\mathbf{q}}\|^2_{L^2(\hat{K})} \tag{3.29}$$

$$\|\hat{\mathbf{q}}\|^2_{L^2(\hat{K})} \leq C_2 vol(K) h^{-2} \|\mathbf{q}\|^2_{L^2(K)} \tag{3.30}$$

$$\|\operatorname{div} \mathbf{q}\|^2_{L^2(K)} \leq \frac{C_3}{vol(K)} \|\operatorname{div} \hat{\mathbf{q}}\|^2_{L^2(\hat{K})} \tag{3.31}$$

$$\|\operatorname{div} \hat{\mathbf{q}}\|^2_{L^2(\hat{K})} \leq C_4 vol(K) \|\operatorname{div} \mathbf{q}\|^2_{L^2(K)} \tag{3.32}$$

h bedeutet den Durchmesser des Elements K der Triangulation T_j. Die Konstanten C_i mit $1 \leq i \leq 4$ sind unabhängig vom Durchmesser h und dem Element K.

Beweis: Aus [12] erhalten wir die Abschätzung $\|\mathrm{M}\| = \|DF\| \leq ch$ mit einer vom Dreieck K der Triangulation unabhängigen Konstanten c. Damit können wir die Beziehungen in Satz 3.8 herleiten:

[zu (3.29)]

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{q}\|^2_{L^2(K)} &= \left\| \frac{1}{vol(K)} DF\hat{\mathbf{q}} \right\|^2_{L^2(K)} \\
&\leq \frac{1}{vol(K)} \|DF\hat{\mathbf{q}}\|^2_{L^2(K)} \\
&\leq \frac{C_1}{vol(K)} h^2 \|\hat{\mathbf{q}}\|^2_{L^2(\hat{K})}
\end{aligned}$$

[zu (3.31)]

$$\begin{aligned}
\|\operatorname{div} \mathbf{q}\|^2_{L^2(K)} &= \| \frac{1}{vol(K)} \operatorname{div} \hat{\mathbf{q}} \|^2_{L^2(K)} \\
&\leq \frac{C_3}{vol(K)} \|\operatorname{div} \hat{\mathbf{q}}\|^2_{L^2(\hat{K})}
\end{aligned}$$

Die Beweise der Formeln (3.30) und (3.32) laufen analog zu den Beweisen für (3.29) und (3.31).■

Für Kapitel 5 notieren wir an dieser Stelle noch eine Transformationsformel für Funktionen $\theta \in \mathcal{W}(\hat{K})$. Sei dazu die Abbildung F definiert wie in (3.28). Dann gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\hat{K}} \hat{\theta} \; d\hat{x} &= \int\limits_{F(\hat{K})} \mathcal{F}(\hat{\theta}) \mid \det \mathrm{M} \mid^{-1} \; dx \\ &= \int\limits_{F(\hat{K})} (\hat{\theta} \circ F^{-1}) \mid \det \mathrm{M} \mid^{-1} \; dx \\ &= \int\limits_{K} \theta \mid \det \mathrm{M} \mid^{-1} \; dx \quad . \end{aligned} \tag{3.33}$$

Aus (3.33) folgern wir weiter

$$\sqrt{\int\limits_{\hat{K}} \hat{\theta} \; d\hat{x}} = \sqrt{\int\limits_{K} \theta \mid \det \mathrm{M} \mid^{-1} \; dx} \tag{3.34}$$

und erhalten so die Identität

$$\|\hat{\theta}\|_{L^2(\hat{K})} = \frac{1}{\sqrt{\mid \det \mathrm{M} \mid}} \|\theta\|_{L^2(K)} \quad . \tag{3.35}$$

Kapitel 4

Analyse der Koeffizientenmatrizen

4.1 Analyse des Operators A_r

Unsere Aufgabe ist es, das lineare Gleichungssystem (2.25) effizient zu lösen, wobei wir in diesem Kapitel die Matrixdarstellung der vorgestellten Operatoren betrachten. Will man dieses Gleichungssystem mit einem CG-artigen Verfahren lösen, so ist in jedem (äußeren) Schritt noch ein positiv definites, inneres lineares Gleichungssystem

$$\mathrm{A}_r \tilde{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\mathrm{A} + r\mathrm{B}^T\mathrm{M}\mathrm{B}\right)^{-1} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}} \tag{4.1}$$

zu betrachten. Die Matrix M in (4.1) stellt die Diskretisierung des in Abschnitt 2.3.2 eingeführten Riesz-Operators dar (man vergleiche hierzu auch die im Rahmen der algorithmischen Aspekte erläuterte Diskretisierung des Riesz-Isomorphismus in Abschnitt 6.1). Der Einfachheit halber setzen wir in diesem Kapitel $\tilde{\mathrm{B}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{M}^{\frac{1}{2}}\mathrm{B}$ und benennen $\tilde{\mathrm{B}}$ wieder um zu B. Wie wir in Abschnitt 6.1 sehen werden, ist M eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen. Daher ist M symmetrisch und positiv definit und es gilt $\mathrm{M} = \mathrm{M}^T$ und $\mathrm{M}^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{M}^{\frac{1}{2}})^T$.

Aus Kapitel 2 ist bekannt, daß die Kondition der in (4.1) auftretenden Matrix $\mathrm{A}_r = \left(\mathrm{A} + r\mathrm{B}^T\mathrm{B}\right)$ mit wachsendem r gegen ∞ geht. Das besagt auch der folgende Satz:

Satz 4.1 *([9], Proposition 2.3) Die Konditionszahl $\kappa(\mathrm{A}_r)$ der Matrix A_r genügt*

$$\kappa(\mathrm{A}_r) \simeq r\frac{\|B\|^2}{\sigma} \tag{4.2}$$

mit

$$\sigma = \inf_{\mathbf{v} \in \ker \mathrm{B} \setminus \{0\}} \frac{(\mathrm{A}\mathbf{v}, \mathbf{v})}{|\, \mathbf{v} \,|^2} \quad . \tag{4.3}$$

Bemerkung: In Satz 4.1 wird das euklidische Standardskalarprodukt $| \bullet |$ und die euklidische Norm $\| \bullet \|$ verwendet.

Beweis: (wir folgen dem Beweis in [9]) Die Kondition der Matrix A_r ist

$$\kappa(\mathrm{A}_r) = \|\mathrm{A}_r\| \cdot \|\mathrm{A}_r^{-1}\| \quad , \tag{4.4}$$

wobei die Norm von A_r abgeschätzt werden kann durch

$$r\|\mathrm{B}\|^2 + \frac{1}{\|\mathrm{A}^{-1}\|} \leq \|\mathrm{A}_r\| \leq r\|\mathrm{B}\|^2 + \|\mathrm{A}\| \quad . \tag{4.5}$$

Sei $\mathcal{S} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid |\, \mathbf{v} \,|= 1\}$. Dann gilt

$$\frac{1}{\|\mathrm{A}_r^{-1}\|} = \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} (\mathrm{A}_r\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}} \left[(\mathrm{A}\mathbf{v}, \mathbf{v}) + r \mid \mathrm{B}\mathbf{v} \mid^2 \right] \quad . \tag{4.6}$$

Folglich existiert wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ für jeden Lagrange Parameter r ein $\mathbf{u}_r \in \mathcal{S}$, so daß die Gleichung

$$\frac{1}{\|\mathrm{A}_r^{-1}\|} = (\mathrm{A}\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_r) + r \mid \mathrm{B}\mathbf{u}_r \mid^2 \tag{4.7}$$

erfüllt ist. Betrachten wir nun das Verhalten der Folge $(\mathbf{u}_r)_r$ für $r \to \infty$. Sei $\mathbf{w} \in \ker \mathrm{B} \cap \mathcal{S}$. Wegen $|\, \mathrm{B}\mathbf{w} \,|= 0$ folgt somit für alle $r \in \mathbb{R}$

$$(\mathrm{A}\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_r) + r \mid \mathrm{B}\mathbf{u}_r \mid^2 \leq (\mathrm{A}\mathbf{w}, \mathbf{w}) + r \mid \mathrm{B}\mathbf{w} \mid^2 = (\mathrm{A}\mathbf{w}, \mathbf{w}) \quad . \tag{4.8}$$

Aus der letzten Ungleichung erhalten wir

$$(\mathrm{A}\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_r) + r \mid \mathrm{B}\mathbf{u}_r \mid^2 \leq \|\mathrm{A}\| \tag{4.9}$$

für alle $r \in \mathbb{R}$. Wegen der Beschränktheit der Folge $(\mathbf{u}_r)_r$ existiert eine Folge $(\tilde{\mathbf{u}}_r)_r$, die gegen ein Element $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^n$ konvergiert und im folgenden durch die Notation $(\mathbf{u}_r)_r$ ersetzt werden soll. Aus (4.9) können wir nun

$$| \mathbf{Bu}^* |^2 = \lim_{r\to\infty} | \mathbf{Bu}_r |^2 \leq \lim_{r\to\infty} \frac{\|\mathrm{A}\|}{r} = 0 \tag{4.10}$$

und daraus $\mathbf{u}^* \in \ker \mathrm{B} \cap \mathcal{S}$ folgern. Damit kann man in (4.8) auch $\mathbf{u}^*$ anstelle von $\mathbf{w}$ nehmen und wir erhalten

$$(\mathrm{A}\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_r) \leq (\mathrm{A}\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_r) + r \mid \mathrm{B}\mathbf{u}_r \mid^2 \leq (\mathrm{A}\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) \tag{4.11}$$

für alle $r \in \mathbb{R}$. Wegen der Konvergenz der Folge $(\mathbf{u}_r)_r$ gegen das Element $\mathbf{u}^*$ wird nun

$$\lim_{r\to\infty} r \mid \mathrm{B}\mathbf{u}_r \mid^2 = 0 \tag{4.12}$$

ersichtlich, was zusammen mit (4.7)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\|\mathrm{A}_r^{-1}\|} = (\mathrm{A}\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) \tag{4.13}$$

ergibt. Insgesamt folgt nun für $r \to \infty$

$$(\mathrm{A}\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) \leq (\mathrm{A}\mathbf{w}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \ker \mathrm{B} \cap \mathcal{S} \quad . \tag{4.14}$$

Unser abschließendes Ergebnis ist

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\|\mathrm{A}_r^{-1}\|} = \frac{1}{(\mathrm{A}\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)} = \frac{1}{\sigma} \quad , \tag{4.15}$$

was mit der Abschätzung (4.5) die Behauptung des Satzes liefert. ■

4.2 Analyse des Operators $\mathrm{BA}_r^{-1}\mathrm{B}^T$

Es kann jedoch gezeigt werden, daß die Kondition der Gesamtmatrix $\mathrm{BA}_r^{-1}\mathrm{B}^T$, die die Koeffizientenmatrix des von uns betrachteten linearen Gleichungssystems (2.25) darstellt, für $r \to \infty$ gegen 1 konvergiert. Um dies zeigen zu können, benötigen wir einige Vorbereitungen.

Wir schreiben A_r um in

$$\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{I} + r\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{B}^T\mathrm{B}\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}} \right) \mathrm{A}^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{4.16}$$

Die Inverse von A_r läßt sich dann zum einen in der Form

$$\left(I + rA^{-1}B^TB\right)^{-1} A^{-1} \tag{4.17}$$

und in der für uns interessanteren Form

$$A^{-\frac{1}{2}} \left(I + rA^{-\frac{1}{2}}B^TBA^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} A^{-\frac{1}{2}} \tag{4.18}$$

schreiben. Seien nun $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix $A^{-1}B^TB$ sowie $\tilde{\mathbf{x}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_n$ die zugehörigen Eigenvektoren, also

$$A^{-1}B^TB\tilde{\mathbf{x}}_i = \lambda_i\tilde{\mathbf{x}}_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad . \tag{4.19}$$

Dann sind wegen

$$A^{-\frac{1}{2}}B^TBA^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{x}}_i = \lambda_i A^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{x}}_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad , \tag{4.20}$$

die Vektoren $\mathbf{x}_i \stackrel{\text{def}}{=} A^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{x}}_i$ für $1 \leq i \leq n$ die Eigenvektoren der Matrix $A^{-\frac{1}{2}}B^TBA^{-\frac{1}{2}}$ mit den bereits bekannten Eigenwerte λ_i für $1 \leq i \leq n$. Damit erkennen wir aus bekannten Sätzen der Linearen Algebra, daß die Eigenwerte λ_i reell sind, da $A^{-\frac{1}{2}}B^TBA^{-\frac{1}{2}}$ symmetrisch ist. Desweiteren gilt $\lambda_i \geq 0$ für $1 \leq i \leq n$ wegen der positiven Semidefinitheit von $A^{-\frac{1}{2}}B^TBA^{-\frac{1}{2}}$. Aus der Linearen Algebra ist weiter bekannt, daß die Eigenvektoren eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden.

Die Matrix B ist surjektiv. Dadurch erhalten wir mit Hilfe der Abbildung

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} \mapsto BA^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x} \end{cases} \tag{4.21}$$

eine Basis in $\operatorname{Im} B = \mathbb{R}^m$, denn aus

$$A^{-\frac{1}{2}}B^TBA^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i \tag{4.22}$$

folgt mit der Definition $\mathbf{y}_i = BA^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i$ für $i \leq i \leq n$

$$BA^{-1}B^T\mathbf{y}_i = BA^{-1}B^TBA^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i \stackrel{(4.22)}{=} \lambda_i BA^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{y}_i \quad , \tag{4.23}$$

also ist $\mathbf{y}_i$ Eigenvektor der Matrix $\mathrm{BA}^{-1}\mathrm{B}^T$ zum Eigenwert λ_i. Dabei betrachten wir in (4.22) und (4.23) nur die von 0 verschiedenen Eigenwerte λ_i mit $i \in I$, I Indexmenge, bzw. die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{x}_i$. An dieser Stelle sei bemerkt, daß auch die Matrix $\mathrm{BA}^{-1}\mathrm{B}^T$ symmetrisch ist, also auch hieraus $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i \in I$ folgt. Die Konditionsaussage ergibt sich nun mit Hilfe folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{BA}_r^{-1}\mathrm{B}^T\mathbf{y}_i &\overset{(4.18)}{=} \mathrm{BA}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{I} + r\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{B}^T\mathrm{BA}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{B}^T\mathbf{y}_i \\
&\overset{(*)}{=} \mathrm{BA}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{I} + r\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{B}^T\mathrm{BA}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{B}^T\mathrm{BA}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i \\
&\overset{(4.22)}{=} \mathrm{BA}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{I} + r\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{B}^T\mathrm{BA}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}\lambda_i\mathbf{x}_i \\
&= \mathrm{BA}^{-\frac{1}{2}}\frac{\lambda_i}{1 + r\lambda_i}\mathbf{x}_i \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\lambda_i}{1 + r\lambda_i}\mathbf{y}_i \quad ,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

wobei wir in den mit $(*)$ gekennzeichneten Zeilen die Definition von $\mathbf{y}_i$ für $i \in I$ benutzt haben. Für die Kondition haben wir demnach

$$\begin{aligned}
\kappa\left(\mathrm{BA}_r^{-1}\mathrm{B}^T\right) &= \frac{\lambda_{\max}\left(\mathrm{BA}_r^{-1}\mathrm{B}^T\right)}{\lambda_{\min}\left(\mathrm{BA}_r^{-1}\mathrm{B}^T\right)} \\
&= \frac{\max\limits_{i \in I}\dfrac{\lambda_i}{1 + r\lambda_i}}{\min\limits_{i \in I}\dfrac{\lambda_i}{1 + r\lambda_i}} \\
&= \frac{\lambda_{\max}}{1 + r\lambda_{\max}}\frac{1 + r\lambda_{\min}}{\lambda_{\min}} \quad .
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Wie man aus (4.25) nun leicht erkennen kann, gilt

$$\lim_{r \to \infty}\kappa\left(\mathrm{BA}_r^{-1}\mathrm{B}^T\right) = \lim_{r \to \infty}\frac{\lambda_{\max}}{1 + r\lambda_{\max}}\frac{1 + r\lambda_{\min}}{\lambda_{\min}} = 1 \quad , \tag{4.26}$$

womit die Behauptung über die Kondition der Matrix $\mathrm{BA}_r^{-1}\mathrm{B}^T$ gezeigt ist.

Bemerkung: Für die Wahl $r = 0$ gilt $\mathrm{BA}^{-1}\mathrm{B}^T = \mathrm{BA}_r^{-1}\mathrm{B}^T$. Für allgemeines r haben wir die Identität $\mathrm{BA}_r^{-1}\mathrm{B}^T = \mathrm{B}\left(\mathrm{I} + r\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^T\mathrm{B}\right)^{-1}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^T$. Man kann daher die erweiterte Lagrange Methode als eine Art von Vorkonditionierung für das Systems $\mathrm{BA}^{-1}\mathrm{B}^T$ mit der Matrix $\left(\mathrm{I} + r\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^T\mathrm{B}\right)^{-1}$ als Vorkonditionierer betrachten.

Kapitel 5

Multilevel Vorkonditionierung

5.1 Einführung und abstrakte Theorie

Will man die durch die Methode der erweiterten Lagrangeschen Multiplikatoren entstehende Gleichung (2.25) numerisch lösen, so ist ein inneres Problem zu lösen, das dem elliptischen Variationsproblem

$$\text{Suche ein } \mathbf{j} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^h \text{mit } a_r(\mathbf{j}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^h \tag{5.1}$$

entspricht, wobei $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ mit der Triangulation T_J korrespondiert (vgl. Kapitel 3). Dabei wählen wir als Ansatzraum $\mathcal{V}^h \subset H(\operatorname{div}, \Omega)$ die Raviart-Thomas-Elemente $RT_0(\Omega, T_h)$ für den in dieser Arbeit betrachteten Modellfall (1.1). Angemerkt sei, daß die Neumann-Randbedingungen in die Definition des Ansatzraumes eingehen und folglich nicht weiter berücksichtigt werden müssen. Das lineare Funktional $f(\mathbf{v})$ auf $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ in obigem Variationsproblem ist gegeben durch Gleichung (2.25). Die Bilinearform $a_r(\bullet, \bullet) : \boldsymbol{\mathcal{V}}^h \to \boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ hat die Gestalt

$$a_r(\mathbf{j}, \mathbf{v}) = (k\mathbf{j}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} + r(\operatorname{div} \mathbf{j}, \operatorname{div} \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{j}, \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \tag{5.2}$$

Wir werden im weiteren Verlauf der Arbeit den Index r der Bilinearform $a_r(\bullet, \bullet)$ weglassen und stattdessen $a(\bullet, \bullet)$ schreiben, da eine Verwechslungsgefahr mit der Funktion $a(x, y)$ der Problemstellung (1.1) nicht besteht.

Aus (5.2) erkennt man unter Berücksichtigung der Definition der Komponente $k(x, y) = a(x, y)^{-1}$ in Kapitel 1 die Symmetrie und die positive Definitheit der Bilinearform, die damit ein Skalarprodukt darstellt. Formal ist ihr der Differentialoperator 2. Ordnung

$$Id + r\nabla \mathrm{div} \,:\, H(\mathrm{div}\,,\Omega) \rightarrow H'(\mathrm{div}\,,\Omega) \tag{5.3}$$

als linke Seite der Eulerschen Differentialgleichung von (5.1) zugeordnet. Der zu (5.2) gehörige Operator sei $\mathrm{A}_r : H(\mathrm{div}\,,\Omega) \rightarrow H'(\mathrm{div}\,,\Omega)$. Für diesen Operator hat man für $r > 0$ eine von der Maschenweite h abhängige Kondition zu erwarten, also $\kappa(\mathrm{A}_r) \sim h^{-2}$, was für Differentialoperatoren 2. Ordnung typisch ist. Aus Satz 4.1 ist weiterhin die lineare Abhängigkeit $\kappa(\mathrm{A}_r) \sim r$ der Kondition vom Lagrange Parameter bekannt.

Verwendet man zur Lösung des inneren Gleichungssystems von (2.25) ein CG-Verfahren, so wird sich die Konvergenzgeschwindigkeit infolge der Abhängigkeit der Kondition der Matrix A_r von h und r mit wachsender Feinheit der Triangulation und wachsendem Lagrange Parameter r deutlich verlangsamen. Dies folgt aus dem wohlbekannten Ergebnis ([3],[20])

$$\|u - u_l\| \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa(\mathrm{A}_r)} - 1}{\sqrt{\kappa(\mathrm{A}_r)} + 1}\right)^l \|u - u_0\|$$

für das CG-Verfahren, das wir für unsere Problemstellung haranziehen wollen. Dabei bedeutet hier und im folgenden $\| \bullet \|$ die durch die Bilinearform $a(\bullet, \bullet)$ induzierte Energienorm. Aus obiger Abschätzung zeigt sich, daß die Konvergenzgeschwindigkeit in einem starken Maß von der Kondition der Koeffizientenmatrix A_r abhängt.

Um die Konvergenzgeschwindigkeit zu steigern, ist daher ein Vorkonditionierer $\mathrm{S}_r : \boldsymbol{\mathcal{V}}^h \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ gesucht, der folgende Eigenschaften aufweisen soll [20] :

1. Die Kondition $\kappa(\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r)$ des vorkonditionierten Systems wächst nur mäßig mit wachsendem r und zunehmender Feinheit der Triangulation und ist insbesondere kleiner als die Kondition der Matrix A_r.

2. Die Anwendung $\mathrm{S}_r\mathbf{v}_h$ des Operators S_r auf ein $\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ ist "billig" auszuwerten.

3. Der Operator S_r ist symmetrisch und positiv definit.

Dabei erlaubt die letzte der drei Forderungen weiterhin die Verwendung eines CG-Verfahrens zur Lösung auch des vorkonditionierten Gleichungssystems,wohingegen die Forderungen 1 und 2 im allgemeinen gegensätzlich sind. Wegen der Forderung $\kappa(\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r) < \kappa(\mathrm{A}_r)$ läßt sich der Operator S_r als approximative Inverse von A_r interpretieren.

Wegen der Elliptizität von (5.2) bietet es sich an, einen Vorkonditionierer auf der Basis einer Multilevel-Zerlegung des Ansatzraumes $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ zu suchen. Wir zerlegen $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ dabei in

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^h = \sum_{j=0}^{J} \boldsymbol{\mathcal{V}}_j \quad (J \in \mathbb{N}) \tag{5.4}$$

wobei die Teilräume $\boldsymbol{\mathcal{V}}_j$ für $0 \leq j \leq J$ den verschiedenen Verfeinerungsstufen der in Abschnitt 3.1 eingeführten Triangulationen entsprechen. Die Strategie bei der Vorkonditionierung ist nun, die Kopplung zwischen den einzelnen Funktionenräumen $\boldsymbol{\mathcal{V}}_j$ nicht zu berücksichtigen und (5.2) separat über diesen Räumen zu lösen. Diese Vorgehensweise stellt einen *additiven Vorkonditionierer* dar und führt auf die Darstellung (vgl. [20],[21])

$$\mathrm{S}_r = \sum_{j=0}^{J} \left(\mathrm{A}_r^j\right)^{-1} \mathrm{Q}_j \tag{5.5}$$

mit den L^2-Orthogonalprojektionen $\mathrm{Q}_j : \boldsymbol{\mathcal{V}}^h \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}}_j$ und den Operatoren A_r^j, definiert mittels

$$\left(\mathrm{A}_r^j u_j, v_j\right) = a\left(u_j, v_j\right) \quad \forall u_j, v_j \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_j \tag{5.6}$$

für $0 \leq j \leq J$. Die algebraische Umformung

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{A}_r^j \mathrm{P}_j u_h, v_j\right) &= a\left(\mathrm{P}_j u_h, v_j\right) \\ &= a\left(u_h, v_j\right) \\ &= \left(\mathrm{A}_r u_h, v_j\right) \\ &= \left(\mathrm{Q}_j \mathrm{A}_r u_h, v_j\right) \end{aligned}$$

zeigt die Identität

$$\mathrm{A}_r^j \mathrm{P}_j = \mathrm{Q}_j \mathrm{A}_r \quad . \tag{5.7}$$

Multiplikation von (5.7) mit $(\mathrm{A}_r^j)^{-1}$ und anschließende Summation über j führt uns auf die zu (5.5) äquivalente Darstellung

$$\mathrm{S}_r = \left(\sum_{j=0}^{J} \mathrm{P}_j\right) \mathrm{A}_r^{-1} \quad , \tag{5.8}$$

wobei die Operatoren $\mathrm{P}_j : \boldsymbol{\mathcal{V}}^h \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}}_j$ für $0 \leq j \leq J$ die $a(\bullet, \bullet)$-orthogonalen Projektionen auf $\boldsymbol{\mathcal{V}}_j$ bezeichnen, die durch die Beziehungen

$$a\left(\mathrm{P}_j \mathbf{j}_h, \mathbf{v}_j\right) = a\left(\mathbf{j}_h, \mathbf{v}_j\right) \quad \forall \mathbf{j}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^h \ \ \forall \mathbf{v}_j \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_j \tag{5.9}$$

eindeutig definiert sind.

Die beiden nachfolgenden fundamentalen Sätze stellen algebraische Hilfsmittel zur Verfügung, mit deren Hilfe sich die Qualität eines Vorkonditionierers abschätzen läßt, der sich auf das Splitting (5.4) des Ansatzraumes $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ stützt.

Satz 5.1 (Lions Lemma) *([2], Lemma 1) Zu jedem $\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ gebe es $\mathbf{v}_j \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_j$ mit $0 \le j \le J$, so daß die beiden Bedingungen*

$$\mathbf{v}_h = \sum_{j=0}^{J} \mathbf{v}_j \tag{5.10}$$

und

$$\sum_{j=0}^{J} a\left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j\right) \le C a\left(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right) \tag{5.11}$$

erfüllt seien. Dabei kann die Konstante C von $\mathbf{v}_h$ unabhängig gewählt werden. Dann gilt:

$$\lambda_{\min}(\mathrm{S}_r \mathrm{A}_r) \ge \frac{1}{C} \quad . \tag{5.12}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
a\left(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right) \quad & \overset{(5.10)}{\le} \quad \sum_{j=0}^{J} a\left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_h\right) \\
& = \quad \sum_{j=0}^{J} a\left(\mathrm{P}_j \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_h\right) \\
& \overset{(*)}{=} \quad \sum_{j=0}^{J} a\left(\mathbf{v}_j, \mathrm{P}_j \mathbf{v}_h\right) \\
& \overset{(C.S.U.)}{\le} \quad \sum_{j=0}^{J} \sqrt{a\left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j\right)} \sqrt{a\left(\mathrm{P}_j \mathbf{v}_h, \mathrm{P}_j \mathbf{v}_h\right)} \\
& \overset{Schwarz}{\le} \quad \sqrt{\left(\sum_{j=0}^{J} a\left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j\right)\right)} \sqrt{\left(\sum_{j=0}^{J} a\left(\mathrm{P}_j \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right)\right)} \\
& \overset{(5.11)}{\le} \quad \sqrt{C a\left(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right)} \sqrt{a\left(\sum_{j=0}^{J} \mathrm{P}_j \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right)}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

In $(*)$ wurde die Selbstadjungiertheit der Operatoren P_j verwendet. Durch algebraische Umformung von (5.13) erhalten wir

$$\frac{1}{C} a\left(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right) \leq a\left(\sum_{j=0}^{J} \mathrm{P}_j \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right) \quad \blacksquare$$

Satz 5.2 (verschärfte Cauchy-Schwarze-Ungleichung)

([2], Lemma 1) Neben den Voraussetzungen von Lions Lemma gebe es reelle Zahlen $\epsilon_{i,j}, 1 \leq i,j \leq J$ mit $0 \leq \epsilon_{i,j} \leq 1$, so daß

$$a\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right) \leq \epsilon_{i,j} \sqrt{a\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right)} \sqrt{a\left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j\right)} \tag{5.14}$$

für alle $\mathbf{v}_i \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_i$ und alle $\mathbf{v}_j \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_j$ erfüllt ist. Dann gilt:

$$\lambda_{\max}(\mathrm{S}_r \mathrm{A}_r) \leq \rho(E) \quad , \tag{5.15}$$

wobei $\rho(E)$ den Spektralradius der Matrix $E = (\epsilon_{i,j})_{1 \leq i,j \leq J}$ bedeutet.

Beweis: Im folgenden sei $\mathbf{x} = \left(\sqrt{a\left(\mathrm{P}_i \mathbf{v}_i, \mathrm{P}_i \mathbf{v}_i\right)}\right)_i$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}
a\left(\mathrm{S}_r \mathrm{A}_r \mathbf{v}_h, \mathrm{S}_r \mathrm{A}_r \mathbf{v}_h\right) &\overset{(5.8)}{=} \sum_{i=0}^{J} \sum_{j=0}^{J} a\left(\mathrm{P}_i \mathbf{v}_h, \mathrm{P}_j \mathbf{v}_h\right) \\
&\overset{5.14)}{\leq} \sum_{i=0}^{J} \sum_{j=0}^{J} \epsilon_{i,j} \sqrt{a\left(\mathrm{P}_i \mathbf{v}_h, \mathrm{P}_i \mathbf{v}_h\right)} \sqrt{a\left(\mathrm{P}_j \mathbf{v}_h, \mathrm{P}_j \mathbf{v}_h\right)} \\
&\overset{(*)}{=} \mathbf{x}^T E \mathbf{x} \\
&\leq \rho(E) \|\mathbf{x}\|^2 \\
&\overset{(*)}{=} \rho(E) \sum_{j=0}^{J} a\left(\mathrm{P}_j \mathbf{v}_h, \mathrm{P}_j \mathbf{v}_h\right) \\
&\overset{(5.8),(5.10)}{=} \rho(E) a\left(\mathrm{S}_r \mathrm{A}_r \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

In den mit $(*)$ gekennzeichneten Zeilen wurde die Definition von $\mathbf{x}$ vom Anfang des Beweises verwendet. Mit $\mathbf{v}_h \overset{\text{def}}{=} (\mathrm{S}_r \mathrm{A}_r)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{w}_h$ folgt die Behauptung wegen

$$a\left((\mathrm{S}_r \mathrm{A}_r)^{\frac{1}{2}} \mathbf{w}_h, (\mathrm{S}_r \mathrm{A}_r)^{\frac{1}{2}} \mathbf{w}_h\right) \leq \rho(E) a\left((\mathrm{S}_r \mathrm{A}_r)^{\frac{1}{2}} \mathbf{w}_h, (\mathrm{S}_r \mathrm{A}_r)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{w}_h\right)$$

bzw. wegen der Selbstadjungiertheit des Operators $\mathrm{S}_r \mathrm{A}_r$ durch

$$a\left(\mathrm{S}_r \mathrm{A}_r \mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h\right) \leq \rho(E) a\left(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h\right) \quad . \quad \blacksquare \tag{5.17}$$

Aus dem Lemma 5.2, das eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert liefert, und Lemma 5.3, das uns eine Abschätzung des größten Eigenwerts zur Verfügung stellt, erhalten wir abschließend

$$\kappa(\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r) \leq \frac{\lambda_{\max}(\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r)}{\lambda_{\min}(\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r)} \leq \frac{\rho(E)}{\frac{1}{C}} = C\rho(E) \tag{5.18}$$

als Abschätzung für die Kondition des vorkonditionierten Systems.

5.2 Splitting der Finite Element Räume

In der vorliegenden Arbeit nehmen wir als Ansatzräume für die Flußräume $\boldsymbol{\mathcal{V}}_j$ $(0 \leq j \leq J)$ die Raviart-Thomas-Elemente $RT_0(\Omega, T_j)$ zur Triangulation T_j des Gebiets Ω. Die dazu passende Diskretisierung von $L^2(\Omega)$ wird dann durch die Räume

$$\mathcal{W}_j = \{w \in L^2(\Omega) \mid w\,|_K \in P_0(K), K \in T_j\}$$

zur Verfügung gestellt. Da nach der in Kapitel 3 dargestellten Verfeinerungstechnik die Triangulationen ineinander geschachtelt sind, gilt dies ebenfalls für die Flußräume. Wir haben also

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_0 \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}_1 \subset \ldots \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}_J \quad .$$

Wir wollen der Notation in Abschnitt 5.1 folgend im weiteren $T_h \equiv T_J$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h \equiv \boldsymbol{\mathcal{V}}_J$ sowie $\mathcal{W}^h \equiv \mathcal{W}_J$ setzen.

Unser Ziel ist nun, eine geeignete Multilevel-Zerlegung für den aus den $RT_0(\Omega, T_j)$-Elementen aufgebauten diskreten Flußraum $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ zu finden. Wir wollen uns dabei an dem Vorschlag von Vassilevski und Wang aus [19] orientieren. Dafür definieren wir für jedes Element $K \in T_{j-1}$ mit $1 \leq j \leq J$ den Raum

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_j(K) \equiv \{\mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_j(K) | \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ auf } \partial K\} \quad . \tag{5.19}$$

Setzt man $\mathbf{v} \equiv 0$ außerhalb von K, so ist der Raum $\boldsymbol{\mathcal{X}}_j(K)$ ein Unterraum von $\boldsymbol{\mathcal{V}}_j$. $\boldsymbol{\mathcal{X}}_j$ sei die direkte Summe der $\boldsymbol{\mathcal{X}}_j(K)$ für alle $K \in T_{j-1}$, also

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_j = \sum_{K \in T_{j-1}} \boldsymbol{\mathcal{X}}_j(K) \quad . \tag{5.20}$$

Der Bequemlichkeit halber setzen wir $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0 = \boldsymbol{\mathcal{V}}_0$ als Flußraum für den gröbsten Level T_0. Sei $\boldsymbol{\mathcal{H}}_j = \{\mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_j \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$ für $0 \leq j \leq J$ der divergenzfreie Unterraum von $\boldsymbol{\mathcal{V}}_j$.

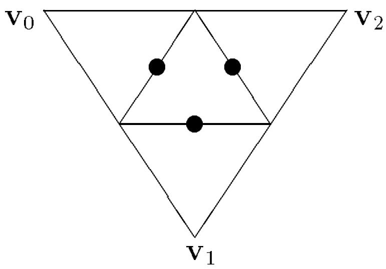

Abbildung 5.1: Basisfunktionen von $\boldsymbol{\mathcal{X}}_j(K)$ mit

$K = \triangle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ bei roter Verfeinerung von K

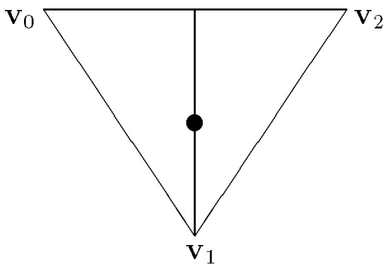

Abbildung 5.2: Basisfunktionen von $\boldsymbol{\mathcal{X}}_j(K)$ mit

$K = \triangle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ bei grüner Verfeinerung von K

Die Abbildungen 5.1 und 5.2 zeigen die "Stützpunkte" der Funktionen der von uns betrachteten Raviart-Thomas-Räume $RT_0(K)$, die für ein gegebenes Dreieck $K = \triangle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ den Raum $\boldsymbol{\mathcal{X}}(K)$ aufspannen.

Ein Splitting der Räume $\boldsymbol{\mathcal{V}}_j$ und $\mathcal{W}_j$ ist nun gegeben durch

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^h = \sum_{j=0}^{J} \boldsymbol{\mathcal{X}}_j + \sum_{j=0}^{J} \boldsymbol{\mathcal{H}}_j \tag{5.21}$$

$$\mathcal{W}^h = \sum_{j=0}^{J} \mathcal{Y}_j \qquad \text{mit } \mathcal{Y}_j = \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{X}}_j \tag{5.22}$$

Dabei ergibt sich die Zerlegung des Raumes $\mathcal{W}^h$ aus der Zerlegung für $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h$, wenn die Zerlegung von $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ richtig ist. Es ist folglich nur die Richtigkeit der Aussage (5.21) zu prüfen.

Sei $\mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ und $\theta = \operatorname{div} \mathbf{v} \in \mathcal{W}^h$. Weiterhin sei

$$\theta_j = (Q_j - Q_{j-1})\,\theta \quad , \tag{5.23}$$

wobei $Q_{-1} = 0$ und $Q_j : \mathcal{W}^h \to \mathcal{W}_j$ der L^2-Projektionsoperator in den Unterraum $\mathcal{W}_j$ ist. Aus (5.23) folgt damit $\theta_j \in \mathcal{Y}_j$, da $\mathcal{Y}_{j-1} \subset \mathcal{Y}_j$ gilt. Per definitionem gilt $Q_j Q_{j-1} = Q_{j-1} Q_j = Q_{j-1}$ und wir erhalten $(Q_j - Q_{j-1})(Q_l - Q_{l-1}) = 0$, falls $l \neq j$. Die Zerlegung von $\mathcal{W}^h$, die in (5.23) implizit gegeben ist, ist also eine L^2-orthogonale Zerlegung und es gilt

$$\|\theta_j\|^2_{L^2(\Omega)} = \|Q_j\theta\|^2_{L^2(\Omega)} - \|Q_{j-1}\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{5.24}$$

genauso wie

$$\begin{aligned} \|\theta - Q_{i-1}\theta\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|Q_J\theta \pm Q_{J-1}\theta \pm \ldots \pm Q_i\theta - Q_{i-1}\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|Q_J\theta - Q_{J-1}\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \pm \ldots \pm \|Q_J\theta - Q_{J-1}\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\theta_J\|^2_{L^2(\Omega)} \pm \ldots \pm \|\theta_i\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{j=i}^{J} \|\theta_j\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{5.25}$$

Für das folgende Lemma ordnen wir jedem $\theta_j \quad (1 \leq j \leq J)$ einen Fluß $\boldsymbol{\psi}_j \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_j$ zu, der Teil der Lösung $(\boldsymbol{\psi}_j, p_j) \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_j \times \mathcal{Y}_j$ des Problems

$$\begin{array}{rcll} (k\boldsymbol{\psi}_j, \boldsymbol{\xi})_{\mathcal{V}} \; - \; (\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}, p_j)_{\mathcal{W}} &=& 0 & , \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_j \\ (\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}_j, w)_{\mathcal{W}} &=& (\theta_j, w)_{\mathcal{W}} & , w \in \mathcal{Y}_j \end{array} \tag{5.26}$$

ist. Die Aufgabenstellung (5.26) kann hierbei in lokale elliptische Randwertproblemen auf den Teilgebieten $K \in T_{j-1}$ aufgespaltet werden und ist daher leicht zu lösen. Aus der Lösbarkeit des in Kapitel 1 angegebenen Systems (1.4) folgt die Lösbarkeit der Probleme (5.26).

Lemma 5.3 *([19], Lemma 3.1) Sei* $(\boldsymbol{\psi}_j, p_j) \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_j \times \mathcal{Y}_j$ *die Lösung von (5.26) und*

$$\boldsymbol{\psi} = \sum_{j=0}^{J} \boldsymbol{\psi}_j \quad . \tag{5.27}$$

Dann gilt: $\operatorname{div}\boldsymbol{\psi} = \operatorname{div}\mathbf{v} = \theta$.

Beweis: Aus (5.26) folgt

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}_j = \theta_j \tag{5.28}$$

und aus (5.23) erkennt man sofort

$$\theta = \sum_{j=0}^{J} \theta_j \quad . \tag{5.29}$$

Weiter folgt mit (5.27)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = \operatorname{div} \left(\sum_{j=0}^{J} \boldsymbol{\psi}_j \right) = \sum_{j=0}^{J} \left(\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_j \right) \overset{(5.28)}{=} \sum_{j=0}^{J} \theta_j \overset{(5.29)}{=} \theta \quad , \tag{5.30}$$

womit der erste Teil der Behauptung gezeigt ist. Die Behauptung $\operatorname{div} \mathbf{v} = \theta$ stellt die Definition von θ vor (5.23) dar. ■

Die erwünschte Zerlegung von $\mathbf{v}$ kann durch eine weitere Zerlegung des divergenzfreien Flusses

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\psi} \tag{5.31}$$

in eine Summe divergenzfreier Flüsse auf jedem Level erhalten werden, wie sie z.B. in [7] nachzulesen ist.

Genauer: sei σ die Stromfunktion von $\hat{\mathbf{v}}$, also $\hat{\mathbf{v}} = \operatorname{rot}\, \sigma$ mit $\sigma \in S_1(\Omega, T^h)$ und $\bar{Q}_i$ der L^2-Projektionsoperator auf den Stromfunktionsraum $S_1(\Omega, T_i)$ auf dem Level i. Sei

$$\mathbf{v}_i = \operatorname{rot}\, (\bar{Q}_i - \bar{Q}_{i-1})\, \sigma \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_i \quad , \tag{5.32}$$

wobei $\bar{Q}_{-1} = 0$ und $\bar{Q}_J = Id$ der Identitätsoperator ist. Aus (5.32) folgt wegen $\mathbf{v}_i \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_i$ und der Definition von $\boldsymbol{\mathcal{H}}_i$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0 \qquad \forall i \in \{0, \ldots, J\} \tag{5.33}$$

Wir haben für $\hat{\mathbf{v}}$ demnach das Splitting

$$\operatorname{rot}\, \sigma = \sum_{i=0}^{J} \operatorname{rot}\, (\bar{Q}_i - \bar{Q}_{i-1})\, \sigma \tag{5.34}$$

bzw.

$$\hat{\mathbf{v}} = \sum_{i=0}^{J} (\bar{Q}_i - \bar{Q}_{i-1})\, \hat{\mathbf{v}} = \sum_{i=0}^{J} \mathbf{v}_i \quad . \tag{5.35}$$

Aus (5.31) und (5.35) folgt zusammen mit (5.27) schließlich

$$\underbrace{\mathbf{v}}_{\in \boldsymbol{\mathcal{V}}^h} = \sum_{i=0}^{J} \underbrace{\boldsymbol{\psi}_i}_{\in \boldsymbol{\mathcal{X}}_i} + \sum_{i=0}^{J} \underbrace{\mathbf{v}_i}_{\in \boldsymbol{\mathcal{H}}_i} \quad , \tag{5.36}$$

was die Gültigkeit der in (5.21) und damit auch der in (5.22) angegebenen Zerlegung der Räume $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ und $\mathcal{W}^h$ zeigt.

Bemerkung: Es ist $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{i,j} = \text{span}\,\{\text{rot}\ \boldsymbol{\psi}_{i,j}\}$ der Raum, der durch die Rotation der stückweise linearen Funktionen $\boldsymbol{\psi}_{i,j}$ aufgespannt wird. Die auf dem Level j definierten Funktionen $\boldsymbol{\psi}_{i,j}$ sind charakterisiert durch

$$\boldsymbol{\psi}_{i,j}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \ \text{falls } \mathbf{x} = \mathbf{x}_i \\ 0 & , \ \text{falls } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i \end{cases} , \quad x_i \text{ Ecke der Triangulation } T_j \tag{5.37}$$

n_j bezeichnet hierbei die Anzahl der Ecken $\mathbf{x}_i$ aller Dreiecke auf dem Level j. Es handelt sich hierbei folglich um die bekannten “Hütchenfunktionen”. Damit läßt sich der divergenzfreie Unterraum $\boldsymbol{\mathcal{H}}_j$ weiter zerlegen in die direkte Summe eindimensionaler Räume, in Formeln

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_j = \bigoplus_{i=1}^{n_j} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{i,j} \quad , \tag{5.38}$$

wobei n_j die Anzahl der Ecken der Triangulation des Levels j darstellt. Diese weitere Zerlegung der divergenzfreien Unterräume werden wir in Abschnitt 5.3 benötigen.

Bevor wir in Abschnitt 5.3 zur Konditionsaussage für das von uns gewählte Splitting der Finite Element Räume kommen, notieren wir noch zwei Lemmas, die wir später in 5.3 benötigt werden.

Lemma 5.4 *([19], Lemma 3.2) Sei $(\boldsymbol{\psi}_i, p_i)$ definiert durch (5.26). Dann existiert eine Konstante C, so daß*

$$(k\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_i)_{L^2(\Omega)} \leq \begin{cases} C_{(5.4)} h_i^2 \|\theta_i\|^2_{L^2(\Omega)} & , \quad i > 0 \\ C_{(5.4)} \|\theta_0\|^2_{L^2(\Omega)} & , \quad i = 0 \end{cases} \tag{5.39}$$

gilt.

Beweis: Sei $\hat{K}$ das Referenzdreieck sowie $K \in T_{i-1}$ ein Element der Triangulierung auf dem Level $i-1$. Die Abbildung Υ_K, definiert durch

$$\Upsilon_K = \begin{cases} \hat{K} & \rightarrow \quad K \\ \hat{\mathbf{x}} & \mapsto \quad \mathrm{B}_K \mathbf{x} + \mathbf{t}_K \end{cases} , \tag{5.40}$$

stellt eine affine Abbildung dar, die das Referenzdreieck $\hat{K}$ in das Element K überführt. Dabei ist B_K eine nicht-singuläre Matrix, für die gilt:

$$| \det \mathrm{B}_K | = O(h_{i-1}^2) \tag{5.41}$$

Weiterhin sei $(\boldsymbol{\psi}_K, p_K) \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_i(K) \times \mathcal{Y}_i(K)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} \int_K k \, \langle \boldsymbol{\psi}_K, \mathbf{v} \rangle \; dx \quad + \quad \int_K p_K \mathrm{div}\, \mathbf{v} \; dx &= 0 \\ \int_K w \, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\psi}_K \; dx \quad &= -\int_K \theta_K w \; dx \end{aligned} \tag{5.42}$$

für alle $\mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_i(K)$ und alle $w \in \mathcal{Y}_i(K)$. Mit

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_K = | \det \mathrm{B}_K | \, \mathrm{B}_K \boldsymbol{\psi}_K \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(\hat{K})$$

wollen wir die auf dem Referenzelement definierte Piola-Transformierte von ψ_K bezeichnen. Aus [5] folgt nun, daß $(\hat{\boldsymbol{\psi}}_K, \hat{p}_K) \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(\hat{K}) \times \mathcal{Y}(\hat{K})$ die Lösung von

$$\begin{aligned} \int_{\hat{K}} \hat{k} \hat{\boldsymbol{\psi}}_K \frac{\mathrm{B}_K^T \mathrm{B}_K}{| \det \mathrm{B}_K |} \hat{\mathbf{v}} \; d\hat{x} \quad + \quad \int_{\hat{K}} \hat{p}_K \mathrm{div}\, \hat{\mathbf{v}} \; d\hat{x} &= 0 \\ \int_{\hat{K}} \hat{w} \mathrm{div}\, \hat{\boldsymbol{\psi}}_K \; d\hat{x} \quad &= \int_{\hat{K}} \hat{\theta}_K \hat{w} \, | \det \mathrm{B}_K | \; d\hat{x} \end{aligned} \tag{5.43}$$

für alle $\hat{\mathbf{v}} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(\hat{K})$ und alle $\hat{w} \in \mathcal{Y}(\hat{K})$ ist. Dabei gilt

$$\frac{\mathrm{B}_K^T \mathrm{B}_K}{| \det \mathrm{B}_K |} \sim C \cdot Id \quad , \tag{5.44}$$

denn aus (5.41) folgt wegen

$$\lambda_{\max}(\mathrm{B}_K^T \mathrm{B}_K) = \| \mathrm{B}_K \|_2^2 \sim h_{i-1}^2 \tag{5.45}$$

zum einen

$$\lambda_{\max} \left(\frac{\mathrm{B}_K^T \mathrm{B}_K}{| \det \mathrm{B}_K |} \right) \sim 1 \quad , \tag{5.46}$$

zum anderen haben wir wegen

$$\lambda_{\min}(\mathrm{B}_K^T \mathrm{B}_K) = \frac{1}{\|\mathrm{B}_K^{-1}\|_2^2} \sim \frac{1}{h_{i-1}^2} \tag{5.47}$$

für den kleinsten Eigenwert

$$\lambda_{\min}\left(\frac{\mathrm{B}_K^T \mathrm{B}_K}{\mid \det \mathrm{B}_K \mid}\right) \sim 1 \quad , \tag{5.48}$$

womit sich die Aussage von (5.44) bestätigt. Auf dem Referenzdreieck $\hat{K}$ gilt die Babuška-Brezzi-Bedingung für (5.43). Aus (5.43) folgt

$$\begin{aligned} \left(k\hat{\boldsymbol{\psi}}_K, \hat{\boldsymbol{\psi}}_K\right)_{L^2(\hat{K})} &\leq C \mid \det \mathrm{B}_K \mid \left(\hat{\theta}, \hat{p}_K\right)_{L^2(\hat{K})} \\ &\leq C \mid \det \mathrm{B}_K \mid \|\hat{\theta}\|_{L^2(\hat{K})} \|\hat{p}_K\|_{L^2(\hat{K})} \end{aligned} \tag{5.49}$$

und mit der Babuška-Brezzi-Bedingung (3.1) und Lemma 3.1 weiter

$$\sup_{\hat{\mathbf{z}}_K \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\hat{K})} \frac{(\operatorname{div} \hat{\mathbf{z}}_K, \hat{p}_K)_{L^2(\hat{K})}}{\|\hat{\mathbf{z}}_K\|} = \sup_{\hat{\mathbf{z}}_K \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\hat{K})} \frac{\|\hat{\mathbf{z}}_K\|^2}{\|\hat{\mathbf{z}}_K\|} \geq \beta \|\hat{p}_K\|_{L^2(\hat{K})} \quad , \tag{5.50}$$

woraus man

$$\|\hat{p}_K\|_{L^2(\hat{K})} \leq \frac{1}{\beta} \|\hat{\boldsymbol{\psi}}_K\| \tag{5.51}$$

folgert. Dabei sei zur Erinnerung erwähnt, daß hier und im folgenden die schon in Abschnitt 5.1 eingeführte nicht indizierte Norm $\| \bullet \| = \sqrt{a(\bullet, \bullet)}$ die Energienorm bedeutet. Setzt man (5.51) in (5.49) ein, so erkennt man

$$\left(k\hat{\boldsymbol{\psi}}_K, \hat{\boldsymbol{\psi}}_K\right)_{L^2(\hat{K})} = \|\hat{\boldsymbol{\psi}}_K\|^2 \leq \frac{C}{\beta} \mid \det \mathrm{B}_K \mid \|\hat{\theta}\|_{L^2(\hat{K})} \|\hat{\boldsymbol{\psi}}_K\| \quad , \tag{5.52}$$

woraus wir

$$\|\hat{\boldsymbol{\psi}}_K\| \leq \mid \det \mathrm{B}_K \mid \|\hat{\theta}\|_{L^2(\hat{K})} \tag{5.53}$$

bzw.

$$\left(k\hat{\boldsymbol{\psi}}_K, \hat{\boldsymbol{\psi}}_K\right)_{L^2(\hat{K})} \leq \mid \det \mathrm{B}_K \mid^2 \|\hat{\theta}\|^2_{L^2(\hat{K})} \tag{5.54}$$

folgern. Aus (3.35) folgt für die rechte Seite von (5.54)

$$\mid \det \mathrm{B}_K \mid^2 \|\hat{\theta}\|^2_{L^2(\hat{K})} = \mid \det \mathrm{B}_K \mid \|\theta\|^2_{L^2(K)} \quad . \tag{5.55}$$

Für die linke Seite von (5.54) gilt nach Abschnitt 3.3

$$\left(k\hat{\boldsymbol{\psi}}_K, \hat{\boldsymbol{\psi}}_K\right)_{L^2(\hat{K})} \sim (k\boldsymbol{\psi}_K, \boldsymbol{\psi}_K)_{L^2(K)} \quad , \tag{5.56}$$

woraus wir insgesamt

$$(k\boldsymbol{\psi}_K, \boldsymbol{\psi}_K)_{L^2(K)} \leq C \mid \det \mathrm{B}_K \mid \|\theta\|^2_{L^2(K)} \tag{5.57}$$

und mit (5.41) schließlich

$$(k\boldsymbol{\psi}_K, \boldsymbol{\psi}_K)_{L^2(K)} \sim \tilde{C} h^2_{i-1} \|\theta\|^2_{L^2(K)} \tag{5.58}$$

folgern können. Eine Summation über alle Dreiecke K der Triangulierung T_{i-1} liefert nun die Aussage des Lemma für $i > 0$. Für $i = 0$ beachte man, daß $\mid \det \mathrm{B}_K \mid = O(h_0^2)$ für jedes Element K der Triangulation T_0 des gröbsten Levels ist. ■

Bemerkung: Im Beweis zu Lemma 5.4 spielt die Abschätzung für die grüne Verfeinerung keine besondere Rolle, da ein grün verfeinertes Dreieck auf den feineren Leveln nicht weiter verfeinert wird.

Seien die Lösungen $\boldsymbol{\psi}_j$ aus (5.26) die Komponenten von $\mathbf{v}$ in Formel (5.36). Definiere

$$\boldsymbol{\Psi}_i = \sum_{j=i}^{J} \boldsymbol{\psi}_j \quad . \tag{5.59}$$

Lemma 5.5 *([19], Lemma 3.3) Es existiert eine Konstante $C_{(5.5)}$, so daß*

$$\|\boldsymbol{\Psi}_i\|^2 \leq C_{(5.5)}(h_i^2 + r)\|\mathrm{div}\,\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{5.60}$$

für $0 \leq i \leq J$ gilt.

Beweis: Aus (5.59) und der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\sqrt{(k\boldsymbol{\Psi}_i,\boldsymbol{\Psi}_i)_{L^2(\Omega)}} &= \sqrt{\left(k\sum_{j=i}^{J}\boldsymbol{\psi}_j,\sum_{j=i}^{J}\boldsymbol{\psi}_j\right)_{L^2(\Omega)}} \\
&\overset{(*)}{\leq} \sum_{j=i}^{J}\sqrt{\left(k\boldsymbol{\psi}_j,\boldsymbol{\psi}_j\right)_{L^2(\Omega)}} \\
&\overset{Lemma 5.4}{\leq} \sum_{j=i}^{J}\sqrt{C_{(5.4)}}h_j\|\theta_j\|_{L^2(\Omega)} \quad , \qquad (5.61)
\end{aligned}$$

wobei in $(*)$ die Dreiecksungleichung auf die gewichtete L^2-Norm angewendet wird. Mit der Ungleichung von Schwarz erhalten wir aus (5.61)

$$(k\boldsymbol{\Psi}_i,\boldsymbol{\Psi}_i)_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{C_{(5.4)}}\left(\sum_{j=i}^{J}h_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=i}^{J}\|\theta_j\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \qquad (5.62)$$

was wir wegen

$$\sum_{j=i}^{J}h_j^2 \leq 2h_i^2 \quad \text{aus} \quad 2h_i = h_{i-1} \qquad (5.63)$$

und Formel (5.25) mittels

$$(k\boldsymbol{\Psi}_i,\boldsymbol{\Psi}_i)_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2C_{(5.4)}}h_i\|\theta - Q_{i-1}\theta\|_{L^2(\Omega)} \qquad (5.64)$$

weiter abschätzen können. Weiterhin haben wir

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\Psi}_i \overset{(5.59)}{=} \operatorname{div}\sum_{j=i}^{J}\boldsymbol{\psi}_j = \sum_{j=i}^{J}\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}_j \overset{(5.28)}{=} \sum_{j=i}^{J}\theta_j \overset{(5.23)}{=} \theta - Q_{i-1}\theta \qquad (5.65)$$

und wegen (5.24) und (5.25) ergibt sich schließlich

$$\|\operatorname{div}\boldsymbol{\Psi}_i\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\theta - Q_{i-1}\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|Q_{i-1}\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad . \qquad (5.66)$$

Nach diesen vorbereitenden Überlegungen folgern wir nun

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\Psi}_i\|^2 &= a\left(\boldsymbol{\Psi}_i, \boldsymbol{\Psi}_i\right) \\
&= (k\boldsymbol{\Psi}_i, \boldsymbol{\Psi}_i)_{L^2(\Omega)} + r\|\operatorname{div}\boldsymbol{\Psi}_i\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{(5.64),(5.66)}{\leq} \left[\sqrt{2C_{(5.4)}}h_i^2 + r\right]\left(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} - \|Q_{i-1}\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq \underbrace{2C_{(5.4)}}_{\overset{\text{def}}{=} C_{(5.5.1)}}\left[h_i^2 + r\right]\left(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} - \|Q_{i-1}\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq C_{(5.5.1)}\left[h_i^2 + r\right]\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{Lemma 5.3}{=} C_{(5.5.1)}\left[h_i^2 + r\right]\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

was für $i > 0$ mit $C_{(5.5)} = C_{(5.5.1)}$ die Behauptung liefert, wobei $C_{(5.5.1)} = \max\{\sqrt{2C_{(5.4)}}, 1\}$ gewählt wird. Für $i = 0$ beachte man die Zerlegung $\boldsymbol{\Psi}_0 = \boldsymbol{\psi}_0 + \boldsymbol{\Psi}_1$ und erhält dadurch

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\Psi}_0\|^2 &\leq 2\left(\|\boldsymbol{\psi}_0\| + \|\boldsymbol{\Psi}_1\|\right)^2 \\
&\overset{(5.67)}{\leq} 2\Big((k\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_0)_{L^2(\Omega)} + r\|\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&\qquad + C_{(5.5.1)}\left[h_1^2 + r\right]\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^2 \\
&\overset{Lemma 5.4}{\leq} 2\Big(C_{(5.4)}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + r\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&\qquad + C_{(5.5.1)}\left[h_1^2 + r\right]\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^2 \\
&\overset{Lemma 5.3}{\leq} 2\left(C_{(5.4)} + r\right)\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&\qquad + 2C_{(5.5.1)}\left(h_1^2 + r\right)\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left[\tilde{C}\left(h_0^2 + r\right) + 2C_{(5.5.1)}\left(h_0^2 + r\right)\right]\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= C_{(5.5.2)}\left(h_0^2 + r\right)\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} \quad ,
\end{aligned}
\tag{5.68}
$$

was nun mit $C_{(5.5)} = C_{(5.5.2)}$ auch für $i = 0$ die Behauptung von Lemma 5.5 zeigt. Dabei gilt in (5.68): $\tilde{C} = 2c\max\{C_{(5.4)}, 1\}$ mit $ch_0^2 \geq 1$ (beachte $h_0^2 \equiv 1$!) und $C_{(5.5.2)} = \tilde{C} + 2C_{(5.5.1)}$. ■

5.3 Konditionsabschätzung

5.3.1 Abschätzung für den kleinsten Eigenwert

Das Ziel dieses Abschnitts ist, die abstrakte Theorie aus Abschnitt 5.1 auf das in Abschnitt 5.2 eingeführte Splitting der Finite Element Räume anzuwenden. Dabei stützen wir uns entscheidend auf die bislang erhaltenen Ergebnisse. Wir zeigen in einem ersten Schritt, daß die Voraussetzungen von Lions Lemma (Lemma 5.1) für das Splitting aus Abschnitt 5.2 erfüllt sind.

Satz 5.6 *Zu jedem* $\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ *gibt es ein* $\mathbf{v}_{i,j} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_{i,j}$ *und ein* $\boldsymbol{\psi}_j \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_j$, *so daß*

$$\sum_{j=0}^{J}\sum_{i=0}^{n_j} a\left(\mathbf{v}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j}\right) + \sum_{j=0}^{J} a\left(\boldsymbol{\psi}_j, \boldsymbol{\psi}_j\right) \leq C_{(5.6)} a\left(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right) \tag{5.69}$$

mit einer von $\mathbf{v}_h$ *unabhängigen Konstanten* $C_{(5.6)}$. n_j *bezeichnet wieder die Anzahl der Ecken* $\mathbf{x}_i$ *aller Dreiecke auf dem Level* j.

Beweis: Wir werden die Aussage des Satzes in zwei getrennten Teilen beweisen. In Teil 1 beweisen wir für (5.69) die Abschätzung für den ersetn Summanden, im zweiten Teil schließlich die Abschätzung für den zweiten Summanden.

Betrachten wir nun zunächst den ersten Summanden. Sei ein Element $\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^h$ beliebig gegeben und $\hat{\mathbf{v}}_h = \mathbf{v}_h - \boldsymbol{\psi}$ sein divergenzfreier Anteil gemäß (5.31). Wegen $\operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_h$ gibt es nach Korollar 3.6 ein $\phi_h \in S_1(\Omega, T_h)$ mit $\hat{\mathbf{v}}_h = \operatorname{rot} \phi_h$. Wenn wir mit $(\bullet, \bullet)_{1,k}$ die Dirichletform zum Differentialoperators $-\operatorname{div}(k\nabla u)$ bezeichnen, d.h. wenn wir

$$(\phi, \eta)_{1,k} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} k < \nabla\phi, \nabla\eta > \; dx \quad \forall \phi, \eta \in H^1(\Omega) \tag{5.70}$$

gleichsetzen, dann garantieren wohlbekannte Resultate ([6], [22]) die Existenz einer von der Maschenweite h und der Stromfunktion ϕ_h unabhängigen Konstanten $\bar{C} > 0$ und einer Zerlegung von ϕ_h in

$$\phi_h = \sum_{j=0}^{J} \phi_{i,j} \tag{5.71}$$

mit $\phi_{i,j} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{\psi}_{i,j}\}$ und

$$\sum_{j=0}^{J}\sum_{i=0}^{n_j}\left(\phi_{i,j},\phi_{i,j}\right)_{1,k} \leq \bar{C}\left(\phi_h,\phi_h\right)_{1,k} \quad . \tag{5.72}$$

Wegen $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\ \phi_h) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\ \eta_h) = 0$ folgt mit (5.70)

$$\left(\phi_h,\eta_h\right)_{1,k} = \int\limits_{\Omega} k < \operatorname{rot}\ \phi_h, \operatorname{rot}\ \eta_h > \ dx = a\left(\operatorname{rot}\ \phi_h, \operatorname{rot}\ \eta_h\right) \tag{5.73}$$

und weiter mit der Wahl $\mathbf{v}_{i,j} = \operatorname{rot}\ \phi_{i,j}$ aus (5.72) die Abschätzung

$$\sum_{j=0}^{J}\sum_{i=0}^{n_j} a\left(\mathbf{v}_{i,j},\mathbf{v}_{i,j}\right) \leq \bar{C}a\left(\hat{\mathbf{v}}_h,\hat{\mathbf{v}}_h\right) \quad . \tag{5.74}$$

Wir schätzen (5.74) für $r > 0$ weiter ab:

$$\begin{aligned}
a\left(\hat{\mathbf{v}}_h,\hat{\mathbf{v}}_h\right) &= a\left(\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v}_h - \boldsymbol{\psi}\right) \\
&\leq 2\left[a\left(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h\right) + a\left(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\psi}\right)\right] \\
&= 2\left[a\left(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h\right) + \left(k\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\psi}\right)_{L^2(\Omega)} + r\left(\operatorname{div}\boldsymbol{\psi},\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}\right)_{L^2(\Omega)}\right] \\
&\overset{Lemma 5.5}{\leq} 2\Big[a\left(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h\right) + C_{(5.5)}\left(h_0^2 + r\right)\|\operatorname{div}\mathbf{v}_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&\qquad + r\|\operatorname{div}\mathbf{v}_h\|^2_{L^2(\Omega)}\Big] \\
&= 2\left[a\left(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h\right) + \left(C_{(5.5)}\left(h_0^2 + r\right) + r\right)\|\operatorname{div}\mathbf{v}_h\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \\
&\leq 2\left[1 + \frac{C_{(5.5)}\left(h_0^2 + r\right) + r}{r}\right] a\left(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h\right) \\
&= 2\left[2 + C_{(5.5)} + \frac{C_{(5.5)}h_0^2}{r}\right] a\left(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h\right)
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Damit ist der erste Teil des Beweises fertig. Für den zweiten Teil sei $\boldsymbol{\psi}$ analog zu Lemma 5.3 zerlegt, also

$$\boldsymbol{\psi} = \sum_{j=0}^{J}\boldsymbol{\psi}_j \quad . \tag{5.76}$$

Wir wenden nun Lemma 5.4 und Lemma 5.3 zusammen mit (5.25) an und erhalten für $r > 0$ somit

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{J} a\left(\boldsymbol{\psi}_j, \boldsymbol{\psi}_j\right) &= \sum_{j=0}^{J} \left(k\boldsymbol{\psi}_j, \boldsymbol{\psi}_j\right)_{L^2(\Omega)} + r\left(\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}_j, \operatorname{div}\boldsymbol{\psi}_j\right)_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{Lemma\ 5.3,5.4}{\leq} \sum_{j=0}^{J} \left(C_{(5.4)} h_j^2 \|\theta_j\|^2_{L^2(\Omega)} + r\|\theta_j\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq \left(C_{(5.4)} h_0^2 + r\right) \sum_{j=0}^{J} \|\theta_j\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{(5.25)}{=} \left(C_{(5.4)} h_0^2 + r\right) \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{Lemma\ 5.3}{=} \left(C_{(5.4)} h_0^2 + r\right) \|\operatorname{div}\mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(1 + \frac{h_0^2 C_{(5.4)}}{r}\right) a\left(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right) \qquad (5.77)
\end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^h$. Dabei gilt $h_0 \approx 1$. Fassen wir nun beide Teile zusammen, so erhalten wir als Ergebnis

$$\sum_{j=0}^{J} \sum_{i=0}^{n_j} a\left(\mathbf{v}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j}\right) + \sum_{j=0}^{J} a\left(\boldsymbol{\psi}_j, \boldsymbol{\psi}_j\right) \leq C_{(5.6)} a\left(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right) \qquad (5.78)$$

mit einer für große Parameter r von h und r unabhängigen Konstanten $C_{(5.6)}$, die sich aus den Konstanten der Formeln (5.75) und (5.77) ergibt. Ausgeschrieben ergibt sich $C_{(5.6)}$ zu

$$C_{(5.6)} \overset{\text{def}}{=} \left[\left(1 + \frac{h_0^2 C_{(5.4)}}{r}\right) + 2\bar{C}\left(2 + C_{(5.5)} + \frac{h_0^2 C_{(5.5)}}{r}\right)\right] \quad .$$

Damit ist die Aussage von Satz 5.6 vollständig bewiesen und wir haben

$$\lambda_{\min}\left(\mathrm{S}_r \mathrm{A}_r\right) \geq \frac{1}{C_{(5.6)}} \qquad (5.79)$$

als Abschätzung für den kleinsten Eigenwert gefunden. ■

5.3.2 Abschätzung für den größten Eigenwert

Satz 5.6 stellt uns eine Schranke für den kleinsten Eigenwert des vorkonditionierten Operators $\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r$ zur Verfügung. Eine Abschätzung des größten Eigenwertes liefert uns eine verschärfte Cauchy-Schwarze-Gleichung.

Bevor wir diese Ungleichung anwenden, führen wir eine Aufteilung der nicht auf dem Neumann-Rand liegenden Eckpunkte $\mathbf{x}_{i,j}$ des Levels j $(0 \leq j \leq J, 1 \leq i \leq n_j)$ in 4 Klassen $M_1^j, M_2^j, M_3^j, M_4^j$ durch, so daß 2 Ecken aus derselben Klasse nicht durch eine Kante der Triangulation T_j miteinenander verbunden sind (vgl. [2]). Damit sind die zwei Eckpunkten derselben Klasse zugeordneten Teilräume des Multilevel-Splittings $a(\bullet,\bullet)$-orthogonal. Formal läßt sich dem Vorkonditionierer somit

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_j = \sum_{l=1}^{4} \text{span } \{\boldsymbol{\psi}_x^j \mid \boldsymbol{\psi}_x^j \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_{i,j}, \mathbf{x} \in M_l^j\} \tag{5.80}$$

als Splitting für die divergenzfreien Teilräume zugrundelegen. Dieses Splitting führt auf insgesamt $5(J+1)$ Teilräume.

Wir können nun die Cauchy-Schwarze-Gleichung auf unsere Bilinearform $a(\bullet,\bullet)$ mit dem neuen Splitting anwenden. Der schlechteste Fall für die Größen $\epsilon_{i,j}$ in Satz 5.2 ist also 1, womit sich aus der verschärften Cauchy-Schwarze-Ungleichung die bekannte Cauchy-Schwarze-Ungleichung ergibt. Folglich haben wir eine Abschätzung für den schlechtesten Fall durch

$$\rho(E) \leq \|E\|_\infty = 5(J+1) \tag{5.81}$$

gefunden. Mit diesem Ergebnis formulieren wir den

Satz 5.7 *Für den größten Eigenwert des vorkonditionierten Systems* $\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r$ *ergibt sich nach Satz 5.2 die Abschätzung*

$$\lambda_{\max}(\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r) \leq 5(J+1) = O(\log h) \quad . \tag{5.82}$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich sofort aus Formel (5.81). ∎

5.3.3 Konditionsaussage

Leider kann die verschärfte Cauchy-Schwarze-Ungleichung für das Splitting der Finite Element Räume nicht nachgewiesen werden, wodurch sich keine $O(1)$-Schranke für den größten Eigenwert einstellt, wie wir sie jedoch für den kleinsten Eigenwert nachweisen konnten. Damit ergibt sich eine für die angegebene Zerlegung von der Maschenweite h abhängige Kondition für den Operator $\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r$:

Satz 5.8 *Die Kondition* $\kappa(\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r)$ *des vorkonditionierten Systems mit dem Vorkonditionierer* S_r *zu dem Splitting aus Abschnitt 5.2 genügt der Abschätzung*

$$\kappa(\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r) \leq 5C_{(5.6)}(J+1) \quad , \tag{5.83}$$

wobei J die Anzahl an Level angibt.

Beweis: Die Behauptung aus Satz 5.8 ergibt sich aus Satz 5.6 und Satz 5.7 . ■

Bemerkung: In den Formelgruppen (5.75) und (5.77) wurden die dortigen Abschätzung dadurch erreicht, daß durch den Lagrange Parameter r dividiert wurde. Für $r = 0$ ist die durchgeführte Abschätzung folglich nicht durchführbar, so daß sich auf diese Weise keine Aussage über die Kondition treffen läßt. Außerdem wird aus den angesprochenen Abschätzungen ersichtlich, daß der Vorkonditionierer in der Theorie für den Fall wachsender Lagrange Parameter konzipiert ist. Für $r \ll 1$ ist eine Verschlechterung der Kondition zu erwarten, da $\kappa(\mathrm{A}_r) = \kappa(\mathrm{A}) = O(1)$ für $r = 0$ gezeigt werden kann (Kondition der Massenmatrix).

Kapitel 6

Algorithmische Aspekte

Die Implementierung eines Verfahrens zur approximativen Lösung der Problemstellung (1.1) bzw. des diskreten Problems (2.25) baut auf dem in C++ geschriebenen Basispaket GOOFE (*general object oriented finite elements*) auf. Der Grundstock von GOOFE verwaltet hierbei alle Triangulationsobjekte sowie deren (mögliche) Knoten. Ebenso übernimmt es die Durchführung von Verfeinerungsschritten sowie die Assemblierung auf ausgewählten Gittern. Darüberhinaus bietet GOOFE eine Reihe iterativer Verfahren zur Lösung auftretender Gleichungssystems an. Die Arbeit eines Benutzers von GOOFE besteht darin,

- die lokalen Steifigkeitsmatrizen aufzustellen,
- Transferoperatoren zu definieren (dazu gehören z.B. die Prolongationen und Restriktionen zwischen verschiedenen Leveln einer Multilevel-Umgebung),
- geeignete Vorkonditionierer für die Problemstellung einzuführen
- sowie die Erweiterung des bereits vorhandenen Grundstocks an Menupunkten.

Darüberhinaus läßt GOOFE dem Anwender ausreichend Spielraum zur Implementierung weiterer Features wie beispielsweise Fehlerschätzer oder ähnlichem. In diesem Kapitel werden die für diese Implementierung wichtigsten Prozeduren angesprochen und kurz erklärt.

6.1 Assemblierung der linearen Systeme

Die Implementierung unseres Problems erfordert die Assemblierung der Matrix des inneren Gleichungssystems sowie der Erstellung der diskreten

Operatoren B bzw. B^T. Die Assemblierung erfolgt über lokale Steifigkeitsmatrizen, die von GOOFE zur Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems zusammengesetzt werden. Die hierfür notwendigen Prozeduren befinden sich in der Datei `ravobj.c++`.

Mit der Prozedur `*getLocStiff()` legt man für ein beliebiges Dreieck die lokale Steifigkeitsmatrix an:

```
LocStiff *RaveTriangle2D::getLocStiff(Params *assist) const
{
  static Label ravetags[3] = { {'F',2,NT_Rave},
                               {'F',0,NT_Rave},
                               {'F',1,NT_Rave} };
  LocStiff *sp = new LocStiff (3,ravetags);
  fillLocStiff(*sp,assist);
  return sp;
}
```

Von `*getLocStiff()` wird die Funktion `fillLocStiff()` aufgerufen, die für die Belegung der lokalen (3×3)-Steifigkeitsmatrix zuständig ist. Dabei wird wie folgt vorgegangen :

1. Berechnung der Raviart-Thomas-Elemente auf dem aktuellen Dreieck
2. Berechnung des linearen Interpolationspolynoms an die Funktion $a(x, y)$ der Problemstellung (1.1) auf dem aktuellen Dreieck
3. Auswertung der Integrale
$$\int_K \left\langle k\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_j \right\rangle \, dx$$
mit $\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_j$ nach (3.27) , $1 \le i, j \le 3$
4. Berechnung der lokalen (1×3)-Matrix B
5. elementweise Addition des Terms $r\mathrm{B}^T \imath_K^{-1} \mathrm{B}$, wobei $\imath_K^{-1}$ hier den diskreten Riesz-Isomorphismus darstellt.

Der in Kapitel 2 eingeführten Riesz-Isomorphismus läß sich ohne großen Aufwand implementieren. Es gilt

$$< \imath_{\mathcal{W}}^{-1} w, p >_{\mathcal{W}' \times \mathcal{W}} = (w, p)_{L^2(\Omega)} \tag{6.1}$$

für all $p \in \mathcal{W}$. Wir wählen uns eine Basis in $\mathcal{W}$, also $\mathcal{W} = \mathrm{span}\,\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, und erhalten damit für $\mathcal{W}'$ die Dualbasis $\mathcal{W}' = \mathrm{span}\,\{\eta'_1, \ldots, \eta'_n\}$, definiert durch $<\eta'_k, \eta_l>_{\mathcal{W}'\times\mathcal{W}} = \delta_{kl}$, $1 \leq k, l \leq n$. Dabei bezeichnet n die Anzahl der Basisfunktionen in $\mathcal{W}$. Bezüglich der gewählten Basis betrachten wir $\imath_{\mathcal{W}}$ nun in der Matrixdarstellung:

$$\begin{array}{rrcl}
 & \imath_{\mathcal{W}}\eta_j & = & \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\eta'_i \\
\Rightarrow & <\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\eta'_i, p>_{\mathcal{W}'\times\mathcal{W}} & = & <\imath_{\mathcal{W}}\eta_j, p>_{\mathcal{W}'\times\mathcal{W}} \quad \forall p \in \mathcal{W} \\
\Rightarrow & \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \underbrace{<\eta'_i, \eta_k>_{\mathcal{W}'\times\mathcal{W}}}_{=\delta_{ik}} & = & (\eta_j, \eta_k)_{L^2} \quad , \quad 1 \leq k \leq n \\
\Rightarrow & m_{kj} & = & (\eta_j, \eta_k)_{L^2} = \int_{\Omega} \eta_j \eta_k \, dx
\end{array}$$

Für den Spezialfall der $RT_0(K)$-Elemente und der Wahl der diskreten Räume $\mathcal{W}_j$ für $0 \leq j \leq J$ ergibt sich für uns

$$m_{kj} = \delta_{kj} \mid K \mid \quad , \tag{6.2}$$

wobei K ein Dreieck einer Triangulation T_j darstellt. Damit wird der diskrete Riesz-Isomorphismus durch eine Diagonalmatrix repräsentiert.

Die Operatoren B bzw. B^T stellen einen "Transfer" von Werten von Flußvariablen auf Werte von Druckvariablen bzw. umgekehrt dar. GOOFE-intern werden daher keine lokalen Steifigkeitsmatrizen für diese Operatoren erstellt, sondern Transfers auf den einzelnen Level eingeführt, die im nächsten Abschnitt vorgestellt werden.

6.2 Transfers auf einem Level

Bei der Implementierung des linearen Gleichungssystems (2.18), (2.19) bzw. der von uns betrachteten Gleichung (2.25) weist man den Druckvariablen $\mathbf{u}$ einen Knoten auf einem Dreieck der Triangulierung zu, während den Flußvariablen $\mathbf{j}$ Knoten auf den Kanten der Dreiecke entsprechen. Die Anwendung der Matrix B^T, die einen Transfer von Knotenwerten von Druckvariablen auf Knotenwerte von Flußvariablen darstellt, ist ein Transfer, der auf dem Level j mit $0 \leq j \leq J$ angesiedelt ist. GOOFE-intern ist die Verwaltung und Anwendung von Transfers auf einem Level identisch mit Prolongations- und Restriktions-Operatoren, da die Verwaltung über die Knoten läuft. Auf welchen Level ein Knoten existiert, ist dabei völlig unerheblich.

Der Quelltext für die Implementierung der Transferoperatoren, die der Matrix B^T bzw. B entsprechen, findet sich in `ravobj.c++` in den beiden Prozeduren `getTransferMap_B` und `fillTransferMap_B` der Klasse `RaveTriangle2D`.

Die erste Prozedur stellt einen lokalen Transferoperator `TranferMap *map` zur Verfügung:

```
TransferMap *RaveTriangle2D::getTransferMap_B(
                                        Params *assist) const
{
   static TransferLabel targettags[3] = {
                  {'F',2,NT_Rave,-1},
                  {'F',0,NT_Rave,-1},
                  {'F',1,NT_Rave,-1} };
   static SourceLabel sourcetags[1] =
             { {'E',0,NT_Triangle,0} };
   TransferMap *map =
             new TransferMap (1,3,sourcetags,targettags);
   fillTransferMap_B(*map,assist);
   return map;
}
```

Die Einträge `NT_Rave` kennzeichnen bei dieser Implementierung Knoten (Basisklasse `NumNode`) auf Kanten, also Flußvariablen, `NT_Triangle` entsprechen Knoten auf Dreiecken, also Druckvariablen. Durch die Belegung des `SourceLabel` mit dem Druckknoten sind die Bedeutungen der Funktionen `NumNode::collect` und `NumNode::distribute` die Anwendung der Matrix B und der Matrix B^T. Durch die Wahl der Raviart-Thomas-Elemente sind die noch zu bestimmenden Gewichte für die Transfers einfach zu bestimmen:

```
void RaveTriangle2D::fillTransferMap_B(
                             TransferMap &map,Params *) const
{
  for(int i=0;i<3;i++)
     map(0,i) = getEdgeOrientation((i+2)%3);
}
```

Die Einträge ergeben sich zu

$$\int_{\hat{K}} \operatorname{div} \hat{\mathbf{q}}\, \hat{w}\; d\hat{x} = \int_{K} \tau_e \operatorname{div} \mathbf{q}\, w \;\mid \det \mathrm{B}_K \mid \; dx = \tau_e \frac{\mid \det \mathrm{B}_K \mid}{\mid \det \mathrm{B}_K \mid} = \tau_e \qquad (6.3)$$

wobei τ_e die GOOFE-interne Kantenorientierung derjenigen Kante bezeichnet, die den beiden zum Support des Raviart-Thomas-Elements $\mathbf{q}$

gehörigen Dreiecken gemeinsam ist. Die Kantenorientierung einer Kante, deren Wert +1 und −1 betragen kann, ist hierbei willkürlich festgelegt, aber fest. Notwendig ist die Multiplikation der Raviart-Thomas-Elemente mit der Orientierung der Kanten, damit die Stetigkeit der Normalkomponente an der gemeinsamen Kante der Dreicke gewährleistet wird. Mit den Befehlssequencen

```
NumNode *np;
FORALLNODES
  np->collect(Transfers_B_Index,source,destination)
```

und

```
NumNode *np;
FORALLNODES
 np->distribute(Transfers_B_Index,source,destination)
```

werden die Operatoren B und B^T im Programm aufgerufen. Die Wirkungsweise beider Operatoren läßt sich anhand der folgenden Abbildungen leicht nachvollziehen.

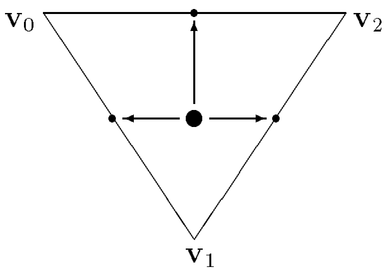

Abbildung 6.1: Die Wirkungsweise des Operators B^T

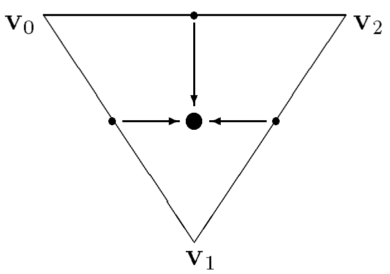

Abbildung 6.2: Die Wirkungsweise des Operators B

6.3 Prolongation und Restriktion

Die Implementierung von Prolongation und Restriktion ist – wie schon im vorigen Abschnitt bemerkt – programmtechnisch identisch mit den Transfers auf einem Level. Der einzige Unterschied besteht im wesentlichen in der Tatsache, daß hier Knoten verschiedener Level miteinander kommunizieren müssen.

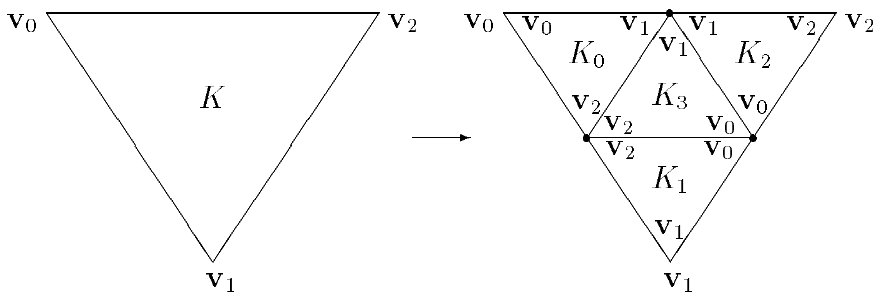

Abbildung 6.3: lokale Nummerierung bei roter Verfeinerung

Wieder finden wir den Quelltext in dem File `ravobj.c++`, diesmal in den Prozeduren `getTransferMap_PR` und `fillTransferMap_PR` der Klasse `RaveTriangle2D`. Dabei ist für jedes Dreieck zu unterscheiden, ob es grün oder rot verfeinert wurde. Entsprechend sind die lokalen Prolongations- und Restriktions-Moleküle unterschiedlich zu allokieren und zu besetzen. Aufgrund der Konvention, die lokale Nummerierung rot bzw. grün verfeinerter Dreiecke wie in Abbildung 6.3 und Abbildung 6.4 zu wählen, die im Basispaket GOOFE eingeführt wurde, ist die Besetzung der Transferoperatoren mit den richtigen Gewichten für die jeweiligen Knoten einfach durchzuführen. Die Konvention ist im Basispaket GOOFE verwirklicht.

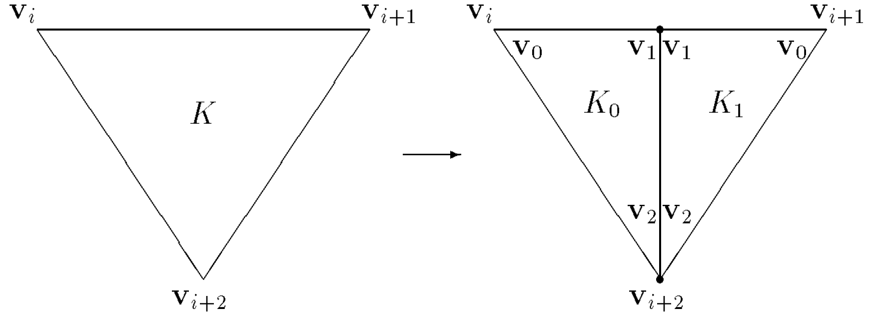

Abbildung 6.4: lokale Nummerierung bei grüner Verfeinerung

Nachfolgend finden wir die wesentlichen Punkte der Prozedur, die uns zunächst Speicher für die lokalen Moleküle reserviert. Dabei ist unser Augenmerk nur auf die rote Verfeinerung gerichtet. Ausser einer Fallunterscheidung, wie die zusätzliche Kante bei einer grünen Verfeinerung im aktuellen Dreieck liegt, besteht kein wesentlicher Unterschied zur Allokierung eines lokalen Transferoperators bei grüner Verfeinerung.

```
TransferMap *RaveTriangle2D::getTransferMap_PR(
                                       Params *assist) const
{
  MeshCard babies=numberOfChildren();
   ...
  if(babies==4) // red refinement
  {
     static SourceLabel sourcetags[3]   = {
                        {'F',2,NT_Rave,0},
                        {'F',0,NT_Rave,0},
                        {'F',1,NT_Rave,0} };
     static TransferLabel targettags[9] = {
                        {'F',0,NT_Rave,0},
                        {'F',1,NT_Rave,0},
                        {'F',2,NT_Rave,0},
                        {'F',0,NT_Rave,1},
                        {'F',1,NT_Rave,1},
                        {'F',2,NT_Rave,1},
                        {'F',0,NT_Rave,2},
                        {'F',1,NT_Rave,2},
                        {'F',2,NT_Rave,2}, };
     TransferMap *map =
                new TransferMap (3,9,sourcetags,targettags);
     fillTransferMap_PR(4,0,*map,assist);
     return map;
  }
}
```

Bei der Besetzung der Feldelemente mit den Gewichten wollen wir wiederum nur den Fall der roten Verfeinerung betrachten:

```
void RaveTriangle2D::fillTransferMap_PR(int NoOfBabies,
               int NoOfCase,TransferMap &map,Params *) const
{
  ...
  map(0,2)=map(0,5)=map(0,6)=map(0,7)=0.0;  // belonging
  map(0,0)=-0.25*ori[0][0]*big_ori[2];      // to edge 2
  map(0,4)=-0.25*ori[1][1]*big_ori[2];
  map(0,8)=0.25*ori[2][2]*big_ori[2];
  map(0,1)=0.5*ori[1][0]*big_ori[2];
```

```
  map(0,3)=0.5*ori[0][1]*big_ori[2];
  map(1,1)=map(1,2)=map(1,3)=map(1,6)=0.0;  // belonging
  map(1,0)=0.25*ori[0][0]*big_ori[0];       // to edge 0
  map(1,4)=-0.25*ori[1][1]*big_ori[0];
  map(1,8)=-0.25*ori[2][2]*big_ori[0];
  map(1,5)=0.5*ori[2][1]*big_ori[0];
  map(1,7)=0.5*ori[1][2]*big_ori[0];
  map(2,1)=map(2,3)=map(2,5)=map(2,7)=0.0;  // belonging
  map(2,0)=-0.25*ori[0][0]*big_ori[1];      // to edge 1
  map(2,4)=0.25*ori[1][1]*big_ori[1];
  map(2,8)=-0.25*ori[2][2]*big_ori[1];
  map(2,2)=0.5*ori[2][0]*big_ori[1];
  map(2,6)=0.5*ori[0][2]*big_ori[1];
  ...
}
```

Um für die Raviart-Thomas-Elemente die richtigen Gewichte zu erhalten, müssen die errechneten Werte sowohl mit den Orientierungen der Kanten des groben Dreiecks (`big_ori[•]`) als auch mit den Orientierungen der Kanten der verfeinerten Dreiecke (`ori[•][•]`) multipliziert werden. Prolongation und Restriktion wurden programmtechnisch so realisiert, daß der Aufruf eines der beiden Oparatoren auf dem Level $0 \leq j \leq J-1$ die Prolongation vom Level j auf den Level $j+1$ bzw. die Restriktion vom Level $j+1$ auf den Level j bedeutet.

6.4 Vorkonditionierer

Zur Lösung des Gleichungssystems (2.25) benötigen wir ein äußeres und ein inneres CG-Verfahren, die beide in dem File `ravsolve.c++` zu finden sind. Dabei übernimmt das äußere CG-Verfahren die Multiplikation mit den Matrizen B^T und B und ruft das innere CG-Verfahren an geeigneter Stelle auf. Das innere CG-Verfahren beherbergt den vorgestellten Vorkonditionierer von Vassilewski/Wang aus [19]. Er befindet sich in `Rave_Inner_CG::ApplyB` und ist wie folgt realisiert:

```
void Rave_Inner_CG::ApplyB(MeshCard source_idx,
                                          MeshCard dest_idx)
{
  ...
  // ----------------- SCHRITT 1 --------------------------
  // Initialisierung der benoetigten Variablen

  // ----------------- SCHRITT 2 --------------------------
  // Restriktion der zu bearbeitenden Variable source_idx
```

```
  for(grid=levelfine-1;grid>=levelcoarse && grid>=0;grid--)
  {
     NodeLevelIterator it(
                current->nodechain.nodes[StencilList],grid);
     RAVE_FORALLNODES
     {
       np->setCurrentLevel(grid);
       np->collect(Transfers_PR_Index,source_idx,source_idx);
     }
  }

  // ----------------- SCHRITT 3 --------------------------
  // Vorkonditionierung : Teilprobleme loesen

  for(grid=levelfine;grid>levelcoarse && grid>=0;grid--)
  {
     Solve3x3(grid,source_idx,idx_safe);
     Solve1x1(grid,source_idx,idx_safe);
     SolveRotation(grid,source_idx,idx_safe);
  }

  // ----------------- SCHRITT 4 --------------------------
  // 'exaktes' Loesen des groebsten Level

  SolveLevel(levelcoarse,source_idx,idx_safe);

  // ----------------- SCHRITT 5 --------------------------
  // Prolongation

  for(grid=levelcoarse;grid<=levelfine-1;grid++)
  {
     NodeLevelIterator it(
                current->nodechain.nodes[StencilList],grid);

     RAVE_FORALLNODES  np->setCurrentLevel(grid);
     RAVE_FORALLNODES  np->distribute(Transfers_PR_Index,
                                    idx_safe,idx_safe);
  }

  // ----------------- SCHRITT 6 --------------------------
  // Kopieren des berechneten Vektors in die Zielvariable

  assign(dest_idx,idx_safe);
}
```

Die für den Vorkonditionierer wichtigen Routinen sind `Solve3x3` und `Solve1x1`, die die lokalen Sattelpunktprobleme, die durch rote und grüne Verfeinerung entstehen, lösen. Durch diese beiden Funktionen werden die divergenzbehafteten lokalen Probleme bearbeitet. Dabei werden wie in Kapitel 5 angemerkt die Probleme (5.26) in lokale Probleme aufgespalten, so daß die Berechnung pro Level auf elementare Art und Weise erfolgen kann. Programmtechnisch wurde die Lösung von (5.26) auf einem beliebigen Level j wie folgt realisiert:

1. Iteriere über alle Dreiecke des Level $j-1$
2. Ist das aktuelle Dreieck rot verfeinert ?
   (a) Ja $\rightarrow$ löse ein lineares 3×3-Gleichungssystem. Die Koeffizientenmatrix ist die lokale Steifigkeitsmatrix der drei Raviart-Thomas-Elemente, wie sie in Abbildung 5.1 angegeben sind. Die rechte Seite ergibt sich aus den aktuellen Werten der Flüsse über die Kanten des Dreiecks K_3 (vgl. hierzu prallel auch Abbildung 6.3, die dieselbe Dreiecksgeometrie besitzen). Auf die Koeffizientenmatrix wird die Cholesky-Zerlegung angewandt, deren Berechnung wenig Rechenaufwand benötigt.
   (b) Nein $\rightarrow$ Betrachte das nächste Dreieck
3. Ist das aktuelle Dreieck grün verfeinert ?
   (a) Ja $\rightarrow$ löse eine lineare Gleichung $Mx = f$, wobei M die lokale (1×1)-“Steifigkeitsmatrix” ist, die sich durch die in Abbildung 5.2 angegebenen Funktion $\mathbf{q}$ ergibt. Die rechte Seite f ist der aktuelle Fluß durch die in Abbildung 6.4 neu hinzugekommenen Kante.
   (b) Nein $\rightarrow$ Betrachte das nächste Dreieck

Damit sind die divergenzbehafteten Probleme komplett berechnet. Die dritte Funktion, der im Rahmen des Vorkonditionierers eine entscheidende Rolle zukommt, ist die Funktion `SolveRotation`. Sie löst die divergenzfreien Probleme, also die Probleme, die im Zusammenhang mit den Rotationen stückweiser linearer Funktionen stehen. Aus Sicht der Mathematik haben wir hier folgendes Problem: Seien die $\boldsymbol{\psi}_{i,j}$ die in Kapitel 5 definierten stückweise linearen “Hütchenfunktionen” sowie $\mathbf{q}_l \in RT_0(\Omega, T_l)$ für $1 \leq l \leq L_j$ ein Raviart-Thomas-Elemente auf dem aktuellen Level j, wobei L_j die Dimension von $RT_0(\Omega, T_l)$ angibt. Dann haben wir das Problem

$$a\,(\text{rot }\ \psi_{i,j}, \text{rot }\ \psi_{i,j})\,\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \text{rot }\ \psi_{i,j}) \tag{6.4}$$

zu betrachten. Mit

$$\mathrm{rot}\ \psi_{i,j} = \sum_{l=1}^{L_j} \gamma_l \mathbf{q}_l \tag{6.5}$$

(vgl. Kapitel 3 Korollar 3.6 für diese Darstellbarkeit) erhalten wir hiermit

$$\begin{aligned} a\left(\mathrm{rot}\ \psi_{i,j}, \mathrm{rot}\ \psi_{i,j}\right)\mathbf{x} &= a\left(\sum_{l=1}^{L_j}\gamma_l\mathbf{q}_l, \sum_{k=1}^{L_j}\gamma_k\mathbf{q}_k\right)\mathbf{x} \\ &= \sum_{l=1}^{L_j}\sum_{k=1}^{L_j}\gamma_l\gamma_k a\left(\mathbf{q}_l, \mathbf{q}_k\right)\mathbf{x} \\ &\overset{(6.4)}{=} \left(\mathbf{r}, \sum_{m=1}^{L_j}\gamma_m\mathbf{q}_m\right) \quad . \end{aligned} \tag{6.6}$$

Die Lösung $\mathbf{x}$ dieses eindimensionalen Problems erhalten wir dadurch, daß wir die auf der linken Seite von (6.6) stehenden Integrale gewichtet addieren, die auf der rechten Seite stehenden Werte addieren und schließlich das Ergebnis der Division ermittelt. Eine einfach Rechnung zeigt, daß die Gewichte γ_l gerade wieder die Orientierungen der Kanten sind. Daher ist auch dieser Teil des Vorkonditionierers programmtechnisch einfach zu realisieren:

1. Iteriere über alle Dreiecke des Levels j und berechne die lokalen Anteile der Bilinearform aus (6.6). Speichere die Ergebnisse in den betroffenen Ecken der Dreiecke.
2. Iteriere über alle Kanten der Triangulation und verteile die Werte der rechten Seite (Flüsse) gewichtet auf die Ecken.
3. Iteriere über alle Ecken des Levels j und dividiere die gespeicherten Werte in den Ecken.
4. Iteriere über alle Kanten der Triangulation und verteile die Werte in den Ecken gewichtet als neue rechte Seite (Flüsse).

Zum genaueren Studium zur GOOFE-internen Vorgehensweise der verwendeten Prozeduren empfiehlt sich ein Blick in das File `ravsolve.c++`, wo im Anschluß an die Funktion `ApplyB` der Klasse `Rave_Inner_CG` die Prozeduren implementiert sind.

Kapitel 7

Numerische Experimente

Die numerischen Experimente wurden auf einer HP 9000/720–Workstation und einer IRIS Indigo (Silicon Graphics) gerechnet. Für die Fließkommaoperationen wurden `double`-Variablen verwendet (doppelte Genauigkeit). Bei den Berechnungen der Lösung eins vorgegebenen Problems wird eine CG-Iteration abgebrochen, falls das Residuum kleiner als $5 \cdot 10^{-9}$ ist. Die Konditionsberechnungen wurden bei einer Residuumsnorm von 10^{-5} abgebrochen. Als Ausgangstriangulation wurde das Einheitsquadrat gewählt, wobei die feineren Gitter durch uniforme Verfeinerungen gewonnen wurden. Berechnungen mit nicht uniform verfeinerten Gittern wurden für die nachfolgenden Problemstellungen in geringem Maße ebenfalls durchgeführt, aber nicht in diese Arbeit aufgenommen. Es zeigt sich jedoch auch in diesen Fällen die Qualität des Vorkonditionierers. Nachfolgend sehen wir die verwendeten Triangulationen bis Level 5.

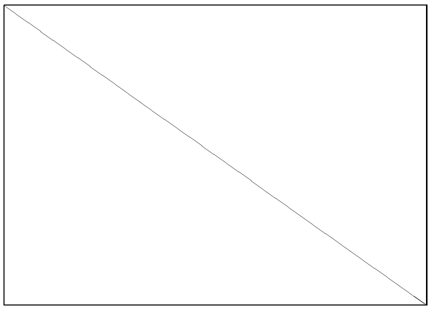

Abbildung 7.1
Triangulation auf dem Level 0

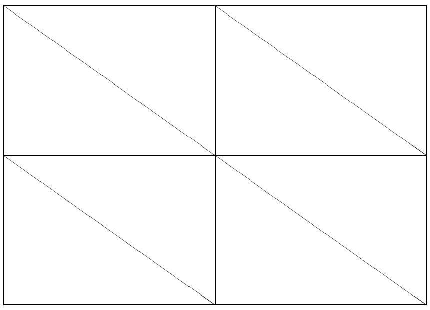

Abbildung 7.2
Triangulation auf dem Level 1

Dabei stellt die Triangulation auf dem Level 0 in Abbildung 7.1 die Ausgangstriangulation dar.

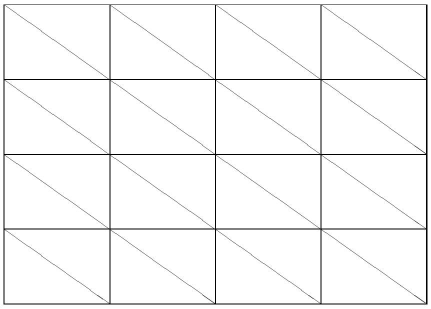

Abbildung 7.3
Triangulation auf dem Level 2

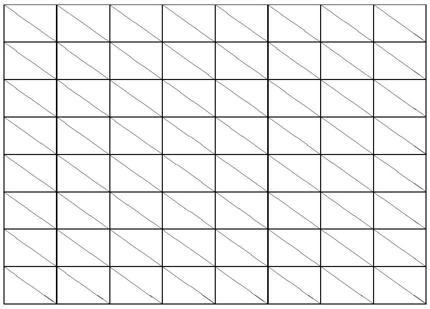

Abbildung 7.4
Triangulation auf dem Level 3

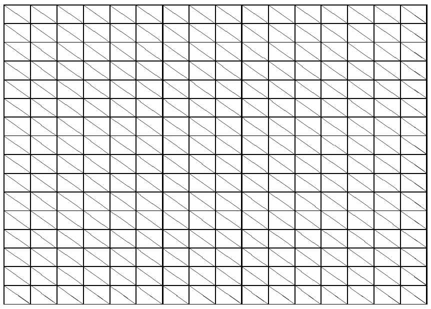

Abbildung 7.5
Triangulation auf dem Level 4

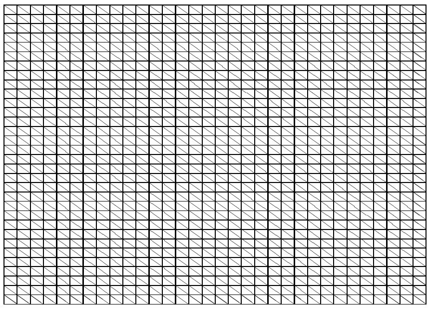

Abbildung 7.6
Triangulation auf dem Level 5

Nachfolgend werden zuerst in Abschnitt 7.1 die behandelten Probleme vorgestellt und Aussagen über die Konditionen der daraus resultierenden Steifigkeitsmatrizen gemacht. Im Abschnitt 7.2 wird das Problem (1.1) mit den angegebenen Daten gelöst, wobei wir unser Augenmerk auf die Anzahl notwendiger innerer und äußerer Iterationen richten wollen.

7.1 Konditionsberechnung

In Kapitel 4 haben wir gesehen, daß die Kondition der Koeffizientenmatrix A_r linear mit r wächst. Dieses theoretische Ergebnis läßt sich bei numerischen Berechnungen auch praktisch nachweisen. Außerdem zeigen die durchgeführten Konditionsberechnung im nicht vorkonditionierten Fall die Abhängigkeit der Kondition von der Leveltiefe.

7.1.1 Dirichlet-Problem 1

Das behandelte Dirichletproblem besitzt folgende, für die Charakterisierung der partiellen Differetialgleichung (1.1)-(1.3) benötigte Daten:

Lösung	: $u(x,y) = 100x(1-x)y(1-y)$ in Ω
rechte Seite	: f(x,y) $= -200(x(x-1)+y(y-1))$
Lösungsgebiet	: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x,y \leq 1\}$
Dirichlet-Randbedingung	: $g(x,y) = 100x(1-x)y(1-y)$ auf $\partial\Omega_D$
$a(x,y)$	: $\equiv 1$

Die folgenden Tabellen zeigen in Abhängigkeit vom Lagrange Parameter r und der Leveltiefe die jeweiligen Konditionen der Matrix A_r für das vorgestellte Problem 1 (Laplace-Fall). Die ersten drei Tabellen sind dabei graphisch unterlegt, wodurch sich die Abhängigkeit der Kondition von der Verfeinerungsstufe deutlich zeigt, wie sie am Anfang des Kapitel 5 als typisch für Differentialoperatoren 2. Ordnung beschrieben wurde ($\kappa(\mathrm{A}_r) \sim h_j^{-2}$ mit $0 \leq j \leq J = 6$).

Lagrange Parameter : $r = 0.5$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	21.0155	0.279293	75.2454
2	32	56	91.8487	0.293511	312.931
3	128	208	379.043	0.292911	1294.05
4	512	800	1530.55	0.292908	5225.38
5	2048	3136	6138.18	0.292918	20955.3
6	8192	12416	24569.6	0.292916	83879.5

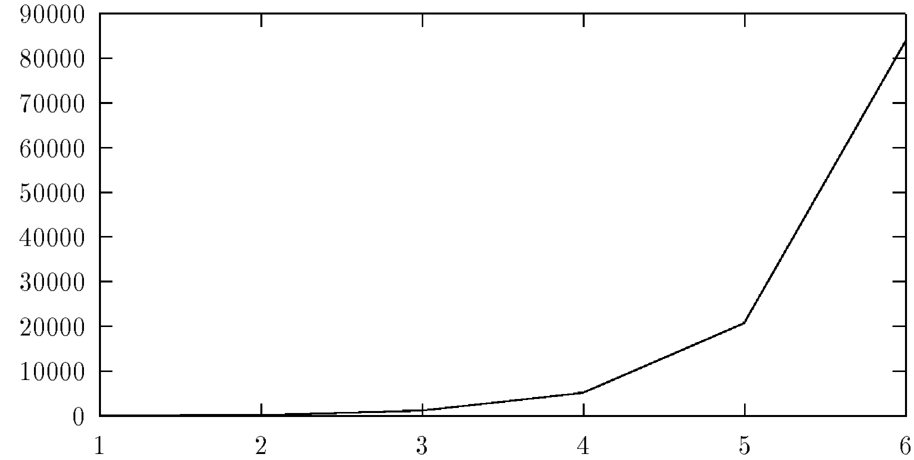

Abbildung 7.7 Kondition in Abhängigkeit des Levels ohne Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 0.5$

Lagrange Parameter : $r = 0.75$					
Level	Dreiecke	Knoten	λ_{max}	λ_{min}	Kondition
1	8	16	31.3556	0.279387	112.23
2	32	56	137.605	0.293519	468.811
3	128	208	568.405	0.292913	1940.52
4	512	800	2295.69	0.292908	7837.58
5	2048	3136	9207.19	0.292918	31432.7
6	8192	12416	36854.6	0.292916	125820

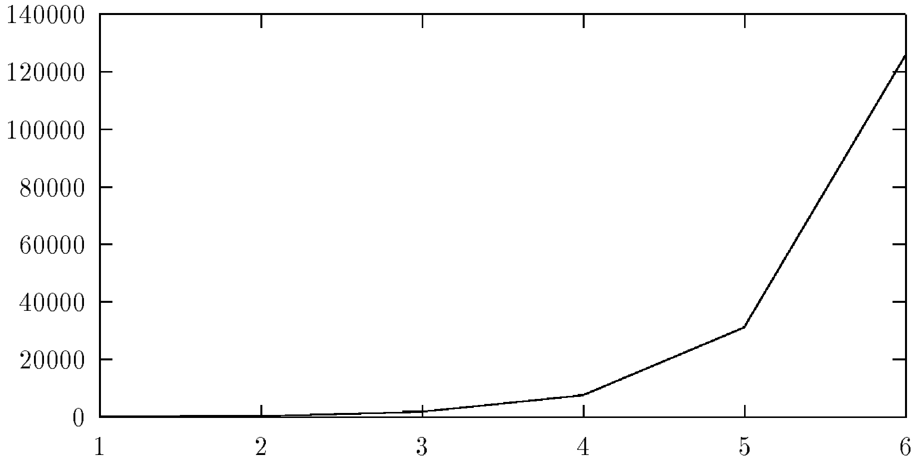

Abbildung 7.8 Kondition in Abhängigkeit des Levels ohne Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 0.75$

Lagrange Parameter : $r = 1$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	41.6954	0.279434	149.214
2	32	56	183.361	0.293523	624.689
3	128	208	757.768	0.292914	2586.99
4	512	800	3060.83	0.292908	10449.8
5	2048	3136	12276.2	0.292918	41910
6	8192	12416	49139.5	0.292916	167760

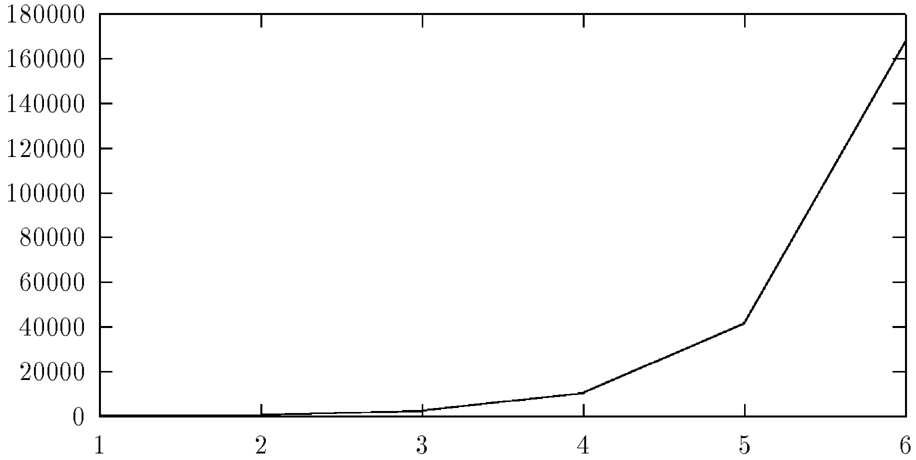

Abbildung 7.9 Kondition in Abhängigkeit des Levels ohne Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 1.0$

Lagrange Parameter : $r = 1.25$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	52.0354	0.279461	186.199
2	32	56	229.117	0.293526	780.567
3	128	208	947.13	0.292915	3233.47
4	512	800	3825.96	0.292909	13062
5	2048	3136	15345.2	0.292918	52387.4
6	8192	12416	61424.4	0.292916	209700

Lagrange Parameter : $r = 1.5$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	62.3753	0.27948	223.184
2	32	56	274.873	0.293527	936.449
3	128	208	1136.49	0.292915	3879.94
4	512	800	4591.1	0.292909	15674.2
5	2048	3136	18414.2	0.292918	62864.8
6	8192	12416	73709.4	0.292916	251640

Lagrange Parameter : $r = 1.75$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	72.7158	0.279493	260.17
2	32	56	320.63	0.293529	1092.33
3	128	208	1325.86	0.292915	4526.41
4	512	800	5356.23	0.292909	18286.4
5	2048	3136	21483.2	0.292918	73342.2
6	8192	12416	85994.3	0.292916	293580

Lagrange Parameter : $r = 2$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	83.0559	0.279503	297.155
2	32	56	366.386	0.29353	1248.21
3	128	208	1515.22	0.292916	5172.89
4	512	800	6121.37	0.292909	20898.5
5	2048	3136	24552.3	0.292918	83819.5
6	8192	12416	98279.2	0.292916	335521

Auch die in Kapitel 4 aufgezeigt lineare Abhängigkeit der Kondition des Operators $\left(\mathrm{A} + r\mathrm{B}^T\mathrm{B}\right)$ läßt sich experimentel nachweisen. Nachfolgend sehen wir auf Level 2 und Level 4 für verschiedene Parameter r die berechneten Konditionen.

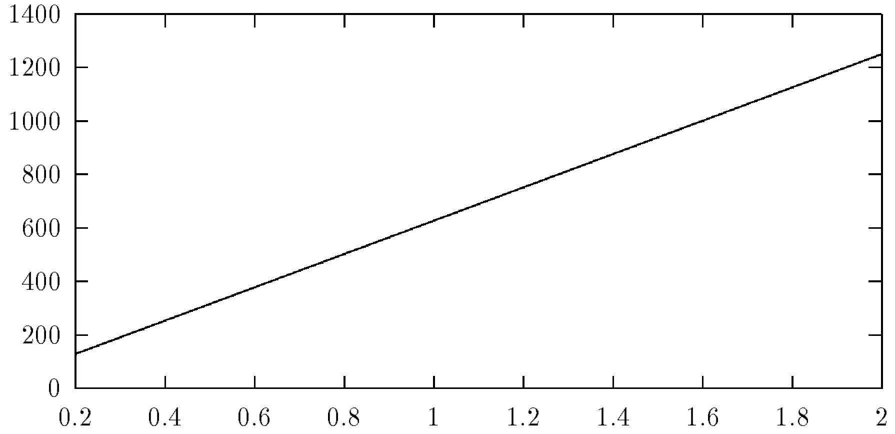

Abbildung 7.10 Kondition auf Level 2 in Abhängigkeit von r ohne Verwendung des Vorkonditionierers

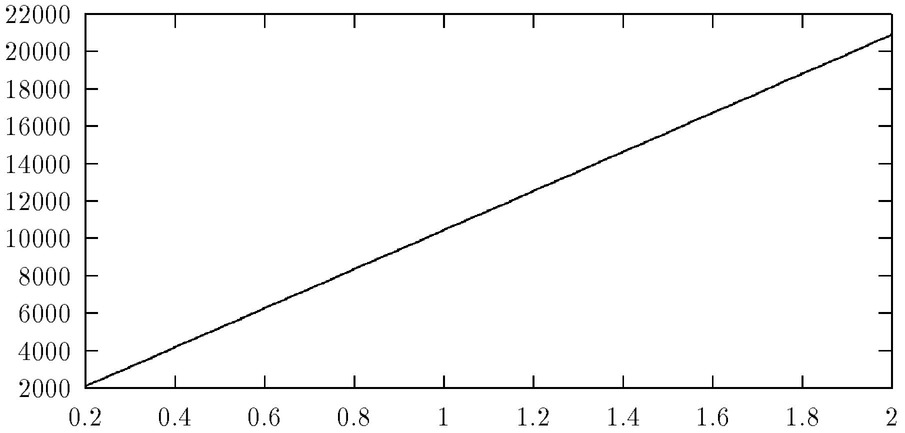

Abbildung 7.11 Kondition auf Level 4 in Abhängigkeit von r ohne Verwendung des Vorkonditionierers

Wendet man nun den in Kapitel 5 vorgestellten Vorkonditionierer an, so zeigt sich eine wesentliche Verbesserung der Kondition des Operators $\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r$ im Vergleich zum nicht vorkonditionierten Operator A_r. Nachfolgend sind die Konditionszahlen von $\mathrm{S}_r\mathrm{A}_r$ dargestellt. Dazu beachte man in den beigefügten Graphiken die im Vergleich zu den vorausgegangenen Graphiken stark abweichende Skalierung sowie das unterschiedliche Verhalten der Kurve für feiner werdende Triangulationen. Ein Studium der Werte für den kleinsten und größten Eigenwert zeigt den numerischen Nachweis für die in den Sätzen 5.6 und 5.7 theoretisch nachgewiesenen Schranken der Eigenwerte des vorkonditionierten Systems.

Lagrange Parameter : $r = 0.5$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	2.7034	0.279292	9.67948
2	32	56	3.76545	0.29351	12.829
3	128	208	4.47529	0.29291	15.2787
4	512	800	4.98885	0.292907	17.0322
5	2048	3136	5.37136	0.292917	18.3375
6	8192	12416	5.66388	0.292915	19.3362

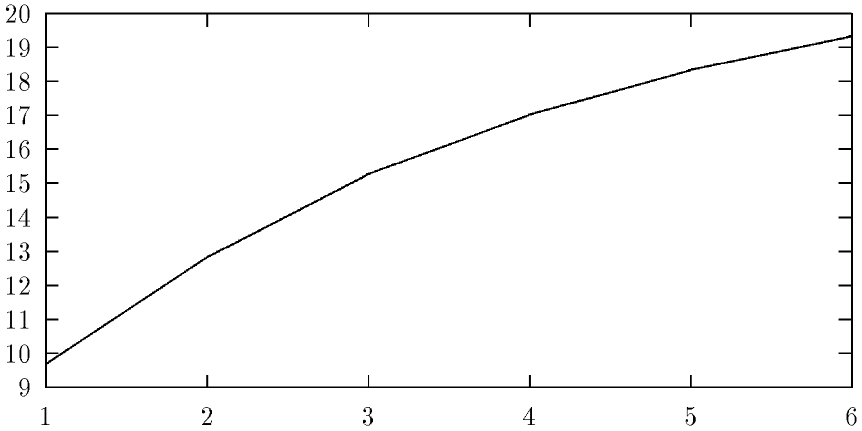

Abbildung 7.12 Kondition in Abhängigkeit des Levels bei Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 0.5$

Lagrange Parameter : $r = 0.75$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	2.64836	0.279386	9.47925
2	32	56	3.70629	0.293518	12.6271
3	128	208	4.42149	0.292912	15.0949
4	512	800	4.94125	0.292908	16.8696
5	2048	3136	5.32993	0.292917	18.196
6	8192	12416	5.62758	0.292915	19.2123

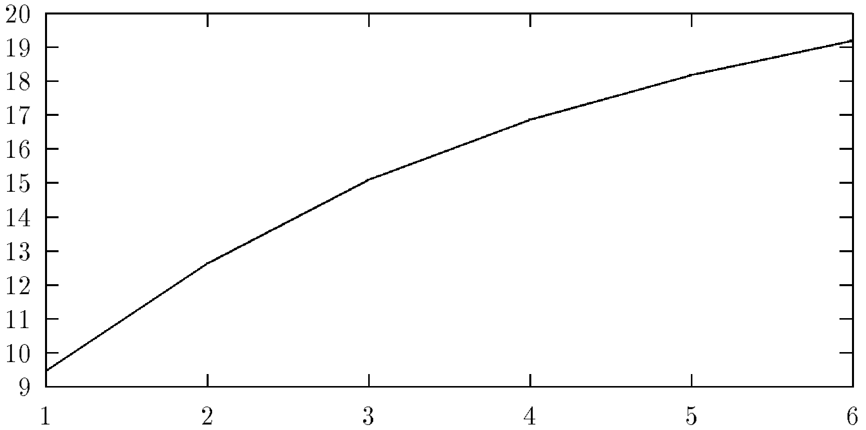

Abbildung 7.13 Kondition in Abhängigkeit des Levels bei Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 0.75$

Lagrange Parameter : $r = 1$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	2.61683	0.279432	9.36482
2	32	56	3.67399	0.293522	12.5169
3	128	208	4.39232	0.292913	14.9953
4	512	800	4.91567	0.292908	16.7823
5	2048	3136	5.30782	0.292918	18.1205
6	8192	12416	5.60813	0.292915	19.1459

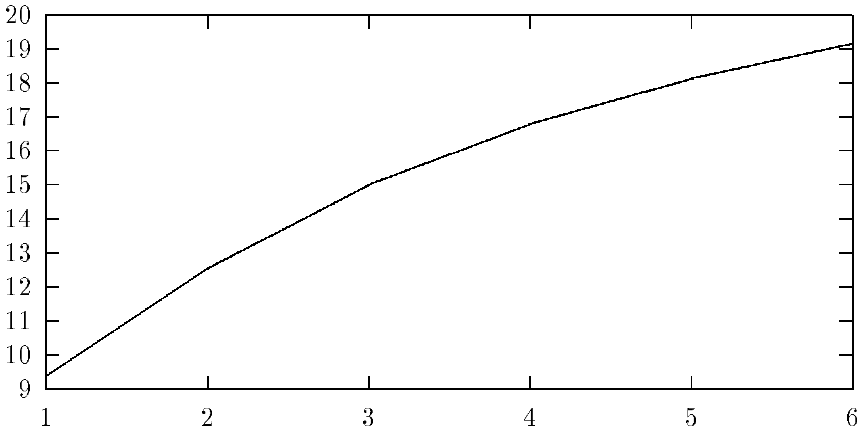

Abbildung 7.14 Kondition in Abhängigkeit des Levels bei Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 1.0$

Lagrange Parameter : $r = 1.25$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	2.59636	0.27946	9.29063
2	32	56	3.65352	0.293525	12.4471
3	128	208	4.374	0.292914	14.9327
4	512	800	4.89968	0.292908	16.7277
5	2048	3136	5.29406	0.292918	18.0735
6	8192	12416	5.59631	0.292915	19.1055

Lagrange Parameter : $r = 1.5$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	2.58199	0.279479	9.2386
2	32	56	3.63938	0.293526	12.3988
3	128	208	4.36142	0.292914	14.8897
4	512	800	4.88874	0.292908	16.6903
5	2048	3136	5.28467	0.292918	18.0415
6	8192	12416	5.58848	0.292915	19.0788

Lagrange Parameter : $r = 1.75$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	2.57135	0.279492	9.20007
2	32	56	3.62903	0.293528	12.3635
3	128	208	4.35224	0.292915	14.8584
4	512	800	4.88078	0.292908	16.6632
5	2048	3136	5.27786	0.292918	18.0182
6	8192	12416	5.58223	0.292915	19.0575

Lagrange Parameter : $r = 2$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	2.56314	0.279502	9.17038
2	32	56	3.62112	0.293528	12.3365
3	128	208	4.34526	0.292915	14.8345
4	512	800	4.87473	0.292908	16.6425
5	2048	3136	5.27268	0.292918	18.0006
6	8192	12416	5.57745	0.292915	19.0412

Durch die Anwendung des Vorkonditionierers verschwindet auch die lineare Abhängigkeit der Kondition auf einem festen Level. Der Vorkonditionierer bewirkt sogar eine Verminderung der Kondition für wachsende Lagrange Parameter r, wie wir in den beiden nachfolgenden Abbildungen sehen, die die Ergebnisse auf den Leveln 2 und 4 widerspiegeln.

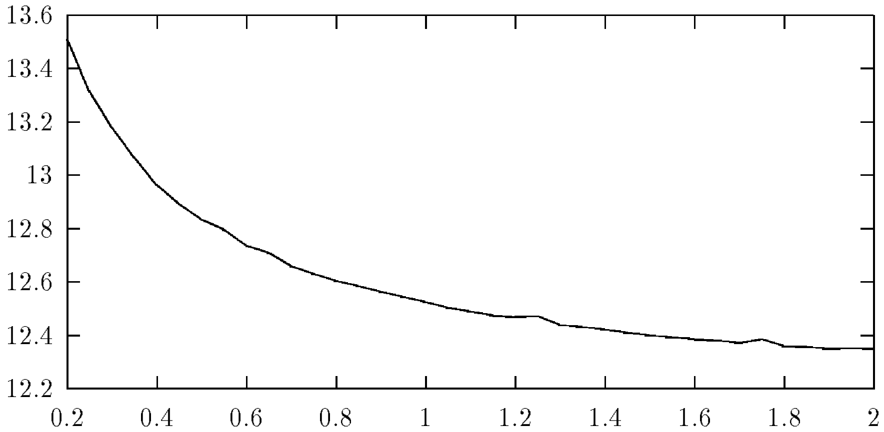

Abbildung 7.15 Kondition auf Level 2 in Abhängigkeit von r bei Verwendung des Vorkonditionierers

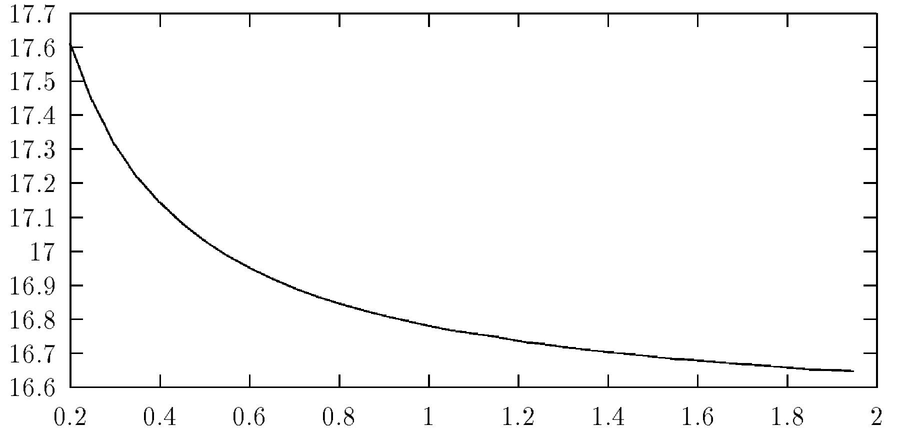

Abbildung 7.16 Kondition auf Level 4 in Abhängigkeit von r bei Verwendung des Vorkonditionierers

Eine weitere Möglichkeit, die unterschiedlichen Konditionen der Systeme mit und ohne Vorkonditionierung, insbesondere aber das Verhalten des CG-Verfahrens beim Lösen eines linearen Gleichungssystems mit den entsprechenden Matrizen aufzuzeigen, besteht darin, ein Gleichungssystem mit beliebiger rechter Seite und beliebigem Startwert für die Iterierte und der Steifigkeitsmatrix des in diesem Abschnitt beschriebenen Problems als Koeffizientenmatrix zu betrachten. Dabei ergibt sich das in den Abbildungen 7.17 bis 7.20 aufgezeigte, für die von uns betrachteten Probleme typische Verhalten. Es ist hierbei vor allem auf die unterschiedliche Skalierung der x-Achse, die die Anzahl der Iterationen bis zur Konvergenz angibt, zu achten. An der y-Achse ist die L^2-Norm des Residuums angetragen.

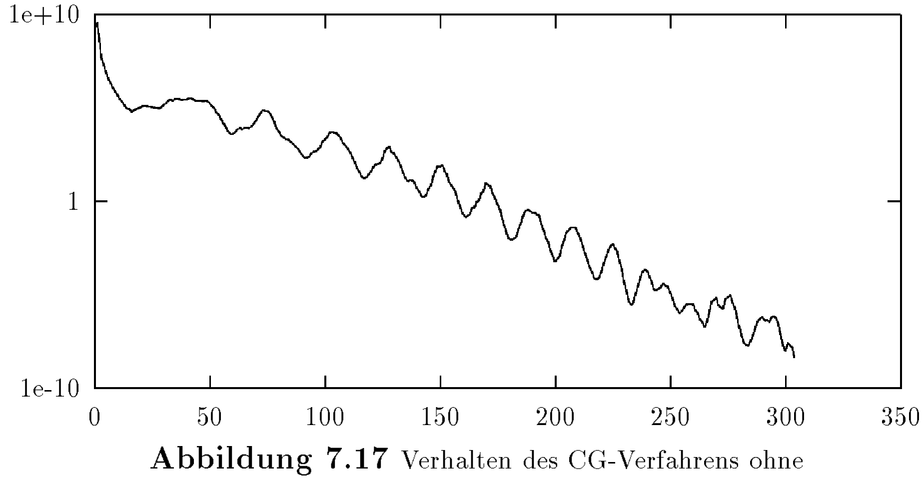

Abbildung 7.17 Verhalten des CG-Verfahrens ohne Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 1$, Level 2

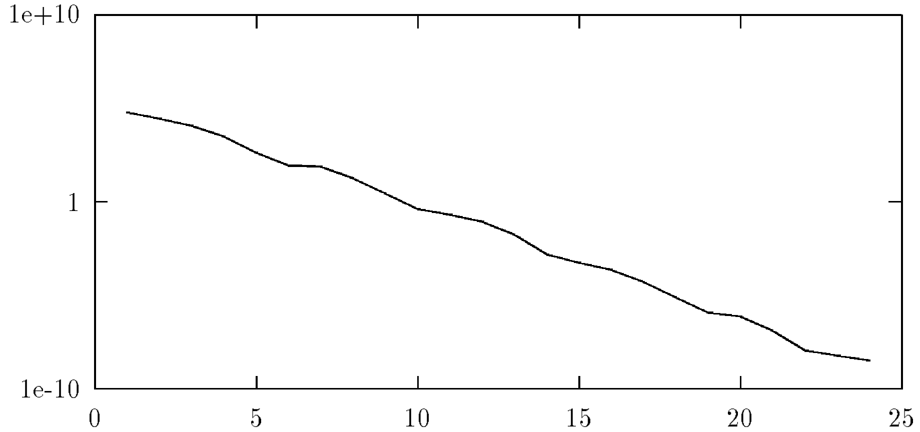

Abbildung 7.18 Verhalten des CG-Verfahrens bei Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 1$, Level 2

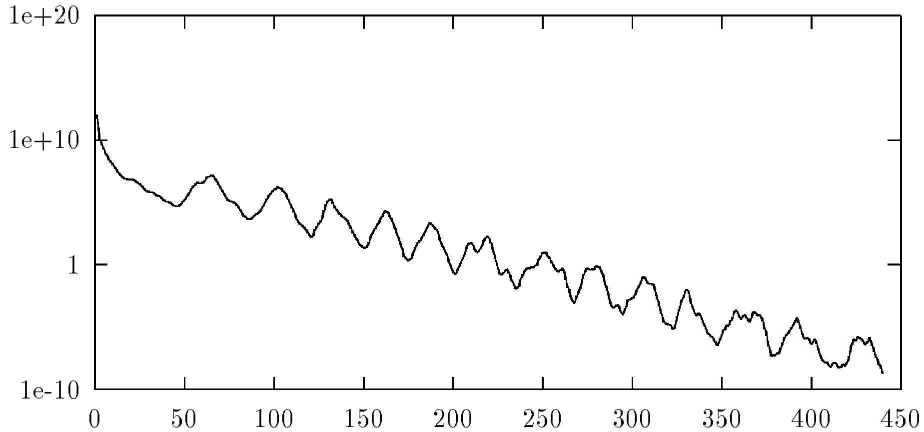

Abbildung 7.19 Verhalten des CG-Verfahrens ohne Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 1$, Level 4

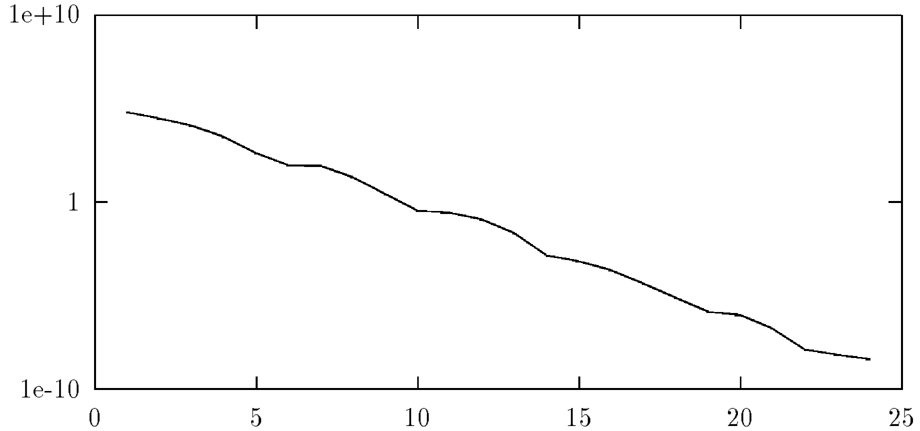

Abbildung 7.20 Verhalten des CG-Verfahrens bei Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 1$, Level 4

7.1.2 Dirichlet-Problem 2

Der wesentliche Unterschied zum ersten Dirichlet-Problem ist die hier geänderte Funktion $a(x,y)$, die nun nicht mehr konstant, sonder nichtlinear ist. Die Funktion $a(x,y)$ hat über dem Grundgebiet Ω folgendes Aussehen:

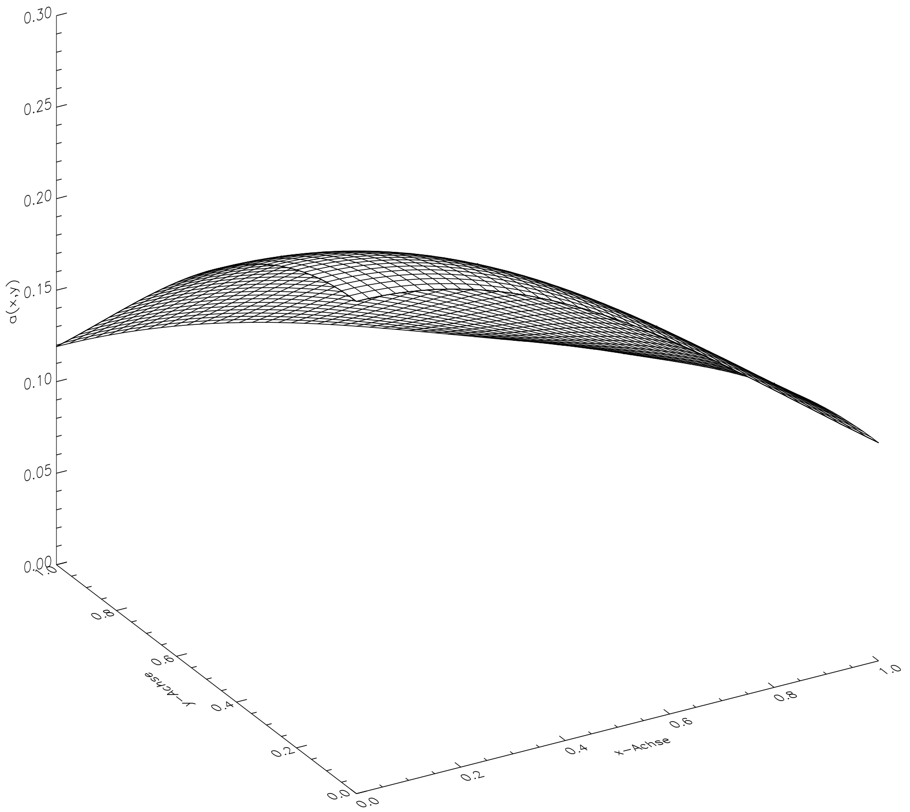

Abbildung 7.21 Funktion $a(x,y)$ auf Ω

Lösung	:	$u(x,y) = 100x(1-x)y(1-y)$ in Ω
rechte Seite	:	$\mathrm{f(x,y)} = \frac{-2((1+E)(y(y-1)+x(x-1)))}{(1+E)^2} - $ $- \frac{xyE((2x-1)(y-1)+(2y-1)(x-1))}{(1+E)^2}$ mit $E \stackrel{\text{def}}{=} e^{x^2+y^2+1}$
Lösungsgebiet	:	$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$
Dirichlet-Randbedingung	:	$g(x,y) = 100x(1-x)y(1-y)$ auf $\partial\Omega_D$
$a(x,y)$	:	$= \frac{1}{1+e^{x^2+y^2+1}}$

Auch für das im Vergleich zum Dirichlet-Problem 1 abgewandelte Dirichlet-Problem 2 zeigt sich ein ähnlicher Verlauf der Kondition, der auch hier in drei Fällen mit einer Graphik verdeutlicht wird.

Lagrange Parameter : $r = 0$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	6.94841	0.692734	10.0304
2	32	56	10.2185	0.63704	16.0406
3	128	208	13.4253	0.62399	21.5153
4	512	800	15.6981	0.620789	25.2873
5	2048	3136	17.3143	0.619598	27.9444
6	8192	12416	18.5532	0.0973082	190.664

Auf dem Level 6 ergibt sich für dieses Beispiel mit dem Lagrange-Parameter $r = 0$ die Kondition 190,664, die im Vergleich mit den Konditionen auf gröberen Gittern als falsch anzusehen ist. Der Grund hierfür liegt in der schlecht durchführbaren Berechnung des kleinsten Eigenwertes des Operators. Wie wir nachfolgend sehen werden, können wir dagegen die Eigenwerte der Steifigkeitsmatrizen, die über die von uns gewählten Lagrange Parameter $r > 0$ definiert sind, ohne Probleme berechnen.

Lagrange Parameter : $r = 0.25$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	12.891	1.54681	8.3339
2	32	56	47.9865	1.47969	32.4302
3	128	208	191.447	1.40885	135.889
4	512	800	767.124	1.35631	565.594
5	2048	3136	3070.86	1.32036	2325.78
6	8192	12416	12286.4	1.29518	9486.24

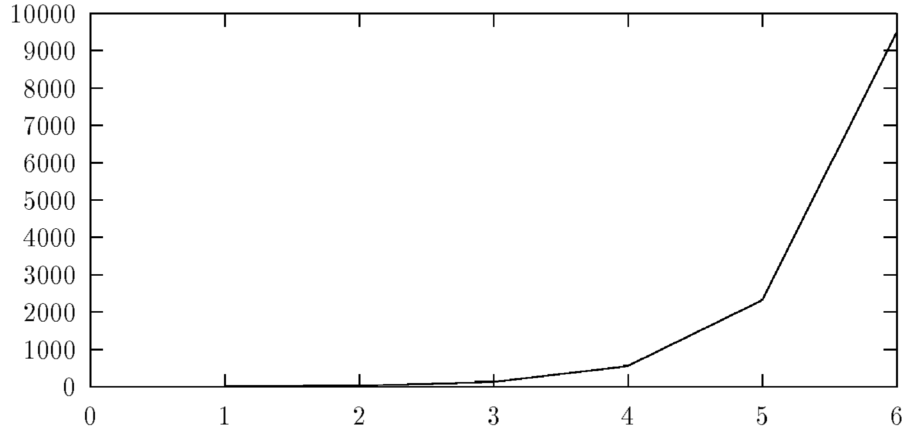

Abbildung 7.22 Kondition in Abhängigkeit des Levels ohne Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 0.25$

Lagrange Parameter : $r = 0.5$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	23.0507	1.65741	13.9076
2	32	56	93.6761	1.52018	61.6217
3	128	208	380.775	1.42253	267.675
4	512	800	1532.23	1.36032	1126.37
5	2048	3136	6139.84	1.32114	4647.38
6	8192	12416	24571.3	1.2953	18969.5

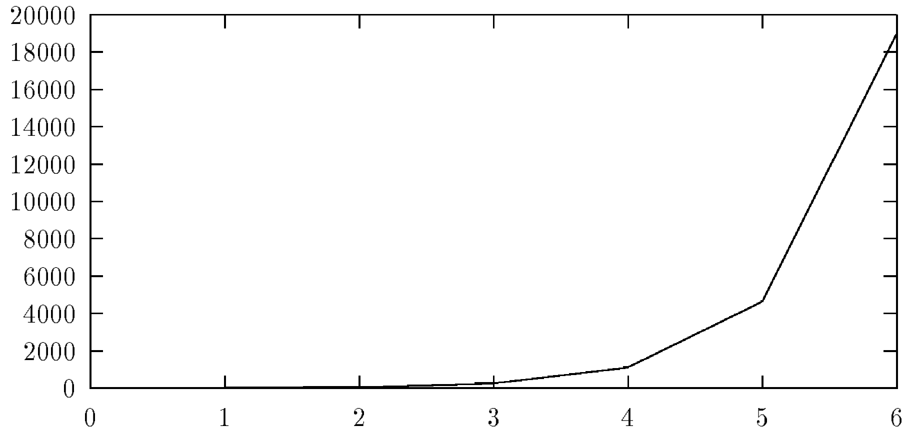

Abbildung 7.23 Kondition in Abhängigkeit des Levels ohne Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 0.5$

Lagrange Parameter : $r = 0.75$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	33.3344	1.70035	19.6044
2	32	56	139.41	1.53465	90.8417
3	128	208	570.128	1.42721	399.47
4	512	800	2297.36	1.36167	1687.17
5	2048	3136	9208.84	1.3214	6969
6	8192	12416	36856.2	1.29534	28452.8

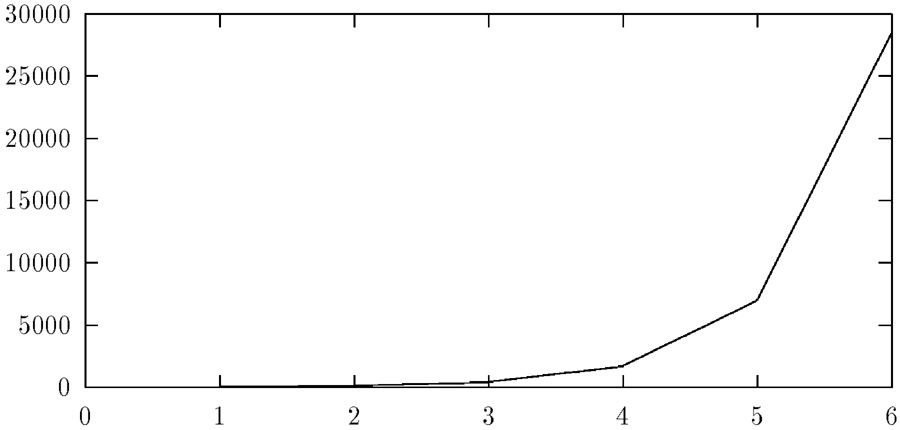

Abbildung 7.24 Kondition in Abhängigkeit des Levels ohne Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 0.75$

Lagrange Parameter : $r = 1$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	43.6485	1.72276	25.3364
2	32	56	185.156	1.54209	120.068
3	128	208	759.486	1.42962	531.251
4	512	800	3062.49	1.36235	2247.96
5	2048	3136	12277.9	1.32153	9290.61
6	8192	12416	49141.1	1.29536	37936.2

Lagrange Parameter : $r = 1.25$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	53.9731	1.73679	31.0763
2	32	56	230.907	1.54661	149.299
3	128	208	948.846	1.4313	662.925
4	512	800	3827.63	1.36275	2808.75
5	2048	3136	15346.9	1.32161	11612.2
6	8192	12416	61426	1.29538	47419.4

Ebenso zeigt sich wie zuvor auch die lineare Abhängigkeit der Kondition vom Parameter r, wenn man auf einem festen Level ist. Nachfolgend sehen wir die Resultate auf den Leveln 2 und 4.

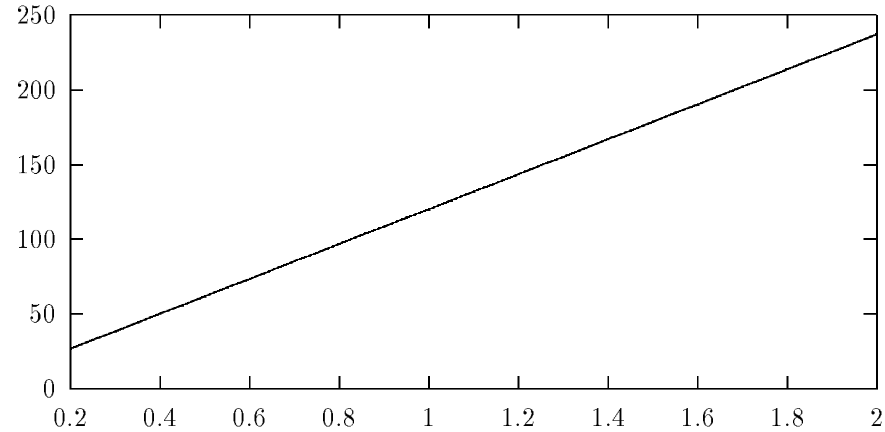

Abbildung 7.25 Kondition auf Level 2 in Abhängigkeit von r ohne Verwendung des Vorkonditionierers

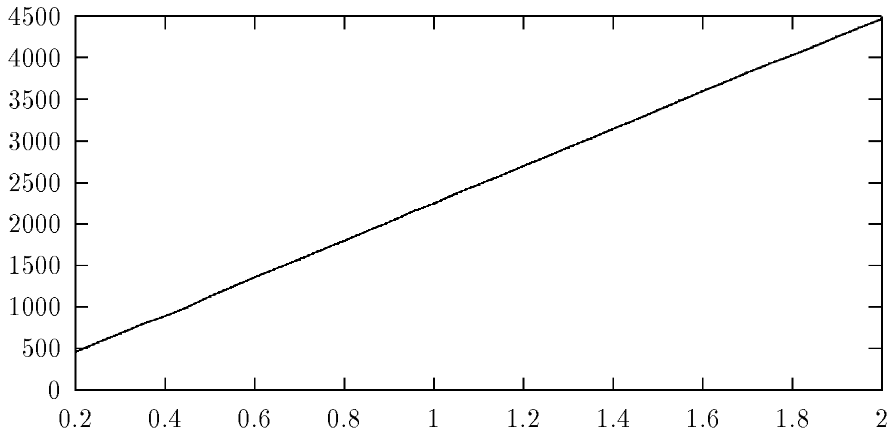

Abbildung 7.26 Kondition auf Level 4 in Abhängigkeit von r ohne Verwendung des Vorkonditionierers

Wiederum zeigt sich durch die Anwendung des Vorkonditionierers von Vassilevski/Wang [19] eine erhebliche Verbesserung der Konditionen gegenüber dem nicht vorkonditionierten Operator. Auch hier muß die unterschiedlich Skalierung im Vergleich zum nicht vorkonditionierten Fall in den graphischen Ausgaben berücksichtigt werden. Wie schon beim nicht vorkonditionierten Fall haben wir auch hier Probleme bei der Berechnung des kleinsten Eigenwertes auf dem Level 6 für $r = 0$, wie man in dem überproportionalen Anstieg der Kondition im Vergleich der Level in der nachfolgenden Tabelle sieht.

Lagrange Parameter : $r = 0$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	3.17681	0.692734	4.5859
2	32	56	4.7762	0.637039	7.49749
3	128	208	6.0619	0.62399	9.71475
4	512	800	7.14872	0.62079	11.5155
5	2048	3136	8.08982	0.619594	13.0566
6	8192	12416	8.9273	0.0973082	91.7425

Lagrange Parameter : $r = 0.25$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	2.99462	1.54681	1.93599
2	32	56	4.21824	1.47976	2.85063
3	128	208	4.97238	1.40855	3.53015
4	512	800	5.48338	1.35637	4.04268
5	2048	3136	5.83891	1.32039	4.42212
6	8192	12416	6.10589	1.29522	4.71419

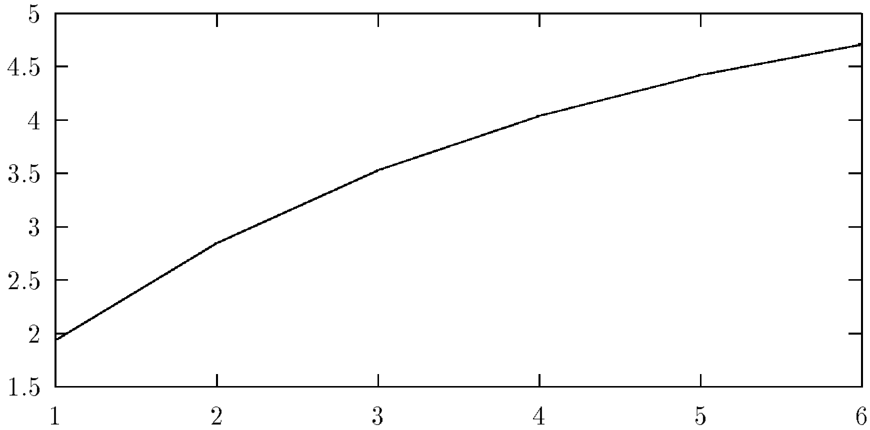

Abbildung 7.27 Kondition in Abhängigkeit des Levels bei Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 0.25$

Lagrange Parameter : $r = 0.5$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	2.88113	1.65742	1.73832
2	32	56	4.00787	1.52021	2.63639
3	128	208	4.72645	1.42261	3.32239
4	512	800	5.24031	1.36037	3.85213
5	2048	3136	5.60795	1.32116	4.2447
6	8192	12416	5.89432	1.29535	4.55038

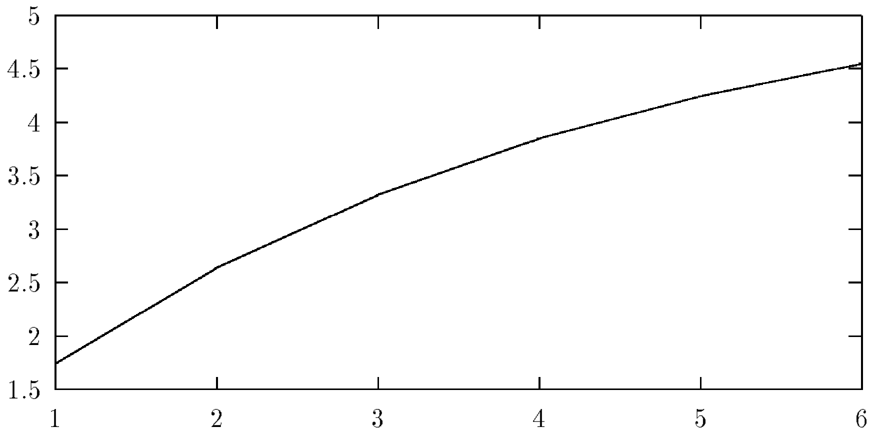

Abbildung 7.28 Kondition in Abhängigkeit des Levels bei Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 0.5$

Lagrange Parameter : $r = 0.75$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
0	2	5	8.16704	1.98149	4.12167
1	8	16	2.80248	1.70036	1.64817
2	32	56	3.88636	1.53467	2.53237
3	128	208	4.59643	1.42729	3.22039
4	512	800	5.11753	1.36172	3.75812
5	2048	3136	5.49439	1.32143	4.15792
6	8192	12416	5.79208	1.29538	4.47133

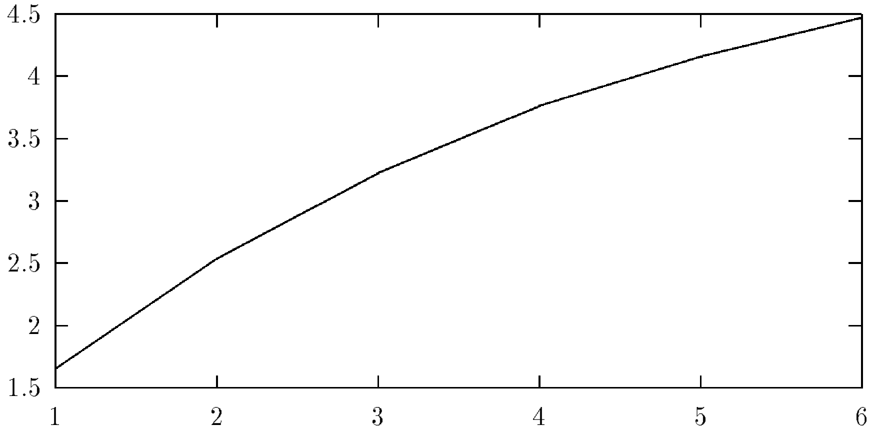

Abbildung 7.29 Kondition in Abhängigkeit des Levels bei Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 0.75$

Lagrange Parameter : $r = 1$					
Level	Dreiecke	Knoten	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	Kondition
1	8	16	2.74425	1.72277	1.59293
2	32	56	3.80512	1.54211	2.46748
3	128	208	4.51382	1.4297	3.15718
4	512	800	5.04117	1.36241	3.70019
5	2048	3136	5.42539	1.32156	4.1053
6	8192	12416	5.73003	1.2954	4.42338

Lagrange Parameter : $r = 1.25$					
Level	Dreiecke	Knoten	λ_{max}	λ_{min}	Kondition
1	8	16	2.69943	1.73681	1.55424
2	32	56	3.74633	1.54663	2.42226
3	128	208	4.45574	1.43138	3.1129
4	512	800	4.98776	1.36281	3.6599
5	2048	3136	5.3776	1.32164	4.0689
6	8192	12416	5.68796	1.29541	4.39086

Lagrange Parameter : $r = 1.5$					
Level	Dreiecke	Knoten	λ_{max}	λ_{min}	Kondition
1	8	16	2.66425	1.7459	1.526
2	32	56	3.70158	1.54966	2.38865
3	128	208	4.41241	1.43215	3.08098
4	512	800	4.94879	1.36309	3.63058
5	2048	3136	5.34264	1.32169	4.04229
6	8192	12416	5.65743	1.29542	4.36726

Die Verringerung der Kondition auf einem festen Level durch Anwendung des Vorkonditionierers läßt sich wiederum graphisch gut veranschaulichen.

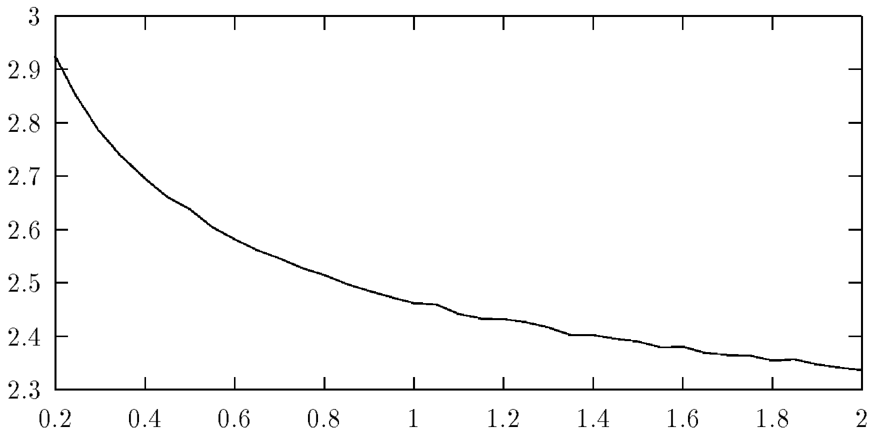

Abbildung 7.30 Kondition auf Level 2 in Abhängigkeit von r bei Verwendung des Vorkonditionierers

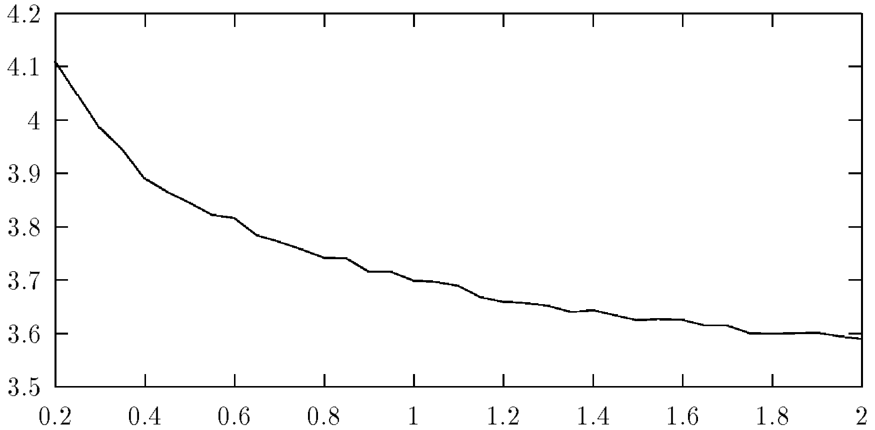

Abbildung 7.31 Kondition auf Level 4 in Abhängigkeit von r bei Verwendung des Vorkonditionierers

Wiederum können wir bereits auf dem (groben) Level 2 das typische Verhalten bei der Berechnung mit dem Vorkonditionierer nachweisen. Auch dieses Beispiel wollen wir mit Graphiken, die das Verhalten des CG-Verfahrens verdeutlichen, abschließen. Wiederum ist auf die stark abweichende Anzahl der bis zur Konvergenz notwendigen Iterationsschritte zu achten.

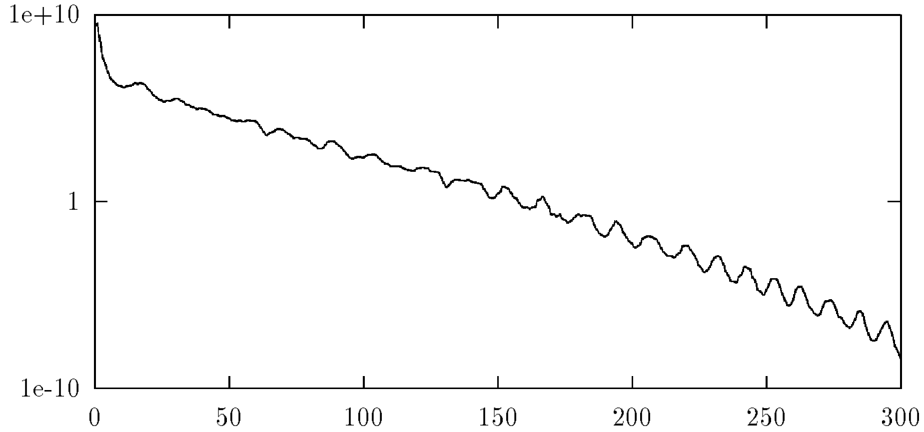

Abbildung 7.32 Verhalten des CG-Verfahrens ohne Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 1$, Level 2

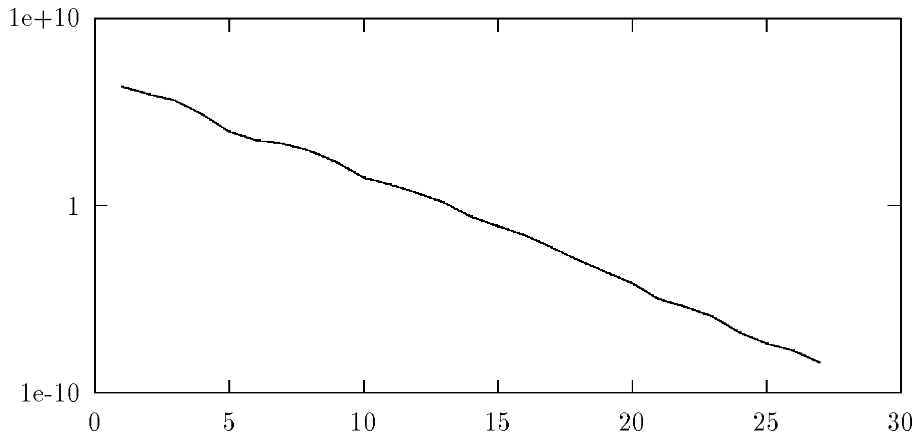

Abbildung 7.33 Verhalten des CG-Verfahrens bei Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 1$, Level 2

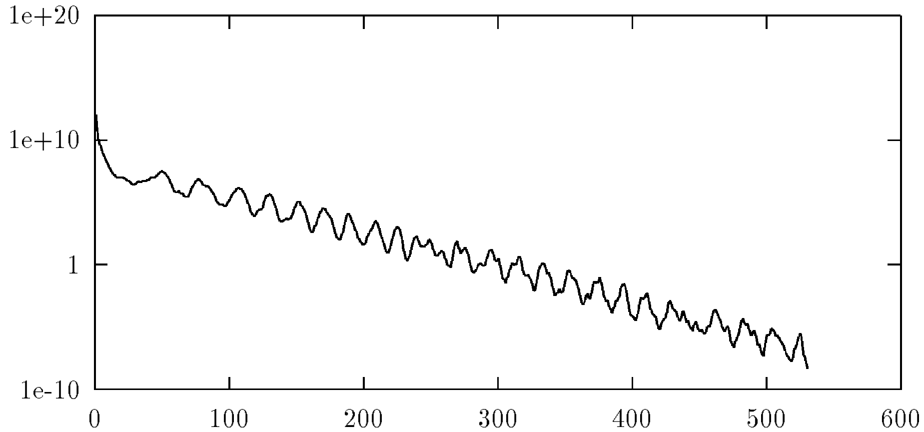

Abbildung 7.34 Verhalten des CG-Verfahrens ohne Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 1$, Level 4

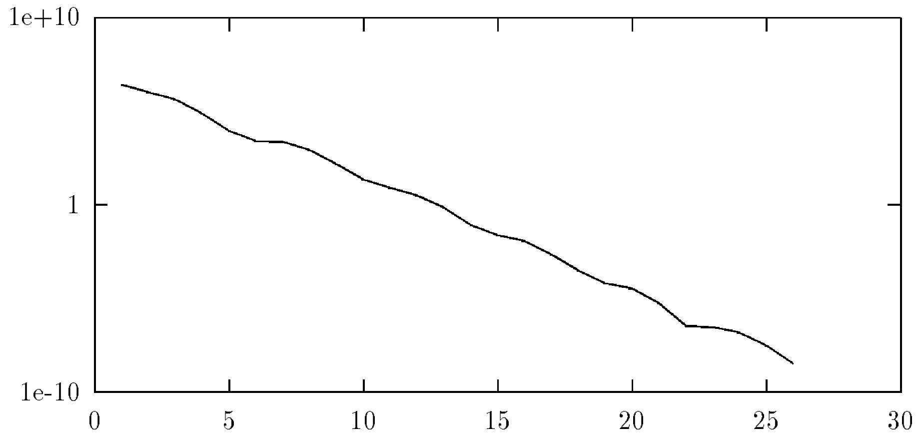

Abbildung 7.35 Verhalten des CG-Verfahrens bei Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 1$, Level 4

7.1.3 Dirichlet-Problem 3

Das dritte Dirichletproblem, das wir im Rahmen von numerischen Ergebnissen betrachten wollen, besitzt einen Sprung in der Funktion $a(x, y)$ der Problemstellung (1.1).

In diesem Beispiel stellen b und c wählbare Parameter dar. Für den Parameterwert $c = 10$ besitzt die Funktion $a(x, y)$ auf dem Einheitsdreieck für $b = 64$ folgende Gestalt:

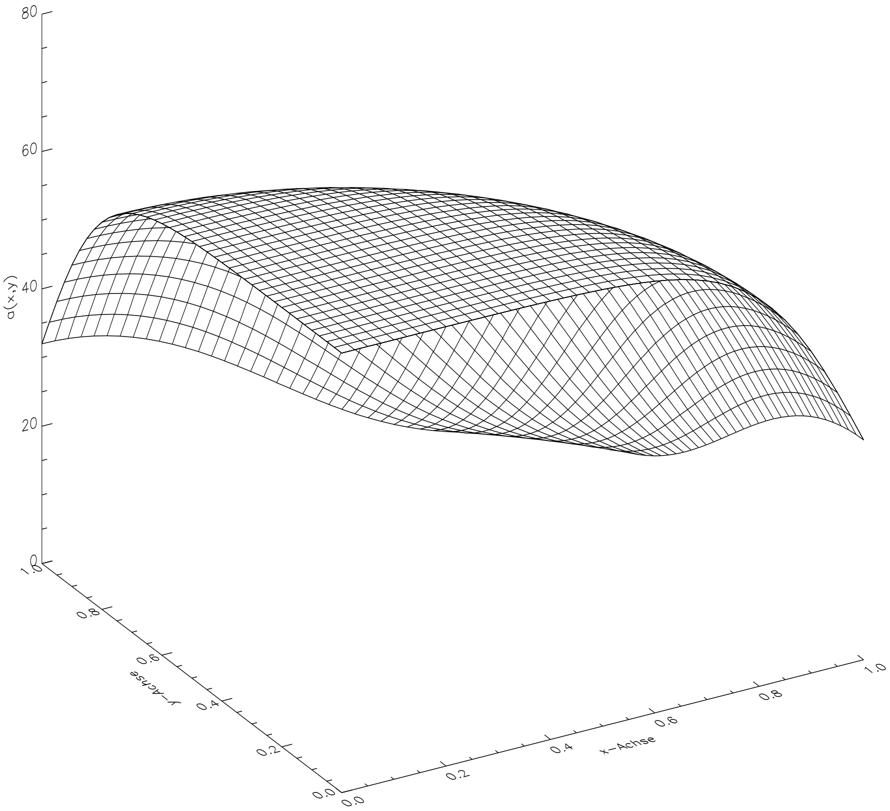

Abbildung 7.36 Funktion $a(x, y)$ für $b = 64$, $c = 10$

Die Daten zur Spezifikation des Problems sind gegeben durch

$$
\begin{array}{ll}
\text{Lösung} & : u(x,y) = x(x-1)y(y-1) \text{ in } \Omega \\
\text{rechte Seite} & : f(x,y) = \dfrac{2b(y^2 - y + x^2 - x)}{1+E} + \\
 & : \quad + \dfrac{bE(2x-1)(y^2-y)E_x}{(1+E)^2} \\
 & : \quad + \dfrac{bE(2y-1)(x^2-x)E_y}{(1+E)^2} \\
 & : \text{mit } E \stackrel{\text{def}}{=} e^{c(\sqrt{x^2+y^2}-1)}
\end{array}
$$

Lösungsgebiet	$: \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$
Dirichlet-Randbedingung	$: g(x,y) = x(x-1)y(y-1)$ auf $\partial\Omega_D$
$a(x,y)$	$:= \dfrac{b}{1+E}$.

Die Konditionsberechnungen für das Dirichlet-Problem 3 wollen wir hier nur in einer graphischen Übersicht geben. Für einen festen Parameterwert c (in den folgenden Berechnungen ist $c = 10$ gewählt) und festen Lagrange Parameter r ist eine lineare Abhängigkeit der Kondition vom Parameter b zu erwarten (vgl. die Funktion $a(x,y)$ für die Bedeutung der angegebenen Parameter), was wir mit Graphiken belegen werden. Desweiteren bleibt die lineare Abhängigkeit der Kondition im nicht vorkonditionierten Fall sowie die Abhängigkeit von der Leveltiefe (vgl. hierzu stets 3 hintereinanderfolgende Graphiken) wie gewohnt erhalten. Wir betrachten uns erst wieder den nicht vorkonditionierten Fall.

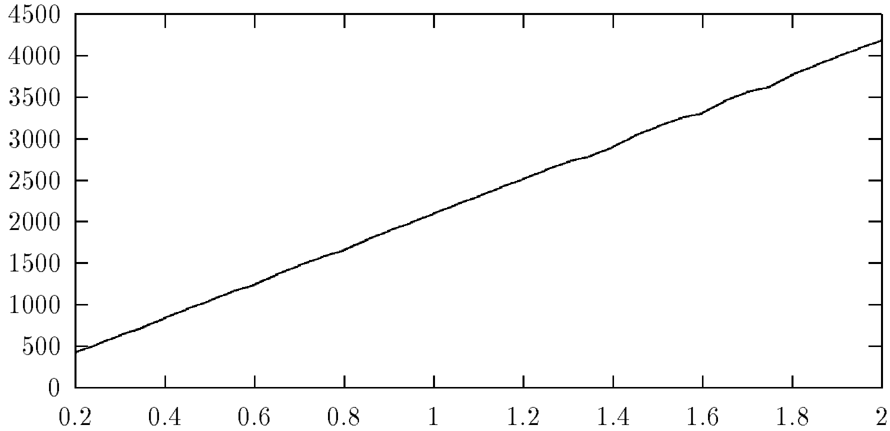

Abbildung 7.37 Kondition auf Level 3 in Abhängigkeit von r (b=1) ohne Verwendung des Vorkonditionierers

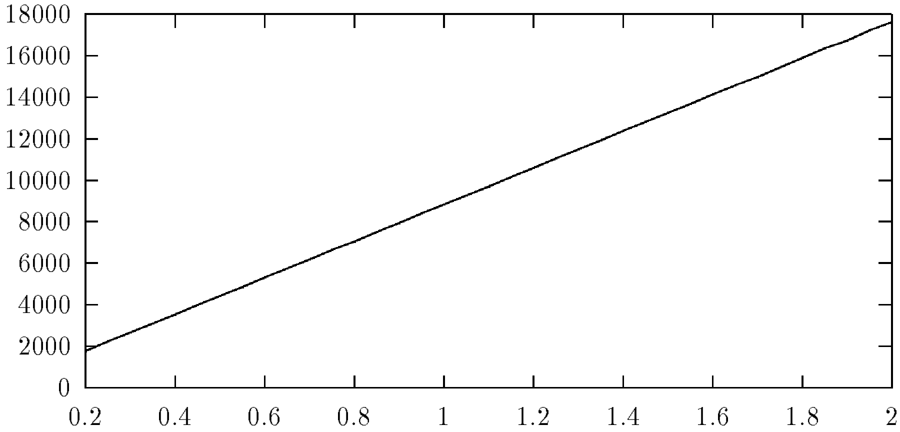

Abbildung 7.38 Kondition auf Level 4 in Abhängigkeit von r (b=1) ohne Verwendung des Vorkonditionierers

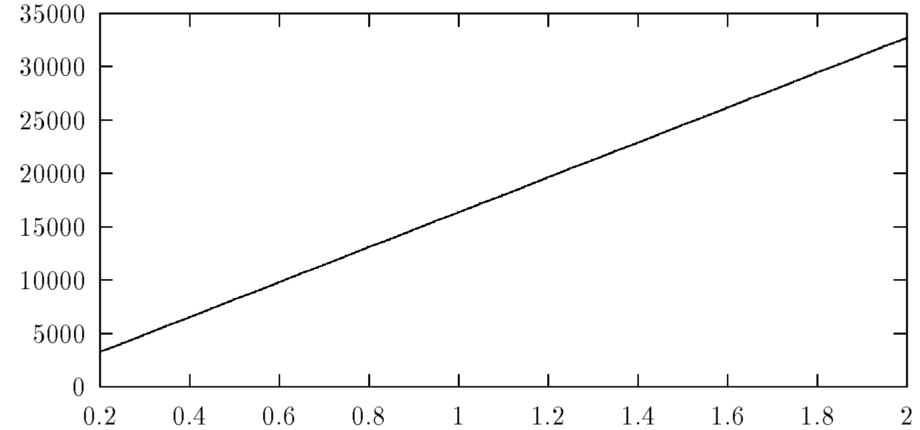

Abbildung 7.39 Kondition auf Level 3 in Abhängigkeit von r (b=8) ohne Verwendung des Vorkonditionierers

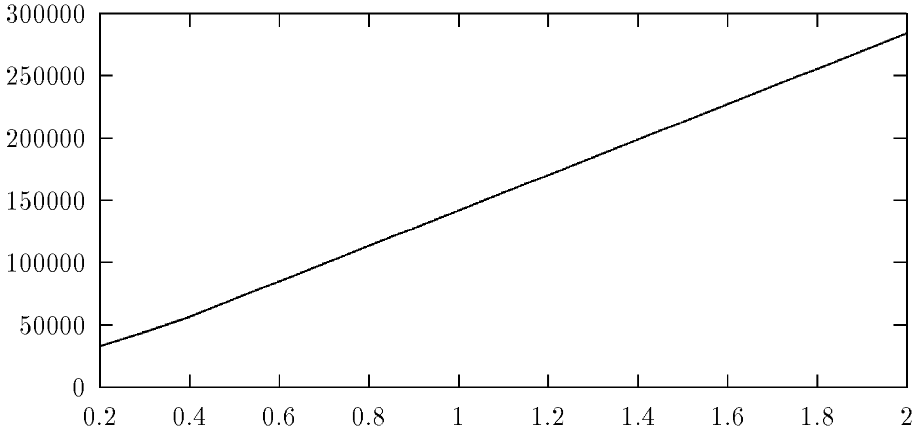

Abbildung 7.40 Kondition auf Level 4 in Abhängigkeit von r (b=8) ohne Verwendung des Vorkonditionierers

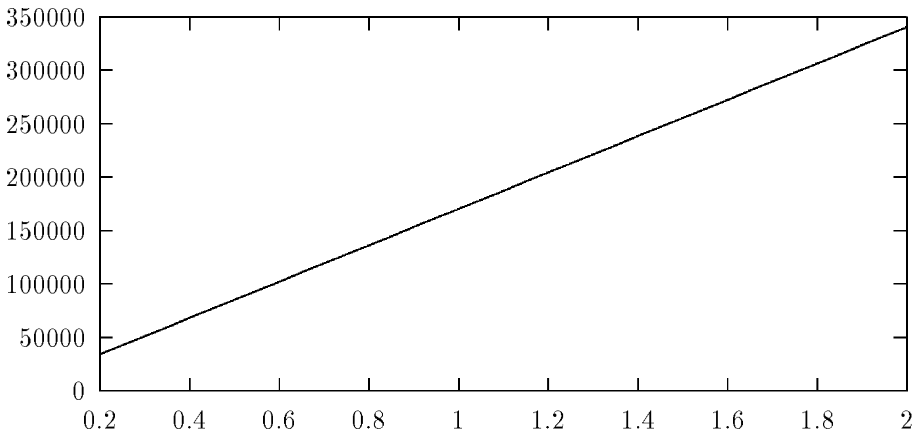

Abbildung 7.41 Kondition auf Level 3 in Abhängigkeit von r (b=64) ohne Verwendung des Vorkonditionierers

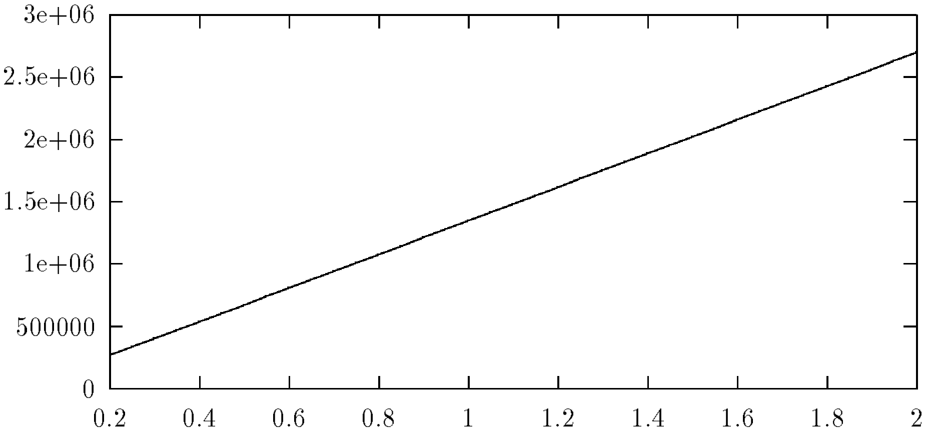

Abbildung 7.42 Kondition auf Level 4 in Abhängigkeit von r (b=64) ohne Verwendung des Vorkonditionierers

Die linear Abhängigkeit der Kondition vom Parameter b auf einem festen Level für feste Parameter c ($c = 10$) und r zeigen die nachfolgenden 3 graphisch unterlegten Tabellen. Dabei beachte man, daß sich – wie nachfolgend gezeigt – die Abhängigkeit von b schon auf dem (groben) Gitter von Level 2 zeigt.

$r = 0.2$	
b	Kondition
1	99.2708
8	771.291
16	1536.91
32	3063.62
64	6121.08

$r = 1$	
b	Kondition
1	482.393
8	3843.51
16	7672.01
32	15306.4
64	30594.9

$r = 1.5$	
b	Kondition
1	697.082
8	5561.55
16	11506.4
32	22958
64	45891.3

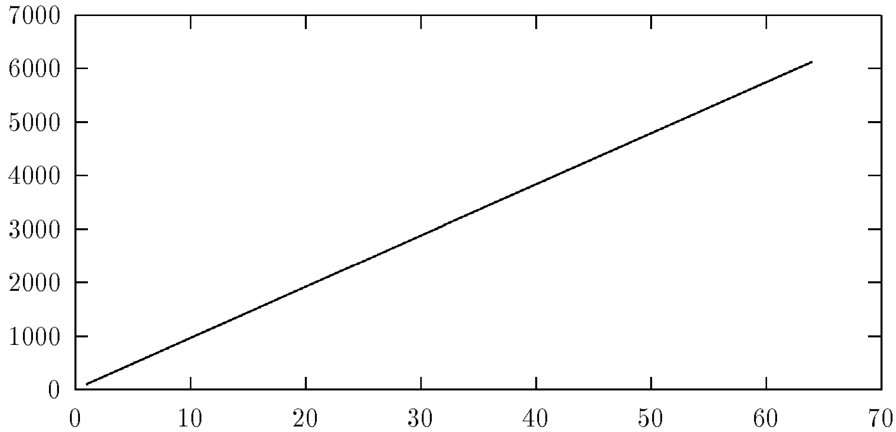

Abbildung 7.43 Abhängigkeit der Kondition vom Parameter b, Level 2, $r = 0.2$,ohne Verwendung des Vorkonditionierers

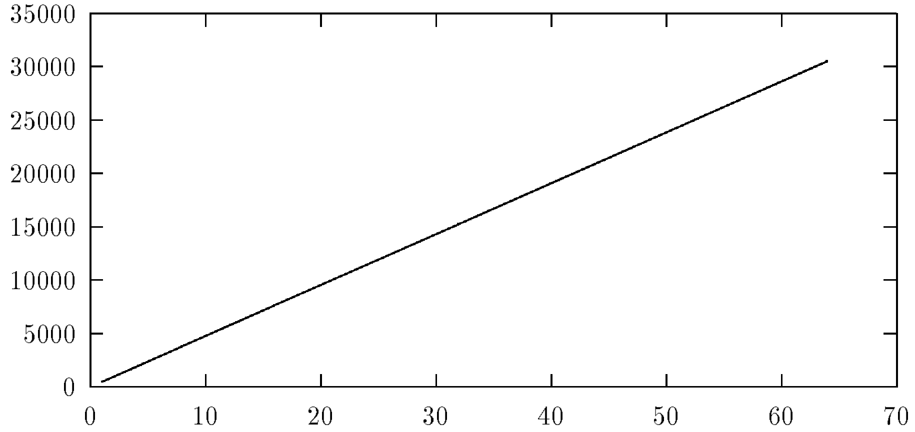

Abbildung 7.44 Abhängigkeit der Kondition vom Parameter b, Level 2, $r = 1$,ohne Verwendung des Vorkonditionierers

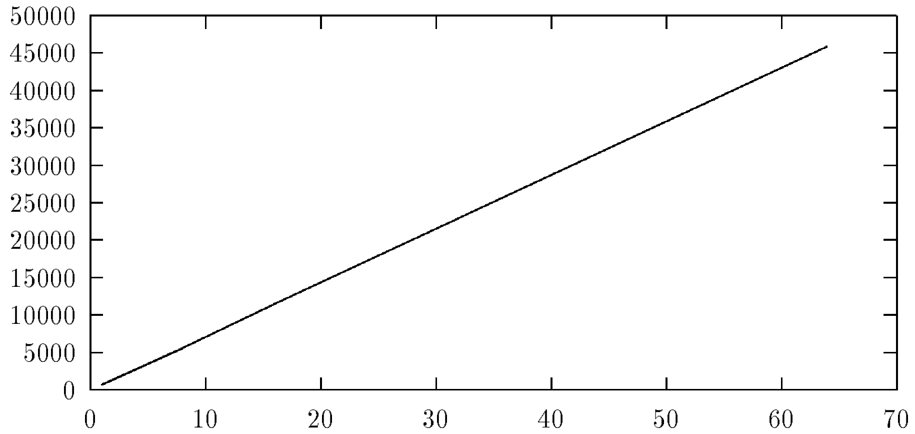

Abbildung 7.45 Abhängigkeit der Kondition vom Parameter b, Level 2, $r = 1.5$,ohne Verwendung des Vorkonditionierers

Ein erheblicher Unterschied besteht in der Anzahl der Iterationen, die zum Lösen eines Gleichungssystems mit einem CG-Verfahren mit beliebiger rechter Seite und beliebiger Startiterierter notwendig sind. Beim Vergleich der nachfolgenden beiden Graphiken beachte man die stark abweichende Skalierung der x-Achse (Anzahl der Iterationen). Wenngleich nur ein Vergleich graphisch aufbereitet ist, zeigen Versuche mit einer anderen Wahl der Parameter bei unterschiedlicher Leveltiefe ein qualitativ änliches Verhalten. Stets ist die Anzahl der CG-Iterationen mit Vorkonditionierung erheblich kleiner als ohne Anwendung des Vorkonditionierers.

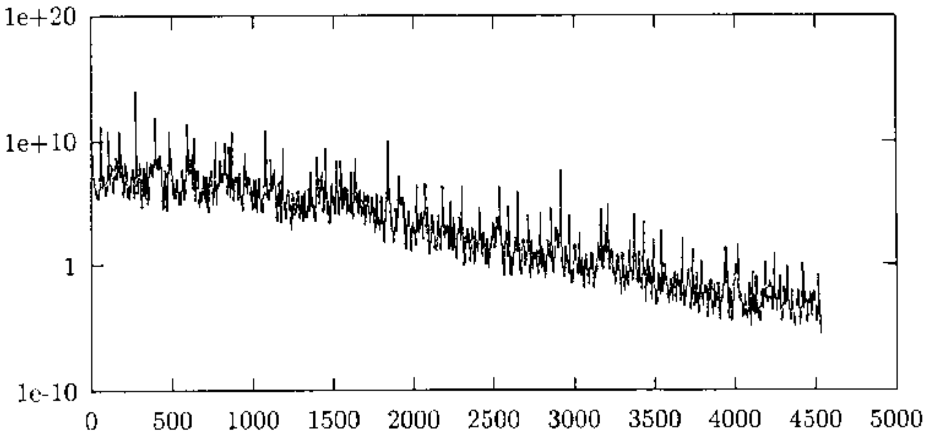

Abbildung 7.46 Verhalten des CG-Verfahrens ohne Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 16$, $b = 16$, Level 4

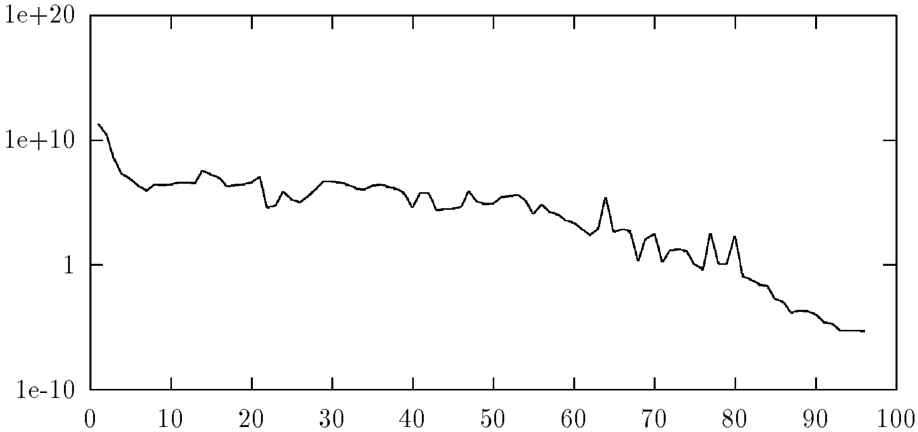

Abbildung 7.47 Verhalten des CG-Verfahrens bei Verwendung des Vorkonditionierers, $r = 16$, $b = 16$, Level 4

Die Abhängigkeit der Kondition vom Lagrange Parameter r bei Verwendung des Vorkonditionierers zeigen die nachfolgenden Graphiken. Bei den Berechnungen zeigt sich kein gleichmäßiges Abnehmen der Kondition wie in den beiden vorangegangenen Dirichlet-Problemen. Mit zunehmender Leveltiefe jedoch enthüllen die Graphiken immer mehr das bereits bekannten Verhalten, was seine Ursache zum einen in der Problemstellung an sich, zum anderen aber in der zu großen Abbruchschranke für die Berechnung der Eigenwerte hat. Jedoch zeigt sich auch hieraus, daß wie zuvor die Kondition “stabil” ist und die Konditionen mit wachsendem Lagrange Parameter wieder abnimmt.

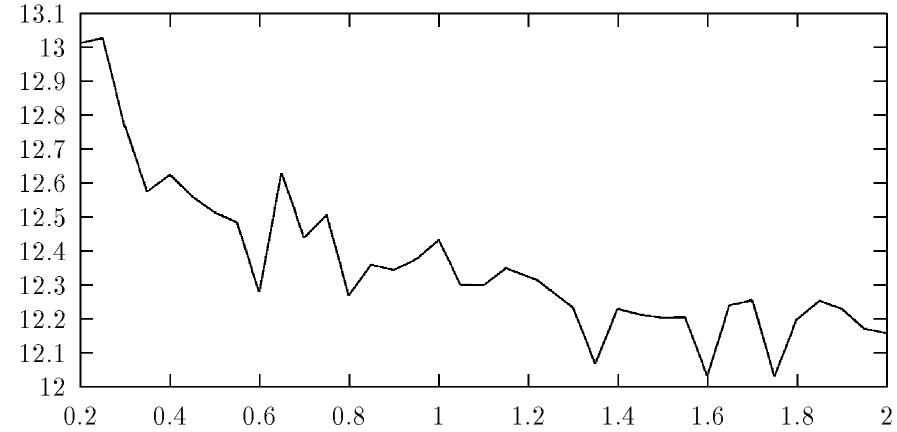

Abbildung 7.48 Kondition auf Level 3 in Abhängigkeit von r (b=1) bei Verwendung des Vorkonditionierers

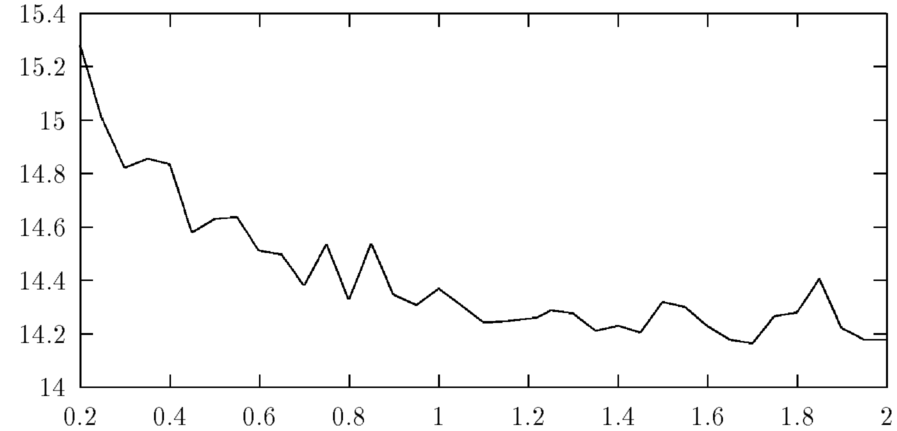

Abbildung 7.49 Kondition auf Level 4 in Abhängigkeit von r (b=1) bei Verwendung des Vorkonditionierers

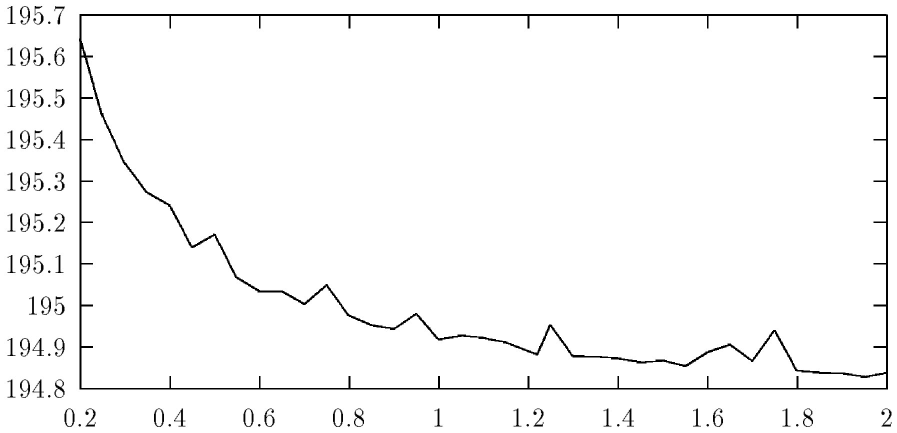

Abbildung 7.50 Kondition auf Level 3 in Abhängigkeit von r (b=8) bei Verwendung des Vorkonditionierers

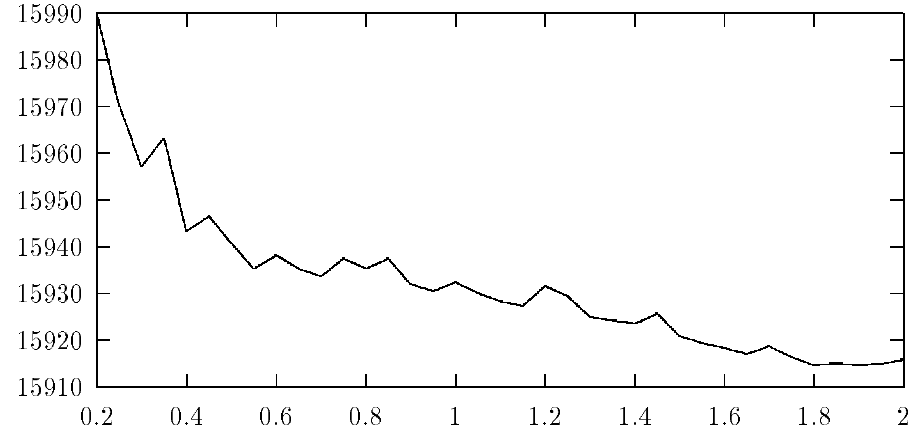

Abbildung 7.51 Kondition auf Level 4 in Abhängigkeit von r (b=8) bei Verwendung des Vorkonditionierers

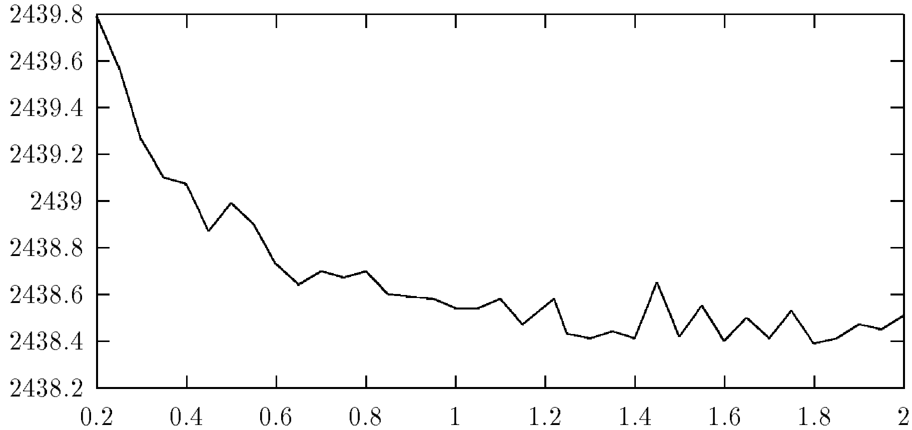

Abbildung 7.52 Kondition auf Level 3 in Abhängigkeit von r (b=64) bei Verwendung des Vorkonditionierers

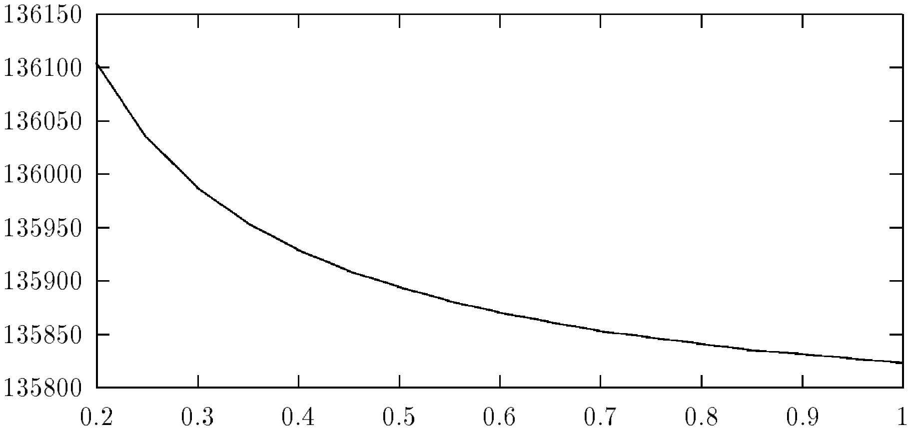

Abbildung 7.53 Kondition auf Level 4 in Abhängigkeit von r (b=64) bei Verwendung des Vorkonditionierers

Für den vorkonditionierten Fall zeigt sich folgende lineare Abhängigkeit der Kondition vom Parameter b, wenn man c und r fest wählt. In den nachfolgenden Beispielen haben wir wie zuvor $c = 10$ gewählt. Wiederum betrachten wir auch hier Level 2, auf dem man schon wie im nicht vorkonditionierten Fall bereits die Abhängigkeit von b deutlich sieht. Man vergleiche wieder die Skalierung der nachfolgenden Graphiken mit den Skalierungen der Abbildungen 7.43–7.45.

$r = 0.2$	
b	Kondition
1	9.93951
8	73.5712
16	145.896
32	289.378
64	578.696

$r = 1$	
b	Kondition
1	9.31579
8	73.1317
16	145.801
32	289.112
64	580.905

$r = 1.5$	
b	Kondition
1	8.93092
8	72.5192
16	145.784
32	290.004
64	581.091

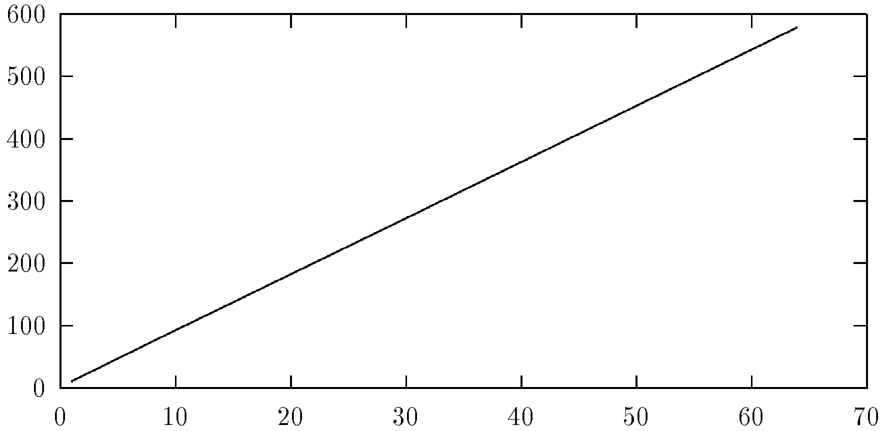

Abbildung 7.54 Abhängigkeit der Kondition vom Parameter b, Level 2, $r = 0.2$, bei Verwendung des Vorkonditionierers

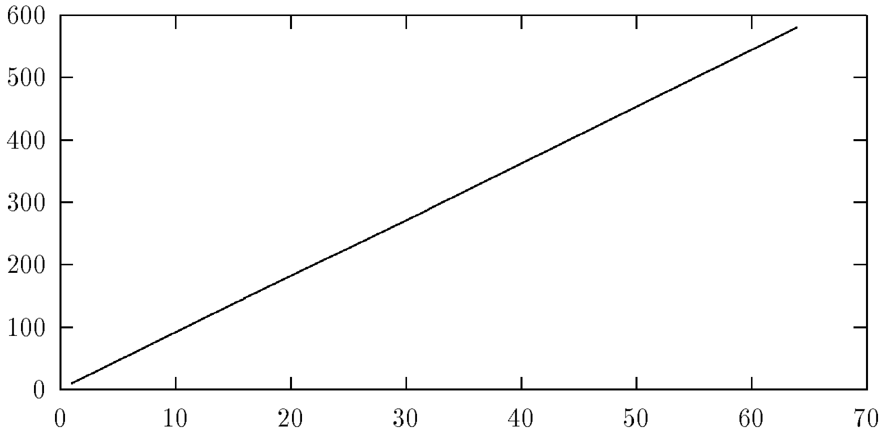

Abbildung 7.55 Abhängigkeit der Kondition vom Parameter b, Level 2, $r = 1$,bei Verwendung des Vorkonditionierers

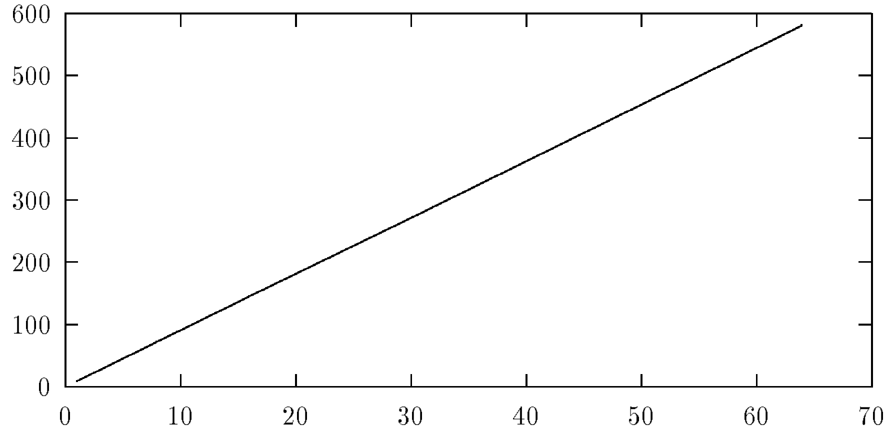

Abbildung 7.56 Abhängigkeit der Kondition vom Parameter b, Level 2, $r = 1.5$, bei Verwendung des Vorkonditionierers

In Abschnitt 7.2 werden wir darauf verzichten, diskrete Lösungen auf verschiedenen Leveln in Abhängigkeit der Parameter zu berechnen.

7.1.4 Neumann-Problem

Zum Abschluß der Konditionsbetrachtungen wollen wir uns mit einem Neumann-Problem befassen, daß wie das Dirichlet-Problem 1 eine Differtialgleichung vom Typ der Poisson-Gleichung ist. Die Daten der gewählten Problemstellung lauten

Lösung	: $u(x,y) = 5.0\left(\frac{x^3+y^3}{3} - \frac{x^2+y^2}{2}\right)$ in Ω
rechte Seite	: f(x,y) $= 5(2-2x-2y)$
Lösungsgebiet	: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x, y \le 1\}$
Neumann-Randbedingung	: $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf Γ_N
$a(x,y)$	: $\equiv 1$

Wir wollen an dieser Stelle keine Tabellenstatistik über Konditionen anführen, sondern lediglich graphische Ausgaben darstellen. Die gewohnten Verhaltensweisen der Konditionen in Abhängigkeit vom Lagrange Parameter r zeigen sich auch in diesem Beispiel. Dabei beachte man, daß bereits auf Level 2 gute Werte erzielt werden können.

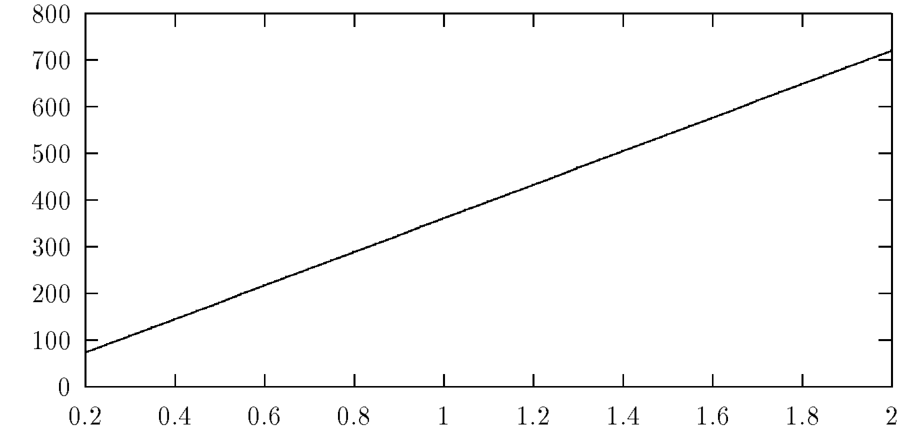

Abbildung 7.57 Kondition auf Level 2 in Abhängigkeit von r ohne Anwendung des Vorkonditionierers

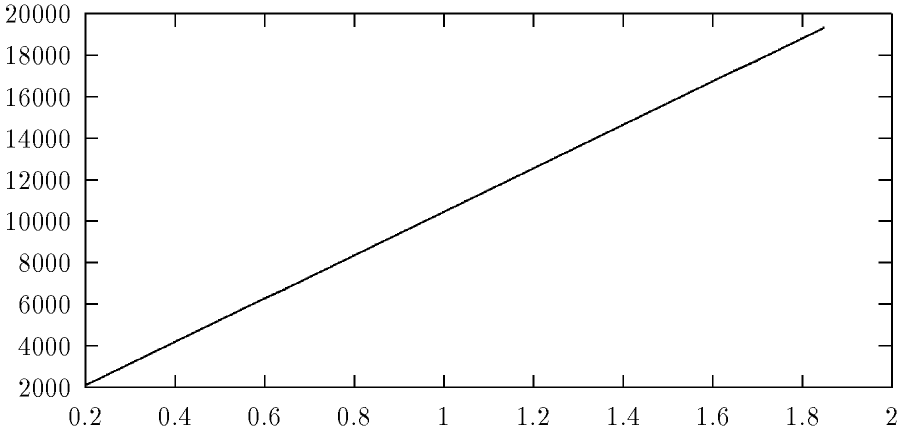

Abbildung 7.58 Kondition auf Level 4 in Abhängigkeit von r ohne Anwendung des Vorkonditionierers

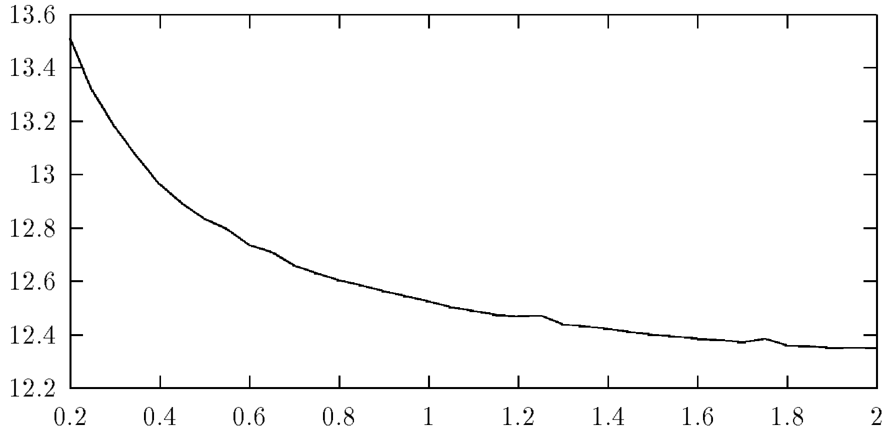

Abbildung 7.59 Kondition auf Level 2 in Abhängigkeit von r bei Anwendung des Vorkonditionierers

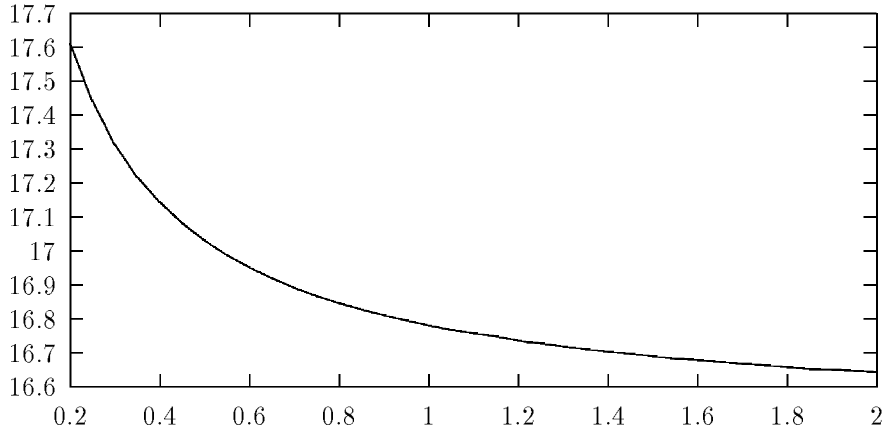

Abbildung 7.60 Kondition auf Level 4 in Abhängigkeit von r bei Anwendung des Vorkonditionierers

Weitere Berechnungen auf verschiedenen Leveln der Multilevel-Umgebung mit unterschiedlicher Wahl des Lagrange Parameters r ergeben für das Neumann-Problem keine neuen Erkenntnisse, die wir nicht auch aus dem Vergleich der Graphiken 7.57–7.60 mit den Beispielen der Dirichlet-Probleme ziehen können. Daher kann an dieser Stelle auf weitere Berechnungen und graphische Ausgaben verzichtet werden.

7.1.5 Bemerkungen zur Konditionsberechnung

In allen von uns betrachtetetn Beispielen zeigt sich zum Teil deutliche verbesserung der Kondition bei Anwendung eines Vorkonditionierers im gegensatz zum nicht vorkonditionierten System. Das Wachstum $O(h_j^{-2}$ der Kondition im nicht vorkonditionierten Fall mit der Leveltiefe, das mit den Beispielen numerisch nachgewiesen werden konnte, verlangsamt sich gemäß Satz 5.8 auf $O(logh_j)$, was wir ebenfalls mit numerischen Experimenten nachweisen konnten. Auch stimmen die theoretischen Aussagen über die Eigenwerte mit den berechneten Ergebnissen überein.

Ein Vergleich der aufgeführten Tabellen zeigt die Übereinstimmung von Theorie und Praxis auch bei der Abhängigkeit der Kobndition vom Lagrange-Parameter r. Diese Abhängigkeit verschwindet bei der Anwendung des Vorkonditionierers, womit r im vorkonditionierten Fall beliebig gewählt werden kann.

7.2 Berechnung von Lösungen

Im folgenden werden wir exemplarisch für die in Abschnitt 7.1 bereits vorgestellten Dirichlet-Probleme 1 und 2 sowie für das betrachtete Neumann-Problem das Lösungsverhalten der erweiterten Lagrange Methode betrachten. Dabei werden wir in Abhängigkeit vom Lagrange-Parameter r die Lösung auf verschiedenen Verfeinerungsstufen der am Anfang dieses Kapitels vorgestellten Ausgangstriangulation berechnen und tabellarisch darstellen. Die gelegentlich sehr hohe Anzahl an inneren Iterationen ist darauf zurückzuführen, daß in diesen Fällen die Genauigkeitsschranke für das Abbruchkriterium der CG-Iteration zu fein ist. Studien der Fehler zeigen in den angesprochenen Fällen ein starkes "Zittern" der Iterierten um die Lösung, da der Einfluß von Rundungsfehlern in den von uns gewählten Genauigkeitsschranlen für gewisse Problemkonstellationen zu groß ist.

7.2.1 Zum Dirichlet-Problem 1

Bevor wir den in Kapitel 5 vorgestellten Vorkonditionierer verwenden, betrachten wir zunächst die Lösung auf einem festen Gitter.[1] Die Spalte *It. 2* ist, falls die Anzahl äußerer Iterationen zu groß ist, aufgrund der besseren Lesbarkeit nicht vollständig eingetragen. Kenntlich ist dies an einem Bindestrich (–) , dem keine Angabe einer weiteren Iteration folgt. Lediglich die ersten Iterationen sind in diesem Fall verzeichnet.

Lagrange Parameter : $r = 0.5$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	2	4—3	2.16576
2	32	56	2	16—12	1.09576
3	128	208	2	45—10	0.551462
4	512	800	2	77—16	0.277292
5	2048	3136	2	146—18	0.138457
6	8192	12416	2	229—25	0.0692009

[1]In den Tabellen bedeutet *It. 1* die Anzahl äußerer Iterationen und *It. 2* die Anzahl innerer Iterationen für jede äußere Iteration.

Lagrange Parameter : $r = 1$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	2	5—3	2.16576
2	32	56	2	17—5	1.09576
3	128	208	2	40—8	0.551462
4	512	800	2	79—8	0.277292
5	2048	3136	2	126—10	0.138458
6	8192	12416	168	183—1—	0.0694722

Lagrange Parameter : $r = 2$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	2	4—3	2.16576
2	32	56	2	18—4	1.09576
3	128	208	2	35—4	0.551464
4	512	800	2	68—5	0.277294
5	2048	3136	1	94	0.138466
6	8192	12416	1	174	0.0692049

Lagrange Parameter : $r = 4$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	2	4—2	2.16576
2	32	56	2	13—2	1.09577
3	128	208	1	28	0.551475
4	512	800	1	50	0.277301
5	2048	3136	1	50	0.138662
6	8192	12416	63	80—1—	0.0695698

Lagrange Parameter : $r = 8$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	4	2.16575
2	32	56	1	11	1.09577
3	128	208	1	28	0.551469
4	512	800	1	27	0.277497
5	2048	3136	1	43	0.138563
6	8192	12416	1	75	0.0692566

Lagrange Parameter : $r = 16$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	4	2.16576
2	32	56	1	11	1.09576
3	128	208	1	15	0.55166
4	512	800	1	24	0.277396
5	2048	3136	1	40	0.138514
6	8192	12416	2	62—1	0.0692631

Lagrange Parameter : $r = 32$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	3	2.16594
2	32	56	1	8	1.09594
3	128	208	1	14	0.551562
4	512	800	1	22	0.277349
5	2048	3136	1	34	0.138532
6	8192	12416	1	52	0.0693492

Lagrange Parameter : $r = 64$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	3	2.16585
2	32	56	1	7	1.09585
3	128	208	1	13	0.551515
4	512	800	1	21	0.277329
5	2048	3136	1	30	0.13859
6	8192	12416	2	37—1	0.0699289

Lagrange Parameter : $r = 128$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	3	2.16581
2	32	56	1	7	1.09581
3	128	208	1	12	0.5515
4	512	800	1	17	0.277452
5	2048	3136	1	23	0.139122
6	8192	12416	2	10—2	0.0764833

Lagrange Parameter : $r = 256$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	3	2.16578
2	32	56	1	7	1.09579
3	128	208	1	10	0.551635
4	512	800	1	14	0.277856
5	2048	3136	2	12—2	0.144038
6	8192	12416	2	6—2	0.0812714

Lagrange Parameter : $r = 512$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	3	2.16577
2	32	56	1	6	1.09583
3	128	208	1	8	0.552042
4	512	800	1	10	0.28055
5	2048	3136	1	6	0.152811
6	8192	12416	1	4	0.0325348

Betrachten wir uns den $L^2(\Omega)$-Fehler in der letzten Spalte, so erkennen wir, daß sich der $L^2(\Omega)$-Fehler pro Level in etwa halbiert, wie es die Theorie verlangt. Zum Vergleich nun die Ergebnisse mit Anwendung des vorgestellten Vorkonditionierers. Es zeigt sich eine deutliche Verringerung der zur Konvergenz nötigen inneren Iterationen.

Lagrange Parameter : $r = 0.5$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	2	4—3	2.16576
2	32	56	2	5—3	1.09576
3	128	208	2	8—3	0.551466
4	512	800	2	8—1	0.277286
5	2048	3136	2	7—1	0.138459
6	8192	12416	2	6—1	0.069183

Lagrange Parameter : $r = 1$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	2	4—3	2.16576
2	32	56	2	5—1	1.09576
3	128	208	2	7—1	0.551462
4	512	800	2	7—1	0.277281
5	2048	3136	2	6—1	0.138439
6	8192	12416	2	4—1	0.0691803

Lagrange Parameter : $r = 2$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	2	4—1	2.16576
2	32	56	2	4—1	1.09576
3	128	208	2	6—1	0.551457
4	512	800	2	5—1	0.277273
5	2048	3136	1	4	0.138435
6	8192	12416	1	3	0.0691994

Lagrange Parameter : $r = 4$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	2	3—1	2.16576
2	32	56	2	4—1	1.09579
3	128	208	1	4	0.551378
4	512	800	1	4	0.27728
5	2048	3136	1	2	0.138479
6	8192	12416	2	2—1	0.0692159

Lagrange Parameter : $r = 8$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	3	2.16575
2	32	56	1	3	1.09575
3	128	208	1	3	0.551461
4	512	800	1	1	0.277464
5	2048	3136	1	1	0.138543
6	8192	12416	1	1	0.0692429

Lagrange Parameter : $r = 16$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	3	2.16576
2	32	56	1	2	1.09576
3	128	208	1	1	0.551628
4	512	800	1	1	0.277378
5	2048	3136	1	1	0.1385
6	8192	12416	1	1	0.0692211

Lagrange Parameter : $r = 32$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	1	2.16579
2	32	56	1	1	1.0959
3	128	208	1	1	0.551545
4	512	800	1	1	0.277335
5	2048	3136	1	1	0.138478
6	8192	12416	1	1	0.0692102

Läßt man r wie zuvor mit dem Faktor 2 wachsen, so erhält man die Lösung stets nach einer äußeren mit einer inneren Iteration. Auf weitere Lösungsversuche mit größeren r kann daher an dieser Stelle verzichtet werden.

7.2.2 Zum Dirichlet-Problem 2

Wie zuvor betrachten wir zunächst den nicht vorkonditionierten Fall, der folgende Ergebnisse liefert:

Lagrange Parameter : $r = 0.5$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	3	8—6—2	0.17505
2	32	56	2	16—7	0.0912191
3	128	208	2	24—7	0.0463018
4	512	800	2	29—7	0.023323
5	2048	3136	6	47—5—14—	0.0116864
6	8192	12416	114	10—19—1—	0.00593729

Lagrange Parameter : $r = 1$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	2	8—5	0.17505
2	32	56	2	16—3	0.0912091
3	128	208	2	26—4	0.0462968
4	512	800	1	29	0.0233274
5	2048	3136	13	19—2—19—	0.0116463
6	8192	12416	7	8—8—19—	0.00574787

Lagrange Parameter : $r = 2$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	2	8—2	0.17505
2	32	56	2	16—2	0.0911999
3	128	208	1	18	0.0462873
4	512	800	1	14	0.023298
5	2048	3136	23	10—2—28—	0.0117962
6	8192	12416	12	6—2—47—	0.00555567

Lagrange Parameter : $r = 4$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	7	0.175053
2	32	56	1	11	0.0912083
3	128	208	1	8	0.0462553
4	512	800	1	10	0.0232944
5	2048	3136	6	6—2—22—	0.0112826
6	8192	12416	1	4	0.00572616

Lagrange Parameter : $r = 8$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	3	0.174997
2	32	56	1	5	0.0911697
3	128	208	1	8	0.0462734
4	512	800	1	6	0.0232424
5	2048	3136	1	4	0.0115469
6	8192	12416	1	1	0.00612244

Lagrange Parameter : $r = 16$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	2	0.175015
2	32	56	1	4	0.0911815
3	128	208	1	6	0.0462599
4	512	800	1	4	0.0231598
5	2048	3136	2	1—3	0.00870762
6	8192	12416	1	1	0.00612244

Lagrange Parameter : $r = 32$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	2	0.175029
2	32	56	1	4	0.0911899
3	128	208	1	4	0.0461673
4	512	800	1	2	0.0226398
5	2048	3136	1	1	0.0122099
6	8192	12416	1	1	0.00612244

Auch hier zeigt ein Vergleich der Ergebnisse mit und ohne Vorkonditionierung ein unterschiedliches Verhalten bezüglich der Anzahl der zur Konvergenz des inneren Systems notwendigen Iterationenschritten.

Lagrange Parameter : $r = 0.5$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	3	5—5—3	0.175049
2	32	56	2	7—4	0.0912287
3	128	208	2	6—4	0.0463123
4	512	800	2	5—1	0.023341
5	2048	3136	2	3—1	0.0116961
6	8192	12416	2	1—1	0.00576905

Lagrange Parameter : $r = 1$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	2	5—3	0.175062
2	32	56	2	5—2	0.0911924
3	128	208	2	4—1	0.0462817
4	512	800	1	3	0.0233317
5	2048	3136	2	1—1	0.0116215
6	8192	12416	1	1	0.00585249

Lagrange Parameter : $r = 2$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	2	4—1	0.175053
2	32	56	2	4—1	0.0911957
3	128	208	1	3	0.0462828
4	512	800	1	1	0.0232706
5	2048	3136	1	1	0.0116593
6	8192	12416	1	1	0.00577681

Lagrange Parameter : $r = 4$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	3	0.175063
2	32	56	1	3	0.0912197
3	128	208	1	1	0.0462084
4	512	800	1	1	0.023189
5	2048	3136	1	1	0.0112055
6	8192	12416	2	1—1	0.00457134

Lagrange Parameter : $r = 8$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	2	0.175054
2	32	56	1	1	0.0911651
3	128	208	1	1	0.0461107
4	512	800	1	1	0.0221754
5	2048	3136	1	1	0.00891868
6	8192	12416	1	1	0.00612244

Lagrange Parameter : $r = 16$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	1	0.175032
2	32	56	1	1	0.0911798
3	128	208	1	1	0.0462094
4	512	800	1	1	0.0227689
5	2048	3136	1	1	0.00897674
6	8192	12416	1	1	0.00612244

Lagrange Parameter : $r = 32$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	16	1	1	0.175021
2	32	56	1	1	0.0910224
3	128	208	1	1	0.0449694
4	512	800	1	1	0.0182512
5	2048	3136	1	1	0.0122099
6	8192	12416	1	1	0.00612244

Wie schon beim ersten Dirichlet-Problem erhalten wir auch hier die Lösung für größere Lagrange Parameter r nach einer äußeren mit einer inneren Iteration, weswegen wir wieder auf weitere Tabellen verzichten können.

7.2.3 Zum Neumann-Problem

Wie schon bei den Dirichlet-Problemen zeigt sich auch hier das bereits bekannte Verhalten. Ohne Vorkonditionierung haben wir eine erheblich höhere Anzahl innerer Iterationen als bei der Anwendung des Vorkonditionierers aus Kapitel 5. Nachfolgend haben wir wieder eine Übersicht über das Lösungsverhalten in Abhängigkeit vom Lagrange Parameter r und der Leveltiefe. Beginnen wollen wir mit dem nicht vorkonditionierten System.

Lagrange Parameter : $r = 1$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	2	3—4	4.30645
2	32	40	2	16—7	2.14878
3	128	176	2	44—15	1.06514
4	512	736	2	88—27	0.533434
5	2048	3008	2	185—46	0.26664
6	8192	12160	1	414	0.13333

Lagrange Parameter : $r = 2$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	2	4—3	4.30645
2	32	40	2	17—6	2.14878
3	128	176	2	46—14	1.06514
4	512	736	1	93	0.533434
5	2048	3008	1	192	0.266641
6	8192	12160	1	433	0.13333

Lagrange Parameter : $r = 4$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	2	3—3	4.30645
2	32	40	1	18	2.14878
3	128	176	1	40	1.06514
4	512	736	1	89	0.533434
5	2048	3008	1	199	0.266641
6	8192	12160	1	464	0.13333

Lagrange Parameter : $r = 8$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	3	4.30645
2	32	40	1	17	2.14878
3	128	176	1	38	1.06515
4	512	736	1	95	0.533435
5	2048	3008	1	202	0.266643
6	8192	12160	1	428	0.133334

Lagrange Parameter : $r = 16$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	3	4.30645
2	32	40	1	12	2.14878
3	128	176	1	31	1.06516
4	512	736	1	69	0.533465
5	2048	3008	1	176	0.266651
6	8192	12160	1	434	0.133339

Lagrange Parameter : $r = 32$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	3	4.30645
2	32	40	1	7	2.1488
3	128	176	1	24	1.06518
4	512	736	1	69	0.533464
5	2048	3008	1	180	0.266659
6	8192	12160	1	429	0.133349

Lagrange Parameter : $r = 64$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	3	4.30646
2	32	40	1	9	2.14879
3	128	176	1	23	1.06517
4	512	736	1	69	0.533466
5	2048	3008	1	181	0.266669
6	8192	12160	1	442	0.133376

Lagrange Parameter : $r = 128$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	3	4.30647
2	32	40	1	8	2.14879
3	128	176	1	24	1.06516
4	512	736	1	69	0.533464
5	2048	3008	1	190	0.266696
6	8192	12160	1	438	0.133496

Lagrange Parameter : $r = 512$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	3	4.30654
2	32	40	1	8	2.1488
3	128	176	1	24	1.06538
4	512	736	1	68	0.533832
5	2048	3008	1	191	0.267397
6	8192	12160	1	1	0.107687

Lagrange Parameter : r = 1024					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	3	4.30664
2	32	40	1	8	2.14883
3	128	176	1	25	1.06528
4	512	736	1	70	0.534693
5	2048	3008	1	1	0.215333
6	8192	12160	1	1	0.107687

In den beiden letzten Tabellen haben wir sowohl eine äußere als auch nur eine innere Iteration im nicht vorkonditionierten Fall für tiefere Level zu verzeichnen. Die Ursache hierfür liegt in dem zu kleinen Anfangsresiduum des Fehlers.

Zum Vergleich zu obigen Tabellen betrachten wir nun die Ergebnisse, die wir durch das vorkonditionierte CG-Verfahren gewonnen haben.

Lagrange Parameter : r = 1					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	2	2—2	4.30645
2	32	40	2	15—6	2.14878
3	128	176	2	43—6	1.06514
4	512	736	2	76—6	0.533434
5	2048	3008	2	149—9	0.266641
6	8192	12160	54	231—1—	0.133319

Lagrange Parameter : r = 2					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	2	2—1	4.30645
2	32	40	2	13—2	2.14878
3	128	176	2	36—2	1.06515
4	512	736	1	62	0.533439
5	2048	3008	1	121	0.266643
6	8192	12160	1	143	0.133371

Lagrange Parameter : $r = 4$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	2	2—1	4.30645
2	32	40	1	14	2.14878
3	128	176	1	30	1.06515
4	512	736	1	62	0.533437
5	2048	3008	1	72	0.266684
6	8192	12160	87	120—1—	0.133561

Lagrange Parameter : $r = 8$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	2	4.30645
2	32	40	1	11	2.14878
3	128	176	1	3—	1.06515
4	512	736	1	37	0.533478
5	2048	3008	1	63	0.266665
6	8192	12160	62	109—1—	0.133856

Lagrange Parameter : $r = 16$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	2	4.30645
2	32	40	1	8	2.14884
3	128	176	1	19	1.06519
4	512	736	1	34	0.533458
5	2048	3008	1	57	0.266657
6	8192	12160	2	92—1	0.133367

Lagrange Parameter : $r = 32$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	2	4.30645
2	32	40	1	8	2.14881
3	128	176	1	18	1.06517
4	512	736	1	30	0.53345
5	2048	3008	1	51	0.266668
6	8192	12160	2	62—1	0.133483

Lagrange Parameter : $r = 64$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	2	4.30646
2	32	40	1	8	2.1488
3	128	176	1	15	1.06516
4	512	736	1	27	0.533459
5	2048	3008	2	32—1	0.266906
6	8192	12160	2	52—1	0.1337

Lagrange Parameter : $r = 128$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	2	4.30647
2	32	40	1	7	2.1488
3	128	176	1	14	1.06517
4	512	736	1	22	0.533584
5	2048	3008	1	28	0.267094
6	8192	12160	2	37—1	0.135131

Lagrange Parameter : $r = 512$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	2	4.30654
2	32	40	1	7	2.1488
3	128	176	1	8	1.06611
4	512	736	1	12	0.535339
5	2048	3008	2	12—2	0.279983
6	8192	12160	1	1	0.107687

Lagrange Parameter : $r = 1024$					
Level	Dreiecke	Knoten	It. 1	It. 2	$L^2(\Omega)$-Fehler
1	8	8	1	2	4.30664
2	32	40	1	6	2.14893
3	128	176	1	8	1.06611
4	512	736	1	10	0.538124
5	2048	3008	1	2	0.215333
6	8192	12160	1	1	0.107687

7.2.4 Bemerkungen zur Berechnung von Lösungen

In Übereinstimmung mit der besseren kondition om vorkonditionierten Fall werden gegenüber dem nicht vorkonditionierten Fall weniger (innere) Iterationen bis zur Konvergenz des CG-Verfahrens benötigt. Somit zeigen auch diese Berechnungen die Qualität des Vorkonditionierers.

Trotzdem muß an dieser Stelle die Frage nach einer optimalen Wahl des Lagrange Parameters r aufgeworfen werden. Wie ein Blick auf die Tabellen enthüllt, werden mit wachsendem r immer weniger (innere) Iterationen benötigt, bis das CG-Verfahren konvergiert. Eine Möglichkeit, problemabhängig einen optimalen Lagrange Parameter r bestimmen zu können, ist in dieser Hinsicht folglich wünschenswert, muß aber im Rahmen der vorliegenden Arbeit entfallen.

Danksagung

Am Ende dieser Arbeit gebührt mein Dank Herrn Dipl.Math. R. Hiptmair, der durch seine zahlreichen Anregungen und Vorschläge in einem großen Maß an dem Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Ebenso bedanke ich mich auch bei Frau Dipl.Math. B. Wohlmuth und Herrn A. Schmied für ihre anregenden Diskussionen.

Literaturverzeichnis

[1] O.Axelsson and V.A.Barker.*Finite Element Solution of Boundary Value Problems.*Academic Press, 1984

[2] F.A.Bornemann.*A Sharpened Condition Number Estimate for the BPX Preconditioner of Elliptic Finite Element Problems on Highly Nonuniform Triangulations.*Preprint ZIB SC 91-9, September 1991

[3] D.Braess.*Finite Elemente.*Springer Verlag, Berlin – Heidelberg 1992

[4] J.H.Bramble, J.E.Pesciak and J.XU.*Parallel Multilevel Preconditioners.*Mathematics of Computation Vol. 55, pp. 1–12, 1990

[5] F.Brezzi and M.Fortin.*Mixed and Hybrid Finite Element Methods.*Springer Verlag, New York 1991

[6] W.Dahmen and A.Kunoth.*Multilevel Preconditioning.* Numer. Math. 63, pp. 315–344 (1992), Springer Verlag

[7] R.E.Ewing and J.Wang.*Analysis of multilevel decomposition iterative methods for mixed finite element methods.* M^2AN, 26, pp. 739–756 (1992)

[8] M.Fortin.*Minimization of Some Non-Differentiable Functionals by the Augmented Lagrangian Method of Hestenes and Powell.* Appl.Math.Opt. 2,2 , pp. 236–250 (1975/76)

[9] M.Fortin and R.Glowinski.*Augmented Lagrangian Methods: Applications to the numerical solution of boundary-value problems.*North-Holland, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 15, Amsterdam 1983

[10] R.Glowinski.*Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems.*Springer Verlag, Berlin, New York

[11] R.Glowinski and P. Le Tallec.*Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics.* SIAM Studies in Applied Mathamatics, Philadelphia 1989

[12] Ch.Grossmann und H.-G.Roos.*Numerik partieller Differentialgleichungen.*Teubner Studienbücher, Stuttgart 1992

[13] R.H.W. Hoppe, Persönliche Mitteilungen, Technische Universität München

[14] B.W. Kernighan und D.M.Ritchie.*Programmieren in C*.Carl Hanser Verlag, zweite Ausgabe, 1990

[15] S.B. Lippmann.*C++ Einführung und Leitfaden.* Addison Wesley, 1990

[16] J.C.Nédélec.*Mixed Finite Elements in* $\mathbb{R}^3$. Numer.Math. 35, pp. 315–341 (1980)

[17] J.C.Nédélec.*A new Family of Mixed Finite Elements in* $\mathbb{R}^3$.Numer.Math. 50, pp. 57–81 (1986)

[18] J.-M. Thomas.Méthode des éléments finis hybrides duaux pour les problémes elliptiques du second ordre. RAIRO Analyse numérique, Vol. 10, n$^{\text{o}}$ 12, 1976, p. 51 à 79

[19] P.S.Vassilewski and J.Wang.*Multilevel iterative methods for mixed finite element discretizations of elliptic problems.* Numer.Math. 63, pp. 503–520 (1992), Springer Verlag

[20] J. Xu.*Iterative methods by space decomposition and subspace correction.*SIAM Review 34, No. 4, pp. 581–613 (1992)

[21] H. Yserentant.*Old and New Convergence Proofs for Multigrid Methods.*Acta Numerica (1993), pp. 1–100

[22] X.Zhang.*Multilevel Schwarz Methods.* Numer.Math. 63, pp. 521–539 (1992), Springer Verlag